



UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

Efeito da Estrutura de Dependência na modelagem do Risco de Provisionamento total de uma Resseguradora

Maria Carolina Duque Estrada Meyer Menezes

Orientador: Prof. Eduardo Fraga Lima de
Melo, DSc

Rio de Janeiro

Julho/ 2018

RESUMO

O objetivo desta monografia é modelar a distribuição da perdas dos sinistros ocorridos e não pagos de duas carteiras distintas e representativas de uma resseguradora analisando a relação de dependência entre elas. É sabido que muitas linhas de negócio possuem uma relação de dependência. Essa relação pode influenciar nos valores estimados e é importante ser estudada e entendida especialmente por empresas que lidam com risco.

Utilizaremos dois cenários distintos para o estudo. No primeiro não serão levadas em consideração a relação de dependência entre as duas carteiras, elas serão tratadas separadamente. Já no segundo cenário utilizaremos uma ferramenta para modelar a dependência entre as linhas de negócios. A distribuição de cópulas é utilizada para modelar o grau de dependência entre variáveis aleatórias ou processo estocásticos.

Finalmente, as diferenças serão apuradas por meio de medidas de risco extraídas das distribuições obtidas. Os resultados são de grande valor na aferição de solvência, gestão de riscos e alocação de capital.

Palavras-chave: cópulas, distribuição de perdas, solvência, capital.

Índice de Figuras

Figura 1 – Volume das Provisões Técnicas no Mercado de Resseguro.....	5
Figura 2 – Estatísticas Descritivas grupo Patrimonial	7
Figura 3 – Histograma de Sinistros Patrimonial	7
Figura 4 – BoxPlot Patrimonial.....	7
Figura 5 – Histograma de Sinistros desconsiderando Outliers (Patrimonial)	8
Figura 6 – BoxPlot desconsiderando outliers (Patrimonial)	8
Figura 7 – Estatísticas descritivas grupo Patrimonial desconsiderando outliers	9
Figura 8 – Estatísticas descritivas do grupo Transportes	9
Figura 9 – Histograma dos Sinistros de Transportes	10
Figura 10 – BoxPlot Transporte	10
Figura 11 – Histograma de Sinistros desconsiderando Outliers (Transportes).....	11
Figura 12 – BoxPlot desconsiderando outliers (Transporte).....	11
Figura 13 – Estatísticas Descritivas do grupo de Transporte desconsiderando outliers	12
Figura 14 – Patrimonial: Aderência a LogNormal.....	13
Figura 15 – Transporte aderência a Log-Normal	14
Figura 17 – Principais cópulas arquimedianas.....	17
Figura 18 – Copula selecionada	19

Sumário

1. INTRODUÇÃO	5
2. OBJETIVO	6
3. ANÁLISE DESCRITIVA DOS DADOS	6
3.1. Patrimonial.....	6
3.2. Transportes.....	9
4. AJUSTE DAS DISTRIBUIÇÕES DE PERDAS	12
4.1. Estimacão dos parâmetros por Máxima Verossimilhança	12
4.2. Teste Kolmogorov-Smirnov (KS).....	12
4.3. Patrimonial.....	13
4.4. Transportes.....	13
5. ESTIMATIVA DE SINISTROS	14
5.1. Método Chain Ladder.....	14
5.2. Método Log-Normal	15
5.3. Teoria de Cópulas.....	16
6. RESULTADO DAS ESTIMATIVAS	18
7. CONCLUSÃO	20
ANEXO I – Critério de Informaco de Akaike	21
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	22

1. INTRODUÇÃO

A SUSEP – Superintendência de Seguros Privados, regula e orienta o mercado Segurador e Ressegurador a constituir mensalmente as provisões técnicas, através da Circular SUSEP nº 517/2015, e ainda informá-las através dos quadros estatísticos e FIP para posterior divulgação desses dados ao mercado.

Para que se tenha uma ideia do representatividade desses valores no mercado de resseguros, objeto de nosso estudo, extraímos da SUSEP os valores das provisões de prêmios e sinistros para todas as empresas de resseguro no mês de dezembro/2017:

Figura 1 – Volume das Provisões Técnicas no Mercado de Resseguro

Resseguradora	PPNG (R\$)	PPNGRVNE (R\$)	IBNR (R\$) ¹	PSL (R\$)	PET (R\$)	PDR (R\$) ³
IRB	1.738.652.518	228.253.837	1.687.479.912	4.343.293.845	150.676.379	26.659.969
BTG PACTUAL	523.394.771	41.929.854	8.802.584	19.389.369	0	0
J.MALUCELLI	332.760.016	20.728.049	28.059.996	252.588.496	11.997.177	4.362.985
ZURICH	305.472.579	30.439.042	383.885.889	414.175.336	0	0
MUNICH RE	216.753.178	12.337.843	448.143.571	658.684.306	52.174.587	0
AUSTRAL	182.832.824	8.230.334	106.079.826	226.984.110	4.254.735	251
SWISS RE	178.988.860	29.545.874	209.596.309	323.055.329	27.809.956	21
ALLIANZ	142.666.635	31.277.893	317.885.922	598.046.496	0	0
MAPFRE	111.315.403	0	50.745.401	425.082.318	16.609.105	0
AXA CORPORATE	73.459.605	14.167.452	21.686.632	227.614.754	0	4.078.512
SCOR	73.354.411	0	106.952.099	38.413.817	2.456.577	0
TERRA BRASIS	68.700.407	14.602.275	16.545.311	98.507.470	2.286.492	454.151
AIG	58.979.891	9.604.336	56.815.249	340.656.322	0	7.148.572
MARKEL	44.860.565	0	38.753.513	25.173.748	2.712.242	3.400
CHUBB	44.513.012	7.149.484	59.383.138	152.898.728	0	7.241.746
XL	33.004.725	3.001.901	73.963.797	56.376.911	3.174.640	0
Totais	4.129.709.400	451.268.174	3.614.779.148	8.200.941.356	274.151.889	49.949.607

Como podem verificar na tabela 1 são mais de 3,5 bilhões de reais em IBNR (Provisão de Sinistros ocorridos mas não avisados - *Incurring But Not Reported*) e mais de 4 bilhões de PPNG (Provisão de prêmios não ganhos) que o mercado provisiona para honrar seus compromissos futuros.

É sabido que as provisões são o compromisso da resseguradora com a seguradora, e ficam no passivo das demonstrações contábeis da empresa. A Resolução nº 4.444/15, do Conselho Monetário Nacional que disciplina como deve ser feito o investimento das reservas técnicas, provisões e fundos das entidades supervisionadas pela Superintendência de Seguros Privados (SUSEP).

Frente a esse cenário qual o perigo da Resseguradora estar superdimensionada ou subdimensionada?

Segundo Mano e Ferreira (2011), uma resseguradora com provisões técnicas superdimensionadas reduzirá os dividendos que podem ser distribuídos aos seus acionistas. E ainda, gerará custo de capital. Para fazer frente ao excesso de provisão os acionistas terão que manter um capital adicional investido na empresa. No entanto, por se tratar de coberturas de provisão técnica, esse capital adicional será investido em ativos de remuneração inferior à taxa de retorno esperada pelo acionista.

Por outro lado, estar subdimensionado pode gerar problemas na solvência da empresa. Ou seja, a Companhia não será capaz de honrar os compromissos assumidos. A quebra de uma empresa cujo principal produto é o “risco” pode gerar um efeito de insegurança em todo o mercado.

2. OBJETIVO

O objetivo desse estudo é discutir os aspectos técnicos sobre a dependência entre diferentes linhas de negócio para a distribuição de sinistro e seu impacto na apuração das provisões de sinistro, e no cálculo do capital econômico. É de conhecimento geral que se os riscos tem uma correlação, então a distribuição da soma desse risco será influenciada por essa correlação. Neste trabalho queremos apresentar uma alternativa para verificar essa dependência entre os triângulos de Run-off de diferentes linhas de negócios.

A proposta para calcular essa dependência entre as linhas é o modelo regressivo de cópulas. As disitribuições de copulas já possuem aplicações em outros mercados como o bancário, no entanto, o mercado segurador e ressegurador ainda apresenta pouco material sobre o assunto.

A despesa com pagamentos de sinistro de uma resseguradora é uma distribuição de probabilidades, onde a mediana, ou seja, o valor esperado das obrigações será coberto pelas provisões técnicas. No entanto, o valor esperado pode apresentar oscilações positivas ou negativas. Face ao exposto, de acordo com a metodologia do VaR – *Value at Risk*, o capital econômico será um quantil da distribuição de perdas de forma que com um nível de confiança α as perdas ultrapassem esse valor em no máximo $1 - \alpha$ das vezes. Geralmente, os níveis de confiança adotados são 95%, 97,5%, 99% e 99,5%.

3. ANÁLISE DESCRITIVA DOS DADOS

Para iniciarmos nossa análise foram utilizados dados de ocorrência e pagamento de sinistro desde 2014 de uma carteira de resseguro. Esses dados estão seguidados em duas linhas de negócios de grande representatividade no portfólio da empresa: Patrimonial e Transportes.

Inicialmente faremos uma análise descritiva dos dados a fim de conhecer melhor o comportamento das carterias que estamos estudando.

3.1. Patrimonial

Essa carteira contem registros de sinistros de apólices que cobrem riscos de danos à Residência, Condomínios e também Empresas. São seguros que, como o nome diz, protegem o patrimônio da pessoa física ou jurídica. Dada essa característica podemos esperar uma grande volatilidade nos números, e também uma concentração nos sinistros de baixa monta, afinal esses riscos menores possuem maior exposição quando comparado aos demais. Essa informação se confirma nas estatísticas básicas, pois 75% dos dados apresentam valor de sinistro inferior a 971 mil reais. Através do boxplot percebemos pouca amplitude entre os quartis. Verificamos também uma série de pontos de valor elevado e isso se reflete na média, pois a média é maior do que o quartil 75%. O coeficiente de variação de 208%, também reforça a idéia de que os sinistros são bastante voláteis.

Estatística	Patrimonial
Min.	5.346
1st Qu.	56.680
Median	252.500
Mean	1.012.000
3rd Qu.	971.000
Max.	27.060.000

Figura 2 – Estatísticas Descritivas grupo Patrimonial

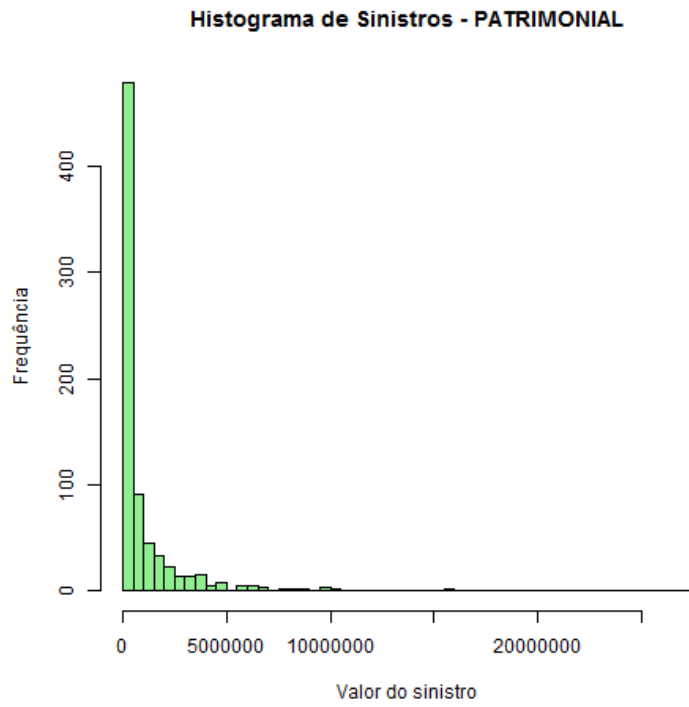


Figura 3 – Histograma de Sinistros Patrimonial

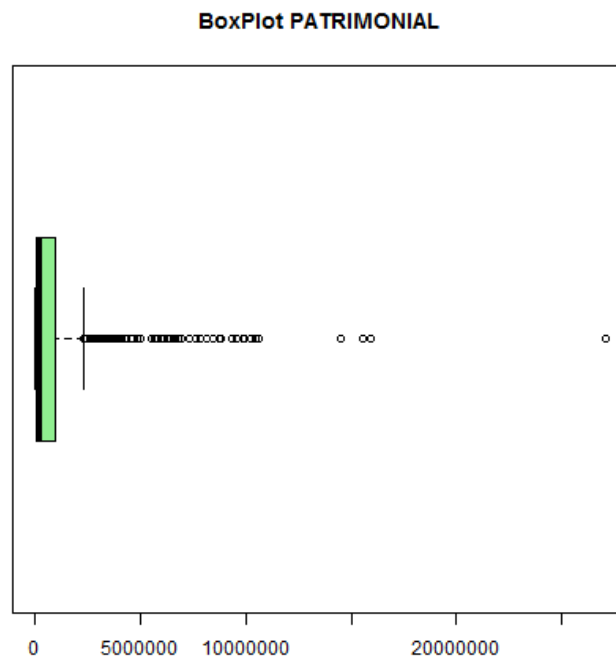


Figura 4 – BoxPlot Patrimonial

Após essas análises preliminares, utilizamos o pacote outliers do software R para verificar a possível existência de valores classificados como outliers. Após a exclusão dos registros classificados como outliers rerepresentamos os gráficos:

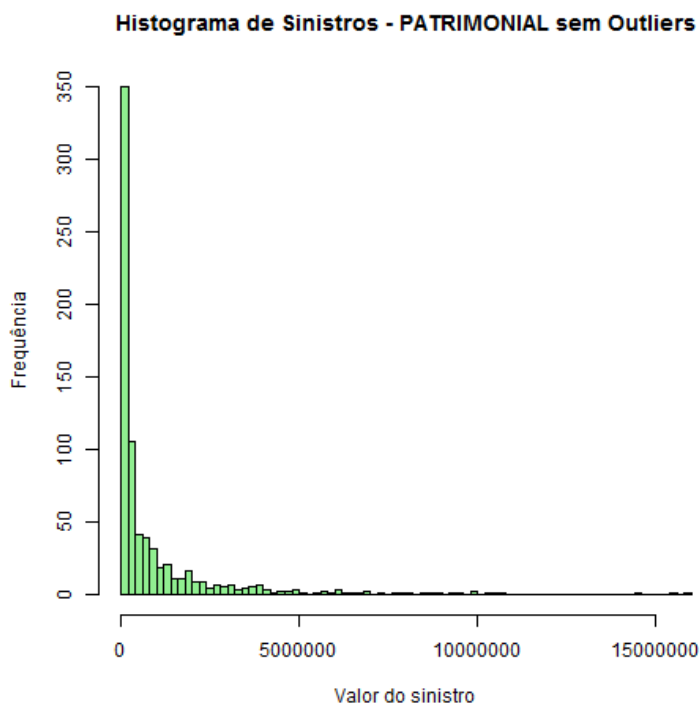


Figura 5 – Histograma de Sinistros desconsiderando Outliers (Patrimonial)

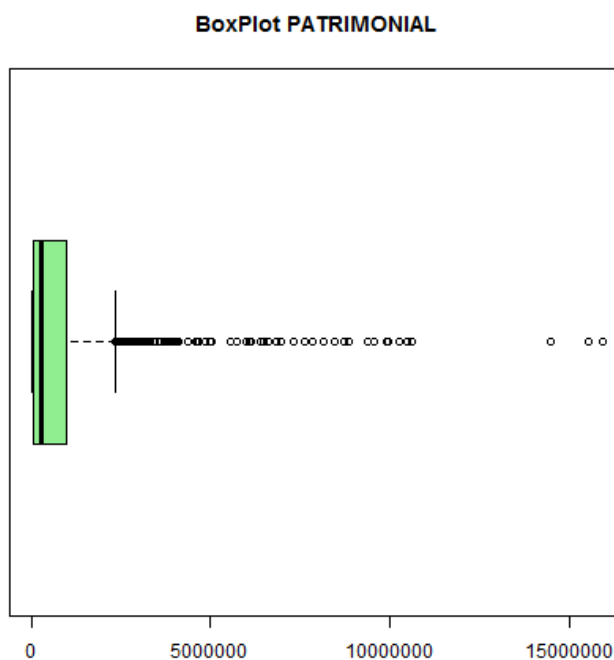


Figura 6 – BoxPlot desconsiderando outliers (Patrimonial)

Estatística	Patrimonial
Min.	5.346
1st Qu.	56.470
Median	251.900
Mean	977.800
3rd Qu.	967.100
Max.	15.940.000

Figura 7 – Estatísticas descritivas grupo Patrimonial desconsiderando outliers

Verificamos uma redução do coeficiente de variação com a exclusão dos outliers. A média diminuiu, porém continua maior que o 3º quartil, isso significa que os valores de sinistros altos continuam puxando a média da distribuição. Os resultados dessa análise descritiva reforçam portanto que a volatilidade é inerente a carteira e não somente fruto da influência de sinistros pontuais, ou mesmo outliers.

3.2. Transportes

A carteira a ser analisada neste sub-item diz respeito aos riscos de danos à carga transportada. Nesse ramo poderia ser esperada uma maior homogeneidade nos sinistros, porém a diversidade de tipos de carga, tanto em valor quanto em características faz com que também seja observada grande volatilidade nos seus resultados. O coeficiente de variação ficou próximo ao da carteira analisada anteriormente (CV=258%), mas dada as diferenças nas médias, medianas e nos valores para o terceiro quartil fica evidente que se tratam de riscos de menor valor no geral. No entanto, há sim um volume de sinistros altos que influenciam significativamente nossas análises, inclusive um sinistro de 66 milhões, que posteriormente foi considerado outlier.

Estatística	Transportes
Min.	400
1st Qu.	3.074
Median	14.640
Mean	246.400
3rd Qu.	119.400
Max.	66.080.000

Figura 8 – Estatísticas descritivas do grupo Transportes

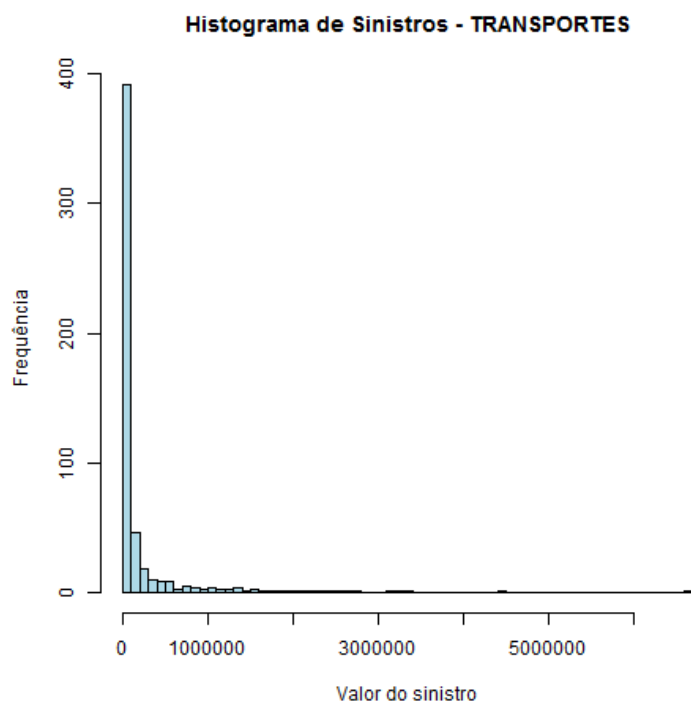


Figura 9 – Histograma dos Sinistros de Transportes

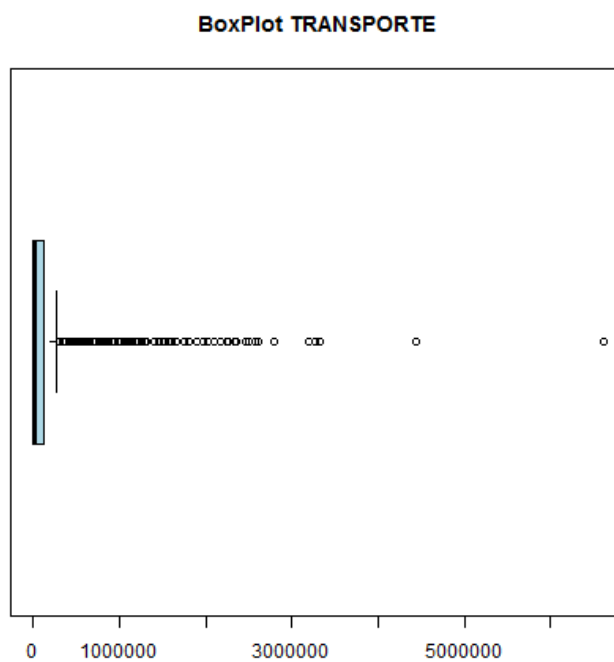


Figura 10 – BoxPlot Transporte

Apresentaremos a seguir os gráficos e estatísticas descritivas após a análise dos *outliers*:

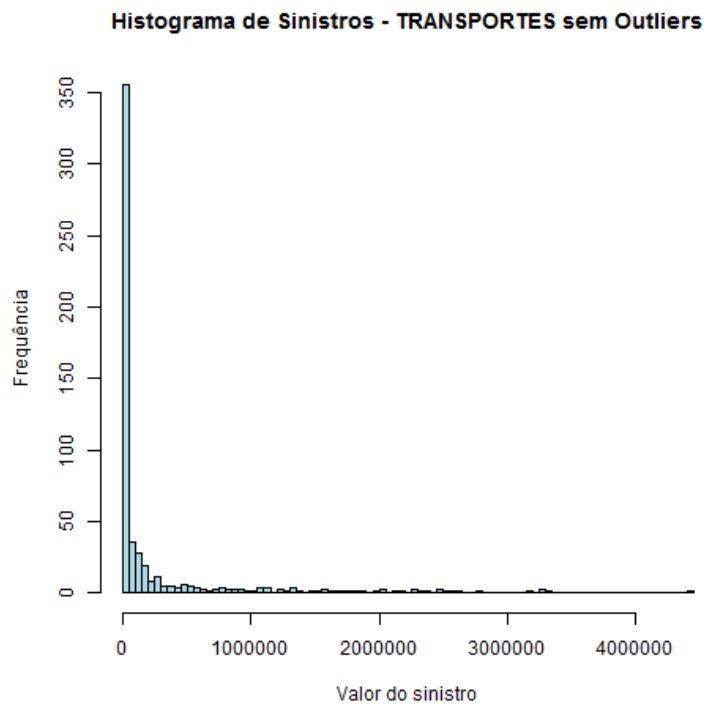


Figura 11 – Histograma de Sinistros desconsiderando Outliers (Transportes)

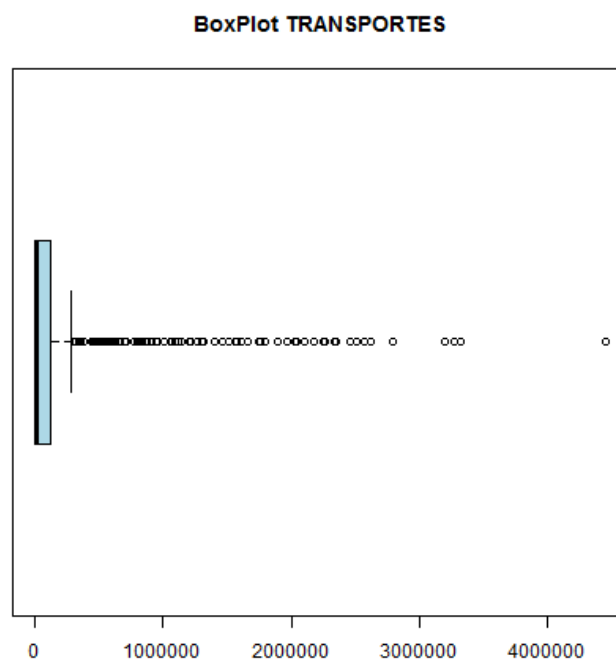


Figura 12 – BoxPlot desconsiderando outliers (Transporte)

Estatística	Transportes
Min.	400
1st Qu.	2.998
Median	14.580
Mean	234.700
3rd Qu.	115.700
Max.	4.447.000

Figura 13 – Estatísticas Descritivas do grupo de Transporte desconsiderando outliers

Mesmo após a retirada dos *outliers* a distribuição segue bastante influenciada pelos altos valores, que como dito antes fazem parte da realidade da carteira. A mediana e o primeiro quartil estão tão próximas, que a partir do Boxplot verificamos claramente que a distribuição não é simétrica. A série de pontos após o terceiro quartil permanece mesmo após a retirada dos outliers, refletindo o antes observado sobre a diversidade nas cargas transportadas, apesar de todas pertencerem a um mesmo ramo de seguro e estarem expostas a riscos similares, nesse caso, roubo, acidentes no transporte, entre outros.

4. AJUSTE DAS DISTRIBUIÇÕES DE PERDAS

4.1. Estimação dos parâmetros por Máxima Verossimilhança

Para estimação dos parâmetros existem uma gama de métodos. Utilizaremos o métodos da máxima verossimilhança, pois em muitos casos esse método nos conduz a estimativas razoáveis. A estimativa de máxima verossimilhança de θ , isto é $\hat{\theta}$, segundo Meyer (1983, pág. 341), é aquele valor de θ que torna máxima $L(X_1, \dots, X_n; \theta)$, considerada como uma função de θ para uma dada amostra X_1, \dots, X_n , onde L é definida pela equação:

$$L(X_1, \dots, X_n; \theta) = f(X_1; \theta)f(X_2; \theta) \dots f(X_n; \theta)$$

Cabe ressaltar que naturalmente $\hat{\theta}$ será uma estatística, e por isso, uma variável aleatória, já que seu valor dependerá da amostra.

Sob condições bastantes gerais, em amostras de tamanho grande, as estimativas de máxima verossimilhança são coerentes, pois se aproximam do parâmetros a ser estimado.

4.2. Teste Kolmogorov-Smirnov (KS)

No teste de Kolmogorov-Smirnov nosso objetivo é testar a aderência da nossa amostra a uma distribuição continua particular. Segundo DeGROOT (4^o edição, pág 657), as seguintes hipóteses serão testadas:

$$H_0: F(x) = F^*(x) \\ H_1: A hipótese H_0 é falsa$$

O teste KS é um teste não-paramétrico, pois não sabemos ao certo a qual distribuição pertence a nossa amostra. Ele avalia a distância entre a amostra $F(x)$ e a distribuição que se está testando a aderência $F^*(x)$. A estatística D^* tende a ser menor quando a hipótese nula é aceita, e tende a ser maior quanto a hipótese nula é rejeitada.

$$D_n^* = \max|F_n(x) - F^*(x)|$$

Finalmente, para a avaliação do teste adotaremos um nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$).

O resultados serão apresentados a seguir:

4.3. Patrimonial

Iniciamos nossa análise pelo grupo patrimonial e testaremos se a amostra desse grupo é aderente a distribuição LogNormal. Os parâmetros estimados para LogNormal através do método de máxima verossimilhança foram:

$$\hat{\mu} = 12,379805 \text{ e } \hat{\sigma} = 1,832155$$

Utilizamos o software estatístico R para fazer o teste do KS, os resultados estão expostos a seguir:

One-sample Kolmogorov-Smirnov test
D = 0,039857, p-value = 0,1856
alternative hypothesis: two-sided

Portanto, uma vez que o p-valor se mostrou maior que o nível de significância adotado ($\alpha = 5\%$), podemos concluir que a distribuição LogNormal com os parâmetros apresentados acima fornece um bom ajuste para a amostra do Grupo Patrimonial, segundo o teste KS.

Para ilustrar a conclusão, apresentamos o gráfico da função densidade de probabilidade da LogNormal (destacada em vermelho) ajustada a amostra do Grupo Patrimonial:

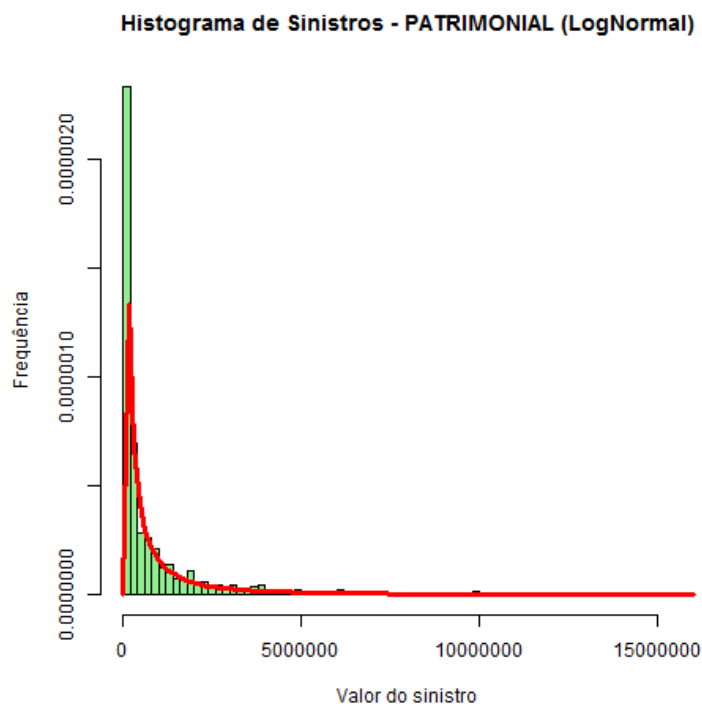


Figura 14 – Patrimonial: Aderência a LogNormal

4.4. Transportes

Para o grupo de transportes testamos novamente a Log-Normal. Os parâmetros estimados para LogNormal através do método de máxima verossimilhança foram:

$$\hat{\mu} = 9,644027 \text{ e } \hat{\sigma} = 2,898311$$

Utilizamos o software estatístico R para fazer o teste do KS:

One-sample Kolmogorov-Smirnov test
D = 0,038451, p-value = 0,4064
alternative hypothesis: two-sided

O p-valor se mostrou maior que o nível de significância adotado ($\alpha = 5\%$), e por isso podemos concluir então que a distribuição LogNormal com os parâmetros apresentados acima fornece um bom ajuste para a amostra do Grupo de transportes.

Apresentamos a seguir o gráfico da função densidade de probabilidade da LogNormal (destacada em vermelho) ajustada a amostra:

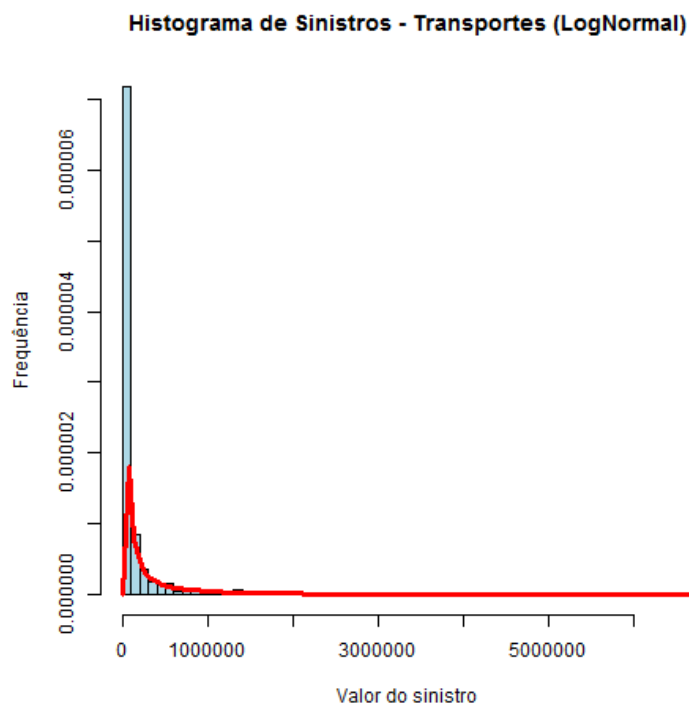


Figura 15 – Transporte aderência a Log-Normal

5. ESTIMATIVA DE SINISTROS

5.1. Método Chain Ladder

A técnica mais básica e mais conhecida para estimar os sinistros ocorridos mas não pagos é o método Chain-Ladder. Esse modelo, que também é conhecido como triângulo de runoff devido ao seu formato, parte do pressuposto que a evolução passada dos sinistros será semelhante no futuro. Cabe ressaltar, que esse método calcula uma estimativa pontual. É evidente que como este método apresenta a estimativa pontual não podemos calcular as demais medidas de risco, como VaR ou Tail Var. A seguir, apresentamos a metodologia detalhada.

A partir dos valores incrementais observados C_{ij} , obtemos os valores acumulados Y_{ij} , que são da forma:

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^j C_{ik} .$$

Com o triângulo acumulado, exposto abaixo, calculamos os fatores de desenvolvimento f_j que serão o resultado da divisão da soma dos valores da coluna j, pela coluna imediatamente anterior. A fórmula é descrita a seguir:

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} Y_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} Y_{i,j-1}}$$

onde “n” é o número de período de desenvolvimentos.

Ocorrência	Atraso							
	0	1	2	3	4	5	6	7
201401	991.711	14.380.904	33.084.742	50.093.619	59.891.480	65.797.527	71.995.380	73.823.274
201402	7.035.084	37.123.006	68.464.004	102.573.701	120.214.829	126.861.233	129.936.369	
201501	2.128.420	21.990.018	74.400.661	96.459.381	130.077.256	140.977.063		
201502	6.147.492	32.216.665	61.218.731	77.234.791	82.060.368			
201601	22.370.857	70.033.857	102.225.471	116.297.347				
201602	881.453	18.159.377	46.730.620					
201701	18.939.391	48.458.138						
201702	1.397.973							
Fatores de Desenvolvimento		4,1433	1,9913	1,3043	1,2019	1,0756	1,0481	1,0254

Obtidos os fatores, podemos estimar os valores acumulados dos fluxos de caixa futuros. Nosso triângulo anterior terá as lacunas destacadas em cinzas completadas com os valores estimados (\hat{Y}_{ij}):

Ocorrência	Atraso							
	0	1	2	3	4	5	6	7
201401	991.711	14.380.904	33.084.742	50.093.619	59.891.480	65.797.527	71.995.380	73.823.274
201402	7.035.084	37.123.006	68.464.004	102.573.701	120.214.829	126.861.233	129.936.369	133.235.328
201501	2.128.420	21.990.018	74.400.661	96.459.381	130.077.256	140.977.063	147.762.526	151.514.073
201502	6.147.492	32.216.665	61.218.731	77.234.791	82.060.368	88.264.761	92.513.093	94.861.911
201601	22.370.857	70.033.857	102.225.471	116.297.347	139.774.238	150.342.243	157.578.468	161.579.233
201602	881.453	18.159.377	46.730.620	60.949.062	73.252.821	78.791.296	82.583.654	84.680.373
201701	18.939.391	48.458.138	96.495.574	125.855.696	151.262.126	162.698.703	170.529.665	174.859.249
201702	1.397.973	5.792.270	11.534.253	15.043.710	18.080.577	19.447.608	20.383.654	20.901.175
Fatores de Desenvolvimento		4,1433	1,9913	1,3043	1,2019	1,0756	1,0481	1,0254

Onde \hat{Y}_{ij} é o resultado da fórmula $\hat{Y}_{ij} = Y_{i,j-1} * f_j$.

Os valores incrementais estimados \hat{C}_{ij} , serão o resultado da “desacumulação” dos valores da tabela acima.

5.2. Método Log-Normal

Esse método ajusta um modelo GLM aos dados do sinistros para estimar os valores futuros de pagamento, onde as variáveis explicativas são fatores que traduzem a influência do período de ocorrência e de pagamento do triângulo. As variáveis resposta serão o valor que consta nas células do triângulo de run-off e podem ser descritas conforme abaixo:

Figura x – Triângulo run-off (logaritmo do valor incremental)

		Pagamento (j)			
		1	2	3	4
Trimestre de Ocorrência (i)	2010/01	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$	$Y_{1,3}$	$Y_{1,4}$
	2010/02	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$	$Y_{2,3}$	
	2010/03	$Y_{3,1}$	$Y_{3,2}$		
	2010/04	$Y_{4,1}$			

Uma premissa importante é que o logaritmo natural dos valores incrementais segue uma distribuição normal com média m_{ij} e variância σ^2 , onde a média está em função de dois parâmetros α_i e β_j , que traduzem, respectivamente, a influência da linha e da coluna do triângulo.

$$y_{ij} = \ln(C_{ij}) = m_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

$$m_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j$$

Os erros são também distribuídos normalmente, porém com média zero. Representando esses erros também no formato de um triângulo com seus valores incrementais C_{ij} representados abaixo.

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

É importante ressaltar que uma restrição causada pela necessidade de se retirar o logaritmo dos valores dos sinistros é que os valores incrementais devem ser positivos.

Os valores incrementais estimados serão obtidos por:

$$\hat{C}_{ij} = \exp\left(\hat{m}_{ij} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij}^2\right)$$

5.3. Teoria de Cópulas

Usaremos o método de cópulas para entender a dependência entre os triângulos de run-off das linhas de negócios que estamos estudando. As cópulas não são comumente implementadas na parte de seguros e resseguros, no entanto, elas tem uma funcionalidade que é interessante porque podemos construir um modelo multivariado que separa o comportamento marginal das variáveis aleatórias da estrutura de dependência existente entre elas. Existem muitas famílias de cópulas: gaussiana, elípticas, t, arquimediana. Para os nossos dados entendemos que a cópula arquimediana é a mais adequada. Ela é mais utilizada em

finanças, econometria e estatística pois permitem uma variedade grande de estruturas de dependência.

O conceito de cópula foi primeiramente apresentado por Sklar (1959) e culminou na apresentação do Teorema de Sklar. No entanto, as cópulas arquimedianas, não derivam explicitamente desse Teorema.

A definição para esse tipo de cópulas é:

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

Onde φ , conhecido como gerador da cópula, é uma função contínua e estritamente decrescente de $[0,1]$ em $[0, \infty]$ tal que $\varphi(1) = 0$.

A pseudo-inversa de φ é a função $\varphi^{[-1]}: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ dada por,

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

A função $\varphi^{-1}(t)$ é contínua e decrescente em $[0, \infty]$, e estritamente decrescente em $[0, \varphi(0)]$.

A definição apresentada anteriormente define o conjunto das Cópulas Arquimedianas Bivariadas e na tabela abaixo apresentamos alguns exemplos delas:

Cópula	$C_\theta(u, v)$	$\varphi_{\theta(t)}$	Domínio de θ
Clayton	$\max([u^{-\theta} + v^{-\theta}], 0)$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\theta \geq 0$
Gumbel	$\exp\left(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right)$	$(-\ln t)^\theta$	$[1, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Joe	$1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}$	$-\ln(1 - (1-t)^\theta)$	$[1, \infty)$

Figura 16 – Principais cópulas arquimedianas

As cópulas dessa família têm duas propriedades importantes, são cópulas simétricas e associativas. Inclusive, a propriedade associativa é uma vantagem em relação as outras cópulas.

Para a geração de variáveis aleatórias (K_C), temos como base do algoritmo o seguinte teorema:

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}$$

Onde C é a cópula arquimediana bivariada e φ seu gerador.

O algoritmo que gera as variáveis aleatórias tem os seguintes comportamentos:

Simulam duas variáveis independentes, s e q , com distribuição uniforme entre 0 e 1.

No nosso caso, s e q são respectivamente, sinistros grupo patrimonial e sinistros grupo transporte;

Calcular $t = K_C^{-1}(q)$, onde a função de geração de variáveis aleatórias é a função de distribuição $C(U,V)$;

Calcular $u = \varphi^{[-1]}(s\varphi(t))$ e $v = \varphi^{[-1]}((1-s)\varphi(t))$;

$$x = F_X^{-1}(u) \text{ e } y = F_Y^{-1}(v)$$

O tipo de cópulas a ser escolhido varia de acordo com as características dos dados. No que diz respeito as cópulas arquimedianas, nem Gumbel nem Joe tem dependência de cauda negativa. Porém para modelar a dependência de cauda superior temos gumbel, para uma menor dependência da cauda temos Clayton e sem dependência alguma da cauda temos Frank.

6. RESULTADO DAS ESTIMATIVAS

As estimativas pontuais pela Log-Normal para Patrimonial e Transportes, respectivamente ficaram em:

Grupo	IBNP
Patrimonial	388.986.230
Transportes	91.240.137
Total	480.226.367

A partir dos resíduos normais $N \sim (0, \sigma)$ gerados pelos triângulos referentes a Patrimonial e Transportes separadamente calculamos a acumulada da normal no ponto r , $R(Pat)_{ij}$ e $R(Tra)_{ij}$, onde i representa a linha do triângulo e j representa a coluna do triângulo. Criaremos dois vetores, cada vetor representando uma linha de negócio. Esses vetores, resíduos uniformizados, serão utilizados pela função de cópulas. Cabe destacar a importância em se respeitar a ordem do triângulo nos vetores. Por exemplo, para o Vetor $R(Pat)_{ij}$, temos:

$$R(Pat)_{1,1}$$

$$R(Pat)_{2,1}$$

$$R(Pat)_{3,1}$$

...

$$R(Pat)_{ij}$$

A partir da construção dos vetores, utilizamos a biblioteca “copula” e “vinecopula” do software R para nos auxiliar na conclusões. A função BicopSelect seleciona o tipo de copula

mais adequado aos dados baseado no critério de AIC (no anexo I, apresentamos o critério de informação de Akaike), e informa ainda os parâmetros estimados através do método da máxima verossimilhança bem como demais estatísticas.

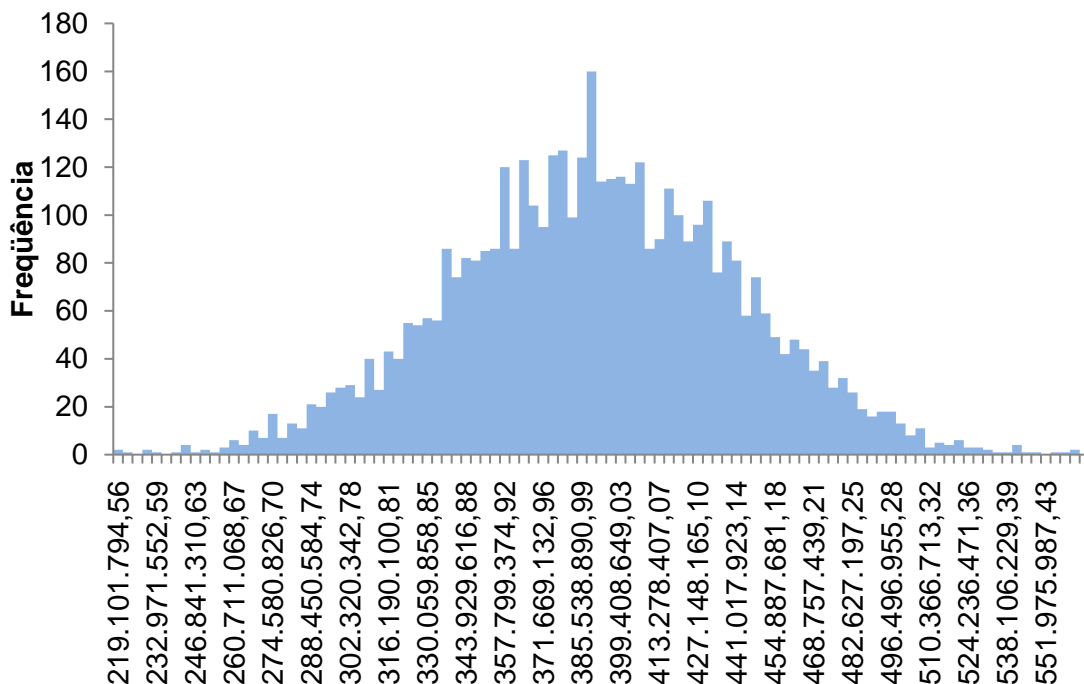
Apresentamos na figura 18, a cópula selecionada a partir dos resíduos do triângulo de perdas sugere o uso da cópula arquimediana: JOE.

Cópula:	JOE
Parâmetro:	1,44
Medidas de dependência	
Kendall's tau:	0.2 (empirical = 0.11, p value = 0.35)
Upper TD:	0,38
Lower TD:	0
Estatísticas de Ajuste	
logLik:	2,38
AIC:	-2,76
BIC:	-1,17

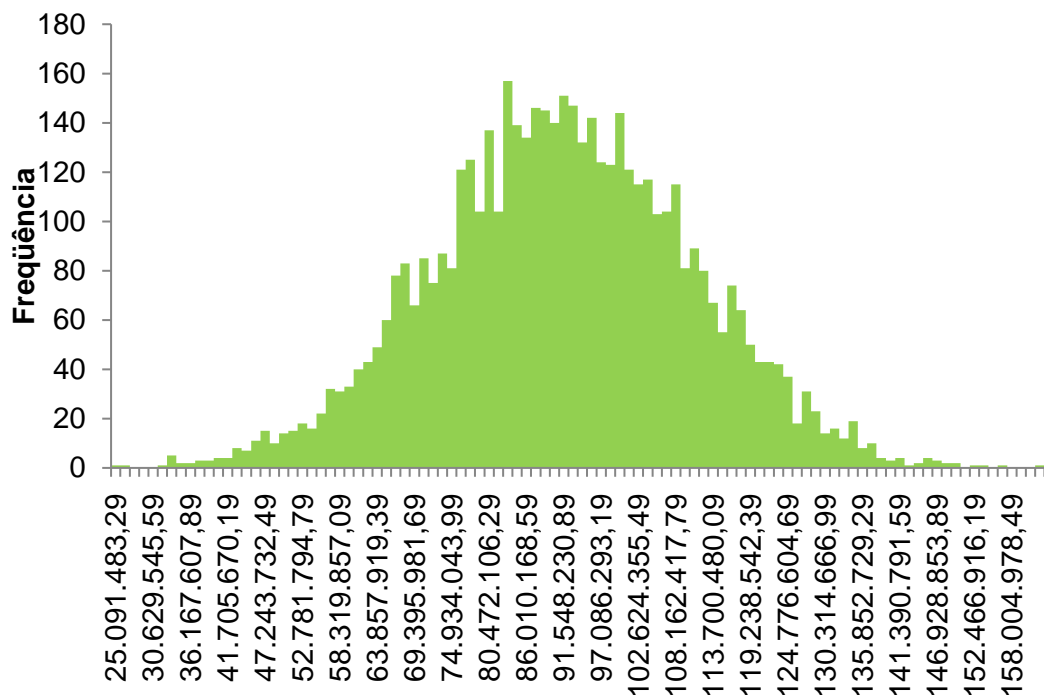
Figura 17 – Copula selecionada

Com base na cópula arquimediana Joe geramos 5.000 simulações para posteriormente obter a distribuição das perdas baseado nos novos vetores de resíduos simulados pela função de cópulas com influência da dependência entre as carteiras.

O Histograma dos valores simulados a partir da função de copulas para perda referente a linha Patrimonial apresentou uma distribuição não-paramétrica com formato de sino conforme o esperado.



Abaixo consta o histograma para as perdas referentes a carteira de Transportes, que também se comportou conforme o esperado.



Com essas distribuições somos capazes de estimar com mais precisão a distribuição de perdas da resseguradora referentes as linhas de negócio patrimonial e transporte. E podemos calcular as demais medidas de risco.

Linha de Negócio	VaR 50%	VaR 95%	VaR 99%	VaR 99,5%	TvaR Acima 99,5%
Patrimonial	387.069.908	470.305.232	503.150.519	518.689.297	533.965.165
Transporte	90.586.806	122.324.817	134.369.630	138.479.683	145.889.528
TOTAL	477.656.714	592.630.048	637.520.149	657.168.980	679.854.693

Comparamos o valor esperado das perdas nos dois cenários e verificamos um valor menor calculado através do método de cópulas, que levando em consideração a dependência entre as carteiras.

7. CONCLUSÃO

O objetivo desse trabalho era conhecer a distribuição das perdas verificando a relação da dependência entre duas carteiras de uma resseguradora e seu impacto nas medidas de risco. Através do método de copulas fomos capazes de estimar uma distribuição que melhor representasse o cenário de perda da empresa, evitando aumento de provisão e apurando com mais segurança as medidas de risco.

ANEXO I – Critério de Informação de Akaike

O critério de informação de Akaike (AIC) é uma medida de avaliação da qualidade relativa do ajuste do modelo. O AIC é definido a partir da seguinte formulação:

$$AIC_p = -2 \log(\theta) + 2(p)$$

Onde θ é a função de verossimilhança no ponto máximo do modelo e p é a quantidade de parâmetros utilizados. O primeiro termo da fórmula faz referência a qualidade do ajuste e a segunda parte tem a finalidade de corrigir o viés proveniente da quantidade de parâmetros utilizados no modelo.

O modelo que apresentar o menor valor para o AIC será o selecionado.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Artigo utilizado na aula do william:

Dependent Loss Reserving Using Copulas

Peng Shi (Northern Illinois University) and Edward W. Frees (University of Wisconsin – Madison)

July 29, 2010

Probabilidade – Aplicações à Estatística

Paul L. Meyer – 2º edição

Probability and Statistics

Fourth edition

DeGROOT | SCHERVISH

Estatística

2º edição

Pedro Luiz de Oliveira Costa Neto

SUPERINTENDÊNCIA DE SEGUROS PRIVADOS. Circular SUSEP Nº517/2010. Disponível em: <<http://www.susep.gov.br/bibliotecaweb/docOriginal.aspx?tipo=1&codigo=27458>>.

Acesso em: jun. 2018.

MANO, Cristina Catanhede Amarante. FERREIRA, Paulo Pereira. *Aspectos Atuariais e Contábeis das Provisões Técnicas*. Rio de Janeiro, 2009.

Artigo do eduardo altieri

Aplicação de cópulas na modelação do número de sinistros de grupos de risco homogéneos no seguro automóvel

Mariana Faria dos Santos ISEG, Universidade Técnica de Lisboa