



UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

MARLON TYRONE DE ALMEIDA SILVA

**PRECIFICAÇÃO DE RISCO DE CRÉDITO A TERMO A PARTIR DO USO DE
CADEIAS DE MARKOV**

RIO DE JANEIRO – RJ

2020

MARLON TYRONE DE ALMEIDA SILVA

**PRECIFICAÇÃO DE RISCO DE CRÉDITO A TERMO A PARTIR DO USO DE
CADEIAS DE MARKOV**

Monografia apresentada ao curso de Pós-graduação em Atuária como requisito parcial para conclusão do curso.

Orientador:

Prof. Dr. Eduardo Fraga Lima de Melo

Rio de Janeiro – RJ

2020

MARLON TYRONE DE ALMEIDA SILVA

**PRECIFICAÇÃO DE RISCO DE CRÉDITO A TERMO A PARTIR DO USO DE
CADEIAS DE MARKOV**

Monografia apresentada ao curso de Pós-graduação em Atuária como requisito parcial para conclusão do curso.

Trabalho aprovado em *ajeaneirode2020*

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Fraga Lima de Melo
Orientador
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr.
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr.
Universidade Federal do Rio de Janeiro

RESUMO

O objetivo desta monografia é apresentar uma metodologia para cômputo de spreads de ativos financeiros compreendendo desde empréstimos bancários a títulos negociados publicamente. A metodologia apresentada tem o intuito de estabelecer valores de spread que sejam suficientes para remunerar o investidor (ou credor) pelo risco de crédito a que está exposto. Um modelo de estimação de probabilidade de default baseado em cadeias de Markov será estimado utilizando os dados publicados pela agência de rating Moody's.

Palavras-chave: Risco de crédito; spreads; Cadeias de Markov.

ABSTRACT

The objective of this work is to present a methodology of computing financial assets spreads, from bank loans to bonds. The presented methodology aims to fix spreads that allow the investor (or lender) being compensated the credit risk. A Markov Chain based model for probability of default is estimated using public data available by Moody's.

Keywords: Credit risk; Spreads; Markov Chains.

Dedico este trabalho a Deus.

AGRADECIMENTOS

A minha esposa, Nara Rúbia Silva Almeida, pelas minhas filhas, Gabrielle de Almeida Silva e Manuele de Almeida Silva, pela compreensão que tiveram em momentos de minha ausência do seio familiar.

A Universidade Federal do Rio de Janeiro, que sempre nos deu do seu apoio, sua tradição e estrutura para enriquecer seus alunos com conhecimentos acadêmicos e intelectuais.

Ao corpo docente desta Universidade, principalmente ao professor Eduardo Fraga pelas excelentes aulas de Teoria do Risco, uma das disciplinas que mais me agregaram conhecimento durante a empreitada.

Ao meu querido amigo, Patrick Maia pelo apoio e incentivo para a conclusão dessa pesquisa.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estrutura da migração dos <i>ratings</i>	15
Figura 2 – Probabilidades de <i>default</i> a termo - Investment Grade	24
Figura 3 – Probabilidades de <i>default</i> a termo - Speculative Grade	25
Figura 4 – <i>spreads</i> a termo - Investment Grade - LGD = 1	26
Figura 5 – <i>spreads</i> a termo - Speculative Grade - LGD = 1	27
Figura 6 – <i>spreads</i> a termo - Investment Grade - LGD = 0,45	28
Figura 7 – <i>spreads</i> a termo - Speculative Grade - LGD = 0,45	29
Figura 8 – <i>spreads</i> a termo - Investment Grade - LGD = 0,75	30
Figura 9 – <i>spreads</i> a termo - Speculative Grade - LGD = 0,75	31

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – LGD por nível de senioriedade	17
Tabela 2 – LGD por nível de risco	18
Tabela 3 – Matriz de migração de um ano 2011-2012	20
Tabela 4 – Quantidade de <i>ratings</i> elaborados	21
Tabela 5 – Matriz de migração em número de observações	21
Tabela 6 – Matriz Geradora	22
Tabela 7 – Matriz de transição de 1 ano estimada	23
Tabela 8 – Matriz de transição de 1 ano observada	23

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	REVISÃO DE LITERATURA	11
2.1	Modelos de risco de crédito	12
2.2	Matrizes de Transição	13
2.2.1	Estimação de Matrizes de Transição	14
2.3	Perda dado o <i>default</i> (LGD)	17
2.4	Processo de precificação	18
3	APLICAÇÃO DA METODOLOGIA	20
3.1	Estimação das matrizes de transição	20
3.2	Estimação dos <i>spreads</i>	26
3.2.1	Efeitos da LGD	28
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	32
5	REFERÊNCIAS	33

1 INTRODUÇÃO

A precificação de riscos de subscrição é um dos maiores desafios da indústria de seguros. O mesmo pode ser afirmado para o risco de crédito na indústria bancária e para o mercado de dívida. Grandes esforços são destinados para o desenvolvimento de modelos de precificação destes riscos, desde modelos já consagrados, como os de regressão logística, como modelos de *machine learning*.

Estes modelos são desenvolvidos para se estimar as perdas envolvidas ao se assumir posições nestes mercados. Contudo, estas estimativas de perdas por si só não estabelecem os valores de prêmios que devem ser cobrados. Assim como no caso de seguros de vida existem os modelos de sobrevivência para estimação de tábuas de mortalidade e a partir delas a precificação do risco segurado, os resultados dos modelos de previsão de inadimplência e perdas devem ser utilizados para a fixação dos prêmios de risco de crédito.

O objetivo deste trabalho acadêmico é propor modelos baseados em cadeias de Markov para estimar os prêmios de risco. Como os prêmios de riscos são estabelecidos para dívidas com prazos superiores a um ano, será necessário desenvolver um modelo que possibilite estimar as perdas esperadas em função do tempo.

Para resolver este problema, existe uma literatura bastante sedimentada que propõe a estimação de probabilidades de default a termo utilizando processos de Markov. Tal abordagem foi primeiramente desenvolvida por Jarrow, Lando e Turnbull (1997), modelando as migrações entre *ratings* como uma cadeia de Markov com tempos homogêneos. O desenvolvimento de modelos de precificação partiria dos dados de migração de *ratings* que podem ser internos (modelos de classificação de risco desenvolvidos pelas instituições financeiras) ou públicos em se tratando de agências de *ratings*, tais como a Moodys, a Standard and Poors, a Fitch, entre outras.

Os modelos internos das instituições financeiras se tornaram especialmente importantes com o advento do acordo de Basileia II. Um dos pilares deste acordo foi a gestão do capital das instituições financeiras não mais baseada em métodos de estimação arbitrados pelos órgãos supervisores, mas por modelos internos devidamente validados.

Devido a limitações de acesso e divulgação de dados de *ratings* internos de instituições financeiras, os dados utilizados neste trabalho se basearão nos dados da agência de rating Moody's disponível em seu site.

2 REVISÃO DE LITERATURA

A metodologia de precificação de risco de crédito utilizada neste trabalho se baseia no artigo de [Fons 1994](#) no qual é apresentado um modelo de determinação de *spreads* de ativos financeiros baseando-se nas probabilidades de *default* a termo. Em seu trabalho o autor utiliza um esquema para chegar aos *spreads* de títulos de dívida que compreende:

- Utilização das matrizes de migração entre *ratings* da agência Moody's para estimar as probabilidades de sobrevivência dos emissores de dívidas.
- Utilização de dados da Moody's para se chegar a valores de perdas dado o *default* dos emissores.
- Proposição de uma função para calcular o valor presente de um título de dívida sujeito a *default*.
- Comparação dos *spreads* obtidos utilizando as probabilidades de sobrevivência, a perda dado o *default* e a equação do preço do ativo financeiro com os *spreads* praticados no mercado.

Este trabalho busca ir além do proposto por [Fons 1994](#) ao utilizar estimação de probabilidades de *default* a partir dos dados da agência Moody's, contudo utilizando a modelagem destas probabilidades a partir de uma estrutura de cadeia de Markov. O ganho de se utilizar essa abordagem se encontra na possibilidade de estimar *spreads* para vencimentos que não coincidem com valores em anos inteiros ou maiores que o horizonte de dados disponível pela Moody's.

Com relação à utilização de prazos não coincidentes em anos inteiros, é importante mencionar que as matrizes de migração publicadas pela Moody's são sempre uma comparação de final de ano, ou seja, como os *ratings* migraram entre o início (primeiro dia) do ano e o final do ano.

A utilização destas matrizes, portanto, limitariam o uso para a estimação de *spreads* quando o prazo de vencimento não é em número inteiro de anos.

Já em respeito aos horizontes disponíveis de migração publicados, a Moody's possui dados de migração de *ratings* publicados desde 1970 permitindo a utilização de matrizes de migração praticamente para qualquer horizonte razoável de tempo. Entretanto, quanto maior o horizonte de tempo desejado, maior será a distância no tempo entre a probabilidade de migração verificada e o tempo específico que se pretende precificar. Por exemplo, se o objetivo for estimar o preço de um ativo financeiro com vencimento de 20 anos, o *rating* mais recente utilizado seria de 1998 (migração entre 1998 e 2018).

Apesar de parecer ser possível utilizar tais dados para se estimar *spreads* para o futuro, se torna difícil de justificar o uso de dados tão antigos para ativos financeiros que vão vencer no futuro distante. No exemplo mencionado, a distância entre os dados para estimar as PDs e o vencimento do ativo que se deseja precificar pode superar os 40 anos.

Outra limitação importante é que o volume de *ratings* existentes se reduz significativamente à medida em que se precisa voltar mais no tempo. Ou seja, quanto mais tempo se precisa voltar no passado para verificar como os *ratings* migraram, menor a confiança da estimativa.

2.1 Modelos de risco de crédito

O Acordo de Basileia 2 estabelece que as instituições financeiras devem adotar modelos internos de *ratings* para estimar as perdas esperadas de seus ativos financeiros. Segundo [Teugels e Sundt 2004](#), existem dois principais determinantes para o risco de crédito: a probabilidade de não pagamento por parte do devedor, ou seja, a probabilidade de *default*, e o perda dado o *default*.

Entre as opções existentes para estimar as probabilidades de *default* por parte dos devedores, pode-se citar análises de regressão, modelos de sobrevivência, modelos em painel, árvores de decisão, redes neurais, entre outras.

Um dos primeiros trabalhos neste sentido foi baseado em análise discriminante publicado por [Altman 1968](#). Para [Engelmann e Rauhmeier 2011](#), análise discriminante linear é baseada na estimação de uma função discriminante linear com a tarefa de separar grupos de indivíduos (neste caso de devedores em *default* e não-*default*) de acordo com características específicas.

Como o objetivo é diferenciar devedores com maior chance de entrar em *default*, uma seleção natural de modelos são os modelos logits e probits. Estes modelos são indicados para analisar variáveis dependentes que possuam respostas binárias (neste caso, *default* e não *default*).

Caso as variáveis independentes possam variar com o tempo, uma outra abordagem possível é o uso de modelos em painel. Esse tipo de modelo é especialmente útil para modelar os efeitos de variáveis macroeconômicas.

Modelos não-lineares, ou não-paramétricos, em voga atualmente já têm sido utilizados tais como redes neurais, árvores de decisão, etc.

Mesmo tais modelos, por mais sofisticados que sejam, possuem a limitação de serem estimados para preverem a probabilidade de *default* para uma janela de tempo previamente determinada, em geral de 1 ano.

Contudo, os ativos financeiros possuem a mais variada gama de prazos de vencimento. Para modelar a probabilidade de *default* para diferentes prazos de vencimentos pode-se utilizar um modelo baseado em matrizes de migração e cadeias de Markov. Este será o objeto de estudo na próxima seção.

Essa abordagem pode ser útil quando se trata de crédito corporativo. Em geral, é comum que não haja um número suficiente de defaults para se estimar as probabilidades de *default* através dos dados. [Engelmann e Rauhmeier 2011](#) menciona que portfólios com ativos com alta qualidade de crédito podem experimentar anos sem qualquer evento de *default*. Além disso, apresenta alta volatilidade devido ao baixo número de ativos na carteira.

2.2 Matrizes de Transição

Um dos insumos para a precificação de risco de crédito é a probabilidade de inadimplência, do inglês, *probability of default* (PD) e a sua estimação para períodos iguais a 1 ano são embasadas por técnicas econométricas como a regressão logística, árvore de decisões e modelos de *Machine Learning*, porém, para instituições financeiras que concedem crédito de longo prazo a PD de 1 ano pode ser insuficiente. Nesses casos, é relevante conhecer não apenas a PD para períodos maiores mas também a probabilidade de migração na escala de risco ao longo da vida útil da concessão, ou seja, considerando uma escala com n faixas de risco, a probabilidade de um empréstimo migrar da faixa i para a faixa j ($i \neq j$) ao longo de um período de tempo pré determinado. Por convenção, se obtém a matriz de transição de 1 ano para posteriormente obter a matriz de transição para períodos maiores utilizando do ferramental matemático que desenvolveremos nessa seção considerando uma escala de risco com n ratings e que o último rating representa o evento de inadimplência. Nesse trabalho, seguiremos as exposições disponíveis em [Engelmann e Rauhmeier 2011](#).

Uma matriz de transição de 1 ano corresponde a uma matriz $n \times n$ populada pelas probabilidades de um devedor migrar da faixa i para a faixa j ao longo do período de performance de 1 ano que é gerada a partir de duas premissas: o processo gerador subjacente é *Markoviano*, isso é, a probabilidade de migração em qualquer ponto t independe do caminho percorrido ao longo de $t - p | p \neq t$; as probabilidades de transição são homogêneas no tempo, ou seja, a probabilidade de um devedor migrar de i para j no tempo t é igual a probabilidade de um tomador migrar de i para j no tempo p .

Realizaremos a análise das duas metodologias mais utilizadas para estimar a matriz de transição de 1 ano: *cohort* e *duration*. Enquanto que a primeira estima diretamente a matriz de transição de 1 ano, a segunda gera a matriz geradora da matriz de transição, veremos que a metodologia *duration* possui a vantagem de poder ser facilmente exponenciada para obter matrizes de transição para períodos maiores que 1 ano.

Uma matriz de transição de 1 ano possui a seguinte forma:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $p_{i,j}$ é a probabilidade estimada de um devedor migrar da faixa i para a faixa j ao longo de 1 ano. A última faixa de risco (n) representa o evento de inadimplência e necessariamente é absorvente no sentido de que uma vez que um devedor migra para a faixa n ele não pode migrar para qualquer outra faixa, ou seja, permanecerá na faixa de inadimplência para sempre. Uma matriz de transição para qualquer período precisa apresentar 4 propriedades:

- Todas as entradas são probabilidades, logo, $0 \leq p_{i,j} \leq 1, i, j = 1, \dots, n$
- A soma de todas as entradas de uma linha é igual a 1, $\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$
- A última observação de cada linha representa a probabilidade de um credor pertencente a faixa de risco i inadimplir ao longo do período de performance.
- A faixa de inadimplência é absorvente, logo, $p_{n,j} = 0, j < n, p_{n,n} = 1$

As propriedades são intuitivas e podemos demonstrar a segunda ao considerar que um devedor qualquer presente na faixa de risco i pode apresentar apenas as 3 realizações: permanecer na faixa de risco i , migrar para a faixa de risco j ou, mais especificamente, migrar para a faixa de risco de inadimplência n , logo, a soma de cada linha da matriz de transição deve ser igual a 1. Esse cenário não considera a possibilidade de um tomador migrar "para fora" da matriz, ou seja, não apresentar uma classificação de risco ao final do período de performance. A inexistência da renovação da classificação de risco de um devedor é um problema real uma vez que tanto as instituições financeiras quanto as agências de classificação podem optar pela não renovação do crédito ou a cessão da avaliação da qualidade da empresa ou cliente, portanto, a classificação de risco costumeiramente é atribuída a classe Não Classificado, do inglês, *Not Rated* (NR). No contexto de estimação de matrizes de transição, esses eventos devem ser excluídos da amostra de estimação, uma vez que a permanência desses devedores podem causar aberrações na matriz de transição como por exemplo a violação da segunda propriedade.

2.2.1 Estimação de Matrizes de Transição

Uma vez definido que existem 2 métodos convencionais para estimação de matrizes de transição (cohort e duration), podemos proceder para a exposição das diferenças entre os dois processos de estimação. O principal benefício do método de duration em relação ao método

cohort é a obtenção de uma matriz geradora (G) que pode ser exponenciada m vezes para obter matrizes de transição maiores que 1 ano:

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \quad (2.1)$$

$$X^0 = I$$

Enquanto que o método de cohort além de não possuir o benefício da exponenciação, também pode apresentar probabilidades iguais a 0 quando a transição entre 2 faixas não for observada ao longo do período de estimação.

A estimação da matriz de transição requer um banco de dados em formato de *Cross Section*, contendo os eventos de avaliação de risco de crédito e a marcação da data na qual foi concedida a avaliação para o devedor em questão, uma exemplificação desse banco de dados está disponível na Figura 1.

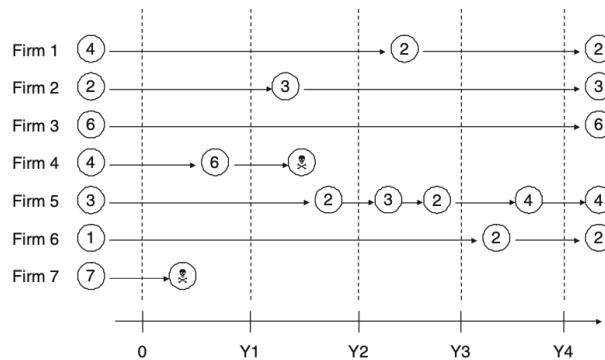


Figura 1 – Estrutura da migração dos ratings

Fonte: Engelmann e Rauhmeier 2011

No método de cohort, a probabilidade de migração do rating i para o rating j segue:

$$\hat{p}_{i,j} = \frac{N_{i,j}}{N_i}, \quad (2.2)$$

onde N_i é o número de devedores pertencente a classe i no início de cada período avaliado e $N_{i,j}$ é o número de devedores que migraram da classe i para a classe j ao longo do período avaliado, portanto, se trata de uma estimação direta das migrações entre classes ao longo do período de 1 ano, porém, no comum cenário no qual os ratings são concedidos aos devedores em períodos diferentes, uma precaução é necessária na formação da base de dados de estimação: como a janela de observação possui o tamanho de 1 ano, essa é a validade do rating concedido ao longo da mesma janela, ou seja, a concessão do rating AAA em qualquer ponto do período garante que esse será o rating vigente ao longo de todo o período para só então ser revisado na

janela de observação seguinte. Veremos a seguir que essa é uma precaução desnecessária ao estimar matrizes de transição através do método de duration.

O método de duration se diferencia em larga escala do método de cohort ao introduzir a migração de todas as classes no estimador de probabilidade com o objetivo de, ao final, obter a matriz geradora (G) e também por não exigir que as observações de migração (ou eventos de classificação de risco) sejam divididos em períodos fixos de 1 ano e possui a seguinte especificação:

$$\hat{g}_{i,j} = \frac{K_{i,j}(T)}{\int_0^T K_i(s) ds}, \quad (2.3)$$

onde $K_{i,j}$ é o número de todas as transições observadas do *rating* i para o *rating* j , T representa o tamanho da janela de observações e $K_i(s)$ é o número de devedores no *rating* i no tempo s .

Uma matriz geradora G precisa possuir as seguintes propriedades para que seja válida:

- Todas as entradas diagonais não são positivas, $g_{i,i} \leq 0, i = 1, \dots, n$.
- Todas as entradas não diagonais não são negativas, $g_{i,j} \geq 0, i, j = 1, \dots, n \forall i \neq j$
- A soma de todas as linhas é igual a 0, $\sum_{j=1}^n g_{i,j} = 0, i = 1, \dots, n$.

Portanto, dotado de uma matriz G que atende as propriedades necessárias, podemos obter a matriz de transição para o período t a partir da Equação 2.1:

$$P(t) = \exp(t \cdot G)$$

Uma vez que a matriz de transição de 1 ano pode ser facilmente obtida através da exponenciação da matriz geradora, podemos nos questionar sobre a obtenção de uma matriz geradora através da operação inversa da exponenciação, obtendo o logaritmo da matriz de transição de 1 ano, porém, a literatura demonstra que essa operação não é tão trivial. Na ausência de uma matriz geradora, o processo de transformar a matriz de transição de 1 ano de volta em uma matriz geradora se chama regularização. Um algoritmo computacionalmente eficiente foi proposto por [Kreinin e Sidelnikova 2001](#) e segue:

1. Calcular o logaritmo da matriz de transição (M), $G = \log(M)$
2. Substituir todos os valores não negativos da diagonal de G por 0
3. Ajustar todos os elementos de G não iguais a 0 pela equação:

$$g_{i,j} \leftarrow g_{i,j} - |g_{i,j}| \cdot \frac{\sum_{i=1}^n g_{i,j}}{\sum_{i=1}^n |g_{i,j}|}$$

2.3 Perda dado o *default* (LGD)

O outro componente do risco de crédito é a perda dado o *default* (LGD). A LGD pode ser representada como o complemento da taxa de recuperação de um determinado ativo financeiro.

A taxa de recuperação está diretamente ligada aos níveis de garantias incorporadas ao ativo, o grau de senioridade e o ambiente econômico em que o devedor da obrigação está inserido.

O grau de senioridade de uma dívida significa a ordem de preferência que um credor tem para receber de um determinado devedor que enfrenta um processo de recuperação judicial ou de falência. Quanto maior o grau de senioridade, maior a preferência do credor. Em geral, o menor grau de senioridade é aplicado aos credores que não possuem garantias. Esses recebem os seus valores apenas antes dos acionistas do devedor, o que pode resultar em grandes perdas para tais credores, já que em geral os valores residuais são insuficientes.

O ambiente econômico também pode resultar em impactos relevantes no valor recuperado. Em ambientes de recessão, os valores dos ativos tendem a ser deprimidos e isso ocorre também com os ativos financeiros que sofreram *default*. Além disso, ambientes com sistemas jurídicos ineficientes tendem a apresentar menores proteções aos credores, o que implica em menores taxas de recuperação.

Os métodos de estimação de LGDs está fora do escopo deste trabalho acadêmico. Portanto, serão utilizadas as estimativas publicadas pela própria agência de *ratings* Moody's em seus estudos mais recentes.

Os valores são apresentados segregados por tipo de dívida (empréstimos bancários ou bonds) e por tipo de garantia (por grau de senioridade):

Tabela 1 – LGD por nível de senioridade

Priority Position	Issuer-weighted recoveries			Volume-weighted recoveries		
	2018	2017	1983-2018	2018	2017	1983-2018
1st Lien Bank Loan	71,07%	69,19%	67,19%	77,67%	74,72%	64,07%
2nd Lien Bank Loan	54,96%	17,87%	32,27%	33,45%	30,29%	28,68%
Sr. Unsecured Bank Loan	41,93%	9,00%	45,75%	42,26%	9,00%	40,29%
1st Lien Bond	56,75%	65,91%	53,99%	68,75%	67,09%	55,23%
2nd Lien Bond	35,16%	52,75%	44,07%	43,62%	36,61%	43,74%
Sr. Unsecured Bond	48,75%	55,07%	38,15%	42,47%	41,03%	33,87%
Sr. Subordinated Bond	45,63%	38,00%	31,08%	25,60%	50,62%	26,33%
Subordinated Bond	n.a.	50,20%	31,98%	n.a.	68,34%	27,52%
Jr. Subordinated Bond	n.a.	27,17%	23,67%	n.a.	44,99%	26,78%

Fonte: Moody's Investors Service

Os valores constantes da tabela acima foram estimados pela Moody's utilizando-se os valores de mercado dos títulos emitidos pelos devedores após o evento de *default*. Como pode-se esperar, papéis com maior nível de garantia apresentam taxas de recuperação maiores (LGDs menores).

Um outro fator a ser considerado é se a LGD pode ser diferenciada entre as classes de risco de crédito assim como as probabilidades de *default*. A tabela abaixo apresenta os dados da Moody's para a taxa de recuperação dos ativos financeiros em horizonte entre 1 e 5 anos após o *default* pelo emissor. Destaque para o *rating* Aaa que não possui qualquer valor para o primeiro e tem valores pequenos para os horizontes de 2 e 3 anos após o *default*. Além disto, apresenta valores bem superiores a média dos demais *ratings* para os horizontes de 4 e 5 anos. A Moody's explica que essa aparente disparidade é devida a um pequeno número de observações (apenas 5).

Tabela 2 – LGD por nível de risco

<i>Rating</i>	ano 1	ano 2	ano 3	ano 4	ano 5
Aaa	NA	3,3 %	3,3 %	61,9 %	69,6 %
Aa	37,2 %	39,0 %	38,1 %	44,0 %	43,2 %
A	30,4 %	42,6 %	45,0 %	44,5 %	44,2 %
Baa	42,9 %	44,2 %	44,0 %	43,9 %	43,6 %
Ba	44,6 %	43,3 %	42,2 %	41,8 %	41,9 %
B	37,7 %	36,9	37,4 %	37,9 %	38,6%
Caa-C	38,6 %	39,0 %	39,1 %	39,5 %	39,7 %
IG	40,0 %	43,3 %	44,0 %	44,2 %	43,9 %
SG	38,7 %	38,6 %	38,7 %	39,1 %	39,5 %
All ratings	38,7 %	38,8 %	39,1 %	39,5 %	39,9 %

Fonte: Moody's Investors Service

Em geral, podemos verificar pelos valores constantes da tabela acima que a taxa de recuperação não parece estar relacionada com o nível de risco do devedor. Outro fator a se observar é que os valores recuperados parecem não aumentar significativamente à medida em que se avança após o *default*.

2.4 Processo de precificação

Segundo Fons 1994 o preço de um ativo financeiro com maturidade N , pagamento de cupom anual C , com um yield Y pode ser expresso da seguinte forma:

$$Price = \sum_{t=1}^N \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{1}{(1+Y)^N} \quad (2.1)$$

Fons ainda menciona ainda 4 premissas para se estimar o preço de um ativo financeiro sujeito a risco de crédito: - O ativo é precificado a par, ou seja, no momento de sua emissão, o valor do retorno é igual ao valor presente do cupom; - O investidor mantém o ativo em seu portfólio até o momento do vencimento ou do *default*, o que ocorrer primeiro; - O investidor é indiferente em ganhar R1,00 com sem risco ou um retorno esperado de R 1,00 com risco; e - O mercado de capitais é livre de oportunidades de arbitragem.

A equação acima pode ser ajustada para considerar o risco de *default* do devedor.

$$Price = \sum_{t=1}^N \frac{S_t C + S_{t-1} d_t \mu (C + 1)}{(1 + i)^t} + \frac{S_N}{(1 + i)^N} \quad (2.1)$$

Primeiramente, o fator S_t representa a probabilidade de sobrevivência do devedor até o tempo t . Essa probabilidade é multiplicada pelo valor a ser recebido de cupom (taxa livre de risco adicionada ao *spread*). Ou seja, o investidor tem um valor esperado de receber esse fluxo no tempo t caso o devedor sobreviva até este momento.

O fator S_{t-1} representa a probabilidade de sobrevivência até a unidade de tempo anterior. Este fator é multiplicado por d_t que é a probabilidade de o devedor entrar em *default* exatamente no momento t . Então, a multiplicação de S_{t-1} com d_t representa a probabilidade condicional de o devedor sobreviver até o tempo $t-1$, mas entrar em *default* exatamente no tempo t . Nessa situação, o valor recebido pelo investidor se limita ao valor de recuperação μ .

O último fluxo representa o valor do principal que será recebido ao fim do prazo negociado. Este valor é recebido com a probabilidade S_N , que é a probabilidade de o devedor não entrar em *default* em nenhum momento durante o contrato.

Portanto, o *spread* (cupom menos a taxa livre de risco) equivale ao valor em que iguala a equação 2.4 a 1, representando que o ativo financeiro é adquirido a par no momento de sua emissão.

3 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA

Neste capítulo, serão demonstrados os procedimentos para a estimação das matrizes de transição e dos *spreads* em sim. Todos os tratamentos, estimações e visualizações dessa sessão farão uso do software R, desenvolvido por [R Core Team 2018](#).

3.1 Estimação das matrizes de transição

Para estimar as probabilidades de *default*, foram utilizados os dados divulgados pela agência de *rating* Moody's em seu site. Os dados constam dos relatórios anuais de *default* denominados "Annual *default* study". O período utilizado foi de 2011 a 2018. Buscou-se utilizar dados posteriores ao período da crise financeira que se iniciou em 2007 nos países desenvolvidos.

Para estimar as matrizes de migração utilizando as técnicas mencionadas no Capítulo 2, se faz necessário obter os *ratings* de cada contraparte. Contudo, esses dados não constam do material publicado pela Moody's. Para contornar essa dificuldade, foram criados artificialmente os *ratings* que compõem as matrizes de migração anual. Dentre os dados divulgados, existem as matrizes de migração de um ano para cada ano de relatório (2011-2018) e o volume de *ratings* emitidos por classe de risco a cada ano.

Para cada ano, foi elaborada a matriz de transição em termos de número de *ratings* ao invés de proporção. Essa matriz foi elaborada a partir da combinação da matriz com as proporções e o volume de classificações de risco. A título de exemplo, abaixo é apresentada a matriz de migração de um ano 2011-2012 tal qual publicado pela Moody's.

Tabela 3 – Matriz de migração de um ano 2011-2012

From/To:	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca-C	WR	<i>default</i>
Aaa	69,4	25,0	0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	5,6	0,0
Aa	0,0	66,2	23,9	4,6	0,0	0,0	0,0	0,0	5,2	0,0
A	0,0	0,8	79,6	13,6	0,8	0,0	0,0	0,0	5,3	0,0
Baa	0,0	0,0	1,0	90,8	3,1	0,2	0,0	0,0	4,7	0,1
Ba	0,0	0,0	0,0	7,7	76,6	8,6	1,3	0,0	5,7	0,2
B	0,0	0,0	0,0	0,0	2,7	75,1	6,9	0,3	14,6	0,4
Caa	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	9,8	68,9	3,5	10,4	7,3
Ca - C	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,8	19,2	15,4	61,5

Fonte: Moody's Investors Service

A seguir, a tabela publicada pela Moody's com o volume de *ratings* emitidos em 2012 por classe de risco.

Tabela 4 – Quantidade de *ratings* elaborados

<i>rating</i>	contagem
Aaa	72
Aa	305
A	922
Baa	1245
Ba	1247
B	1147
B	1147
Caa-C	505
IG	2544
All	4823

Fonte: Moody's Investors Service

A partir destes dados, foi construída a matriz a seguir:

Tabela 5 – Matriz de migração em número de observações

From/To:	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca-C	WR	<i>default</i>
Aaa	50	18	0	0	0	0	0	0	4	0
Aa	0	202	73	14	0	0	0	0	16	0
A	0	7	734	125	7	0	0	0	49	0
Baa	0	0	13	125	39	3	0	0	59	1
Ba	0	0	0	48	480	54	8	0	36	1
B	0	0	0	0	31	861	79	3	168	5
Caa	0	0	0	0	0	47	330	17	50	35
Ca-C	0	0	0	0	0	0	1	6	5	19

Fonte: Elaboração própria

Este procedimento foi realizado para todas as matrizes de migração selecionadas para compor este estudo (2012-2018). Em seguida, foram criadas observações de forma aleatória e que obedecem o comportamento da matriz de migração. Por exemplo, a partir da tabela anterior, pode-se observar que existem 72 casos de emissores que eram Aaa ao final de 2011. Então, foram criados na base de dados esses 72 casos com suas respectivas Ids e com a data de 31-12-2011. Este passo foi repetido para todos os níveis de risco.

O passo seguinte foi criar as observações de final de 2012. Ainda utilizando os devedores Aaa, podemos observar que 50 deles permaneceram como Aaa ao final de 2012, 18 se tornaram Aa e 4 deixaram de ser classificados (WR). Então, aleatoriamente foram selecionados dentre os devedores Aaa aqueles que permaneceram, os que se tornaram Aa e os que deixaram de ser classificados.

Esse passo foi repetido para todas as classes de risco. Quando uma determinada observação se torna *default*, a data do *default* foi selecionada aleatoriamente, seguindo uma distribuição uniforme dentre os dias do ano.

Todos esses procedimentos foram realizados para todos os anos da base. Algumas limitações conhecidas: 1 – desconhecimento da data exata do *default*

2 – um determinado devedor pode ter tido mais de uma classificação no ano, de tal forma que a migração observada nas matrizes apenas indicariam os estados finais no exercício, sem apresentar os outros estágios pelos quais a observação passou.

Em seguida, a função `TransitionProb` do pacote `RTransprob` desenvolvido por [NDiaye 2018](#) foi utilizada para estimar a matriz geradora. Os parâmetros da função são: `TransitionProb(dataTM, startDate, endDate, method, snapshots, interval)`

`dataTM`: Base de dados `startDate`: primeira data a ser utilizada. Observações com datas anteriores serão descartadas. `endDate`: última data a ser utilizada. Observações com datas posteriores serão descartadas. `method`: a função admite dois métodos: `cohort` e `duration`.

`snapshots`: quantidade de *ratings* emitidos por devedor por ano. Foi utilizado o valor 1. `interval`: o intervalo temporal de estimação. Ao utilizar este parâmetro igual a 1, a função vai estimar a matriz geradora de 1 ano.

A seguir, a matriz geradora estimada.

Tabela 6 – Matriz Geradora

-0,05324	0,05324	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00046	-0,10208	0,09515	0,00647	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,01494	-0,06852	0,05180	0,00142	0,00012	0,00012	0,00000	0,00012
0,00000	0,00016	0,02622	-0,05898	0,02941	0,00245	0,00049	0,00000	0,00025
0,00000	0,00000	0,00050	0,05221	-0,12083	0,06142	0,00469	0,00034	0,00167
0,00000	0,00000	0,00010	0,00123	0,03221	-0,09502	0,05390	0,00152	0,00606
0,00000	0,00012	0,00000	0,00000	0,00086	0,04604	-0,10216	0,02412	0,04102
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00336	0,10259	-0,42884	0,32290
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Elaboração própria

A partir da matriz geradora, é possível estimar matrizes de migração para qualquer prazo que se queira. Basta calcular a exponencial da matriz geradora para o prazo desejado e a matriz resultante será a matriz de migração.

Seja n o número de anos que se deseja obter a matriz de migração estimada A a partir da matriz geradora G . Então

$$A = e^M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \quad (3.0)$$

Para obtermos as matrizes de transição estimadas, a função `expm` do pacote de mesmo nome foi utilizada. O pacote `expm` foi desenvolvido por [Goulet Christophe Dutang 2019](#). Abaixo a matriz de transição estimada para o horizonte de um ano.

Tabela 7 – Matriz de transição de 1 ano estimada

De - Para	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca-C	default
Aaa	0,9482	0,0493	0,0024	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Aa	0,0004	0,9036	0,0875	0,0083	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
A	0,0000	0,0137	0,9351	0,0487	0,0020	0,0002	0,0001	0,0000	0,0001
Baa	0,0000	0,0003	0,0246	0,9441	0,0270	0,0031	0,0006	0,0000	0,0003
Ba	0,0000	0,0000	0,0011	0,0478	0,8878	0,0553	0,0057	0,0003	0,0019
B	0,0000	0,0000	0,0001	0,0019	0,0290	0,9114	0,0488	0,0017	0,0071
Caa	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0014	0,0416	0,8960	0,0185	0,0422
Ca-C	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0045	0,0787	0,6522	0,2645
default	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000

Fonte: Elaboração própria

Abaixo, a matriz a partir dos dados observados:

Tabela 8 – Matriz de transição de 1 ano observada

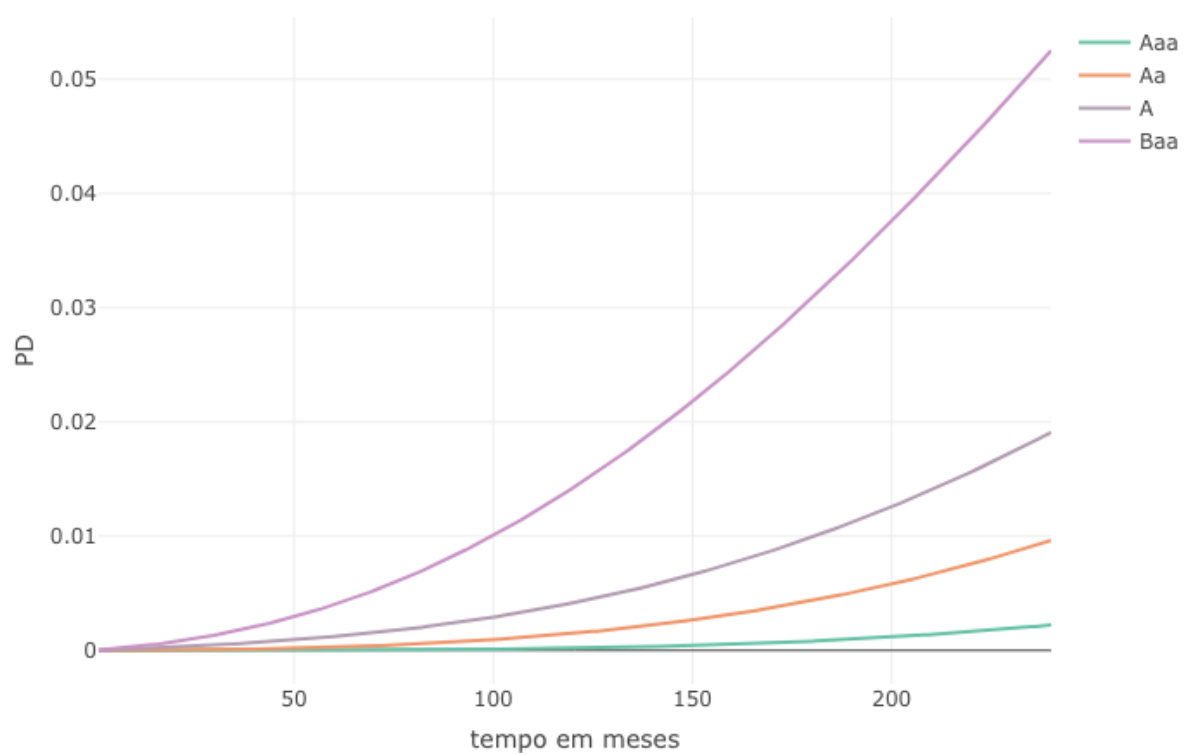
CR	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca-C	Def
Aaa	0,0005	0,8811	0,1109	0,0075	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Aa	0,0000	0,0171	0,9217	0,0592	0,0016	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001
A	0,0000	0,0002	0,0303	0,9319	0,0340	0,0028	0,0006	0,0000	0,0003
Baa	0,0000	0,0000	0,0006	0,0667	0,8457	0,0785	0,0060	0,0004	0,0021
Ba	0,0000	0,0000	0,0001	0,0019	0,0498	0,8532	0,0833	0,0023	0,0094
B	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	0,0012	0,0637	0,8449	0,0334	0,0567
Caa	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0043	0,1320	0,4481	0,4156
Ca-C	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Fonte: Elaboração própria

Como o intuito é obter as probabilidades de *default*, basta tomar a última coluna da matriz de migração estimada. Os gráficos abaixo apresentam as probabilidades de *default* a termo para devedores cujo *rating* é igual ou superior a Baa (denominado investment grade) e outro gráfico com os devedores cujo *rating* é inferior a Baa (denominado speculative grade).

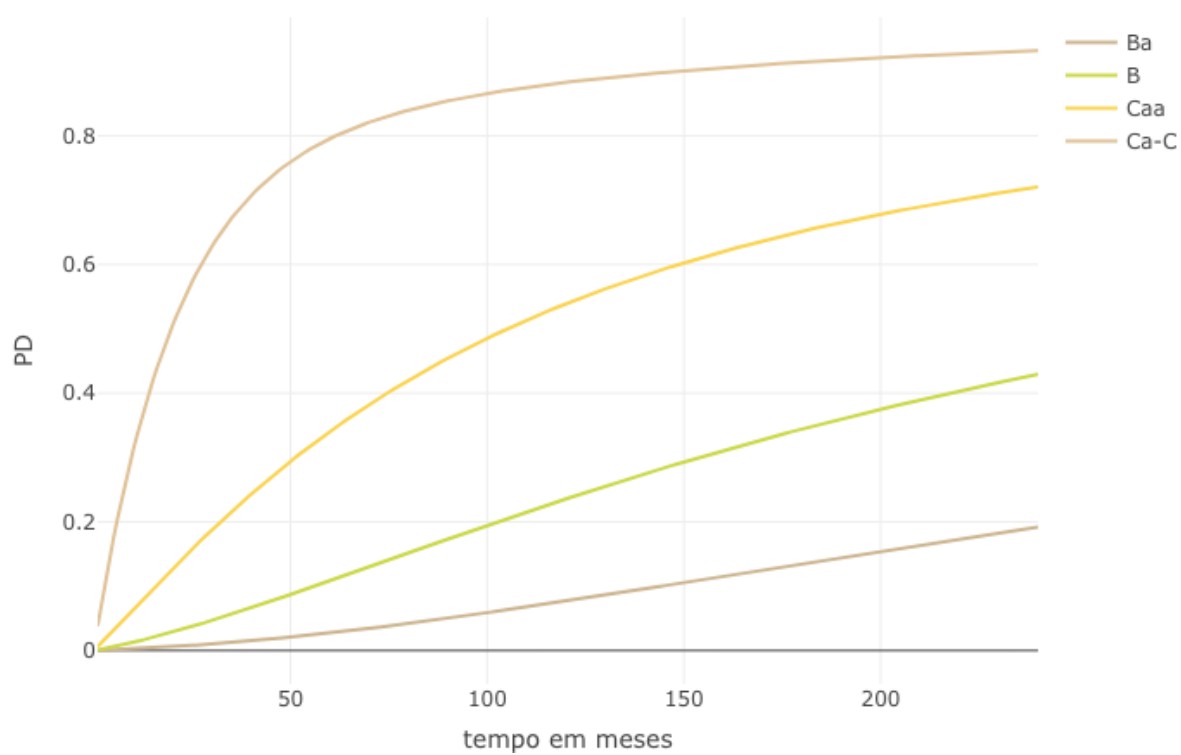
Pode ser observado que para as probabilidades de *default* mais próximas de zero, a taxa de crescimento é crescente. À medida que a probabilidade de *default* se aproxima de 1, o seu crescimento se reduz, apresentando taxa de crescimento decrescente.

Figura 2 – Probabilidades de *default* a termo - Investment Grade



Fonte: Elaboração própria.

Figura 3 – Probabilidades de *default* a termo - Speculative Grade



Fonte: Elaboração própria.

3.2 Estimação dos *spreads*

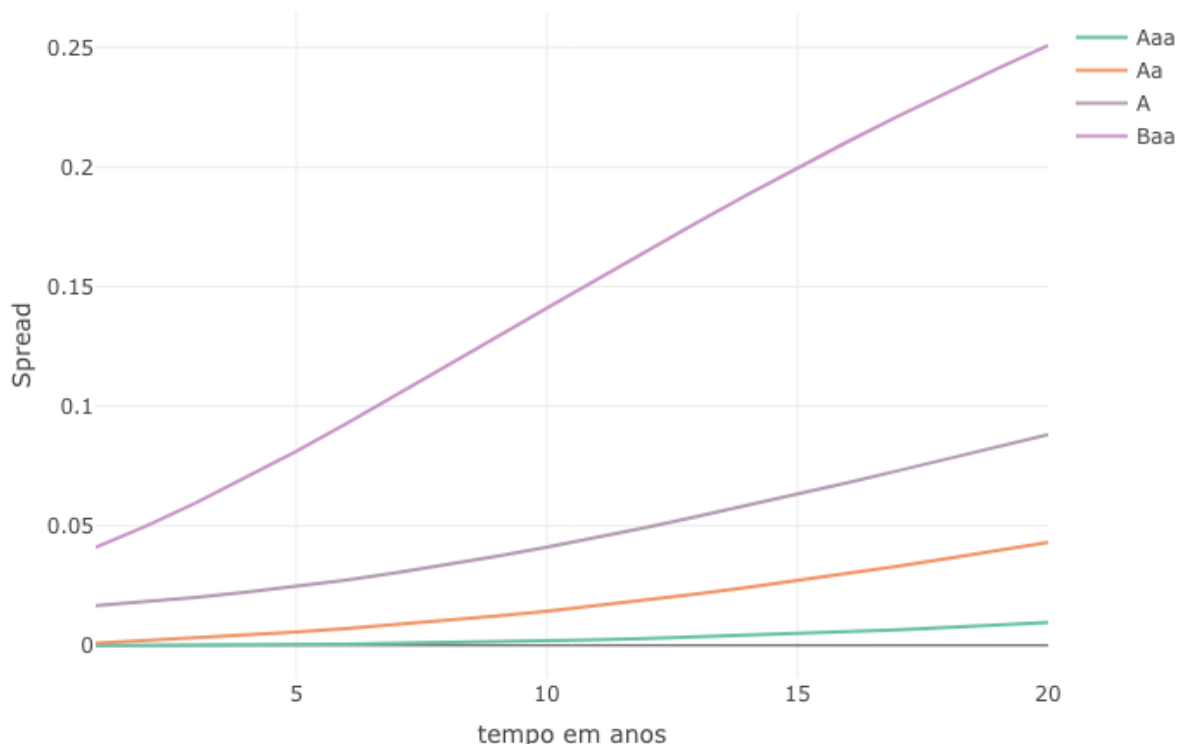
Após a estimação da matriz geradora, o próximo procedimento a ser realizado é o cálculo dos *spreads* que fazem com que o valor da equação 2.4 iguale a um.

Para atingir este objetivo, os valores utilizados para fins de LGD foram de 100%, 45% e 75%. O primeiro valor foi escolhido com o intuito de se apresentar o impacto de eventos de não recebimento de qualquer valor em casos de *default*. A escolha dos outros dois valores se baseou nos valores aproximados de recuperação apresentado na tabela 1 para os ativos financeiros emitidos no mercado com garantia de primeiro nível 54% e cotas subordinadas junior 24%.

Outro parâmetro importante é a taxa de juros de ativos livre de risco. Para fins dos cálculos deste capítulo, foi utilizada uma taxa de juros de 3% ao ano. Trata-se de uma taxa de juros em linha com as taxas que os títulos de longo prazo do Tesouro dos Estados Unidos estão pagando. Uma abordagem possível seria utilizar a estrutura a termo dos juros do Tesouro americano.

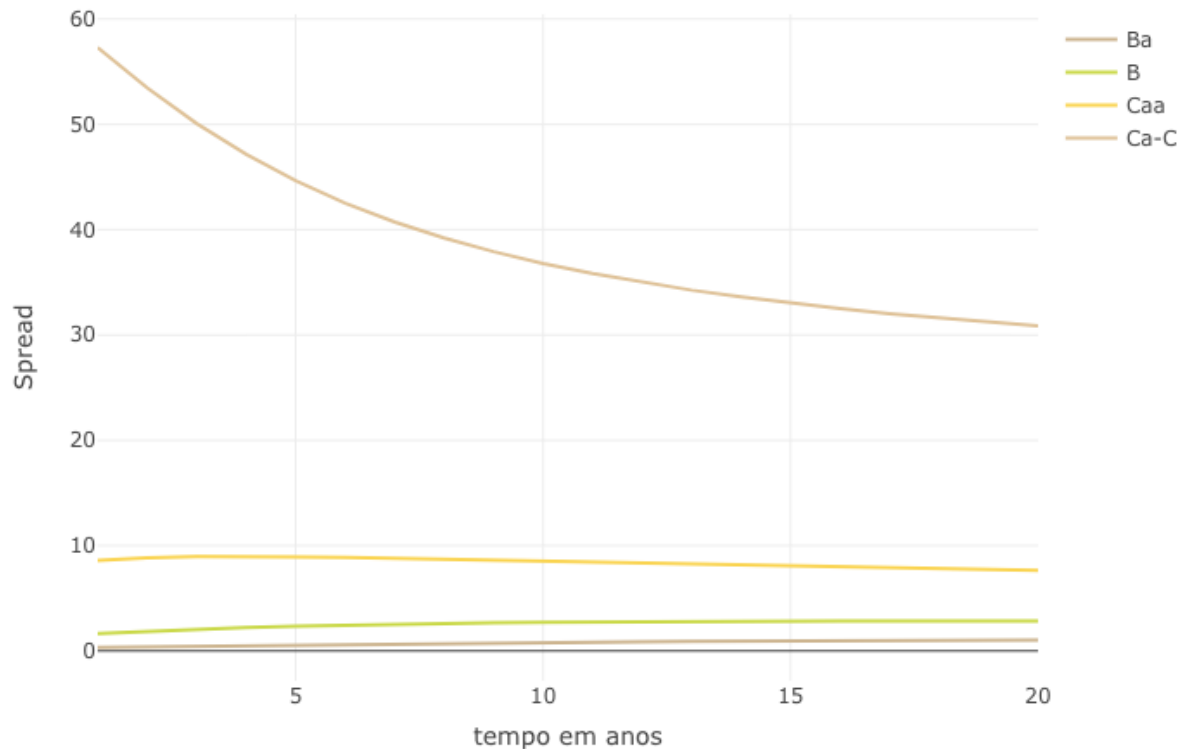
Os resultados são exibidos nos gráficos abaixo.

Figura 4 – *spreads* a termo - Investment Grade - LGD = 1



Fonte: Elaboração própria.

Pelos valores exibidos no gráfico 4, pode se observar que os *spreads* tem um comportamento crescente à medida em que o tempo de vencimento do ativo financeiro aumenta.

Figura 5 – *spreads* a termo - Speculative Grade - LGD = 1

Fonte: Elaboração própria.

Contudo, este fato não é o padrão para os casos em que os *ratings* dos devedores são piores que Baa. Os *spreads* crescem até determinado momento no tempo (varia conforme a classificação de risco) e partir de então começam a reduzir de valor em função do tempo.

Este comportamento pode ser explicado pelo crescimento da probabilidade de *default* a cada unidade adicional de tempo. A partir de certa probabilidade de *default* acumulada, a probabilidade de *default* marginal passa a crescer a taxas decrescentes. Este fato pode ser observado na figura 3.

Eventos como este foram observados por [Merton 1974](#), por [Jarrow Robert A. e Turnbull 1997](#) e por [Fons 1994](#). [Helwege e Turner 1998](#) explica que dentre os ativos de melhor qualidade de crédito, a probabilidade de *default* é muito pequena no momento da emissão do ativo de tal forma que existe uma pequena chance de uma melhoria na probabilidade de pagamento. De outra forma, a probabilidade de uma piora significativa na qualidade de crédito é alta, desde que se tenha tempo suficiente.

Por outro lado, ativos com pior qualidade de crédito já são bastante arriscado no momento de sua emissão, tendo espaço para melhoria com o tempo e menor potencial de piora. Se o ativo, no momento de sua emissão, não tem outra opção a não ser de melhora, a sua curva de *spread* terá necessariamente inclinação negativa. Por último, para ativos que não estão nessa

situação, mas também não são de alta qualidade, o potencial de piora domina no curto prazo, mas é compensada por uma chance de potencial de melhora no longo prazo, resultando em uma curva de *spread* com inclinação positiva no curto prazo e negativa no longo prazo.

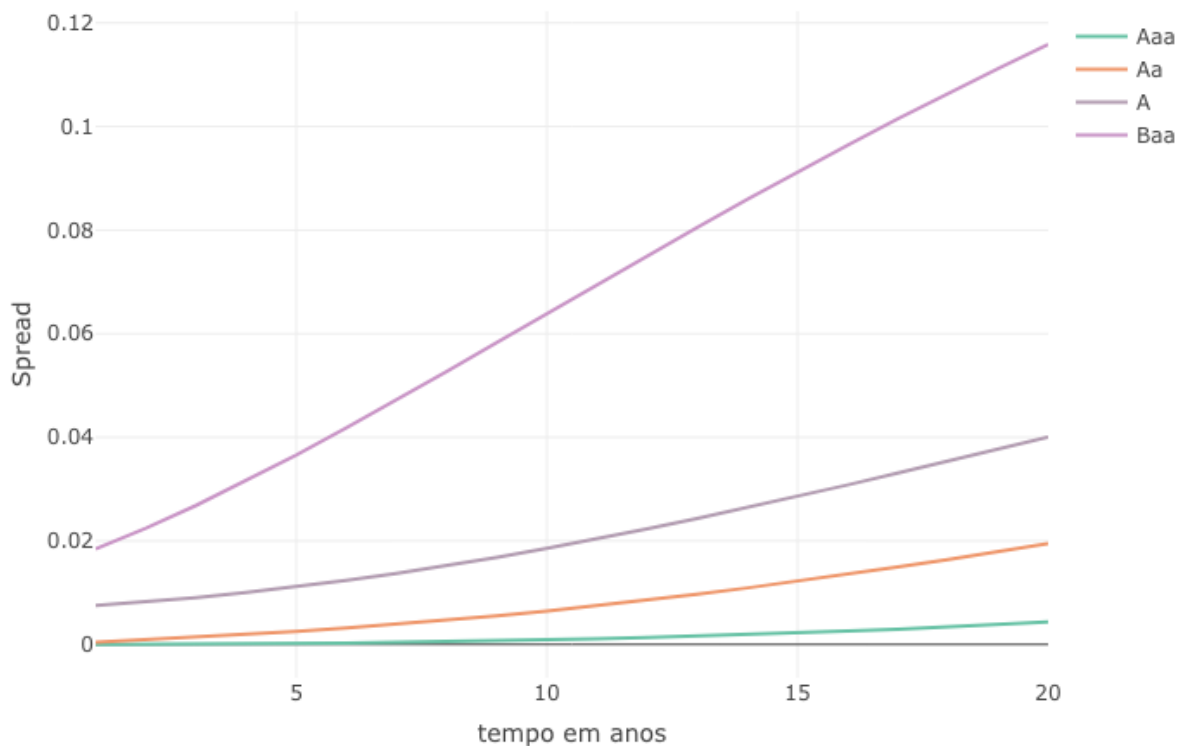
3.2.1 Efeitos da LGD

Fons 1994 menciona a importância da LGD na apuração dos *spreads*. Um aumento da LGD leva a *spreads* mais inclinados. Reduções na LGD resultam em *spread* bastante reduzidos.

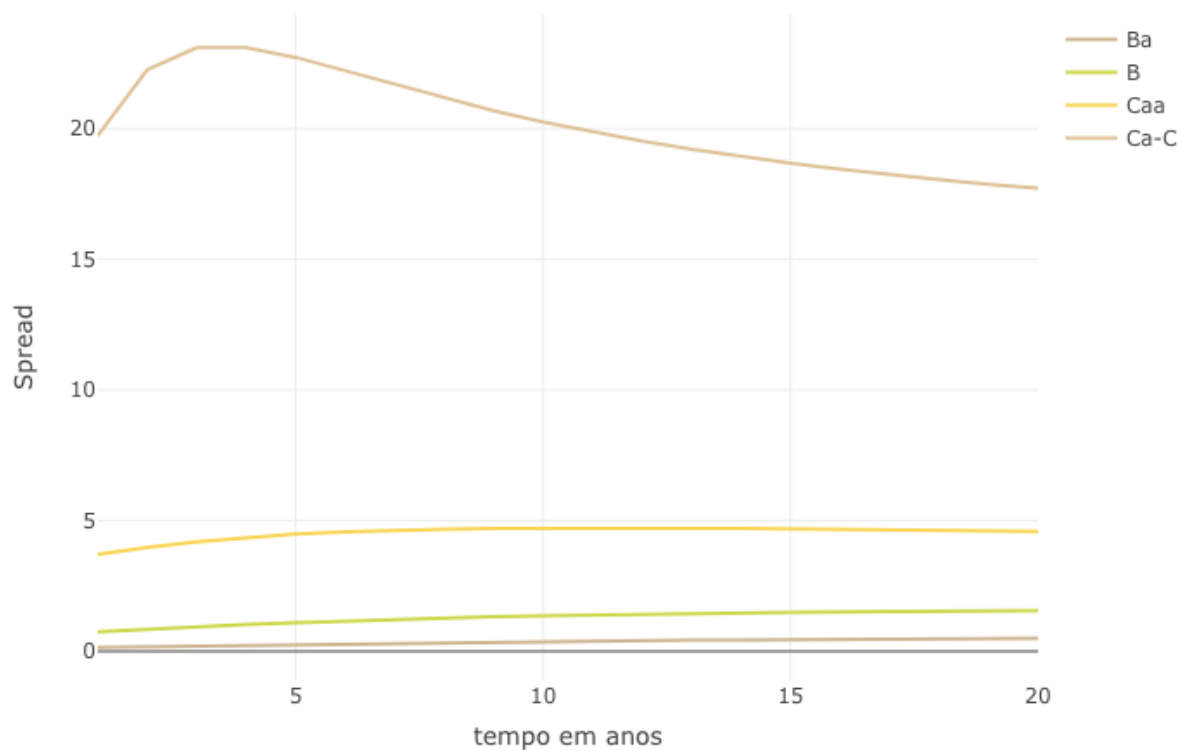
Quando a LGD utilizada foi a equivalente a 1, ou seja, o valor recebido pelo credor em evento de *default* é zero, os *spreads* ficaram bem maiores. Além disto, o próprio formato da curva pode ser alterado.

A título de exemplo, a curva de Ca-C com LGD igual a 1 na figura 5 é estritamente decrescente. Já na figura 7, é possível verificar que a curva tem inclinação positiva até aproximadamente o ano 5 e se torna negativa a partir de então.

Figura 6 – *spreads* a termo - Investment Grade - LGD = 0,45



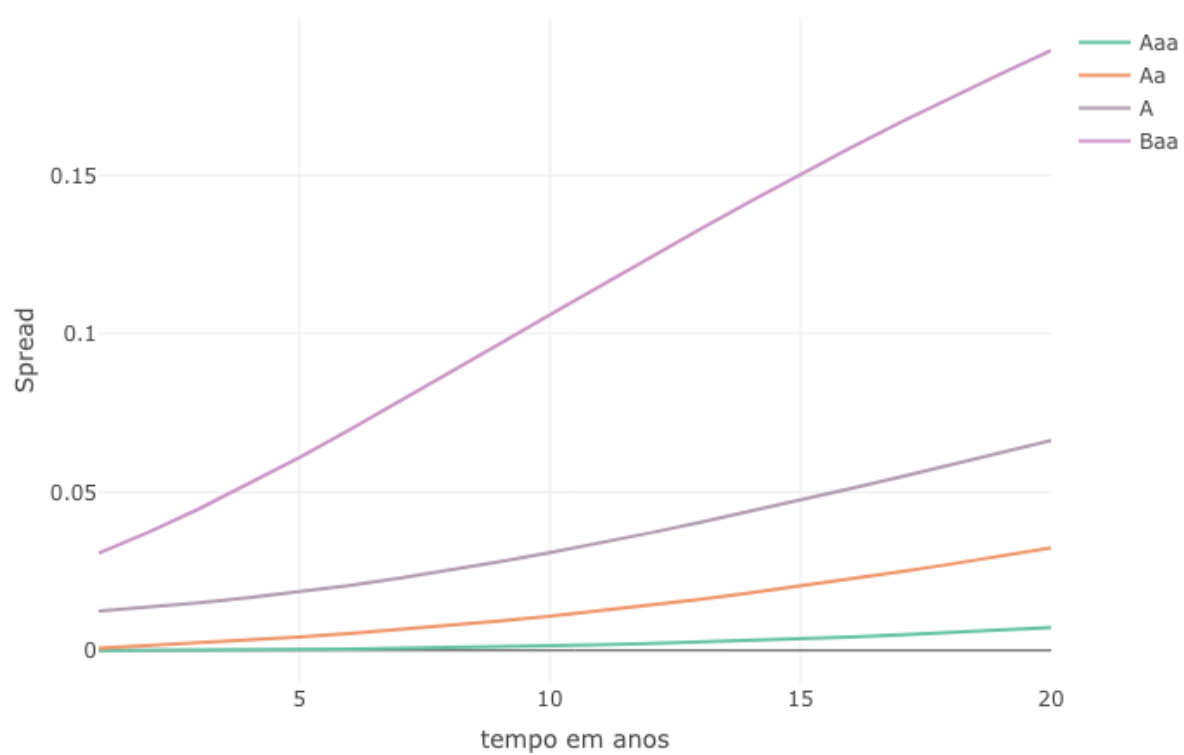
Fonte: Elaboração própria.

Figura 7 – *spreads* a termo - Speculative Grade - LGD = 0,45

Fonte: Elaboração própria.

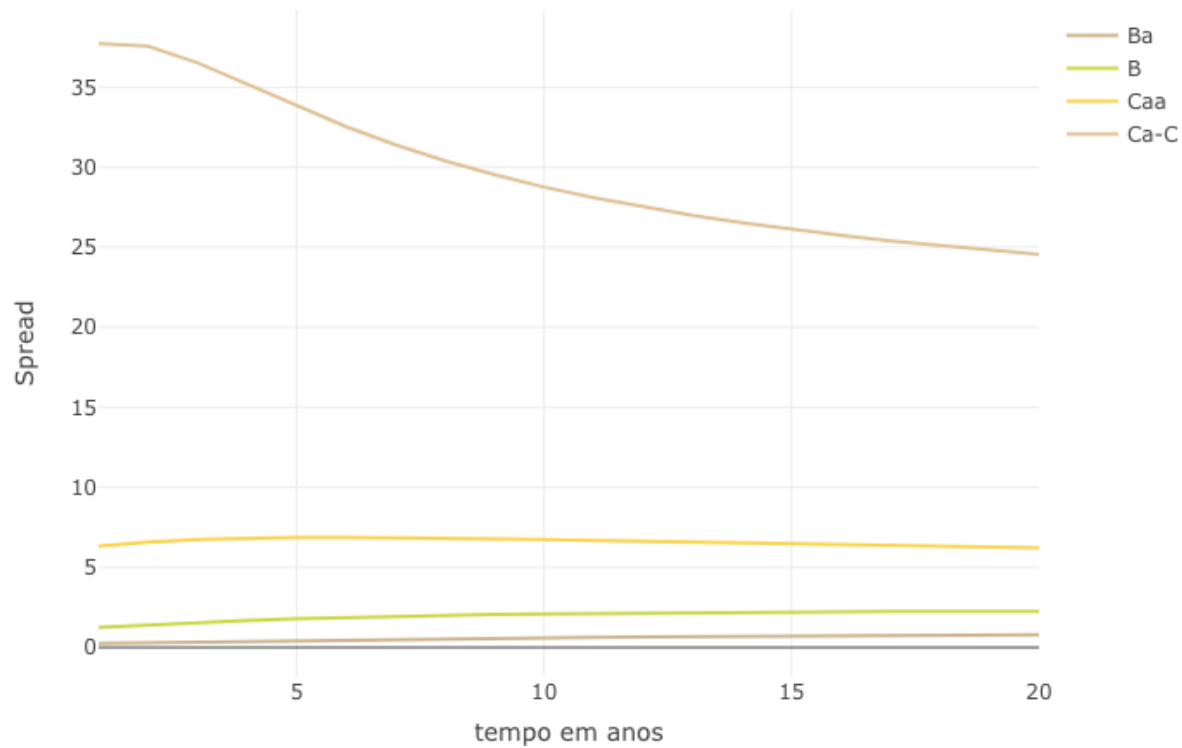
Como pode ser observado, os níveis das curvas de *spreads* mudam significativamente quando há uma diferença importante na LGD.

Figura 8 – *spreads* a termo - Investment Grade - LGD = 0,75



Fonte: Elaboração própria.

Figura 9 – *spreads* a termo - Speculative Grade - LGD = 0,75



Fonte: Elaboração própria.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado uma metodologia para se fixar taxas de juros de ativos financeiros que sejam suficientes para cobrir as perdas esperadas de tais ativos. Para isso, foi necessário determinar os principais fatores que explicam o risco de crédito, quais sejam, a probabilidade de default e a perda dado o default.

A probabilidade de default foi estimada a partir de modelo markoviano baseado nas transições de *ratings* da agência Moody's. A estimação da perda dado o default não foi objeto de estudo deste trabalho.

Avanços adicionais deste trabalho para estudos futuros compreende comparar os *spreads* que sejam neutros do ponto de vista de risco de crédito e os praticados no mercado.

Outro ponto a ser aprofundado é a fixação de *spreads* para ativos financeiros com pagamentos de principais intermediários, ou seja, com pagamento de prestações, tais como os empréstimos e financiamentos bancários que utilizam algum esquema padrão de amortização (tabela PRICE ou SAC).

5 REFERÊNCIAS

- ALTMAN, E. I. Financial indicators, discriminant analysis, and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance*, v. 23, n. 4, p. 589–609, 1968. Citado na página 12.
- ENGELMANN, B.; RAUHMEIER, R. *The basel II risk parameters: estimation, validation, stress testing-with applications to loan risk management*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 15.
- FONS, J. S. Using default rates to model the term structure of credit risk. *Financial Analysts Journal*, September-October, n. 1/2, p. 25–32, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 11, 18, 27 e 28.
- GOULET CHRISTOPHE DUTANG, M. M. D. F. M. S. M. S. V. *expm: Matrix Exponential, Log, 'etc'*. [S.l.], 2019. R package version 0.999–4. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=expm>>. Citado na página 22.
- HELWEGE, J.; TURNER, C. M. The slope of the credit yield curve for speculative-grade issuers. 1998. Citado na página 27.
- JARROW ROBERT A., L. D.; TURNBULL, S. M. A markov model for term structure of credit risk spreads. *The Review of Financial Studies*, v. 10, n. 2, p. 418–523, 1997. Citado na página 27.
- KREININ, A.; SIDELNIKOVA, M. Regularization algorithms for transition matrices. *Algo Research Quarterly*, v. 4, n. 1/2, p. 23–40, 2001. Citado na página 16.
- MERTON, R. C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, v. 29, p. 449–470, 1974. Citado na página 27.
- NDIAYE, A. *RTransprob: Analyze and Forecast Credit Migrations*. [S.l.], 2018. R package version 0.3.3. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=RTransprob>>. Citado na página 22.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2018. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. Citado na página 20.
- TEUGELS, J. L.; SUNDT, B. *Encyclopedia of Actuarial Science*. [S.l.]: Wiley, 2004. Citado na página 12.