Solução do Problema de Riemann na Variedade de Onda

Marlon Michael López Flores *

Nós consideramos um sistema de 2 equações diferenciais escrito na forma:

$$W_t + F(W)_x = 0, \quad \text{com condições iniciais} \quad W(x,t=0) = \begin{cases} W_L & \text{if } x < 0, \\ W_R & \text{if } x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Aqui, consideramos as incógnitas $W = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ e $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado como $F = (v^2/2 + (b_1+1)u^2/2 + a_1 u + a_2 v, uv + a_3 u + a_4 v)^T$ sendo as *funções de fluxo*. A equação (1.a) é um protótipo de vários modelos em dinâmica dos fluidos. Junto com as condições iniciais (1.b), o sistema (1) é chamado de problema de Riemann.

Estamos interessados principalmente nas chamadas soluções de choque, definidas por W for $x < st$ e W' for $x > st$, onde s é a velocidade de propagação do choque, $W = (u,v)$ e $W' = (u',v')$ são os estados a serem conectados pelo choque. Para ter significado físico como choque, a velocidade e os estados devem satisfazer a chamada condição *Rankine-Hugoniot*

$$F(W) - F(W') = s(W - W'), \tag{2}$$

para algum s. Isso leva à definição do arco de curva Hugoniot associado a um dado estado $W = (u,v)$.

Além disso, nem todos os arcos de arcos de curva Hugoniot são úteis para construir soluções. Arcos de curva de choque devem satisfazer algumas condições extras chamadas condições de admissibilidade. Para estudar arcos de curva Hugoniot, adotamos aqui o ponto de vista topológico. Consideramos o espaço $\mathbb{R}^5 = \{(u,v,u',v',s)\}$ e nele, o variedade tridimensional definida por (2).

Essas equações definem uma variedade tridimensional regular, que chamaremos de variedade de onda e denotaremos por $\mathcal{W}$. Nesta variedade definimos e caracterizamos algumas superfícies relevantes, tais como: *Característica* (indicado como $\mathcal{C}$), $Sonica$ (indicado como Son) e $Sonica'$ (indicado como Son').

Nesta palestra, revisamos alguns fatos e definições básicos, introduzimos novas variáveis e descrevemos as superfícies $\mathcal{C}$, Son and Son' [1]. Caracterizamos as componentes lentas ($\mathcal{C}_s$) e rápidas ($\mathcal{C}_f$) da superfície característica associadas aos autovalores de DF. Caracterizamos também a curva *coincidência*, que é a coincidência desses três componentes. Descrevemos como as superfícies $\mathcal{C}$, Son e Son' dividem a variedade de onda em regiões e caracterizam a superfície formada pelos arcos da curva Hugoniot através de pontos de a curva *Coincidência*. Esta superfície é tangente às superfícies *Característica* e Son' Ċaracterizamos as componentes lenta e rápida da superfície Son' associadas à velocidade de choque lenta e à velocidade de choque rápida.

Construímos também a rarefação e as curvas compostas em $\mathcal{C}$ e decompomos o espaço de estados ((u,v)–plano) em regiões elípticas e hiperbólicas. Utilizamos as estruturas mencionadas anteriormente para construir as curvas de onda a partir do plano $\mathcal{C}_s$ e definimos as superfícies $Saturadas$. Também definimos as onda inversa do tipo 2 (*backward*) e utilizamos essas ondas para obter as soluções de Riemann. Apresentamos várias soluções de Riemann na variedade de ondas $\mathcal{W}$ e sua solução correspondente no espaço de fase (u,v) para ilustrar a teoria desenvolvida esta teoria. O método de solução estão sendo desenvolvidas em [2].

Este trabalho esta sendo desenvolvido em colaboração com C.S. Eschenazi (UFMG), W. Lambert (UNIFAL), D. Marchesin (IMPA) e C.F.B. Palmeira (PUC-Rio).

Referências

[1] E. Isaacson, D. Marchesin, C. Palmeira, B. Plohr, *A global formalism for nonlinear waves in conservation laws*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 505–552.

[2] C.S. Eschenazi, W. Lambert, M.M. López-Flores, D. Marchesin, C.F.B. Palmeira, *Decomposition of the Wave Manifold into Lax Admissible Regions and its Application to the Solution of Riemann Problems*. (Trabalho em andamento)

*Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, Estrada Dona Castorina, 110, 22460-320 Rio de Janeiro, RJ, Brazil. Email:mmlf@impa.br