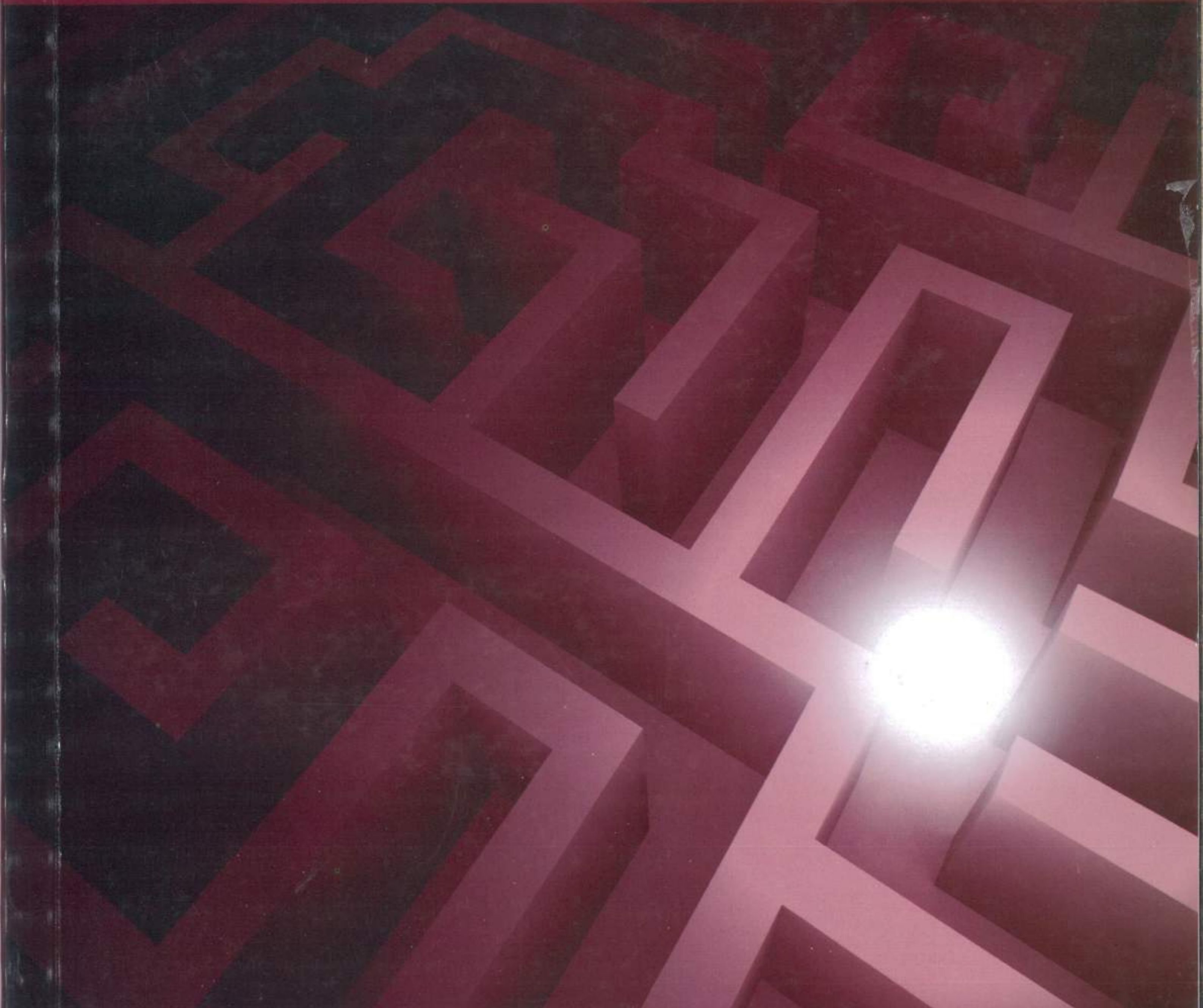
ÁLGEBRA:
pensar, calcular, comunicar...

Lucia A. de A. Tinoco (Coord.)



INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROJETO FUNDÃO

Álgebra: pensar, calcular, comunicar, ...

Coord. Lucia A. de A. Tinoco

Ed. IM-UFRJ - Rio de Janeiro

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Fabio Osmar de Oliveira Maciel – CRB-7 6284

T591
Álgebra: pensar, calcular, comunicar... [recurso eletrônico] / coordenação: Lucia A. de A. Tinoco. – Rio de Janeiro: Editora IM/UFRJ – Projeto Fundão, 2024.
Recurso digital

Formato: PDF
Requisitos do sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-01-06736-0

1. Álgebra – Estudo e ensino. I. Tinoco, Lucia A. de A., org.

CDD : 512

Índice para catálogo sistemático:
Álgebra 512

Equipe Responsável

Coordenação – *Lucia Arruda de Albuquerque Tinoco*

<table>
<tr><th></th><th>1ª Edição – 2008
25 Anos do Projeto Fundão</th><th>2ª Edição – 2011</th><th colspan="2">3ª Edição - 2024</th></tr>
<tr><td>Professores</td><td>Ana Lucia Bordeaux Rego
Gilda Maria Portela
Maria Palmira Costa Silva
Marcos Antônio Correa de Souza
Mírian Salgado</td><td>Gilda Maria Portela
João Rodrigo Esteves Statzner
Kelly Regina de P. Motta Moura
Letícia Guimarães Rangel
Maria Palmira Costa Silva
Tatiana Cardoso Maia</td><td colspan="2">Gilda Maria Portela
João Rodrigo Esteves Statzner
Maria Palmira Costa Silva</td></tr>
<tr><td>Licenciandos</td><td>Anderson Luis Barbosa da Costa
João Rodrigo Esteves Statzner
Kelly Regina de Paula Motta
Leonardo Andrade da Silva</td><td>Cassius T. C. Mendes
Karen de Assis Waltz</td><td>Colaboradores</td><td>Kelly Regina de P. Motta Moura
Letícia Guimarães Rangel
Tatiana Cardoso Maia</td></tr>
</table>

Capa – *Leonardo Boechat*

Patrocínio 1ª edição – *Petrobras*

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROJETO FUNDÃO

Álgebra: pensar, calcular, comunicar, ...

Visualize por um momento uma aula de Matemática elementar onde os alunos estão fazendo Matemática. Que verbos você usaria para descrever as atividades nesta sala? Pare um momento e faça uma pequena lista antes de continuar a leitura.
Crianças nas classes tradicionais geralmente descrevem Matemática como "trabalho" ou "obtenção de respostas". Eles falam em "somar" e "contas de vezes" (multiplicação).
Em contraste, a lista de verbos a seguir pode ser encontrada na maior parte da literatura que descreve a reforma da Educação Matemática, e todos são usados nos "Princípios e Padrões": explorar, investigar, conjecturar, resolver, justificar, representar, formular, descobrir, construir, verificar, explicar, predizer, desenvolver, descrever e usar.
Estes são verbos da ciência indicando o processo de "fazer sentido" e "desvendar". Quando crianças estão engajadas em tipos de atividades sugeridas por esta lista, é virtualmente impossível para elas serem observadoras passivas. Elas estarão necessariamente pensando ativamente sobre as idéias matemáticas envolvidas em tais atividades.
Em sala de aula, onde se faz Matemática dessa maneira no dia a dia, os estudantes estão recebendo uma mensagem poderosa: "Você é capaz de fazer com que isto faça sentido – você é capaz de fazer Matemática".

(Walle, 2007)

Álgebra: pensar, calcular, comunicar, ...

SUMÁRIO

	Página
Capítulo I - Introdução	1
Capítulo II – As Concepções da Álgebra	7
Capítulo III – O Sinal de Igualdade	14
Capítulo IV – A Propriedade Distributiva	27
Capítulo V – Simbologia e Linguagem Algébrica	34
Capítulo VI – Regularidade e Generalização	53
Capítulo VII – Variação de Grandezas	70
Capítulo VIII – Resolução de Problemas; nem sempre as Equações são Necessárias	80
Capítulo IX – Equações – Além dos Métodos de Resolução	90
Capítulo X – Jogos Algébricos	100
Anexo – O Teste	106
Bibliografia	110

Capítulo I – Introdução

Em nossa experiência de sala de aula, sempre nos incomodou o tratamento que dávamos ao ensino de Álgebra. No oitavo ano, principalmente, passávamos todo o tempo ensinando regras e procedimentos, preocupados em preparar os alunos para que, quando chegassem ao nono ano e se deparassem com as equações do segundo grau, sistemas, funções e resolução de problemas, soubessem transferir e aplicar todo aquele mecanismo algébrico nas novas situações propostas. Mas, o que se observava geralmente era a dificuldade dos mesmos diante das situações apresentadas, demonstrando surpresa quando tentávamos fazer com que lembrassem que haviam estudado.

Esses fatos nos levaram a concluir que não havia uma aprendizagem efetiva em Álgebra, apesar de toda nossa dedicação a esse conteúdo. Isto porque o trabalho que fazíamos, crentes de que estávamos acertando, era puramente mecânico; nós não conhecíamos de fato que significados os nossos alunos atribuíam a ele.

Essa situação e a experiência com o trabalho do Projeto Fundão nos levaram à busca de respostas para as seguintes questões.

- O que é a Álgebra num currículo do ensino fundamental?
- Que papel este campo da matemática pode ter para o desenvolvimento dos alunos desse nível?

Começamos então, com um grupo do Projeto Fundão, uma pesquisa sobre o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica no ensino básico.

Os objetivos gerais dessa pesquisa foram:

- identificar as funções do ensino de Álgebra no ensino básico;
- propiciar a reflexão dos professores deste nível escolar sobre os prejuízos de um ensino mecanizado da Álgebra e
- fornecer subsídios a esses professores para realizar um ensino significativo desse tópico.

Na tentativa de responder às questões acima, analisamos artigos de diversos pesquisadores. Souza e Diniz (1994), Fiorentini, Miorim, e Miguel (1993) e Usiskin (1994) apontam os mesmos problemas detectados na nossa experiência e salientam a riqueza do ensino de Álgebra no currículo do ensino fundamental, explicitando suas diversas funções, que se bem trabalhadas e integradas poderão contribuir para o desenvolvimento da criatividade, da concentração, do raciocínio lógico e do abstrato, das habilidades de generalizar e de comunicar idéias. Isto é o que desejamos para nossos alunos, mas os impedimos com a postura tecnicista adotada. Devido à importância dos aspectos destacados acima, voltaremos a eles ainda nesta Introdução e no Capítulo II.

Testes e Entrevistas

A análise desses textos permitiu aos membros da equipe reconhecer deficiências em relação à sua formação algébrica, que já tinham sido observados ao longo da experiência profissional de cada um em alunos de diversos níveis.

Com base nessa análise, o grupo elaborou um teste, para servir de base a entrevista com alunos do sétimo ao nono ano do ensino fundamental, na qual fosse possível detectar indícios de tais deficiências.

Pretendemos com isso observar como esses alunos reconhecem e usam a noção de variável em diversos contextos, ou seja, como eles usam letras para generalizar um fenômeno ou para expressar o resultado de uma medição ou de uma operação; se admitem a possibilidade de usar letra ou expressão algébrica para representar um dado numérico; se escrevem expressões algébricas e se resolvem equações simples, escritas na forma padrão ou não.

Testes escritos foram aplicados a 100 alunos do Ensino Médio, após as entrevistas com 7 alunos do Ensino Fundamental.

As respostas ao teste escrito e às entrevistas se complementaram. A diferença de nível escolar não afetou o tipo de respostas e/ou as dificuldades, e os resultados não apresentaram muitas novidades em relação ao que já havia sido constatado por outros pesquisadores nos estudos analisados anteriormente. As questões desse teste e resumo dos seus resultados encontram-se em anexo.

Em geral, os alunos não parecem admitir que o resultado de uma contagem ou de uma medição possa ser dado por uma expressão algébrica, principalmente se esta expressão tiver mais de um termo. Daí a freqüência de respostas nas quais a variável é substituída por um valor numérico, com os mais diversos critérios incorretos.

Para oferecermos subsídios aos professores no sentido da melhoria desse quadro, passamos a elaborar, adaptar e aplicar atividades pudessem contribuir na busca de um ensino de Álgebra ao qual o aluno atribua o significado esperado, contemplando as funções referidas anteriormente. A produção dos alunos frente a elas foi objeto de reflexão permanente. Nesse processo, tínhamos clareza de que duas noções assumem um papel preponderante: a noção de equivalência, que deveria ser construída durante o ensino de aritmética, e a de variável, à qual nos referiremos adiante.

Passamos a mencionar alguns aspectos explicitados pela equipe nas respostas dos testes e ao longo dos estudos e experimentos realizados. Acreditamos que a maioria dos professores leitores deste trabalho reconhecerá nestas observações muito do que seus alunos produzem em sala de aula, concordando assim sobre a necessidade de mudanças no ensino de Álgebra.

1 - A Noção de Equivalência

O trabalho com a aritmética, na maioria dos casos, enfatiza procedimentos para obter um resultado expresso por um único número. O sinal de igualdade liga sempre uma expressão a outra mais simples ou ao resultado final. Isto justifica em parte o fato de os alunos usarem muitas vezes a igualdade em um só sentido, ignorando suas propriedades simétrica e transitiva, como no exemplo: 3 x 5 = 15 - 2 = 13 + 7 = 20.

Esta prática não prepara o aluno para o trabalho com expressões algébricas, no qual muitas vezes ele iguala uma expressão a outra que não é “o resultado” dela, e sim equivalente a ela.

Observam-se então, com freqüência, dificuldades dos alunos iniciantes em Álgebra que os levam por vezes a “fechar” qualquer expressão obtida, igualando-a a um número, uma letra (em geral, x) ou uma expressão com um só termo ou, em outras, a ficar inseguros diante de igualdades como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, sem saber o que é resultado de quê. Nos capítulos III e IV voltaremos a este assunto com detalhes.

Essas observações nos remetem ao que salienta Falcão (1993) em relação à passagem da Aritmética para a Álgebra: o fato de haver ao mesmo tempo uma *ruptura* e uma *continuidade*. Faz parte da *ruptura*, por exemplo, a mudança na forma de abordar e resolver os problemas, enquanto ilustra a continuidade o uso constante na Álgebra de propriedades estruturais dos conjuntos numéricos e das operações elementares. Muitas das dificuldades dos alunos iniciantes em Álgebra são, portanto, problemas *herdados* da Aritmética.

2 - O Papel das Letras

Reduzir termos semelhantes é um dos procedimentos mais trabalhados em sala de aula, e, na tentativa de dar um sentido a ela, muitas vezes, se utiliza a associação da variável à primeira letra de um objeto, por exemplo, uma fruta. Assim, justifica-se o fato de que 2a + 3a = 5a com o argumento de que 2 abacaxis com 3 abacaxis são 5 abacaxis. Embora inicialmente produza um efeito positivo, este artifício é prejudicial à construção do conceito da variável. A letra a, em geral, é um número e não um objeto. Também uma expressão com letras diferentes, como 3m + 4p pode ser pensada como a reunião de 3 maçãs com 4 peras, mas é totalmente sem sentido pensar em 3m – 4p. Somente a propriedade distributiva pode servir de apoio à redução de termos semelhantes. No Capítulo IV serão exploradas atividades neste sentido.

Outra fonte de confusão para os iniciantes ao estudo das expressões algébricas é a experiência, necessária, dos alunos com letras que representam unidades de medida. Neste estudo, quando aparecem em uma expressão unidades diferentes de uma mesma grandeza, basta fazer a “redução à mesma unidade” e efetuar as operações com os números que expressam as medidas correspondentes. Novamente alertamos: as letras nessas expressões são grandezas usadas como unidades e não números. Reforçar a analogia entre a redução de termos semelhantes e estas situações, sem deixar clara a diferença entre as duas coisas, também não contribui para a compreensão dos procedimentos algébricos.

3 - O Conceito de Variável e as Funções

O conceito de variável está intimamente ligado com o de função, uma vez que entre os principais papéis da Álgebra estão os de usar as variáveis para descrever fenômenos de variação e de resolver problemas.

O conceito de Função está presente em situações do dia a dia e integra muitos ramos da Matemática e de outras ciências. Como salientado no livro *Construindo o Conceito de Função*, de autoria do mesmo grupo do Projeto Fundão que este (Tinoco, 2002), as construções desse conceito e do de variável podem se dar simultaneamente e desde cedo, no Ensino Fundamental. É necessário para isso um longo trabalho com atividades adequadas ao nível dos alunos. Exemplos dessas atividades são apresentados em todo o livro, especialmente nos capítulos VI e VII.

Mais particularmente, devemos considerar a importância do conceito de proporcionalidade como parte de um efetivo ensino de Álgebra. De acordo com Post, T. R., Beher, M. J. e Lesh, R. (1994), o pensamento proporcional é uma ponte adequada e necessária entre experiências e modelos numéricos e relações abstratas e genéricas, que se expressarão de forma algébrica. Além disso, a proporcionalidade é um exemplo simples, mas importante, de função matemática.

Essas considerações ilustram outro aspecto salientado por estes mesmos autores: a preocupação com a compreensão e o estabelecimento de conexões, que é central no nosso trabalho.

> Quanto mais os alunos entenderem, mais perceberão a Matemática como uma teia intrincada, e sempre em expansão, de idéias aprendidas anteriormente e ou inter-relacionadas e não como uma coleção de regras arbitrárias, aparentemente sem qualquer relação ou fundamento lógico. (p.101)

4 - Conceito de Variável e Concepções da Álgebra

Como foi dito anteriormente, na base do processo de formação do pensamento algébrico está o conceito de variável, dos mais difíceis, pela sua complexidade, como salientam Sierpinska (1992) e Caraça (1984). A variável é um representante de um conjunto, sem ser especificamente nenhum dos seus elementos; pode desempenhar papéis distintos (elemento genérico de certo conjunto numérico, variável dependente ou independente, parâmetro, incógnita, símbolo qualquer de estrutura,...) dependendo da situação.

Este processo está diretamente ligado à exploração da variedade de papéis da Álgebra, uma vez que, a cada um deles, corresponde um diferente modo de usar as variáveis. Um trabalho que aborde e integre todos esses papéis permitirá ao aluno a experiência necessária para que reconheça e utilize adequadamente as variáveis.

Esses papeis são chamados por nós de *concepções* e serão detalhadas no capítulo seguinte.

5 - A Linguagem Simbólica

Nas atividades realizadas pelo grupo e na experiência de cada membro da equipe deste trabalho observam-se muitas dificuldades entre os alunos com a linguagem algébrica em si, e isto ocorre, apesar da ênfase dada geralmente a este aspecto no ensino de Álgebra.

O fato de os alunos terem que se familiarizar com uma linguagem simbólica ao mesmo tempo em que constroem diversos conceitos novos pode ser causa dessas dificuldades. Em qualquer área do conhecimento, o aluno atinge autonomia no processo de aprender no momento em que adquire domínio da linguagem referente a essa área. Isso não é diferente na Matemática.

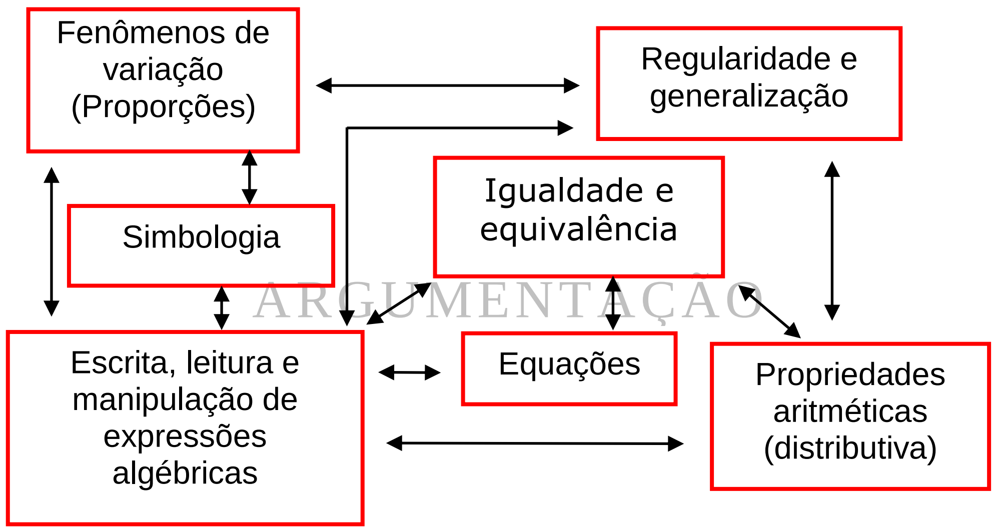
A simbologia matemática vem sendo um fator essencial para a evolução das idéias dessa e de outras ciências, além de facilitar a comunicação do conhecimento. Haja visto o grande salto na produção de matemática provocado pelo desenvolvimento da linguagem algébrica, principalmente a partir da contribuição de Viète, no século XVI.

Permitir que o aluno utilize e compreenda a simbologia matemática inclui entre outras coisas que ele possa, além de manipular os símbolos corretamente, ter cuidado com suas “justificações”, atribuindo assim a eles significados e podendo aplicá-los quando necessário. Esses e outros aspectos são mencionados por Arcavi (1995), quando caracteriza o “sentido do símbolo”.

> ...] nós defendemos a idéia de que o ‘sentido do símbolo’ deva incluir, além da evocação relevante de símbolos e seu uso adequado, a apreciação da sua elegância, sua concisão, sua comunicabilidade e o poder dos símbolos para expor e provar interrelações de uma maneira que a Aritmética não consegue [...
>
> Se o ‘sentido do símbolo’ requer que nós evoquemos símbolos quando eles forem adequados ou indispensáveis, então o ‘sentido do símbolo’ requer também que abandonemos os símbolos quando estivermos nos afogando em suas manipulações técnicas. (p. 44)

Os Capítulos V e VI permitem aprofundar a reflexão ora proposta.

No esquema abaixo resumimos os aspectos que priorizamos em uma aprendizagem efetiva e significativa de Álgebra, observando a ausência de hierarquia e a intensa inter-relação que existe entre eles. A palavra ARGUMENTAÇÃO permeia o esquema como sinal da necessidade da sua presença em qualquer trabalho de produção do conhecimento.



O Livro

Nos capítulos seguintes pretendemos compartilhar com a comunidade de professores de matemática as reflexões realizadas pelo grupo e as atividades utilizadas nesse processo.

No Capítulo II, apresentamos em detalhes as Concepções da Álgebra, referidas anteriormente, que serviram de base a todo o trabalho.

Os Capítulos III a X têm como objetivo propor estratégias e atividades de apoio aos professores que desejam colocar em prática um ensino que valorize os aspectos mencionados. As atividades propostas são acompanhadas de comentários decorrentes da análise das respostas produzidas por alunos com os quais elas foram testadas. Os exemplos de respostas foram transcritos literalmente.

Não pretendemos absolutamente indicar caminhos fechados que resolvam os problemas do ensino da Álgebra, mas contribuir para a reflexão sobre este ensino e para a busca desses caminhos por professores, como nós, preocupados com tais problemas.

Capítulo II – As Concepções da Álgebra

O baixo nível de aprendizagem e o desinteresse dos alunos em relação à Álgebra geram preocupação dos professores, e até mesmo insegurança dos mesmos a respeito do papel que o ensino desse assunto na escola básica desempenha.

Em resposta a essa questão, apresentamos as concepções da Álgebra, de acordo com o proposto por educadores como Usiskin (1994), Fiorentini (1996) e outros, e incorporado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998). Essas concepções explicitam a riqueza de papeis da Álgebra ensinada nesse nível escolar. Ao longo do nosso curso, vamos retornar a estas concepções várias vezes e aprofundar mais a discussão sobre sua importância. Os PCN se referem a elas como "Dimensões da Álgebra".

Segundo os autores mencionados, a Álgebra possui quatro concepções distintas, que não são excludentes e nem há hierarquia entre as mesmas. Cada uma delas se caracteriza pelos conteúdos abordados, tarefas usualmente propostas e, principalmente, pelos papeis que as letras desempenham.

Salientamos que o objetivo de apresentar essas concepções não é o de sugerir que sejam discutidas com os alunos da escola básica, mas sim o de permitir aos professores analisar a riqueza de conteúdos e habilidades cujo desenvolvimento o ensino da Álgebra pode propiciar, desde que todas sejam valorizadas e integradas. Salientamos que a classificação proposta não é rígida e que certas atividades envolvem mais de uma concepção.

Vamos analisar a seguir cada uma delas.

ÁLGEBRA COMO GENERALIZADORA DA ARITMÉTICA

Nessa concepção, a Álgebra é utilizada para traduzir e generalizar. As variáveis (letras) e expressões algébricas são generalizadoras de números, operações e modelos aritméticos.

Por exemplo, generaliza-se a propriedade comutativa da adição: $2 + 6 = 6 + 2$, ... por meio da igualdade $a + b = b + a$, e a regularidade nas multiplicações: $– 1 \times 2 = – 2$, e $– 2 \times 2 = – 4$, ... pode ser generalizada como $(– a) \times b = – (a \times b)$.

Ao representar um número par qualquer por $2k$, ou o triplo de um número por $3m$, estamos também usando a Álgebra na concepção **generalizadora da aritmética**.

Ao resolver problemas, encontramos relações entre números que desejamos "traduzir" matematicamente, e as variáveis são úteis para essa tradução. Por exemplo, ao traduzir um problema para a linguagem algébrica, monta-se uma equação (modelo matemático) que representa a estrutura matemática do mesmo. Neste sentido, cada equação é generalizadora, pois, pode modelar muitos problemas distintos, desde que tenham a mesma estrutura matemática.

Exemplo.

(I) *Seis pessoas da família Silva foram ao cinema e gastaram R$ 81,00 com os ingressos. Sabendo que nesse grupo há 3 estudantes, e que estudante paga a metade do preço de um ingresso, qual era o preço de cada ingresso nesse cinema?*

Podemos escrever a equação $3b + 3\,\frac{b}{2} = 81$, em que b representa o preço de cada ingresso.

Nesse caso, para chegar à equação foi necessário traduzir as operações envolvidas no problema.

A ÁLGEBRA FUNCIONAL

Nessa concepção, a Álgebra é considerada como estudo de relações entre grandezas. Nela se encontra, principalmente, o estudo das funções. Uma vez estabelecida a relação entre as grandezas envolvidas, seja por meio de uma igualdade, ou graficamente, utiliza-se a **álgebra funcional** ao analisar o comportamento de uma grandeza à medida que a outra varia, ao fazer previsões, ao observar propriedades como crescimento e decrescimento, etc.

As variáveis, no contexto das funções, assumem os papeis de:

- variável independente – que pode variar livremente no domínio da função;
- variável dependente – que assume valores determinados pelos das variáveis independentes e
- parâmetro – variável que determina a "lei" segundo a qual a variável dependente é determinada a partir das variáveis independentes.

Variáveis dependentes e independentes são também chamadas de argumentos.

Na concepção da **álgebra funcional**, o objetivo de explorar e manipular a igualdade não é o de determinar o valor das letras, que, nesse caso, não são incógnitas e sim **argumentos ou parâmetros**.

Exemplo.

Numa função do tipo y = ax + b, os valores de y (variável dependente) são determinados pelos da variável x (variável independente). A maneira pela qual x e y estão relacionadas dependem dos valores de a e de b (parâmetros). Por exemplo, os valores de y e x aumentam ou diminuem simultaneamente, sempre que o parâmetro a é positivo; o gráfico da função contém a origem dos eixos quando b é nulo.

Consideremos um problema análogo ao visto anteriormente.

(II) *Seis pessoas da família Silva foram ao cinema. Sabendo que nesse grupo há 3 estudantes, e que estudante paga a metade do preço de um ingresso.*

a) Qual a expressão que fornece a quantia total gasta com os ingressos, em função do preço de cada ingresso, nesse cinema?

b) Quanto o grupo todo pagaria se o ingresso do cinema custasse R$ 16,00?

c) O total a pagar pelo grupo é mais ou menos do que pagariam 5 pessoas não estudantes?

A expressão pedida permite determinar o total (T) a ser gasto com os ingressos, qualquer que seja o preço (b) de um ingresso no cinema.

Para responder o item (a), utiliza-se a Álgebra como **generalizadora da aritmética**, traduzindo a situação por meio da seguinte igualdade:

$$T = 3b + 3.\frac{b}{2}, \qquad \text{ou} \quad T = 3b + \frac{3b}{2}, \qquad \text{ou ainda} \quad T = \frac{9b}{2}.$$

Nessa situação há duas variáveis, cujas variações obedecem a determinada lei ou relação, representada pela igualdade; b é a variável independente - pode assumir qualquer valor no conjunto dos racionais que represente o preço de um ingresso de cinema - e T é a variável dependente - cujo valor fica determinado exatamente, ao ser fixado o valor de b.

Com o uso da **álgebra funcional**, pode-se responder os itens (b) e (c), bem como explorar muitos aspectos da situação.

Podemos alterar um pouco o exemplo do problema, considerando que, numa promoção desse cinema, o estudante paga 1/3 do preço de um ingresso. Essa consideração mudaria a forma pela qual T está relacionada com b (teríamos a igualdade $T = 3b + 3.\frac{1}{3}b$ ou T = 4b). Essa mudança se deu porque foi mudado um dos parâmetros (a fração do preço do ingresso que os estudantes pagam); cada valor desse parâmetro determina uma relação entre T e b.

As fórmulas são exemplos de relações funcionais muito usadas. A relação entre a medida da área de um triângulo (A) e as medidas de sua base (b) e sua altura (h) é representada pela fórmula $A = \frac{b \times h}{2}$. Neste caso, b e h são variáveis independentes e A é variável dependente, mantendo uma relação definida pela fórmula. A análise dessa relação, usando a **álgebra funcional**, permite, por exemplo, concluir que, uma vez fixada a base de um triângulo, a medida da sua área é proporcional a sua altura.

A Álgebra das Equações

Nessa concepção, destacam-se os processos de resolução de equações. Há um ou mais valores que as variáveis (incógnitas) devem assumir e queremos determiná-los para tornar a equação verdadeira (uma identidade). Essa é a dimensão que mais se trabalha, em geral, do sétimo ao nono ano.

Muitos autores afirmam que, nessa concepção, a Álgebra é ferramenta para resolução de problemas. Em geral, esse é o primeiro contato dos alunos com a Álgebra, o que talvez não seja o melhor caminho para a construção do conceito de variável. É mais natural construir esse conceito integrando as concepções da **álgebra funcional** e da **álgebra das equações.**

Para exemplificar, vamos resolver a equação do o problema I da família Silva, no qual era dado o total gasto com os ingressos do cinema (81).

“Traduzimos” o problema, com o uso da Álgebra como **generalizadora da aritmética** e obtivemos a seguinte equação: $3b + \frac{3}{2}b = 81$ (*).

Trataremos agora de simplificar e resolver a equação, por meio de procedimentos, visando a determinar o valor da incógnita b.

$$\frac{6b+3b}{2} = 81 \Longrightarrow (6b + 3) = 162 \Longrightarrow 9b = 162 \Longrightarrow b = 18.$$

Portanto, o preço do ingresso era dezoito reais.

Para chegar à solução de um problema, simplificamos expressões para compreendê-las melhor e torná-las mais fáceis de serem usadas. Por isso, nesta concepção, simplificar e resolver podem estar bem próximos.

Para refletir sobre as relações entre as concepções da Álgebra, comparemos os problemas I e II apresentados.

Na tradução de ambos para a linguagem simbólica foi usada a Álgebra como Generalizadora da Aritmética.

No problema I, foi dado o valor do total gasto, tornando possível obter uma equação (*), na qual a variável **b** assume o papel de incógnita. O valor de **b** deve ser determinado usando a Álgebra das Equações.

Por outro lado, o objetivo no problema II não é determinar os valores de b e T que satisfazem a igualdade (embora haja uma infinidade de pares (b,T) nessas condições) e sim relacionar tais valores. Nesse caso, a Álgebra Funcional vai permitir explorar as relações entre as variáveis b e T.

ÁLGEBRA ESTRUTURAL

Nos exercícios de **puro** cálculo algébrico, estamos usando a **álgebra das equações.** Nesse tipo de tarefa, **as letras são símbolos abstratos** a serem manipulados seguindo certas regras. Não são incógnitas cujos valores devem ser determinados e, como não se está relacionando a variação de grandezas, as letras também não são variáveis dependentes, nem independentes, nem parâmetros.

As atividades características dessa concepção da Álgebra exigem apenas a manipulação algébrica, comumente chamada de “conta com letras”, ou “cálculo algébrico”. Essas contas obedecem às regras que regem as operações aritméticas ou de qualquer outra estrutura algébrica, como a dos polinômios. Nessa concepção, se incluem classificação, procedimentos e operações entre expressões algébricas, tais como fatorar, simplificar expressões, reduzir termos semelhantes, adicionar, etc.

Exemplo. Fatore a expressão $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.

Resposta: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right) ou \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Perceba que, como observamos anteriormente, nesse exemplo, o papel da variável não é igual a nenhum dos vistos nas outras concepções.

De fato:

- como a expressão não se encontra em um contexto de uma função ou relação, as variáveis não são argumentos ou parâmetros;

- não estamos trabalhando com equação e, portanto, a variável não é uma incógnita e

- também não estamos lidando com nenhum tipo de tradução de problema ou modelo a ser generalizado, logo a variável não possui o papel de generalizadora de modelos.

A variável nesse caso não é mais que um símbolo – elemento de um conjunto, munido de certas operações, que satisfazem determinados axiomas.

Durante todo o Ensino Básico, essa é a concepção mais utilizada em salas de aula, sendo mesmo supervalorizada. Essa postura é grande parte das vezes prejudicial aos alunos que, geralmente, não conseguem ver sentido no arsenal de técnicas ensinadas, nem sabem como utilizá-las para abordar situações novas ou mesmo já vivenciadas por ele.

Não estamos com a observação acima considerando a dimensão estrutural da Álgebra de menos importância. Ao contrário, ela permeia todas as outras dimensões que, sem ela, não existem. No entanto, o seu significado e a sua importância, neste nível, estão em ser uma ferramenta essencial para que a Álgebra "funcione" como é necessário.

Salientamos, no entanto, que, mesmo tendo caráter abstrato, as manipulações podem e devem adquirir significado, transmitir idéias e permitir conclusões. Neste sentido, há uma estreita ligação entre a concepção da álgebra como **generalizadora da aritmética** e a da **álgebra estrutural.**

As observações feitas mostram que essas concepções não têm delimitação muito precisa. Por exemplo, no caso das equações: durante um processo de resolução de uma equação, efetuamos procedimentos mecanizados, manipulando as expressões, sem considerar que a letra envolvida é uma incógnita. Nesse processo, estamos usando a **álgebra estrutural**, dentro de uma tarefa que é caracteristicamente da **álgebra das equações**.

Também há casos em que, ao longo de uma mesma atividade, podemos usar mais de uma concepção da álgebra. No exemplo a seguir, estão presentes a **álgebra como generalizadora da aritmética,** a **funcional** e a **das equações**.

Para alugar mesas para uma festa uma empresa cobra 10 reais por conjunto de mesa com 4 cadeiras e mais 15 reais de frete.

a) Qual é o total que uma pessoa vai pagar, se alugar 8 desses conjuntos?

b) Que igualdade representa o total a pagar por uma pessoa que aluga um número qualquer de conjuntos desse tipo?

c) Quanto pagará uma pessoa que alugue 15 conjuntos desses?

d) Se uma pessoa pretende gastar 65 reais, para alugar conjuntos de mesas do tipo descrito, quantos conjuntos ela deverá alugar?

No item (a), a Álgebra não está presente, só se usa aritmética: 8 . 10 + 15 = 95.

Resposta - Ela irá pagar um total de 55 reais.

A igualdade pedida no item (b) é **T = 10n + 15** (as letras podem ser outras). Usando a Álgebra como **generalizadora da aritmética**, representamos a relação entre duas grandezas que variam: o número de conjuntos de mesas e o total a pagar. Podemos agora explorar essa relação por meio da **álgebra funcional**, respondendo, por exemplo, a perguntas do tipo da do item (c).

Se **n** = 15, **T** = 10.15 + 15 = 165.

Nesse caso:

- a letra **n** representa o número conjuntos de mesas, que é a **variável independente –** pode ser qualquer número natural, de 1 até o número de mesas que a empresa pode alugar e

- a letra **T** representa o total a pagar, que é uma **variável dependente** – é determinado pelo valor de **n.**

Entretanto, para responder o item (d), deveremos considerar que **T = 65,** e precisamos determinar o valor de **n** para o qual isso acontece. Escreveremos então a equação **10n + 15 = 65** que, uma vez resolvida, fornece o valor procurado de **n.**

Nesse item, portanto, usamos a **álgebra das equações** e a letra **n** deixou de ser uma variável independente e passou a ter o papel de **incógnita.**

Os exemplos ilustram a relação intensa que existe entre as várias concepções.

É grande a dificuldade dos alunos para compreenderem os diferentes papéis das letras nas diversas concepções e, em geral, a experiência deles é muito limitada para isso. Acreditamos na importância de os alunos terem oportunidades de vivenciar situações em que eles possam perceber esses diferentes papéis. Assim, eles certamente terão mais consciência da importância e da riqueza da álgebra estudada no ensino básico, diminuindo suas dificuldades. Isto sem precisar que deles seja exigido o domínio da nomenclatura aqui exposta.

Vamos agora mostrar o quadro incluído nos PCN (p.116), que sintetiza as diferentes concepções da Álgebra, chamadas de dimensões, e as diferentes funções das letras em cada uma delas.

Álgebra no Ensino Fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolos abstratos
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações; generalizações de padrões aritméticos	Variação de Grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico; obtenção de expressões equivalentes

<u>Capítulo III - O Sinal de Igualdade</u>

O aluno, com experiência apenas em aritmética, muitas vezes, considera o sinal de igual como um símbolo unidirecional, que precede uma resposta numérica, um símbolo que quer dizer "escreva a resposta". A igualdade, nesse caso, é vista como tendo uma expressão do lado esquerdo e um número do lado direito.

Por isso, muitos estranham igualdades dos tipos **5 = 2 + 3** ou **1 + 4 = 2 + 3**, etc., e outros escrevem falsas igualdades como **20 x 3 = 60 - 10 = 50 + 2 = 52**, que não pode ser considerada uma igualdade porque não satisfaz as propriedades simétrica e transitiva dessa relação.

De fato, 60 – 10 não é igual a 20 x 3, nem 20 x 3 é igual a 52.

A idéia, muito utilizada na Álgebra, do sinal de igualdade como um indicador de uma <u>equivalência</u> entre duas expressões, pode não ser percebida de imediato pelos alunos. Para que eles a construam, podem-se adotar, entre outras, as estratégias:

- usar, com naturalidade, igualdades como as dos exemplos referidos acima, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental;

- incentivar a leitura de igualdades do tipo mais usual, **2 + 5 = 7,** como "*dois mais cinco é igual a sete*" e não como "*dois mais cinco dá sete*".

A esse respeito, citamos Walle (2007).

> O sinal de igual é o mais importante sinal na aritmética elementar, na álgebra e de toda matemática, usando números e operações.
> Ao mesmo tempo, pesquisas datando de 1975 até hoje, indicam claramente que o sinal de igual é muito pouco entendido pelos alunos.
> Pare e reflita.
> *Na expressão abaixo, que número deveremos colocar no quadradinho?*
> ***8 + 4 = $\square$ + 5.***
> Como você acha que os alunos das primeiras séries e de médias, tipicamente, responderam a essa questão?
> Em um estudo recente, não mais de 10% de alunos de qualquer série colocou o número correto. As respostas mais comuns são 12 e 17. Nas séries mais adiantadas, nenhum aluno colocou 7.
> Certamente estudantes são ensinados nas primeiras séries que o sinal de igual significa (é o mesmo que) ou que a expressão em cada lado é a mesma. Entretanto, as experiências dos estudantes os levam a acreditar que um lado do sinal de igual, usualmente o lado esquerdo, é o problema, e o outro é a resposta. Os alunos entendem que o sinal de igual é como uma tecla da calculadora, que é usada para obter a resposta. Na forma escrita, ele separa o problema da resposta.
> Por que é tão importante que os alunos entendam corretamente o sinal de igual?
> Em primeiro lugar, é importante para os alunos entenderem as relações do nosso sistema numérico. O sinal de igual é a principal maneira de representar tais relações.
> Por exemplo: 6 x 7 = 5 x 7 + 7. (p. 260)

A dificuldade dos alunos em relação à noção de igualdade se relaciona também com a mudança do modo de ver as operações, na Aritmética e na Álgebra. Na Aritmética, as operações entre os números consistem em formas pré-estabelecidas de combiná-los de acordo com o sistema de numeração adotado, obtendo-se um número. Já as expressões envolvendo operações algébricas, como não fixamos previamente valores às letras, por vezes, não podem ser reduzidas. Nestas expressões, as operações permitem apenas transformá-las em outras equivalentes, nem sempre mais simples.

A falta dessa nova visão das operações provoca, com freqüência, entre alunos iniciantes de Álgebra, uma tendência mencionada na Introdução: "fechar" qualquer expressão obtida, igualando-a a um número, uma letra (em geral, x) ou uma expressão com um só termo, como nos exemplos: $\mathbf{5 + a = 5a}$ ou $\mathbf{3y - z = x}$.

Segundo Booth (1994), isto se deve ao fato de o aluno com esse tipo de experiência estranhar a ausência da propriedade do fechamento.

Tipos de Igualdade

Existem vários tipos de igualdade, dentre elas, duas que os alunos aprendem quando iniciam o estudo de álgebra: a identidade e a equação. A identidade é a igualdade entre duas expressões numéricas ou entre duas expressões literais que é verdadeira sejam quais forem os valores atribuídos às variáveis nela presentes. A equação é uma igualdade que envolve uma ou mais quantidades desconhecidas, e que só se verifica quando atribuímos valores particulares a essas quantidades.

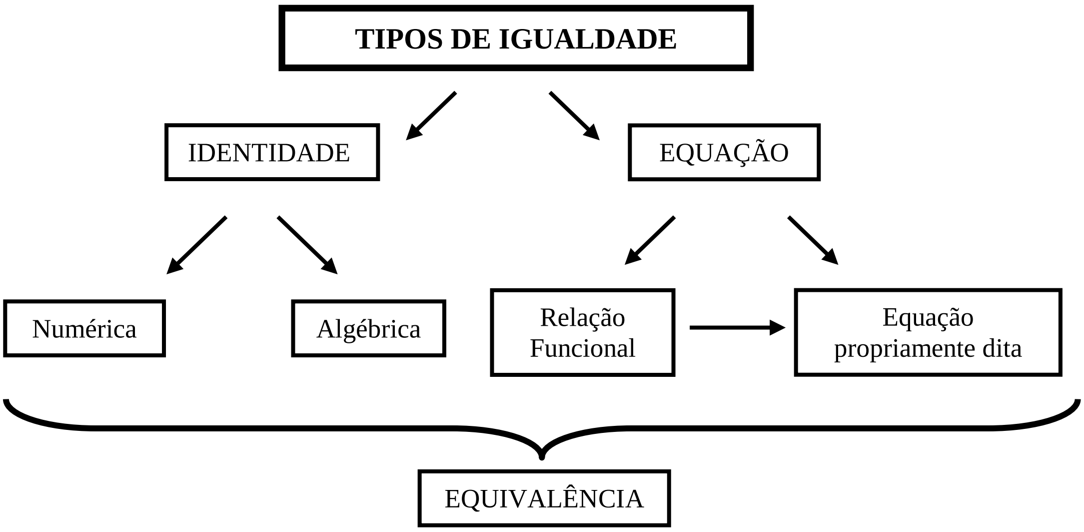
No entanto, nota-se que, mesmo entre as equações e as identidades, há variações importantes do ponto de vista didático, como mostram os exemplos de Usiskin (1994, p. 10):

$$\textbf{1)}\ A = b \cdot h \quad \textbf{2)}\ 40 = 50x \quad \textbf{3)}\ y = k\,x \quad \textbf{4)}\ sen\,x = cos\,x \cdot tg\,x \quad \textbf{5)}\ 1 = n \cdot \frac{1}{n},\ n \neq 0.$$

Entre as igualdades acima, 1, 2 e 3 são equações, mas têm significados bem distintos. As igualdades 1 e 3 representam relações funcionais, sendo 1 uma fórmula geométrica e 3 a expressão analítica de uma função linear. A igualdade 2 é uma equação em uma incógnita x (que chamamos de *'equação propriamente dita'*). Também, as identidades 4 e 5 têm papéis distintos: a 4 representa uma identidade trigonométrica, enquanto a 5 generaliza uma relação aritmética entre um número e seu inverso. Essa variedade de papéis das igualdades, em geral, não é explorada no ensino de Álgebra. Particularmente, não é apresentado o fato de que equações (propriamente ditas) de uma incógnita podem ser obtidas de equações que definem uma função, quando o valor dessa função é fixado.

Por exemplo: $P = 4l$ é a equação que representa o perímetro de um quadrado em função do lado. Mas, fixando-se o perímetro de um quadrado em 20 u.c., tem-se a equação: $4l = 20$ e obtém-se $l = 5$ u.c.

O esquema a seguir resume as observações.



Balanças e equivalência

Tanto na Educação Matemática como na própria História da Matemática, a utilização de balanças de dois pratos está intimamente relacionada às primeiras idéias da noção de equivalência.

Carraher e outros (1988), citando Filoy e Rajano (1984) e Vergnaud e Cortes (1986), afirmam:

> ...] a apresentação de situações-problema usando balanças de dois pratos é extremamente útil para a introdução da álgebra, auxiliando o estudante a vencer dois obstáculos que interferem significativamente na compreensão da álgebra na escola:
> 1) a operação sobre incógnitas;
> 2) a utilização de um conceito de equivalência, distinto dos significados anteriormente atribuídos pelos alunos ao sinal de igual. (p. 2)

Considerando um pouco de história, observamos que os matemáticos árabes, no século IX, utilizavam a combinação de dois procedimentos chamados de “restauração” e “balanceamento” com o objetivo de re-equilibrar os dois membros de uma equação, como em uma balança. Analisemos o seguinte exemplo (Roque, 2012):

$$2x^2 + 100 - 20x = 58.$$

Eles consideravam que nessa igualdade entre os dois membros, o primeiro membro possuia um excedente de $20x$ em relação ao segundo. Sendo assim, a igualdade nesta equação deve ser “restaurada” pelo seguinte procedimento: adicionar o termo subtraído no primeiro membro aos dois membros, obtendo-se: $2x^2 + 100 = 20\,x + 58.$

Nesse procedimento “retiramos” uma quantidade de um lado para “passar para o outro lado”.

Em seguida, é preciso equilibrar os dois lados, ou seja, balanceá-los.

Temos assim: $2x^2 + 42 = 20x$

Dividindo esta equação por dois, podemos resolvê-la pelos métodos encontrados nos Elementos de Euclides.

As considerações acima ilustram a importância de o professor explorar atividades que utilizam o uso de balanças de dois pratos para o aluno associar o equilíbrio a uma igualdade com o sentido de uma equivalência, bem como, o desequilíbrio a uma desigualdade. É necessário também que o aluno represente este equilíbrio (ou desequilíbrio) da forma que achar melhor, desde que expresse a igualdade (ou desigualdade). Neste momento cabe ao professor aproveitar a diversidade de formas apresentadas discutindo-as até que seja possível escrever uma sentença em linguagem matemática. Essa prática facilita o desenvolvimento de um processo muitas vezes difícil para o aluno: passar da linguagem verbal ou mesmo numérica para a linguagem algébrica.

ATIVIDADES

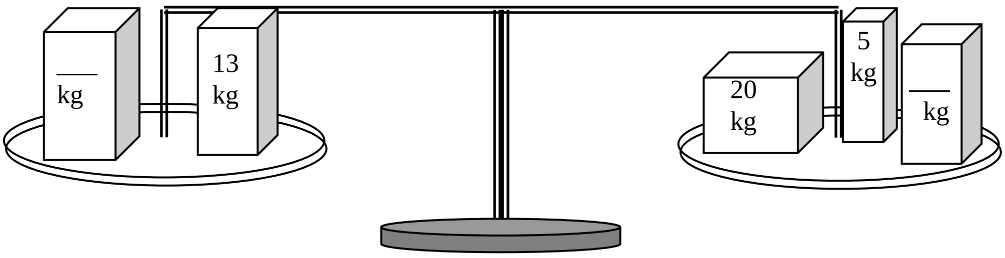
As três atividades seguintes têm como **objetivos**:

- associar equilíbrio com igualdade e desequilíbrio com desigualdade, com o uso da balança de dois pratos;
- representar o equilíbrio (ou desequilíbrio) da balança sob diversas formas que expressem igualdade (ou desigualdade) e
- analisar problemas que admitem mais de uma solução.

<u>ATIVIDADE 1</u> – Os Pesos que Estão Faltando

<u>Enunciado</u>

A figura abaixo representa uma balança de dois pratos, em equilíbrio.
Responda a todos os itens, de modo que este equilíbrio se mantenha sempre.



a) *Escreva nos pacotes os "pesos" que estão faltando.*
Compare o valor dos pesos que você colocou com os que foram colocados por seus colegas.
O que você concluiu?
Escreva uma igualdade que represente o equilíbrio da balança.

b) *Se você escrever "pesos" iguais nos pacotes que estão sem os "pesos", a balança ficará equilibrada? Por quê?*

c) *Um aluno, ao começar a resolver este problema, escreveu 50 kg no pacote do prato da esquerda. Quanto deverá escrever no pacote do prato da direita?*

d) *Qual o menor peso inteiro que você pode escrever no pacote do prato da esquerda? Nesse caso, quanto deverá escrever no pacote do prato da direita?*

<u>Comentários</u>

1) Esta atividade se aplica a qualquer nível de escolaridade, devendo ser explorada nos primeiros anos, para construir a noção de equivalência. Muitos alunos acertaram a conclusão do item (a), apesar de alguns, que não têm o hábito de justificar as suas respostas, manifestarem dificuldade de expressão. Exemplos de respostas.

Corretas - *"Todo mundo colocou número diferente porém certo".*
"Conclui que sempre estavam equilibradas mas com números diferentes".

Sugerem a falta de compreensão do problema –

"Eu conclui o que faltava para ficar igual".
"Deu uma pequena diferença".

2) Como os alunos não reconhecem o sinal de igualdade com o sentido de equivalência, escrevem duas igualdades com o mesmo resultado, em vez de uma relacionando duas expressões. Exemplos.

"*17 + 13 = 30"* e *"20 + 5 + 5 = 30",* em vez de: *"17 + 13 = 20 + 5 + 5";*

"26/26" ou *"27 = 27".*

Outros explicaram em palavras: "*15 mais 13 é igual a 20 mais 5 mais 3".*

"Eu somei 25 + 5 que deu 30 e 17+ 13 que também deu 30".

3) Exemplos de respostas para o item b.

Incorreta - *"Sim, porque estão equilibradas"*.

Correta - *"Não, pois se colocasse a balança ficaria totalmente desequilibrada, afinal em um prato há 13 kg e no outro 25 kg"*.

4) O item (c) tem um alto índice de acerto, embora muitos alunos ainda desconsiderem os pesos indicados na balança e respondam "*50"*.

Com alunos de níveis mais elevados de escolaridade, é interessante incentivá-los a concluir a relação entre os números de cada par que é solução (no caso, o peso da esquerda deve ser 12 mais do que o da direita).

5) No item (d), o mesmo raciocínio incorreto, ignorando os pesos já escritos nos pacotes, leva certos alunos a responder, por exemplo, "*O mesmo peso",* ou
"12 na direita e 12 na esquerda", ou ainda,
"nos dois pratos 2".

A discussão da impossibilidade de ter peso zero em um dos pratos é positiva para conscientizar os alunos de que a resposta a um problema tem de ser coerente com o contexto de mesmo.

6) Uma dificuldade frequente dos alunos é a de pensar que o peso dos pacotes tem relação com o tamanho e a forma dos mesmos.

7) Como atualmente não há muitas balanças desse tipo em uso, pode ser preciso explicar aos alunos como elas funcionam.

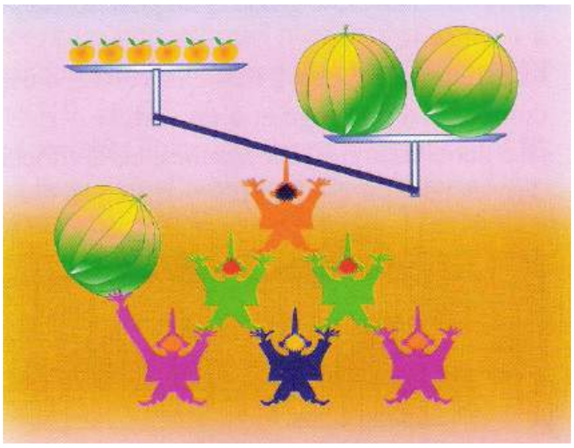
8) O fato de o problema admitir mais de uma solução – na verdade, uma infinidade - também causa surpresa entre muitos alunos, como indica a resposta "*Cada um coloca o valor que quiser"*.

É importante a discussão sobre a diferença entre
"ter infinitas soluções" e *"qualquer par de números é solução"*.

9) A seguir sugerimos mais um exemplo de atividade na qual a balança é apresentada em desequilíbrio.

(Adaptação de "Énigmes et défis mathématiques" Acl. les Editions du Kangourou, 2006)

Em uma balança há 6 tangerinas em um prato e 2 melões no outro. Para colocarmos a balança em equilíbrio, o menino que está com o melão na mão deve colocá-lo no prato em que há tangerinas.



a) Escreva uma desigualdade representando a balança como está na figura.
b) Faça um desenho representando a balança em equilíbrio.
c) Escreva uma igualdade que represente este equilíbrio.
d) Se o melão pesa 420 gramas, qual o peso de uma tangerina? Que conta você fez?

<u>ATIVIDADE 2</u> – A Feirante

<u>Enunciado</u>

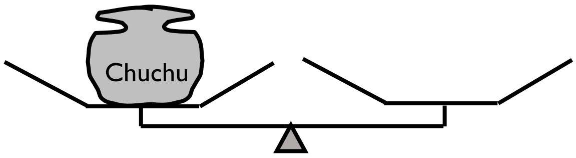
Dona Lourdes é feirante e todo sábado vai ao Mercadão de Madureira comprar as mercadorias para vender e pede para entregar em sua barraca.

Quando a mercadoria chega, ela precisa conferir os pesos.
Ela possui pesos de diferentes valores:
5 pesos de 2kg, 2 pesos de 1kg, 4 pesos de 500g e 3 pesos de 100g.

Mercadoria	Peso (kg)
Chuchu	5
Cenoura	10
Cebola	12
Pimentão	4
Aipim	15
Batata	...

Lista do sábado passado

a) Ela colocou o saco de chuchu num dos pratos da balança. Indique os pesos que ela deve colocar no outro prato para que ela confira o peso.



b) Para agilizar o trabalho ela resolveu colocar mercadorias nos dois pratos. Com que pesos ela deve completar os pratos para equilibrar a balança (Fig.1)?
Isto basta para ela conferir os pesos das mercadorias compradas? Justifique.

Fig.1

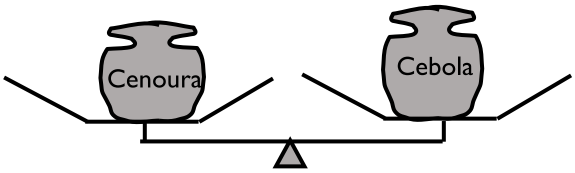
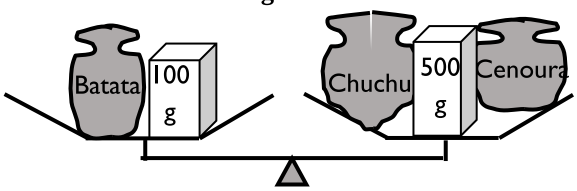
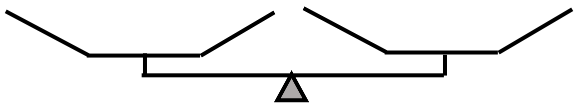


Fig.2



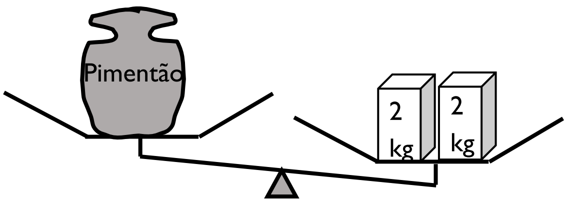
c) Ela esqueceu quantos quilos de batata tinha comprado. Supondo que os sacos de chuchu e de cenoura já estejam com os pesos corretos e que a figura acima (Fig.2) indique como Dona Lourdes equilibrou a balança, determine quanto pesa o saco de batata.

d) Dona Lourdes poderia conferir o peso do aipim, numa única pesagem, utilizando somente pesos? E utilizando mercadorias e/ou pesos seria possível?



Dê um exemplo de como ela poderia conferir o peso do aipim, considerando todas as outras mercadorias com os pesos indicados na tabela.

e) Quando Dona Lourdes foi conferir o peso do pimentão, observou que a balança ficou desequilibrada.
Como você explica o que ocorreu?



Comentários

1) Esta atividade se aplica a qualquer nível de escolaridade, devendo ser explorada desde os primeiros anos. Por se tratar de situação da vivência dos alunos, não foram observadas dificuldades dos mesmos ao resolvê-la.

2) Durante a exploração da atividade, o aluno deve observar que, nos itens (a) e (b), as balanças estão em equilíbrio, mas os pesos de cada prato, nas duas situações, são diferentes.

3) Principalmente no item (c), houve problemas com a redução de grama para quilograma, evidenciando dificuldades dos alunos com números decimais e medidas.

Exemplos de respostas.

"15,5 – 100 = 55".
"O saco de batata pesa 150 g".
"A batata tem 400 kg".
"Ela tem 615 g".
"100 g".

4) Alguns itens, como (d) e (e), têm mais de uma resposta. Este fato, bem como a necessidade de interpretação da situação, provoca certa dificuldade. É recomendável incentivar a discussão do enunciado entre os alunos e explorar a diversidade de soluções.

Provavelmente por ainda não estarem habituados com esse tipo de questionamento, no item (e), alguns alunos explicaram o desequilíbrio da balança atribuindo valores particulares ao peso do saco de pimentão. Seguem exemplos de respostas a esse item.

Respostas	Observações
"Porque faltava peso no saco de pimentão era menos que o pedido".	Respostas corretas com problemas de redação.
"O pimentão não tem o peso de 4 kg pesa menos".	
"Os 4 kg é mais que o pimentão pesa".	
"O peso do pimentão está errado".	Não disse se o erro foi a mais ou a menos.
"Está faltando pimentão. Se retirarmos os quilos um a um, veremos qual é o peso do pimentão".	Só considerou número inteiro de quilos
"O saco de pimentão tem 3 kg, e falta 1 kg para completar a balança".	Julgaram que faltava 1 kg de pimentão.
"Para ficar equilibrada dona Lourdes colocou 1 kg e ficaram 3 kg" .(fez o desenho)	
"Se ela tira 2 kg , o lado do pimentão vai descer, é se ela bota 1 de 2 kg e depois 1 kg".	
Ela substituiu os dois pesos e botou o de 2 kg e mais um de 1 kg".	
"Ela colocou dois pesos iguais".	Só observou os números nos pesos e não a situação global.
"Alguém pode ter mexido na balança, sem querer ou alguém sem querer pode ter colocado 1 pimentão a mais".	Julgou que o prato que está "mais alto" é o que tem mais peso, o que é muito comum.
"A balança deu defeito".	As respostas sugerem incompreensão do problema.
"Os dois pratos têm o mesmo peso".	

Um trabalho permanente incentivando os alunos a se expressarem em linguagem corrente, iniciando com linguagem oral, pode minimizar a sua dificuldade ao escrever.

ATIVIDADE 3 - Equilibrando Potes e Garrafas
(Énigmes et défis mathématiques, Acl. les Editions du Kangourou, 2006)

Objetivos – Esta atividade tem como objetivos os citados nas Atividades 1 e 2 e mais:

- identificar alterações que podem ser feitas nos dois membros de uma equivalência, mantendo-a verdadeira.

Enunciado

Observe as ilustrações 1 e 2, nas quais objetos iguais têm o mesmo peso, e responda às perguntas.

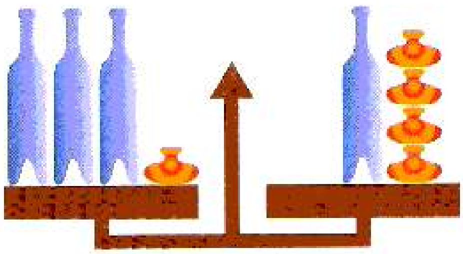


Ilustração 1

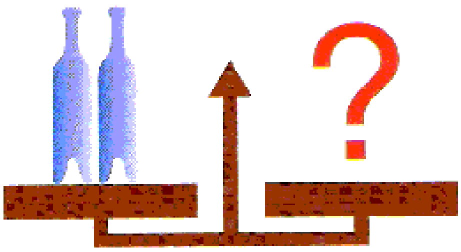


Ilustração 2

a) Se você retirar uma garrafa de cada prato da balança ela continuará em equilíbrio? Justifique.

b) E se retirar um pote de cada prato?

c) E o "peso", em cada prato, continuará o mesmo a cada retirada? Justifique sua resposta.

d) Complete as igualdades:
3 garrafas + 1 pote =
2 garrafas + 1 pote =
2 garrafas + 4 potes =

*e) Para a balança da **ilustração 2** ficar também em equilíbrio, quantos potes devo colocar no outro prato? Como você calculou o número de potes?*

f) Escreva a igualdade que representa esse equilíbrio.

Comentários

1) Assim como o item (a) da ATIVIDADE 1, os itens (d) e (f) desta atividade visam especificamente que os alunos escrevam duas expressões equivalentes ligadas pelo sinal de igual. O segundo membro de todas as igualdades de (d) devem ser escritos em termos de números de garrafas e/ou potes.

2) Esses tipos de atividades são úteis na preparação ao trabalho de equações, mas podem ser desenvolvidas com crianças dos primeiros anos de escolaridade.

ATIVIDADE 4 – Números Cruzados

Objetivos

Utilizar uma atividade lúdica para

- analisar igualdades numéricas e
- identificar números que tornam equivalências verdadeiras.

Enunciado

Coloque em todas as casas com ? um número inteiro, de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

12	–	?	=	4	+	4
+		+		+		+
(-18)	+	7	=	(- 4)	+	?
=		=		=		=
?	–	9	=	?	+	(- 2)
–		+		+		+
8	–	?	=	5	–	?

Comentários

1) Para o aluno completar as casas indicadas, ele precisa analisar várias equivalências. Todas são exemplos de igualdades nas quais os dois membros são expressões.

2) É importante a escolha da ordem das casas a completar.

3) Nas igualdades com mais de um espaço para completar, os alunos pensam que a escolha do primeiro número é aleatória, sem perceber que o fato de serem igualdades "cruzadas" faz com que as soluções sejam determinadas.

4) Outras dificuldades observadas.

- Completar o primeiro membro de uma igualdade, levando em conta apenas o número que vem logo depois do sinal de igual.
  Exemplo de resposta com esse erro: "*12 – 8 = 4 + 4*".

- Há alunos que, mesmo tendo sido apresentados aos números inteiros, estranham a presença de subtrações com minuendo menor do que subtraendo, como as da 1ª coluna e da 3ª linha.

5) Para se adequar a alunos de diferentes níveis de escolaridade, este tipo de atividade pode e deve ser adaptada para outros conjuntos numéricos como o dos números naturais ou racionais e irracionais.

<u>ATIVIDADE 5</u> – Onde está o Erro?

<u>Objetivo</u>

- Considerar igualdade como uma equivalência, tendo as propriedades reflexiva (a = a), simétrica (se a = b, então b = a) e transitiva (se a = b e b = c, então a = c).

<u>Enunciado</u>

Dado o problema: Pensei em um número, dividi-o por 2 e somei 3 ao resultado, obtendo 23. Em que número pensei?

*André o resolveu assim: **"23 – 3 = 20 x 2 = 40"**, e respondeu 40.*
André fez tudo certo? Por quê?

<u>Comentários</u>

1) A maioria dos alunos não tem experiências nas quais eles avaliem o que é escrito por outra pessoa; no início, é necessário um incentivo do professor.

2) Essa atividade apresenta um procedimento incorreto, cujo erro é difícil de ser percebido por ser muito frequente em todos os níveis de escolaridade.

3) Espera-se que o aluno perceba que as igualdades são falsas, uma vez que não satisfazem às propriedades citadas nos objetivos. O importante não é o nome de cada propriedade, mas o erro que a falta da mesma acarreta. No caso: 20 x 2 não é igual a 23 – 3 nem 23 – 3 é 40!

<u>ATIVIDADE 6</u> – Igualdades em Diversas Situações

<u>Objetivo</u>

- Explorar os diversos tipos de igualdade usados em Matemática.

<u>Enunciado</u>

Observe as igualdades e responda às perguntas, justificando.

a) Se trocarmos a ordem dos membros da igualdade **3 + 5 = 8**, *ela continua verdadeira?*

b) As igualdades **3 + 5 = 2 + 6** *e* **25 = 30 - 5** *estão corretas?*
Escreva outras expressões para o primeiro membro de cada uma delas, de modo a manter a igualdade.

c) Para que valores de **a**, **b** *e* **c** *a igualdade* **a (b+c) = ab + ac** *é verdadeira?*
Sem fazer a conta, responda: essa igualdade é verdadeira para **a** *= 207,* **b** *= 398 e* **c** *= 123? Por quê?*

d) A igualdade **2m+ 3 = m** *representa uma equação?*
A partir dela é possível determinar o valor representado por **m**?

e) A igualdade **$(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$** *é sempre verdadeira? O que ela representa?*
Se trocarmos a ordem dos seus membros, ela será verdadeira?

f) Dada a equação **T = 2n + 3**, *é possível determinar um valor numérico para* **T?**
E se soubermos o valor de **T**, *é possível determinar o valor correspondente para* **n**?
Dê exemplo de uma situação, na qual duas grandezas variem de acordo com essa equação.

g) i. Você já usou, em geometria, uma igualdade do tipo **S = b h**?

ii. Essa igualdade é verdadeira para quaisquer valores de **S**, **b** *e* **h**?

iii. Determine valores de **S**, **b** *e* **h** *de modo que ela seja verdadeira, e compare com os que os seus colegas determinaram. O que você concluiu?*

iv. Atribuindo valores numéricos para **b** *e* **h**, *é possível determinar exatamente* **S**?

v. Quantos retângulos existem com uma área e uma altura dada?

<u>Comentários</u>

1) Não é nossa intenção, nesta atividade, dar nomenclaturas, nem cobrar classificações de igualdades. Isto seria desastroso. No entanto, como foi observado na introdução do capítulo, para a construção do conceito de igualdade como uma equivalência, é necessário que os alunos tenham consciência das diversas situações nas quais a utilizamos. Os itens são totalmente independentes e podem ser trabalhados em momentos distintos.

2) Segundo salienta Walle (2007), os alunos estranham igualdades do tipo das do item (b), embora a familiarização com as mesmas seja fundamental para a formação do conceito de igualdade e, mais tarde, em atividades algébricas. Para alunos com tal dificuldade, são interessantes experiências como as ATIVIDADES 1 e 4 ou de completar igualdades, em contexto puramente matemático.

Exemplo: 3 + ... – 1 = ... – 7 + 2 x 3.

3) Embora não haja uma ordem de dificuldade entre os itens desta atividade, consideramos que as igualdades que envolvem variáveis dependem de uma experiência

do aluno com a linguagem simbólica. O professor deve estar atento à melhor época para trabalhar cada uma delas.

4) Não é usual a apresentação da igualdade que representa uma relação funcional como sendo uma equação com mais de uma variável, o que pode acontecer nos itens (f) e (g).

O item (f) é adequado a alunos que já tiveram contato, mesmo que informal, com o conceito de função (Tinoco, 2002), mas esse conceito pode também ser naturalmente apresentado neste contexto, com a construção de uma tabela ou mesmo de um gráfico cartesiano.

A idéia de que uma variável independente pode passar a assumir o papel de incógnita, ao ser atribuído um valor numérico à variável dependente, também pode ser explorada. De fato, atribuindo-se um valor para T na igualdade $\mathbf{T = 2n + 3}$, obtém-se uma equação com uma só incógnita **n.** O gráfico representando a função pode mostrar bem claramente a relação entre o valor fixado para **T** e o obtido para **n.**

É importante incentivar os alunos a escreverem a situação pedida; eles, em geral, não têm essa experiência tão rica de relacionar a matemática com situações reais.

5) No item (g), tem-se a fórmula da medida da área de um retângulo ou de um paralelogramo em função das medidas da base e da altura do mesmo. Nem sempre os alunos relacionam as fórmulas a funções e, muito menos, a equações. A equação representa uma função (S) de duas variáveis (b, h). Isso pode ser explicitado no item iv, pois, S fica perfeitamente determinada em função de b e h.

A equação também pode ser vista como uma equação propriamente dita, que é satisfeita por uma <u>infinidade</u> de ternos de números (S, b, h), embora <u>não</u> seja satisfeita por <u>quaisquer</u> valores de S, b e h. Uma tabela com valores das variáveis que tornam a igualdade verdadeira pode ajudar os alunos a perceberem a idéia de equação.

A última pergunta pode ser explorada com papel quadriculado – para valores inteiros de **S** e **h** – e, depois, generalizada.

Capítulo IV - A Propriedade Distributiva

O início do estudo da Álgebra representa para os alunos, ao mesmo tempo, uma continuidade e uma ruptura (Falcão, 1993). De fato, a forma de abordar os problemas e a linguagem simbólica são aspectos relevantes e novos para os estudantes. Por outro lado, muito da sintaxe que rege os procedimentos algébricos provém de propriedades importantes das operações aritméticas, entre elas a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

Na aritmética, essa propriedade é muito usada na realização de cálculos mentais e, principalmente, no algoritmo da multiplicação. Ela abrange equivalências entre expressões numéricas que, ao serem generalizadas por meio de expressões literais, permitem a observação e a conclusão de fatos importantes.

Por exemplo, por meio de exemplos numéricos, é possível fazer a seguinte conjectura.

"*A soma de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 3".*

Para raciocinar genericamente, pode-se representar essa soma simbolicamente e manipulá-la assim: $a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3 = 3\ (a + 1)$. A partir da última expressão, é mais fácil concluir que a soma é um múltiplo de 3, do que das anteriores.

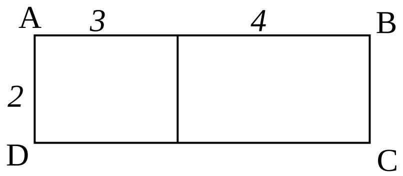
A propriedade distributiva é um resultado relevante da aritmética. A familiarização com essa propriedade é um caminho para que o aluno passe a admitir a igualdade no sentido de equivalência. No entanto, os autores deste trabalho constataram que tal familiarização não existe de fato, como mostram as respostas à questão seguinte, aplicada a alunos do Ensino Fundamental e Médio.

a) A área do retângulo ABCD pode ser calculada por meio de duas expressões:

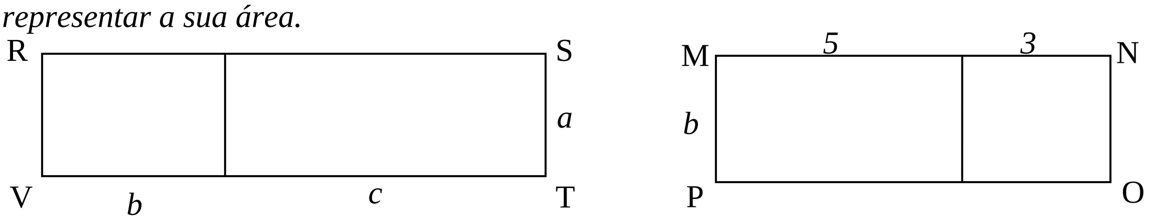
2 x 3 + 2 x 4** ou **2 x (3 + 4).

O resultado das expressões será o mesmo?

Por quê?



b) Para cada um dos retângulos MNOP e RSTV, escreva duas expressões para representar a sua área.



Nenhum desses alunos citou a propriedade em suas respostas. Os poucos que responderam à pergunta "*O resultado das expressões será o mesmo? Por quê?"* se referiram ao fato de que ambas representam a área da mesma figura. Quando o professor perguntou que propriedade estava envolvida nessa igualdade, a única resposta obtida foi: "*A ordem dos fatores não altera o produto".* Isto indica que a contextualização da propriedade distributiva em situações reais ilustra bem essa propriedade, mas não leva o aluno a sistematizá-la do ponto de vista numérico nem simbólico, o que precisa ser feito pelo professor.

Exemplos de situações em diversos contextos são sugeridos a seguir. Em cada uma delas, o incentivo ao aluno para que escreva igualdades permite a sua familiarização com equivalências numéricas e literais e a compreensão de procedimentos algébricos básicos como adição de termos semelhantes, multiplicação de polinômios e outros.

ATIVIDADES

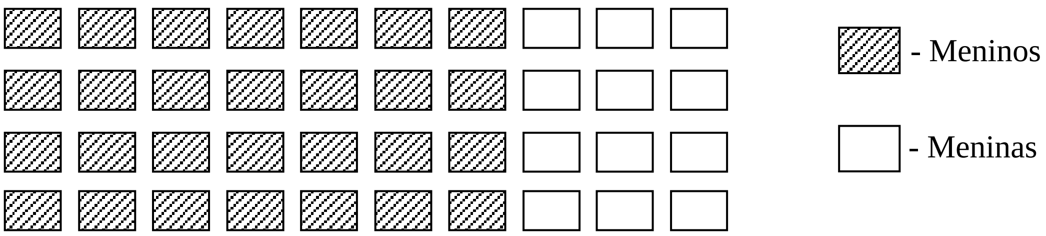
As atividades deste capítulo têm por objetivos:

- aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em situações com contextos distintos;
- identificar a formulação geral dessa propriedade por meio de uma igualdade entre expressões algébricas e
- escrever equivalências numéricas e literais.

ATIVIDADE 1 - A Gincana

Enunciado

Para uma gincana, Dona Vera arrumou as carteiras da sala de aula, separando as meninas e os meninos, da seguinte forma.



a) *Para calcular o número de carteiras da sala, Júlia escreveu a expressão 4 x 7 + 4 x 3.*
Como Júlia pensou para descobrir quantas carteiras há na sala?

b) *Para calcular esse mesmo número de carteiras, Carlos escreveu: 4 x (7 + 3).*
Como Carlos pensou para escrever essa outra expressão?

Comentários

1) As respostas abaixo ilustram a dificuldade dos alunos em se expressar.

Aluno A

a) *"Ela contou as carteiras da lateral e da frente e multiplicou".*

b) *"Ele multiplicou a vertical com a horizontal dos meninos e somou a horizontal das meninas".*

A frase escrita no item b sugere que o Aluno A interpreta a expressão 4 x (7 + 3) como 4 x 7 + 3, indicando o seu desconhecimento da propriedade distributiva.

Aluno B

a) *"Julia pensou da seguinte forma: primeiro multiplicou o tanto de carteira dos meninos por fileira que é igual a 4x7. Depois fez o mesmo processo com as meninas 4x3".*

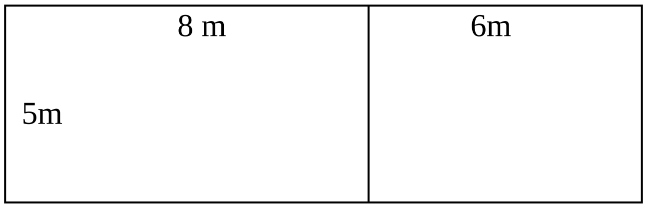
b) *"Carlos pensou de uma forma simplificada, ele preferiu multiplicar a soma das fileiras".*

2) Os alunos observaram as duas formas possíveis de contar as carteiras, mas não se referiram à igualdade das duas expressões. Consideramos que, a partir de respostas como as transcritas acima, o professor pode sistematizar a propriedade e estimular os alunos a se expressarem com mais clareza.

ATIVIDADE 2 - **O Terreno**

Enunciado

O Senhor Silva resolveu dividir seu terreno, de formato retangular, em duas partes também retangulares: uma para plantar verduras e outra para criar galinhas.



Observe a planta do terreno na figura e responda.

a) Que expressão pode representar a área total do terreno como soma das áreas das duas partes?

b) De acordo com o problema, o que representa a expressão 5 x (6 + 8)?
Calcule o seu valor.

c) Comparando a expressão dada no item (b) com a que você escreveu em (a), o que você conclui?
Represente a sua conclusão por meio de uma igualdade.

d) Se os terrenos tivessem outras dimensões, você poderia tirar a mesma conclusão?
Represente um exemplo: - graficamente, num papel quadriculado;
- por meio de uma igualdade entre expressões numéricas.

Comentários

1) Para alunos de Ensino Médio, sem experiência com tarefas que exijam leitura de texto e explicações verbais (mesmo que orais) essa atividade apresentou dificuldade. Na verdade, a maioria deles apenas calculou o valor da expressão dada em (*b*).

2) A resposta a seguir, para o item (*c*), sugere o desconhecimento do que significa escrever uma igualdade que represente a conclusão.

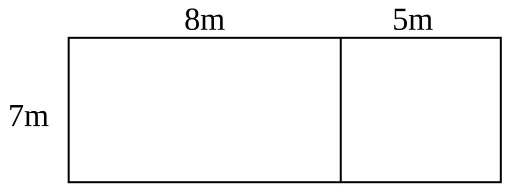
"*A igualdade é a metragem lateral multiplicada pela frente".*

3) A noção de igualdade como tendo sempre do lado esquerdo do sinal de igual uma expressão a ser resolvida e, do lado direito, o resultado numérico obtido impede algumas vezes o aluno de escrever a resposta correta dos itens (*c*) e (*d*), mesmo quando fornecem exemplos corretos no item (*d*). Exemplo de resposta.

c) *"São que as expressões dão a mesma conta".*

d) *"$7 \times 5 + 7 \times 8 = 8$".*

"$7 \times (5 + 8) = 7 \times 13 = 8$".



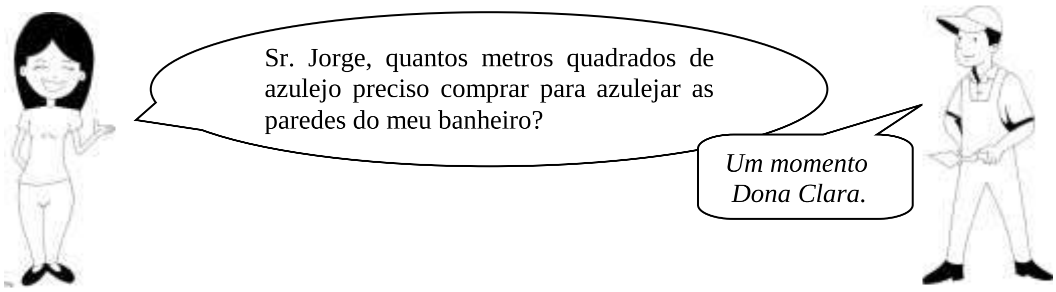
Observe que o aluno não escreve $\boldsymbol{7 \times 5 + 7 \times 8 = 7 \times (5 + 8)}$.

<u>ATIVIDADE 3</u> – A Quantidade de Azulejos

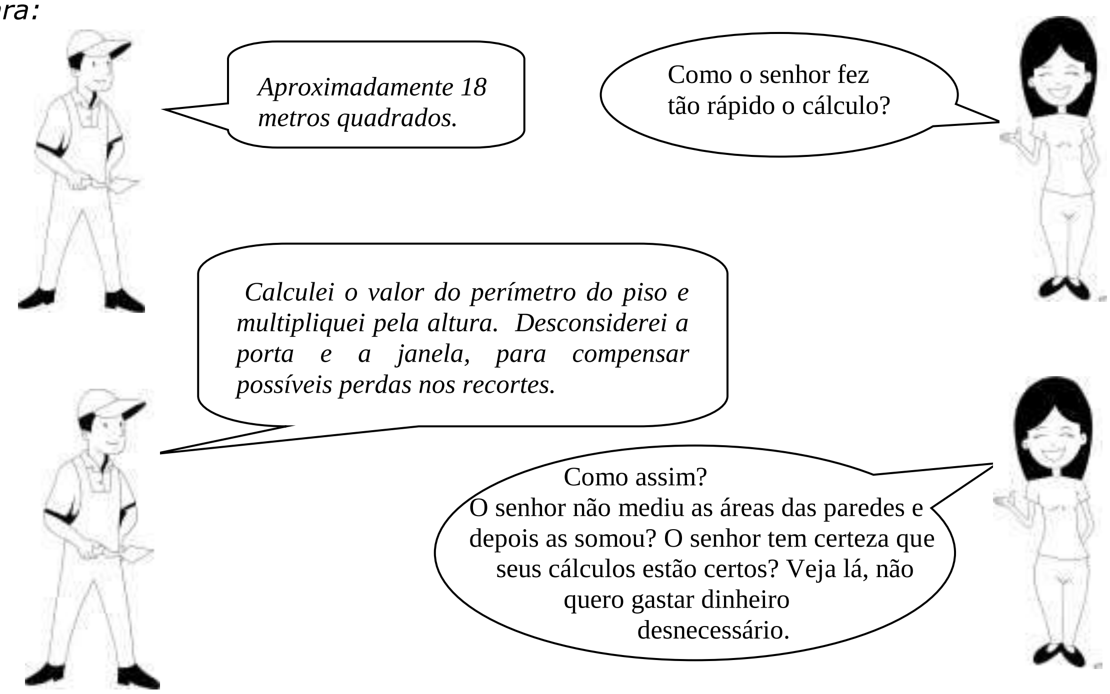
<u>Enunciado</u>

Leia com atenção o diálogo.

Eis a conversa que César ouviu entre sua vizinha, Dona Clara, e o pedreiro.



Sr. Jorge mediu a altura das paredes do banheiro e encontrou 2,60 m. Verificou que o piso era um retângulo de 2 m por 1,5 m. Então respondeu à Dona Clara:



César também duvidou dos cálculos do pedreiro e foi fazer as contas.

a) Responda: quem está certo, Dona Clara ou o Sr. Jorge? Justifique matematicamente a sua resposta.

Enquanto César estava resolvendo as contas lembrou-se de uma propriedade dos números que a professora de Matemática havia explicado.

Foi buscar seu caderno e lá encontrou. *César gritou*

Propriedade Distributiva:

(a + b + c + d). x = a.x + b.x + c.x + d.x

b) Após entender a exclamação de César, reescreva a propriedade, usando os dados do problema.

<u>Comentários</u>

1) O formato desse enunciado tem uma intenção especial: possibilitar ao aluno a interpretação de um texto, em linguagem informal, envolvendo um problema matemático. Esse tipo de apresentação, em geral, acarreta dificuldades e precisa ser mais frequente em sala de aula.

Em experiência com turma com maioria de alunos adultos, grande parte deles não entendeu a situação proposta no problema. Só entenderam que Dona Clara queria saber quanto de azulejo ela teria que comprar. Nota-se que este contexto é ligado à realidade pessoal de muitos dos alunos.

2) A realização da atividade com alunos em duplas ou grupos de três é recomendável.

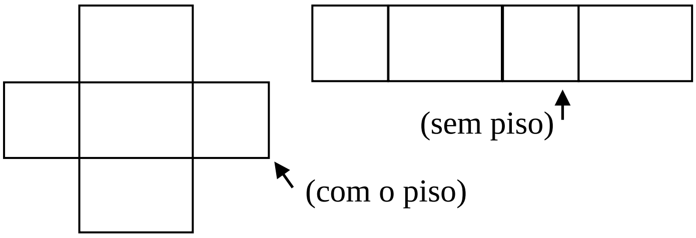
3) Esta atividade exige a familiarização com as noções e o cálculo da área e do perímetro do retângulo. Como são noções essenciais a alunos de qualquer nível escolar, caso estes não tenham, o professor deve suprir essa necessidade ao realizar a atividade.

4) A partir da experiência com alunos com bastantes deficiências em matemática, sugere-se o seguinte encaminhamento para incentivar a interpretação do texto e a identificação das questões do problema.

i) Escreva com suas palavras a dúvida de César.

ii) Identifique no problema as duas maneiras diferentes de calcular quantos metros quadrados de azulejos deveriam ser comprados.

iii) Observe o desenho da planificação do banheiro (sem teto) e escreva nela as dimensões das paredes do mesmo.



5) A sugestão da observação das figuras é um importante trabalho de visualização espacial, que em geral os alunos não têm oportunidade de experimentar. Ao examinar as figuras, os alunos tiveram dificuldade em perceber que alguns segmentos do contorno do piso faziam parte também do contorno das paredes. A observação da sala de aula pode ajudar a sanar essa dificuldade.

6) Também se observa dificuldade por parte dos alunos para entender o que é pedido no item (b). Trata-se da sistematização da propriedade, que precisa ser encaminhada pelo professor, chamando a atenção dos alunos para que substituam as letras da propriedade encontrada por César pelos números apresentadas no problema. A figura também pode ajudar neste ponto.

<u>ATIVIDADE 4</u> – As Compras da Aline

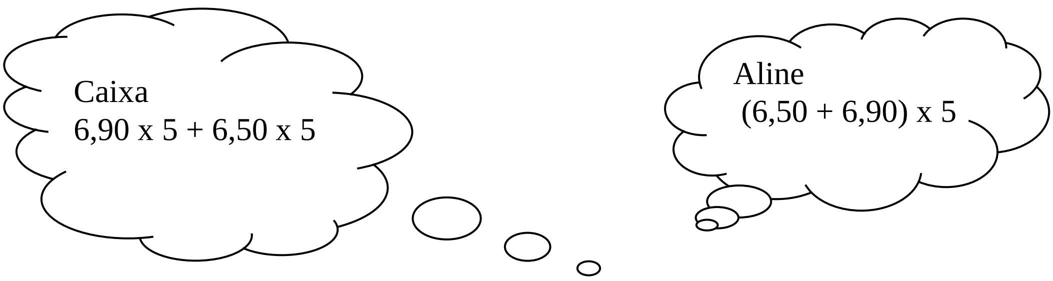
<u>Objetivos</u>

Além dos objetivos já estabelecidos, as atividades 4 e 5 visam a

- reconhecer a importância do uso da propriedade distributiva no cálculo mental ou com a calculadora.

<u>Enunciado</u>

Aline foi ao supermercado e comprou cinco barras de chocolate branco, cada uma custando R$ 6,90, e cinco barras de chocolate escuro, cada uma custando R$ 6,50. Como, na hora de pagar, os caixas estavam quebrados, o caixa teve que fazer as contas usando máquinas de calcular. Houve então uma discussão entre Aline e o caixa sobre como deveria ser feita a conta. Observe as afirmações de Aline e do caixa.



Como você pode ajudar a acabar com a discussão, sem fazer as contas?

<u>Comentários</u>

1) De acordo com o observado na experiência, a tendência dos alunos é fazer as contas nos dois casos e verificar que o resultado é o mesmo.

É importante, portanto, insistir para que eles não efetuem as contas, reconheçam a propriedade distributiva, e a registrem por meio de uma equivalência:

$$6{,}90 \times 5 + 6{,}50 \times 5 = (6{,}50 + 6{,}90) \times 5.$$

2) A curiosidade natural de saber o resultado pode ser respondida por meio de cálculo mental, o que é bem mais fácil se for feito sobre a expressão do segundo membro da igualdade.

<u>ATIVIDADE 5</u> – A Loja de R$ 1,99

<u>Enunciado</u>

O professor Cláudio foi comprar marcador de quadro branco numa Loja de R$ 1,99. Os marcadores custavam R$ 1,99 cada. Cláudio resolveu comprar 5. Na hora de pagar o rapaz da caixa fez as contas de 'cabeça' e disse:

"são dez reais menos cinco centavos".

a) Está correta a conta feita pelo rapaz?

b) Por que 5 x 1,99 é igual a 10 - 0,05? Explique sem efetuar as contas.

<u>Comentários</u>

1) Esse é mais um exemplo no qual o uso da propriedade distributiva auxilia no cálculo mental.

É provável que os alunos considerem mais fácil fazer mentalmente 10 – 0,05 do que
5 x 1,99.

Para os que têm experiência com cálculo mental, multiplicar por 5 pode ser fácil (multiplicar por 10 e dividir por 2). Nesse caso, poder-se-ia mudar, no enunciado, o fator 5 por 7 ou 8.

2) A mesma observação feita na atividade anterior cabe nesta. Os alunos tenderão a efetuar as duas contas e verificar os resultados. Devem, nesse caso, serem estimulados a escrever uma outra expressão numérica, equivalente a essas duas, e que represente o raciocínio feito pelo rapaz da caixa. Isso pode ser feito a partir de perguntas como:

Como o rapaz inventou a expressão 10 reais menos cinco centavos? De onde ele sacou isso?

Capítulo V – Simbologia e Linguagem Algébrica

Simbologia

A Matemática ensinada, principalmente a partir do sétimo ano, é impregnada de símbolos, que foram construídos ao longo de séculos. As etapas dessa construção são, por vezes, ignoradas nas salas de aula e livros didáticos. O pressuposto desse ensino é que o aluno precisa dominar regras, sendo automaticamente capaz de aplicá-las a situações concretas.

Ao final deste texto apresentamos pequeno resumo do desenvolvimento histórico da linguagem algébrica. Ele poderá contribuir para a compreensão, pelo professor, das dificuldades encontradas por seus alunos.

A manipulação simbólica tem sido uma das questões centrais no ensino da Álgebra. Entre os alunos iniciantes no estudo da Álgebra, observamos muitas vezes dificuldade em admitir que números podem ser representados por símbolos. Os resultados dos testes por nós aplicados (ver anexo) evidenciam isso. Também é difícil para eles lidar com desafios não convencionais, para cuja resolução seja necessário interpretar informações apresentadas em diversas linguagens e estabelecer uma estratégia.

Até mesmo estudantes que executam a manipulação das técnicas algébricas com êxito, muitas vezes, não compreendem tais técnicas e pouco conseguem concluir a partir de e/ou comunicar por meio das expressões simbólicas. Neste sentido, exploramos situações em contextos variados para discutir o manuseio de técnicas da Álgebra, mostrando a necessidade e importância da compreensão no uso da linguagem simbólica. Observamos que, em geral, os alunos são pouco solicitados a escrever expressões algébricas; as expressões lhes são apresentadas para que as resolvam, fatorem, simplifiquem, etc.

Como a experiência inicial e, muitas vezes única, dos estudantes, neste campo, é resolvendo equações, toda letra em matemática é considerada por eles como sendo uma incógnita cujo valor deve ser determinado. Além disso, quase sempre, nos livros e nas aulas, essas incógnitas são representadas pelas letras **x** ou **y**, o que gera uma estranheza por parte dos alunos quando outras letras aparecem com este papel. Todos esses aspectos são indicadores da falta de familiarização dos alunos com os diversos papeis da variável.

Considerando que o uso da linguagem simbólica nas suas diversas funções, com compreensão, é um objetivo importante do ensino de Álgebra, a comunicação de idéias por meio de símbolos merece atenção especial.

Arcavi (1995, p. 62/63), sem tentar definir o sentido dos símbolos, salienta aspectos importantes, que resumimos a seguir.

- Compreensão e sensibilidade em relação ao poder dos símbolos, quando e como podem e devem ser usados; quando estes devem ser abandonados em favor de outras abordagens.

- Habilidade de manipular mecanicamente as expressões simbólicas, acoplada à de leitura compreensiva dessas expressões, estabelecendo conexões e verificando a razoabilidade de resultados.

- Habilidade de selecionar e construir representações simbólicas para problemas e a coragem de procurar expressões melhores para substituí-las.

- Percepção da necessidade de verificar os significados dos símbolos e de confrontá-los, ao resolver um problema.

- Consciência dos diferentes papéis que os símbolos podem assumir em diferentes contextos.

A Evolução Histórica da Linguagem Algébrica

A análise da evolução histórica da linguagem algébrica é um importante subsídio para a reflexão sobre as dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem da Álgebra e, particularmente, ao uso da linguagem simbólica.

Segundo Baumgart (1992), a origem da palavra Álgebra vem da expressão árabe *al-jabr* usada no título de um livro, escrito em Bagdá por volta do ano 825, pelo matemático árabe al-Khowarizmi. Nesta época a Álgebra restringia-se apenas ao estudo das equações e a palavra *al-jabr* tinha o sentido de *restauração* (a passagem de uma equação como $x - 2 = 8$, para restaurar o 2 que estava sendo tirado e encontrar a incógnita completa $x = 10$). No desenvolvimento da Álgebra ao longo da História destacam-se duas fases que se distinguem nos pontos de vista tanto cronológico quanto conceitual: a *fase antiga ou elementar*, que inclui o desenvolvimento da linguagem e dos métodos algébricos, priorizando a resolução de equações, e a *fase moderna ou abstrata*, consolidada a partir do século XIX, que inclui o estudo das estruturas matemáticas, tais como grupos, anéis e corpos.

Como nosso interesse é relacionar a evolução da linguagem algébrica e da álgebra, como conhecimento matemático, com o ensino básico, focaremos especialmente no desenvolvimento da notação algébrica na fase elementar. Nessa fase há três estágios: retórico, sincopado e simbólico.

Estágio retórico

Neste período, não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o pensamento matemático, as expressões eram escritas totalmente em palavras. Por isso, este estágio também é chamado de verbal.

No exemplo dado por Guelli (2002), do livro *Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah*, al-Khowarizmi resolve a equação $\mathbf{6x + 4x + 2x = 36}$ da seguinte forma.

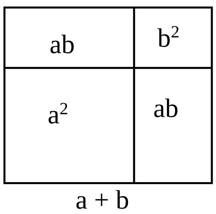
> ...] É preciso, em primeiro lugar, que vocês somem seis raízes com quatro raízes e com duas raízes.
> Como doze raízes valem o mesmo que trinta e seis unidades, então o valor de uma raiz é três unidades.[... (p. 26)

O estágio retórico abrange a Álgebra formulada pelos egípcios, babilônios e gregos, entre estes, os pitagóricos e Euclides. Ainda neste período, constata-se o destaque dado à Geometria, utilizada como um recurso, para a apresentação da resolução de problemas algébricos.

Struik (1989) afirma que

> ...] o forte caráter aritmético-algébrico da matemática babilônica transparece também na sua geometria. Tal como no Egito, a Geometria veio da fundamentação de problemas práticos relacionados com medição, mas a forma geométrica de um problema era usualmente apenas uma maneira de apresentar uma questão algébrica... A característica principal desta Geometria era, porém, o seu suporte algébrico. Este fato é igualmente verdadeiro para todos os textos das eras neobabilônica, persa e selêucida (600 a.C.– 300 d. C.) [... (p.59)

Por exemplo, o que escrevemos como $\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ era apresentado por Euclides da seguinte forma (Baumgart, 1992).



> Se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contêm. (p. 7)

Para os gregos da época de Euclides **a ao quadrado** era sempre representado por um quadrado de lado **a**.

Estágio sincopado

Neste longo período, do século II até cerca de 1500, as palavras foram, gradualmente, substituídas por abreviações. O grego Diofanto, no século III, introduziu o estilo sincopado de escrever equações ao representar pela primeira vez uma abreviatura especial para a incógnita.

Exemplo dessa notação algébrica é apresentado por Baumgart (1992, p 31):

Eis um exemplo de um dos mais antigos manuscritos, seguido de uma interpretação na forma moderna e uma explanação do grego:

$$K^{\Upsilon}\beta \quad \varsigma\eta \ \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\varepsilon \quad M\delta \quad \varepsilon\sigma\tau\iota \quad \mu\delta;$$

isto é

$$x^3 2 \quad x 8 \ - \ x^2 5 \quad 1 \cdot 4 = 44$$

ou

$$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$$

K^{Υ} é uma abreviação de κΥΒΟΣ (*KUBOS*, "cubo").
Σ é uma abreviação de αριθμος (*arithmos*, "número").
⩚ é uma combinação de Λ e I em ΛΕΙΨΣΙΣ (*LEIPSIS*, "menos").
Δ^{Υ} é uma abreviação de (*DUNAMIS*, "potência").
M é uma abreviação de ΜΟΝΑΔΕΣ (*MONADES*, "unidades").

Mais tarde, os hindus desenvolveram uma forma sincopada similar à de Diofanto.

A partir deste período, os matemáticos foram lentamente substituindo as abreviaturas por letras e sinais, criando condições para que um novo estágio surgisse - o simbólico.

Estágio simbólico

Neste estágio, que inclui os séculos XVI e XVII, as idéias algébricas são representadas por meio de símbolos, como resultado de uma evolução gradual no aperfeiçoamento e na padronização de notações. Este processo deu um salto expressivo, por volta de 1500, quando o crescimento econômico propiciou as grandes viagens, facilitando o intercâmbio de idéias.

Nesta época, podemos destacar alguns fatos relacionados a essa evolução.

- Aceitação do sistema de numeração indo-arábico pelos europeus.
- Invenção da imprensa, que facilitou a padronização do simbolismo.

Segundo Mendes (1994):

> ...] a álgebra do início do século XVI se restringia, apenas, a encontrar os valores desconhecidos numa dada equação com coeficientes numéricos específicos. A álgebra era ainda, essencialmente, um conjunto de "truques" e não um método geral; cada caso específico necessitava de um "truque" diferente. A idéia de se estudar uma equação geral que representasse uma classe inteira de equações ainda não havia surgido. E esta idéia básica, de se fazer uma distinção clara entre parâmetros (valores conhecidos) e variáveis (valores desconhecidos) surgiu com François Viète (1540-1603). Viète usou vogais para representar variáveis e consoantes para representar parâmetros...A passagem para uma notação algébrica totalmente simbólica só ocorreu durante o intervalo de tempo entre Viète e Descartes. [... (p. 20).

Os exemplos apresentados por Baumgart (1992) mostram algumas etapas do processo de aperfeiçoamento e padronização da notação.

Cardano (1545): cubus p 6 rebus aequalis 20 $\leftrightarrow$ $x^3 + 6x = 20$.

Descartes (1637): $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0.$

Bombelli (1572): $\overset{\overset{6}{\smile}}{\mathrm{I}} \cdot \mathrm{p} \cdot \overset{\overset{3}{\smile}}{8} \cdot$ Eguale à 20.

$x^6 + 8x^3 = 20$

Viète (1591): 1 QC – 15 QQ + 85 C – 225 Q + 274 N aequatur 120.

$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$

A Sala de Aula

Considerando o desenvolvimento da linguagem algébrica em nossas salas de aula, verifica-se que os alunos não têm oportunidade de vivenciar a fase retórica (verbal) e tão pouco a fase sincopada.

De fato, quando se inicia o estudo de Álgebra no Ensino Fundamental, há, em geral, uma imposição rápida e precoce do uso de símbolos. É como se o uso da linguagem corrente tivesse que ser quase totalmente desprezado. Este fato contradiz a evolução histórica da própria Matemática, constituindo, talvez, uma das principais causas das dificuldades dos alunos para a compreensão da simbologia algébrica, nesse nível de ensino.

Nos testes e entrevistas aplicados há respostas indicando que seus autores estão em uma fase de transição entre os estágios retórico e simbólico do desenvolvimento da linguagem algébrica, o que é natural, mas exige atenção especial do professor para que esta transição se complete.

ATIVIDADES

Objetivos das seis primeiras atividades deste capítulo.

- Identificar a possibilidade de representar números por símbolos (letras e outros).
- Escrever expressões literais simples para representar resultado de contagem ou de medida.
- Relacionar informações veiculadas de maneiras não convencionais.

<u>ATIVIDADE</u> 1 – Agência de Turismo

(Adaptada de Falcão, 1993)

<u>Enunciado</u>

A agência de turismo Pequeno Mundo deixa claro como compõe o salário que paga a seus funcionários, afixando o seguinte cartaz na parede.

a) João, empregado por essa agência de viagens, trabalhou 80 horas e vendeu 22 bilhetes aéreos durante o mês de julho passado. Que total João recebeu em julho? Explique.

b) Num certo mês, Marcus trabalhou 50h e Leo trabalhou 30h. Pode-se afirmar que, no final desse mês, Marcus ganhou mais do que Leo? Por quê?

*c) Escreva uma fórmula que represente o salário total mensal de um funcionário que trabalha um total de **h** horas e vende **p** passagens.*

<u>Comentários</u>

1) Esta atividade, pela sua simplicidade, mostrou-se fácil para os alunos, apesar de o enunciado ser apresentado em linguagem não usual. Devido à importância de que os alunos se habituem a interpretar tipos diferentes de linguagem, outras atividades devem ser criadas neste sentido.

2) O único item que provocou dificuldade foi o item (c). Isto pode ter como causas a pequena experiência dos alunos com a criação de expressões algébricas e a pouca relação que em geral é feita destas expressões com situações reais.

Mesmo trabalhando em duplas, houve alunos que só acertaram depois da intervenção do professor. Respostas como as dos exemplos abaixo ilustram essa dificuldade.

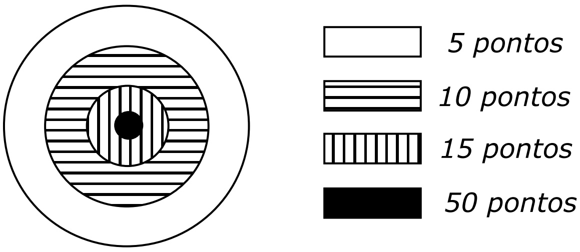
"*salário* $\times$ *passagem* $\times$ *parte fixa*" ou

"$300 + h + b$" .

<u>ATIVIDADE</u> 2 – O Alvo

<u>Enunciado</u>

Este é o alvo de um jogo de dardos:



a) João acertou

4 vezes no e

5 vezes no .

Quantos pontos ele fez?
Como você calculou?

b) Quantos pontos fez uma pessoa que acertou:

*- 3 vezes no e **y** vezes no ?*

*- **f** vezes no e **p** vezes no ?*

*- **a** vezes no , 5 vezes no e **y** vezes no ?*

*c) Na 1ª partida, João acertou **a** vezes no e **b** vezes no e, na 2ª partida, ele acertou **b** vezes no e **c** vezes no .*

Ao final das duas partidas, qual foi o total de pontos feitos por João?

d) Mariana fez 45 pontos. Dê duas possibilidades de acertos para sua jogada.

*e) Tiago jogou o dardo **b** vezes e fez 10 **b** pontos. Em que região(ões) Tiago pode ter acertado?*

Complete a tabela para representar algumas dessas possibilidades.

Nº de jogadas ***(b)***				
Total de pontos (***10 b)***				
Região(ões) acertada(s)				

*f) Numa partida, um jogador fez **10a + 15b** pontos e outro fez **5d + 10c** pontos. É possível que os dois tenham feito o mesmo número de pontos? Justifique.*

<u>Comentários</u>

1) A questão também está apresentada em linguagem não convencional, com o uso de legendas e, além disso, alguns itens têm letras representando dados, o que certamente é fator de dificuldade para os alunos.

O grande número de itens pode tornar a questão cansativa se for trabalhada de uma só vez.

2) Na explicação de como calcularam os pontos do item (a), alguns alunos escreveram erroneamente as expressões. Foi frequente o erro em relação ao uso do sinal de igualdade, como indica a resposta: “*5 x 4 = 20 + 5 x 15 = 75 ∴ 20 + 75 = 95”.*

3) Nos itens (b) e seguintes, o maior índice de erros ocorreu quando havia dados numéricos misturados com dados literais. Observa-se, em geral, a preocupação do aluno em dar um resultado numérico, e, para tal, simplesmente, ignoram as letras, ou consideram que, sempre que uma variável se apresenta sem coeficiente, esta “vale” 1. Tais procedimentos se baseiam, muitas vezes, na crença em que a propriedade do

fechamento, que vale para os números naturais, tem de continuar valendo nas expressões algébricas.

Exemplos de respostas para o item (b).

“3 . 5 + 15 = 30”

“y.50 = 50”

“a + 10 = 10”

“$f \times 50 + p \times 5 = 55$”

4) Nas respostas da tabela, observam-se outros erros além dos comentados anteriormente.

Respostas	Observações
“a x 10 + 5 x 5 = 10 + 25 + y x 50 = 85” *“3 . 5 = 15 + y x 15 = 30”*	Mau uso do sinal de igualdade.
“a . 10 + 5 . 5 + y . 50 = x”	O aluno já admite que a expressão não tenha resultado numérico, mas ainda sente a necessidade de “fechar” a expressão, nem que seja por uma única letra (geralmente, ***x***).
“15 + y” *“f + p”* *“25 + a + y”*	Alunos que não compreendem a presença de legendas e ignoraram o valor das mesmas, que deviam ser multiplicados pelas letras *y*, *f*, *p*, *a*, *b* ou c.
“(50f) + (5p)” *“(10)a + 25 + (y.50)”* *“x = (a.10) + 25 + (y. 50)”*	Alunos conseguiram escrever expressões algébricas, mas usaram parêntesis desnecessários.
“a.15 25 e y .50”	O intervalo entre *15* e *25* e o conectivo ***e*** substituem sinais de operações, sugerindo que o aluno ainda não se encontra no estágio simbólico do desenvolvimento da linguagem algébrica.

5) A entrevista relatada abaixo ilustra as dificuldades dos alunos em usar letras e expressões para representar números.

<u>Item a</u>

A – *3.5 + 15y = 0.*

E – *Por que igual a 0?*

A – *A equação da álgebra não funciona com duas incógnitas?* (talvez as várias letras dos enunciados o tenham confundido). *Não tem resultado. O resultado não está 100%. Eu coloquei 0 porque a equação pode ser igualada a 0. Tem diferença?*

E – *Mas ele fez 0 pontos?*

A – *Não. Isto com mais isto...*

E – *O que é isto com mais isto?*

A – *Quantos pontos ele fez.*

E – *Você está me dizendo que isto com mais isto é 0 pontos?*

A – *Calma... Aqui eu vou isolar a letra e passar para o outro lado.*

E – *É? Então você está me dizendo que isto é uma equação. Por que você igualou a 0?*

A – *Porque estou aprendendo equação do 2º grau agora.*

E – *Mas isto é uma equação do 2º grau?*

A – *Não, porque não tem* x^2*, não tem incógnita ao quadrado.*

E – *O que você está escrevendo significa o quê?*

A – *É o total de pontos que ele fez.*

E – *Mas você está dizendo que é igual a 0; você está dizendo que ele fez 0 pontos?*

A – *Não.* $15y = 3.5$
$15\ y = 15$
$y = 15 : 15 = 1.$

6) O item (c) tem o objetivo de familiarizar o aluno com a soma de monômios e com a análise das possibilidades de redução de termos semelhantes.

7) No item (d), trabalha-se com as várias possibilidades de se ter uma soma de pontos igual a 45. É a noção de equivalência que está em jogo.

8) No item (e), o que apresenta maior dificuldade, a letra ***b*** tem o papel de uma grandeza variável (nº de jogadas), e o número total de pontos depende dela. A sugestão da tabela surgiu a partir das experiências feitas e pode ajudar a resolver a questão e construir a noção de variável.

9) O item (f) foi incluído na atividade após termos observado a dificuldade dos alunos iniciantes em Álgebra em admitir que duas letras ou duas expressões distintas podem ter o mesmo valor, e em analisar as possibilidades disto ocorrer.

ATIVIDADE 3 – Moças e Rapazes

Enunciado

*Em uma loja há cinco vezes mais rapazes do que moças. Utilizando as letras **p** e **q** para representar o número de rapazes e moças, respectivamente, use a linguagem matemática para traduzir essa situação.*

Comentários

1) O número significativo de respostas em branco para essa questão, considerada fácil para o ensino médio, pode se dever, insistimos, à falta de familiaridade dos alunos com o uso da linguagem algébrica para representar uma situação real.

2) Um erro comum nessa questão é o de escrever: *"*$5p = q$*"*, trocando p e q. Como Arcavi (1995) observa, este erro não significa necessariamente a ausência do conceito de variável, mas pode ter origem em questões de linguagem; o aluno segue a ordem em que os elementos aparecem na frase.

3) Uma forma de incentivar o aluno a verificar criticamente a sua resposta é sugerir a ele que escreva outra situação que possa ser representada pela igualdade $5q = p$.

<u>ATIVIDADE</u> 4 – O Campeonato

<u>Enunciado</u>

No último campeonato brasileiro o Flamengo marcou Z gols e o Vasco H gols.
a) Quantos gols os dois times marcaram?
b) Se você soubesse quanto vale Z e quanto vale H, que operação você faria para calcular o total de gols?

<u>Comentários</u>

1) As respostas dadas indicaram que a maioria dos alunos reconhece a operação envolvida na questão.

2) Alunos que não admitem que uma letra pode representar um número recorreram mais uma vez à particularização, dando valores a Z e a H, de acordo com a posição dessas letras no alfabeto, e respondendo *"23 + 8 = 31"*.

3) A crença de que uma resposta não pode ser uma expressão com mais de um termo, ou seja, a resposta tem de ser *"fechada"* (Booth, 1994) leva o aluno a representar o resultado da soma por um número ou por uma letra (de preferência, ***x***). Exemplo: *"Z + H = x"*.

4) Um aluno respondeu *zh* e, depois de se corrigir, justificou o erro assim: "*É o vício, porque na aula agente faz ab, cd"*.

5) Segue entrevista com aluno do 8º ano.

E - *Quantos gols os dois times marcaram?*

A – *z.h*

E – *O que isso significa?*

A – *Que z é igual a h.* Deu mais explicações dizendo que precisava dos valores de z e de h.

E – *Se o Flamengo tivesse feito 3 gols e o Vasco 2, quantos gols teriam feito juntos?*

A – *5 gols.*

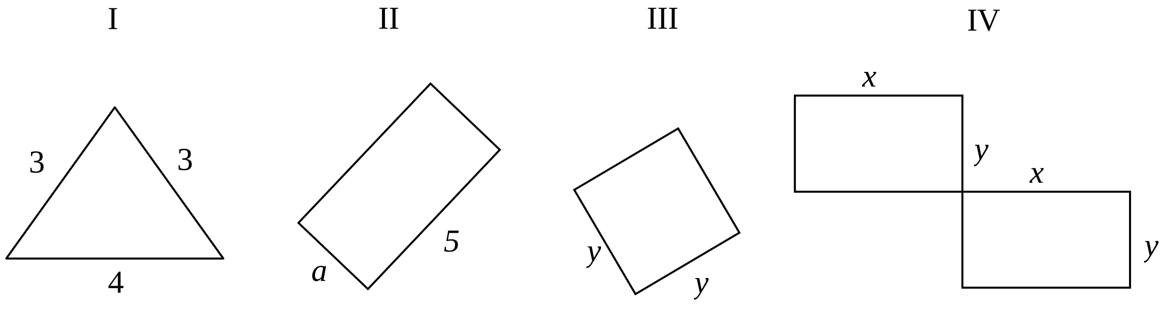
E – Repetiu a pergunta inicial: *Quantos gols os dois times marcaram?*

A – (Imediatamente): *z + h.*

ATIVIDADE 5 – Perímetros

Enunciado

O perímetro de uma figura plana é a medida do comprimento do contorno dessa figura.
Determine o perímetro de cada figura abaixo.



Comentários

1) Como na atividade do alvo, o maior número de erros ocorreu nos itens em que aparecem letras, principalmente, duas letras diferentes. Nesses casos, alguns alunos deram valores particulares às letras e outros pegaram a régua para medir os comprimentos dos segmentos.

2) Alguns alunos admitem representar números por letras, mas erram na manipulação algébrica ou tentam igualar a expressão a uma única letra ou monômio. Exemplos.

"$a + a = a^2$" ; "$a + a = a$" ; "$y + y + y + y = y$" ; "$a + 5 = 5a$" ; "$y + y + y + y = y^4$".

3) No item IV, a dificuldade no cálculo algébrico pode ser observada inclusive em alunos que chegaram à expressão *"$2(2x+2y)$"*, mas não escreveram como resposta $4x + 4y$ *nem* $4(x+y)$.

Houve alunos que indicaram as somas $4x$ e $4y$, mas não somaram, indicando que não admitem que a resposta seja uma soma indicada.

Outros exemplos de respostas que indicam essa dificuldade.

"$x + x + y + y + x + x + y + y = 8$" e *"$x^4 + x^4$".*

<u>ATIVIDADE</u> 6 – A Parte escondida da Figura

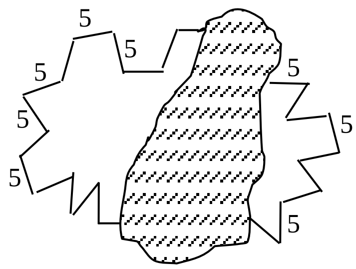
(As Idéias da Álgebra, 1994)

Objetivo

Além dos objetivos citados anteriormente, esta atividade visa a

- relacionar informações apresentadas no texto com as fornecidas por uma figura.

Enunciado



Uma parte da figura está escondida.
Ao todo são n lados, cada um de comprimento 5.

a) *É possível saber quantos lados estão escondidos? Por quê?*
b) *Como você pode representar o perímetro dessa figura?*

Comentários

1) A forma não usual de apresentar a questão - utilizando uma figura irregular, com uma parte escondida e apenas algumas medidas de comprimentos de lados indicadas com o número 5 - pode ter gerado dificuldades como as ilustradas abaixo.

- Considerar apenas os lados com o número 5 indicado → "*8 x 5*".
- Não admitir expressão literal como resposta → "*não dá*".

2) Embora tenha sido pedido no enunciado para <u>representar</u> o perímetro da figura, e não para calculá-lo, os alunos tentaram obter resultados numéricos, como em *8 x 5*, ou contando todos os segmentos que aparecem na figura.

3) Apesar de aparecer explicitamente no texto: <u>ao todo são *n* lados, cada um de comprimento 5</u>, quase todos os alunos ignoraram este fato. Isto sugere que, para alunos que ainda não conseguem raciocinar no terreno das idéias, a figura tem uma influência mais forte do que o texto.

A resposta *"Não é possível representar o perímetro porque a figura está incompleta"* é um indício disto.

4) Alunos que ignoraram o dado ***n***, mas procuraram levar em consideração a parte escondida da figura, introduziram outra variável: *"40+5X"* (note que o número 40 é 8 x 5).

5) As entrevistas com alunos de 8º e 9º ano ilustram as dificuldades mencionadas.

<u>Aluno 8º ano</u>

E - O *que você seria capaz de escrever sobre o perímetro desta figura? Observe que parte da figura está escondida. Ao todo são n lados, cada um de comprimento 5.*

A – Contou os lados aparentes, achou 24 e respondeu: *120*.

<u>ATIVIDADE</u> 7 – É Verdadeira?

<u>Objetivos</u>

- Ler expressões algébricas com compreensão.
- Analisar a possibilidade de dois símbolos diferentes representarem o mesmo número.

<u>Enunciado</u>

Complete a frase abaixo com uma das expressões:

sempre é verdadeira, *nunca é verdadeira ou às vezes é verdadeira*.

A igualdade $\boldsymbol{a + b + c = a + d + c}$ ....
Justifique.

<u>Comentários</u>

1) A maioria dos alunos respondeu "*nunca pode ser igual*".

Exemplos de justificativas incorretas para essa resposta.

"a+b+c o resultado é abc e nunca seria a+d+c porque foi colocado o d na questão".

"Nunca. Pois essas expressões não são iguais".

"Nunca. Porque, pelo alfabeto, a ordem não pode ser alterada".

"Nunca, pois o valor de b é diferente do valor de d".

2) Entre as justificativas de respostas corretas, encontramos as seguintes.

"Às vezes b pode ter o mesmo valor de d".

"Depende, se b e d forem iguais".

3) Os alunos em geral têm pouca oportunidade de lidar com a possibilidade de que letras diferentes podem ter o mesmo valor. Por exemplo, nos exercícios de cálculo de valor numérico de expressões, em geral, cada letra tem um valor diferente. Os casos em que duas incógnitas diferentes de um sistema de equações têm o mesmo valor são exceções aos quais se dá pouca ênfase. No item f da ATIVIDADE 2, do alvo, procuramos provocar a discussão dessa questão. Outros problemas devem ser criados neste sentido.

<u>ATIVIDADE</u> 8 – Teorema de Pitágoras

<u>Objetivos</u>

- Escrever expressão algébrica para representar um resultado geométrico: o Teorema de Pitágoras.
- Aplicar a conservação de área em situação-problema.

<u>Enunciado</u>

<u>Material</u> – 04 triângulos retângulos congruentes (recortados soltos, de preferência de cor).
Uma folha de papel com desenhos de dois quadrados congruentes, sendo a medida do lado de cada quadrado igual à soma das medidas dos catetos de cada triângulo.

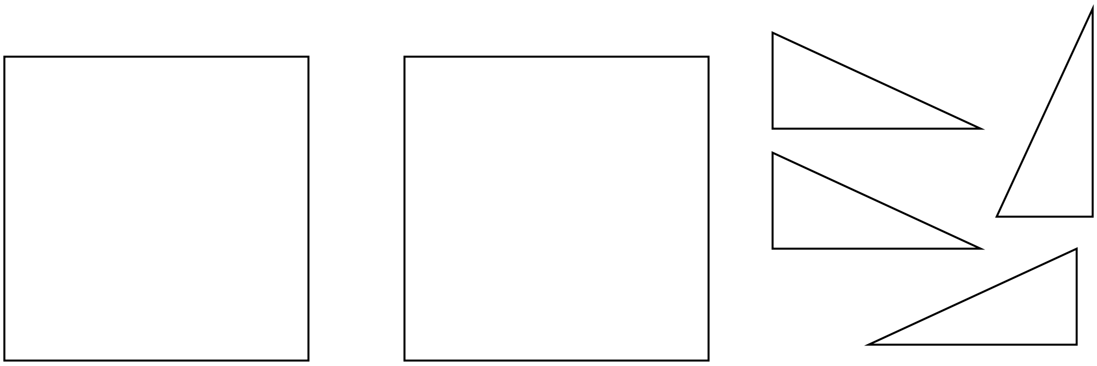


Fig. I Fig. II

<u>Desenvolvimento</u> –

a) As figuras I e II são quadrados congruentes.

*Coloque os 4 triângulos sobre a figura I, de modo que os ângulos retos desses triângulos coincidam com os ângulos internos dessa figura, sem haver superposição dos triângulos**.***
Contorne a figura que ficou descoberta, e caracterize-a, justificando.

b) Forme dois retângulos com os dois pares de triângulos e coloque-os sobre a figura II, de modo que a parte que ficar descoberta seja composta de dois quadrados menores. Contorne essas figuras.

c) Compare a área do quadrado que ficou descoberto na figura I com as dos quadrados formados na figura II, justificando com palavras.

d) Represente esta relação por meio de uma igualdade envolvendo as medidas dos três lados dos triângulos dados.

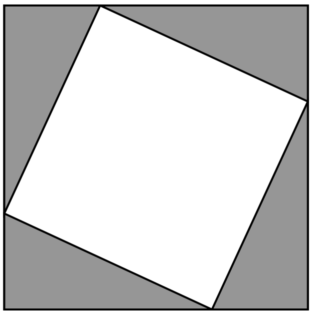
Comentários

1) Esta atividade é uma demonstração simples do Teorema de Pitágoras, que pode ser trabalhada com alunos de anos anteriores ao 9º, uma vez que ela depende apenas de o aluno ter a conservação de área.

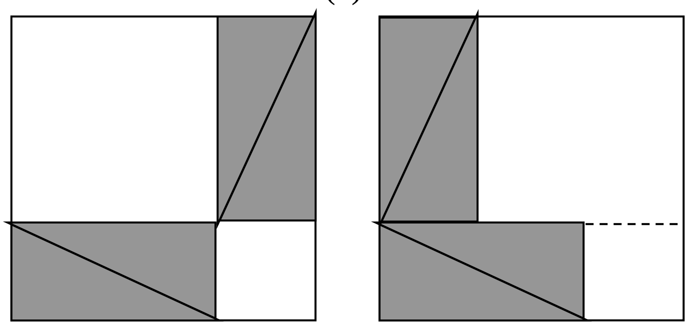
2) Nela, é explorado o significado geométrico desse Teorema e, só ao final, aparece a sua representação algébrica. Para acentuar o significado geométrico, é importante que os alunos observem que os quadrados obtidos nas figuras I e II são quadrados cujos lados são, respectivamente, a hipotenusa e os catetos dos triângulos dados.

3) O item (a) tem uma única resposta, a menos de rotação, mas o item (b) tem duas, mostradas a seguir. A diversidade deve ser explorada.

(a)



(b)



4) No item (c), depois de os alunos concluírem a igualdade entre a área do quadrado da figura I e a soma das áreas dos quadrados da figura II, pode-se sugerir-lhes que representem por letras os lados de cada quadrado formado nas duas figuras, e, com as mesmas letras, os lados correspondentes dos triângulos dados.

Para responder o item (d), deve-se observar que a igualdade é entre áreas e não entre figuras.

<u>ATIVIDADE 9</u> – Sempre, Nunca ou às Vezes

<u>Objetivo</u>

- Analisar relações entre expressões em função dos possíveis valores da variável.

<u>Enunciado</u>

Considere a afirmação: "2b é maior do que b – 2".

Marque a alternativa correta e justifique sua escolha.
( ) *sempre é verdadeira*
( ) *nunca é verdadeira*
( ) *às vezes é verdadeira*

Justifique sua resposta com um contra-exemplo ou utilizando um cálculo.

<u>Comentários</u>

1) Do ponto de vista do rigor matemático, uma afirmação só é verdadeira quando vale <u>sempre</u>.
A formulação desta atividade, no entanto, tem o objetivo de incentivar o aluno a analisar valores da variável que satisfaçam ou não a afirmação, reforçando o conceito de variável.

2) Muitos alunos utilizaram valores numéricos arbitrários, quase sempre positivos, para responder e justificar. É importante chamar a atenção para os outros tipos de números que eles já conhecem.

3) A crença em que, numa multiplicação, o produto encontrado é sempre maior que qualquer um dos fatores e que o produto entre dois números é sempre maior que a diferença entre esses dois números, pode ser percebida nas justificativas dadas pelos alunos. Ela é coerente com o que os alunos aprenderam nas operações com números naturais, mas não vale nos conjuntos dos números inteiros e racionais.

A idéia de que dobro é sempre maior está também relacionada com a vida prática, por exemplo, quando se diz: "Vou te dar o dobro".

É importante que o professor estimule a reflexão sobre essas crenças.

4) Exemplos de respostas incorretas (as respostas foram transcritas com todas as incorreções).

- *"Verdadeiro. Porque qualquer número na frente da letra, sempre será multiplicado (sendo assim aumentando) e já que sempre a outra será de subtração, será sempre menor".*

"Verdadeiro. Se houver qualquer número na frente da letra, ele se multiplicará, e já que a outra operação será de subtrair, será sempre menor".

"Verdadeiro, b é um número escondido multiplicado por dois e por isso o 2b é maior que b - 2".

"Verdadeiro. Porque 2b é o dobro e b - 2 é subtraído".

"Vai ser sempre verdadeira pois 2 vezes alguma coisa é igual ao dobro e alguma coisa subtraída por dois vai ser sempre menor".

"Verdadeiro. Por que 2 multiplicado por um número é menor que o número menos 2".

Exemplo de justificativa correta.

"b é uma variável e, substituindo por um número, poderemos obter um resultado, às vezes maior e às vezes menor".

5) Seguem outras atividades do mesmo gênero, com um maior grau de dificuldade, que exploram outras crenças errôneas a respeito do inverso de um número, da potenciação e da radiciação.

Sugerimos pedir ao aluno para "traduzir" a afirmação em linguagem corrente, antes de responder às questões, por considerarmos que essa prática o ajuda a reconhecer o significado da afirmação e facilita a resposta.

$\frac{1}{x}$ *é menor do que x.* <u>Tradução</u> Sempre verdadeira ( ) Nunca verdadeira ( ) Às vezes verdadeira ( ) <u>Justificativa</u>	*(n + 1)^2 = n^2 +1* <u>Tradução</u> Sempre verdadeira ( ) Nunca verdadeira ( ) Às vezes verdadeira ( ) <u>Justificativa</u>
$\sqrt{t}$ *é menor que t.* <u>Tradução</u> Sempre verdadeira ( ) Nunca verdadeira ( ) Às vezes verdadeira ( ) <u>Justificativa</u>	$\sqrt{a+1}$ *é menor do que* $\sqrt{a}$ *+ 1.* <u>Tradução</u> Sempre verdadeira ( ) Nunca verdadeira ( ) Às vezes verdadeira ( ) <u>Justificativa</u>

<u>ATIVIDADE 10</u> – O Segredo de Maurício

<u>Objetivos</u>

- Identificar relações numéricas implícitas em expressões algébricas por meio de manipulação sobre elas.
- Analisar expressões algébricas com compreensão.

<u>Enunciado</u>

a) Maurício gosta de inventar desafios matemáticos para seus colegas.

Veja o último que ele inventou.

"Descubra qual o segredo que existe na diferença entre o quadrado de um número ímpar e 1".

Escolha alguns outros números ímpares e complete a tabela.

Número ímpar	**O quadrado do número**	**O quadrado do número menos 1**
9	81	80

a) Observando a última coluna da tabela, descubra o segredo.

b) Será que esse segredo é valido para qualquer número ímpar?

c) Justifique sua resposta, utilizando as operações com expressões algébricas, os produtos notáveis e a fatoração de expressões algébricas que você aprendeu.

d) O que você pode dizer sobre os números resultantes da diferença entre a terceira potência de um número inteiro e o próprio número?

<u>Comentários</u>

1) A grande maioria dos alunos da escola básica não tem experiência com o uso de expressões algébricas para generalizar fatos aritméticos, o que pode gerar dificuldades nos mesmos para responder os itens (b) e (c). Assim, para que adquiram familiaridade com essa prática e tenham condições de resolver a atividade, sugerimos desafiá-los a escrever algebricamente:

- *um número par qualquer;*
- *um número ímpar qualquer;*
- *dois números naturais consecutivos e*
- *três números naturais consecutivos.*

2) A atividade também exige dos alunos o conhecimento de propriedades aritméticas. Para apresentar algumas delas, propomos as questões abaixo, sempre pedindo justificativas, que devem partir da observação de exemplos numéricos.

- *Dados dois números naturais consecutivos, um deles será par? Por quê?*

- *Dados dois números naturais consecutivos, um deles será múltiplo de 3? Por quê?*
- *Dados três números naturais consecutivos, um deles será múltiplo de 3? Por quê?*
- *Se, num produto, um dos fatores é múltiplo de um número, o produto será múltiplo desse número?*
- *Se, num produto, houver um fator múltiplo de 2 e outro múltiplo de 3, esse produto será múltiplo de que números?*

2) Após esta exploração, o processo de descoberta do porquê do segredo pode ser feita passo a passo, como, por exemplo:

- *Escreva uma expressão que representa um número ímpar qualquer e eleve-a ao quadrado. Nesse caso, podem escrever* $\boldsymbol{(2n+1)^2}$ *ou* $\boldsymbol{(2n-1)^2}$.
- *Subtraia 1 da expressão que você obteve ao desenvolver esse quadrado.*
- Use *as operações com expressões algébricas e a fatoração de expressões algébricas que você aprendeu para obter a expressão equivalente mais simples.*
- *Observe a expressão obtida* $\boldsymbol{4n(n+1)}$ ou $\boldsymbol{4n(n-1)}$ *e decida se você pode garantir que ela representa um número*
  - par;
  - múltiplo de 3;
  - múltiplo de 4;
  - múltiplo de 6;
  - múltiplo de 8.

A observação pedida acima envolve o que chamamos leitura compreensiva de expressões algébricas.

3) O item (d) é um desafio semelhante e, se necessário, pode ser encaminhado da mesma forma. Acreditamos que alguns passos serão desnecessários para os alunos que compreenderem o item (c).

<u>ATIVIDADE 11</u> – Brincando com Símbolos e Números

<u>Objetivos</u>

- Identificar uma linguagem simbólica não usual para a escrita dos números naturais.
- Reconhecer lúdica e simbolicamente o fato de que os números naturais são escritos de forma única como produto de números primos.
- Descrever verbalmente regularidades observadas em sequências de símbolos e numéricas.

<u>Enunciado</u>

a) Complete, no quadro a seguir, os números que estão faltando, e escreva os símbolos correspondentes a cada um deles.

b) Como você descobriu os símbolos de cada número?

c) O que você pode observar, na representação com símbolos, sobre os números que:
- são múltiplos de 2?
- são divisíveis por 7?
- são múltiplos de 10?
- tem apenas 2 divisores?

d) Represente o número 120, usando os símbolos da tabela.

e) Que número está representado pelos símbolos: ¤¤ ↑↑↑↑↑

	2 ↑	3 ¤		5 ●	6 ↑ ¤	7 ♦	8 ↑↑↑		
11		13 ⊕	14 ↑♦	15 ¤●					
21 ¤♦				25 ●●					
									40 ●↑↑↑
	42 ↑¤♦								50 ↑●●

<u>Comentários</u>

1) Os alunos demoram a identificar a operação que existe entre os símbolos. Inicialmente, pensam que é adição, mas, depois de experimentar alguns números, descobrem que é multiplicação.

2) Outra dificuldade é admitir a necessidade de criar um símbolo novo sempre que surge um novo número primo.

3) É importante que o professor explore com seus alunos a variedade de regularidades que podem ser observadas nessa atividade, estimulando sempre as justificativas orais.

Capítulo VI – Regularidade e Generalização

Pensar algebricamente é lidar com idéias, processos, resultados, leis, gerais. A linguagem algébrica busca expressar o que é genérico. Exprime relações entre objetos, independentemente da natureza desses objetos.

A existência de regularidades em fenômenos permite, muitas vezes, a sua generalização por meio de leis que podem ser representadas por expressões algébricas, o que possibilita a previsão de ocorrências, sem a necessidade de repetir tais fenômenos. O desenvolvimento da capacidade de generalizar situações que apresentam regularidades deve ser estimulado nos alunos e exige, em geral, abstração. Para isso, e, a partir disso, é necessário que o aluno desenvolva também a capacidade de apresentar argumentos na linguagem corrente e justificar a validade da lei para quaisquer casos.

Encontram-se freqüentemente, principalmente em níveis elementares, casos em que os alunos generalizam fatos, verificando apenas a sua validade para casos particulares. É, portanto, necessário que tais alunos explorem situações que lhes permitam concluir que isso não é suficiente e os ajudem a desenvolver um pensamento genérico. Neste sentido também é adequado o trabalho com situações que não apresentem regularidade.

O registro e a compreensão de leis gerais em linguagem corrente, aritmética, algébrica, geométrica e outras, são passos decisivos para que os alunos dêem significado às expressões algébricas, familiarizando-se com este tipo de linguagem e desenvolvendo este tipo de pensamento. Segundo João Pedro da Ponte (2005): *"[...]uma das vias privilegiadas para promover o pensamento algébrico é o estudo de padrões e regularidades"*. (p. 37)

Conforme o que foi observado na Introdução, é na passagem da linguagem corrente para a algébrica que reside a maior dificuldade dos alunos iniciantes em Álgebra. Para facilitar essa passagem, o hábito de argumentar organizadamente em linguagem corrente é essencial.

Outro aspecto ressaltado por pesquisadores, que enfatizamos, é que a iniciativa de recorrer às letras para iniciar um raciocínio, ou expressá-lo, não se dá espontaneamente pelo estudante. Não é um fenômeno natural. Deve ser ensinado e estimulado, como parte da construção do conceito de variável. Para tal, podem ser aproveitadas atividades exploradas no estudo de proporções, geometria e outros tópicos, como as que sugerimos neste capítulo. Nessas atividades, há apenas um item da ATIVIDADE 6 no qual não há regularidade. Nas demais, pedimos sempre uma igualdade que representa a lei geral da situação, sob diversas formas. Por exemplo.

- *Como você relaciona o número de paradas e a distância percorrida pelo trem?*

- *Como você representaria sua resposta por uma igualdade matemática?*

- *Escreva a fórmula que determina o número total de rodas R do trem, quando houver V vagões.*

Como salientamos na Introdução, fenômenos que envolvem proporcionalidade direta ou inversa são excelente meios de desenvolver esta capacidade, por se tratar de relação simples e, de certa forma, natural. Por esse motivo, as três primeiras atividades propostas envolvem proporcionalidade direta, e a quarta, proporcionalidade inversa. Nas cinco últimas, a relação envolvida é representada por uma função afim.

Atividades envolvendo os aspectos mencionados se encontram também em publicações do Projeto Fundão como: *Construindo o Conceito de Função* (Tinoco, 2002) e *Argumentação e Provas no Ensino de Matemática* (Nasser e Tinoco, 2001).

ATIVIDADES

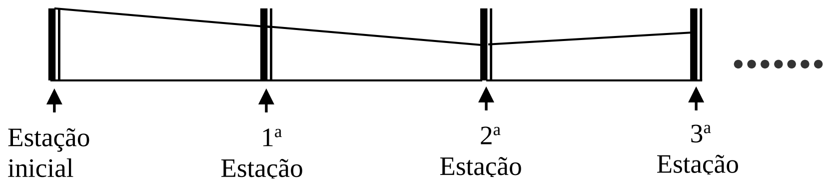
Objetivos das atividades deste capítulo:

- analisar a existência ou não de regularidade em situações diversas;
- expressar verbalmente argumentos que justificam tais regularidades;
- expressar as leis que regem as situações por meio de expressões algébricas e
- identificar um sentido para o estudo e uso de expressões algébricas.

ATIVIDADE 1 – Estações do Metrô

Enunciado

Em uma cidade, o metrô foi planejado para que a distância entre duas estações consecutivas seja sempre 10 km.



Responda.

a) O que você pode dizer sobre a distância percorrida pelo trem: após 7 paradas? E após 12 paradas?

b) Como você relaciona o número de paradas e a distância percorrida pelo trem?

c) Como você pode representar a distância percorrida pelo trem após y paradas?

d) O que significa a letra y?

Comentários

1) A dificuldade de os alunos interpretarem o enunciado foi responsável pelos principais erros: o de considerar a partida como uma parada e/ou considerar que 10 km era a distância entre duas paradas não consecutivas, embora a palavra consecutivas estivesse no texto. Isto reforça a necessidade de trabalho de escrita e de interpretação de textos em matemática.

Considerando este último erro, optamos por incluir o desenho no enunciado.

Exemplo de resposta.

Item (a): *60* e *110*.

Este mesmo aluno, no item (c), respondeu: $x = (y - 1).10$

Os alunos que consideraram 10 km como a distância entre duas paradas não consecutivas escreveram, no item (c): *"d = 5y"*.

2) Os alunos que responderam "*a cada parada a distância aumenta de 10 km*", no item (b), já conseguem matematizar a situação apresentada, embora não consigam generalizá-la simbolicamente. Isto é um estágio na construção do conceito de função (Tinoco, 2002), que deve ser superado com experiências deste tipo.

3) Exemplos de respostas de alunos que já conseguem abstrair a relação observada na situação: *"P.10 = K"; "são proporcionais"* ou *"x = (y-1). 10"*. Escreveu *(y-1),* por considerar a partida como a primeira parada.

4) Para alunos com este nível, é recomendável acrescentar a esta atividade o seguinte item.

- *Quantas vezes este trem parou entre duas estações distantes 90 km uma da outra?*

Para responder esta pergunta, o aluno pode simplesmente realizar um cálculo mental ou resolver a equação $10 \cdot y = 90$, obtida ao fixar o valor da distância em 90 km, na relação funcional que escreveu. Ao fixarmos o valor de d em 90, a variável *y*, que era uma variável independente, passou a fazer o papel de incógnita.

5) Considerar *y* uma parada foi um erro muito presente e reflete a dificuldade de o aluno admitir que uma letra representa um número.

6) As seguintes entrevistas com alunos do 7º ao 9º ano ilustram as dificuldades.

Aluno A

E – *O que significa a letra y?*

A – *É o número de quilômetros* (Depois acertou: *é o número de paradas*).

Aluno B

E – *Como você relaciona o número de paradas e a distância percorrida pelo trem?*

B – Ficou na dúvida.

E – *Você é capaz de escrever sua resposta sem usar palavras, isto é, usando a linguagem matemática?*

B - *y quilômetros, o y pode valer qualquer coisa.*

E – *O que significa a letra y?*

B - *y é uma incógnita.*

Aluno C

E – *Como você relaciona o número de paradas e a distância percorrida pelo trem?*

C – *10 . y.*

E – *O que significa a letra y?*

C – *y é variável, é um número variável.*

O aluno D acertou o cálculo das distâncias nos casos em que o número de paradas eram números dados, mas não conseguiu generalizar, apesar da intervenção da entrevistadora.

E – *Como você pode representar a distância percorrida pelo trem após y paradas?*

D – *Não entendo essa y paradas.*

E – *O que significa a letra y?*

D – *A incógnita.*

Aluno P

E – *O que significa a letra y?*

P – *y é um número qualquer, então é 3.*

Aluno R

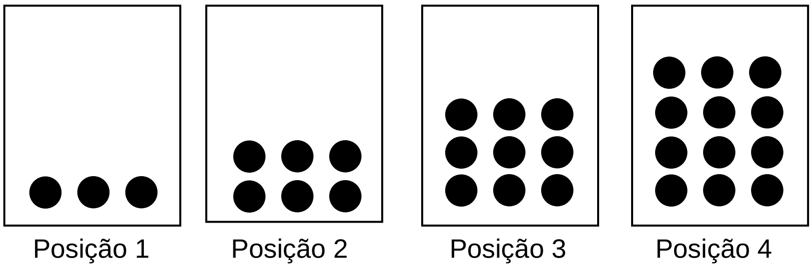
E – *O que significa a letra y?*

R – *Não sei que número é esse. Então não arrisco. Tenho que achar quantas estações tem. Se eu conseguir, multiplico por 10.*

<u>ATIVIDADE 2</u> – Cartões com Bolinhas

(Adaptado de Matemática na Vida e na Escola, 8ª série, Ed.do Brasil, 2001)

<u>Enunciado</u>



Observe que, em cada posição, o cartão tem números diferentes de bolinhas.

a) Quantas bolinhas haverá no cartão da posição 5? E na posição 8?

b) Como você calculou o número de bolinhas nessas posições?

c) Como você calcularia quantas bolinhas há num cartão que esteja numa posição qualquer?

d) Como você representaria sua resposta por uma igualdade matemática?

<u>Comentários</u>

1) Assim como a anterior, esta atividade pede a generalização de situação em que as grandezas que variam são proporcionais. Por sua simplicidade, ela tem, em geral, alto índice de acertos. O recurso visual é também fator facilitador.

2) As dificuldades mais observadas no item (b) foram apenas de expressão.

Alguns alunos, entretanto, mesmo sendo de nível médio, não perceberam a multiplicação envolvida na situação e responderam: *"somando* ou *colocando mais".* Esta resposta indica que o autor se referiu apenas à passagem de uma posição para a seguinte, e não a uma posição genérica.

Outras respostas indicam um raciocínio genérico:

"3 x nº da posição";

" indica a operação de multiplicação por 3";

"vertical x horizontal".

3) Exemplos de respostas ao item (c).

"3 mais que na posição anterior" ⟶ Só percebeu a lei de recorrência, não generalizou.

"Depende da posição" ⟶ Não consegue expressar a lei de formação.

"3" ⟶ Viu que tinha relação com 3, mas não soube explicitar esta relação.

4) Houve alunos que responderam o item (d) com exemplos particulares, como, por exemplo:

"3 x 6 = 18" ⟶ Isto indica a não construção do conceito de variável e merece atenção.

<u>ATIVIDADE 3</u> – O Preço dos Ovos

<u>Enunciado</u>

Na tabela temos a quantidade de ovos (em dúzias) e o preço a pagar. Complete-a.

Quantidade de ovos (em dúzias)	Preço a pagar (R$)
1	9,90
2	19,80
3	
	39,60
10	
d	
	9,90y

Copie da tabela uma expressão que permite determinar o valor do preço a pagar por uma quantidade qualquer de ovos.

<u>Comentários</u>

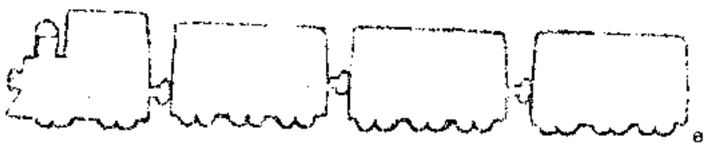
1) A experiência do grupo autor deste trabalho com proporções indica que o uso de tabelas para organizar e analisar dados auxilia em muito a percepção da estrutura envolvida no problema (Tinoco, 1993).

2) As duas últimas linhas evidenciam a expressão geral, algébrica, do preço a pagar. Comparando as duas, observa-se o mesmo raciocínio feito em sentidos opostos, e pode-se explorar o fato de que a letra usada não importa.

3) Seguem outros quatro exemplos de atividades do mesmo tipo da anterior. Em algumas delas sugerimos explicitamente o uso das letras para indicar as variáveis, o que pode auxiliar alunos com dificuldade. Ao longo do trabalho, o aluno deve tornar-se capaz de tomar essa iniciativa.

I) A Locomotiva (Prova do Colégio Pedro II – Admissão ao ensino médio - 2004)

Em um trem, a locomotiva possui 4 rodas de cada lado, e cada vagão possui 6 rodas de cada lado.



a) Quantas rodas tem ao todo um trem de 8 vagões? E de 10 vagões?

b) Escreva a fórmula que determina o número total de rodas R do trem, quando houver V vagões.

c) Determine o número de vagões quando o trem tiver um total de 128 rodas.

II) Caixas de Bombons

Dona Solange fabrica bombons caseiros e os vende em caixas decoradas. Em cada caixa ela coloca 6 bombons e vende por R$ 14,00. Complete as tabelas a seguir.

Número de caixas	Número total de bombons
1	
7	
12	
30	

Número de caixas vendidas	Quantia recebida com a venda
1	
6	
20	
50	

a) Qual a relação que existe entre o número de caixas e o de bombons nelas contidos?

b) Escreva uma igualdade que represente essa relação.

c) Qual a expressão que representa a quantia recebida por D. Solange pela venda de um número qualquer de caixas de bombons?

III) Correção de Salários

Por causa de um acordo feito com o sindicato de trabalhadores, uma empresa vai corrigir o salário de seus empregados, em 12%.

Complete a tabela que relaciona o salário antes e depois do reajuste.

Salário antes de ser corrigido (em R$)	Salário depois de ser corrigido (em R$)
1.450,00	
1.700,00	
2.000,00	
2. 950,00	
x	

Obs – Essa atividade dá oportunidade de resgatar o conteúdo de porcentagem, ressaltando o fato de que 112 % de uma quantia é igual a essa quantia multiplicada por 1,12.

IV) Distância Percorrida

Numa rodovia, um carro mantém uma velocidade constante de 60 km/h.

Complete a tabela que indica a correspondência entre a quantidade de horas e a distância percorrida.

Número de horas	Distância percorrida
1	
2	
3	
6	
10	

Represente essa correspondência em linguagem matemática.

<u>ATIVIDADE 4</u> - Prêmio da Loteria

Além dos objetivos mencionados, esta atividade tem um **<u>objetivo</u>** específico:

- escrever expressões que generalizem situações envolvendo proporcionalidade inversa.

<u>Enunciado</u>

Um prêmio de loteria de 120 000 reais será dividido igualmente entre os ganhadores.

*a) Complete a tabela na qual **n** representa o número de ganhadores e **Q** a quantia que cada um receberá.*

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**10**	**15**
Q								

b) Observando a tabela, escreva a relação entre os números de cada coluna.

c) Qual é a fórmula que possibilita o cálculo do prêmio que cada jogador receberá, dependendo do número de ganhadores?

d) É possível cada ganhador receber 16 000 reais? Por quê?

<u>Comentários</u>

1) A atividade difere das anteriores, pois, envolve <u>proporcionalidade inversa</u>, que é tão importante quanto a direta, embora pouco explorada. Nesse caso, o aluno deve concluir – item (b) - que o produto das variáveis **n** e **Q** é constante. Uma equação que representa essa situação é pedida no item (c).

2) No item (d), tem-se a possibilidade de discutir o fato de que 16 não é divisor de 120. Mais uma vez enfatizamos a importância de os alunos conversarem e escreverem em linguagem corrente.

<u>ATIVIDADE 5</u> – Qual a Relação entre as Colunas?

<u>Enunciado</u>

Qual o número que deve estar no lugar da letra **a***?*
*Qual é a regra que relaciona as colunas **A** e **B**?*

A	**B**
1	5
2	7
3	9
4	**a**

<u>Comentários</u>

1) Facilmente, pela observação da coluna **B,** os alunos percebem que o valor de **a** é 11. No entanto, a lei que generaliza a relação entre as colunas **A** e **B** não é trivial para alunos que não tenham experiência com este tipo de tarefa. Para desenvolver essa experiência, é necessário explorar outras tabelas que envolvam relações mais simples, tais como o dobro, o sucessor, o triplo mais 1, etc.

2) Um professor ou um aluno do ensino médio é capaz de reconhecer a coluna **B** como uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo 5. No entanto, o objetivo da atividade é que estes e outros alunos dos últimos anos do ensino fundamental serão capazes de resolvê-la, raciocinando com as operações, até chegar a expressões corretas, possivelmente distintas, para relacionar **A** e **B**. Exemplos: **2n + 3**, **(2n – 1) + 4** e **2(n-1) + 5**. A discussão sobre a utilidade da manipulação algébrica para concluir que todas essas expressões estão corretas, por serem equivalentes, é importante.

<u>ATIVIDADE 6</u> – Preço do Estacionamento

Enunciado

Priscila foi ao supermercado com sua mãe. Como o estacionamento grátis do supermercado estava lotado, sua mãe precisou deixar o carro num outro estacionamento rotativo, que tinha a seguinte tabela de preços.

Tempo	Preço em R$
1h	10,00
2h	22,00
3h	34,00
4h	
5h	

a) Complete a tabela.

b) Como você calcularia o quanto uma pessoa pagaria de estacionamento se deixasse o carro durante um dia inteiro?

c) Se no estacionamento houvesse a seguinte tabela, a partir dos seus dados, seria possível determinar o preço do estacionamento num período de 6 horas? Por quê?

Tempo	Preço em R$
1h	10,00
2h	16,00
3h	30,00
4h	40,00
5h	62,00

Comentários

1) Para melhor construir a noção de regularidade, o aluno precisa explorar situações nas quais não há regularidade, como ocorre nesta última tabela.

2) Alunos de 7º e 8º ano tiveram bastante facilidade em responder o item (a), mas a dificuldade nos demais itens foi grande. O número de erros no 8º ano foi menor, embora os erros tenham sido semelhantes.

3) Um erro comum no item (b) foi considerar que cada hora estacionada custaria 12 reais, sem considerar os 10 reais de primeira hora.
Muitos dos alunos que encontraram a resposta correta (R$ 286,00) somaram de 12 em 12 até chegar às 24h, ou seja, perceberam a lei de recorrência, mas não encontraram uma expressão para a lei geral.

4) Na letra (c) diversos alunos, depois de trabalharem com a primeira tabela, e outras experiências envolvendo situações com regularidade, acreditam que esta sempre existirá. Não conseguindo estabelecer uma lei, dão respostas aleatórias, pois também acreditam que todo problema proposto pelo professor deve ter uma solução.

Transcrevemos a seguir exemplos de justificativas interessantes de alunos que perceberam a inexistência de regularidade.

> *"Não. Porque é mais embolado e os números são diferentes"*.
>
> *"Não. Pois a diferença entre todos os valores não são iguais"*.
>
> *"Não porque o preço de um para o outro não é regular"*.
>
> *"Não. Pois a tabela está irregular"*.
>
> *"Não. Porque nessa tabela não tem uma fórmula"*.

ATIVIDADE 7 – Cercas de Quadrados

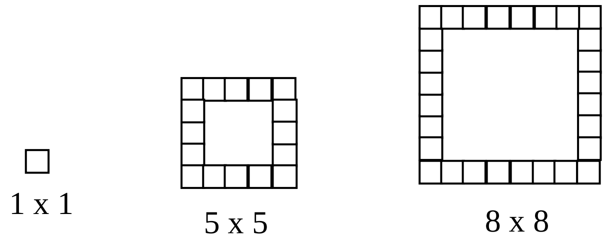
Objetivos

Além dos **objetivos** mencionados no início do capítulo, esta atividade visa a:

- avaliar a possibilidade de representar uma mesma situação por meio de diversas expressões e
- verificar a equivalência entre as diversas expressões algébricas com o uso de técnicas algébricas.

Enunciado

Na figura abaixo estão representadas "cercas" quadradas formadas por quadradinhos 1 x 1.



a) Encontre o número de quadradinhos 1x1 necessários para construir uma cerca do mesmo tipo, sendo.

i) 5 x 5	iii) 10 x 10	v) 100 x 100
ii) 8 x 8	iv) 12 x 12	vi) 1000 x 1000

(Se precisar, use o papel quadriculado).

b) Explique como você encontrou esses números.

c) Escreva em linguagem matemática o número de quadradinhos necessários para construir uma cerca quadrada qualquer desse tipo.

Comentários

1) Para responder ao item (a) alguns alunos do ensino fundamental (7º e 8º ano) recorreram inicialmente à multiplicação *(‘5x5 = 25”, “8x8 = 64”)*, mas, com a intervenção do professor, acertaram o item, usando diversas estratégias de contagem.

2) Entre as explicações de como contaram (item b), encontramos.

Explicação	Obs.
Nós somamos os lados esquerdo e direito, e somamos o de cima e o debaixo, mas sem somar as laterais. *Somamos 2 colunas horizontais com as duas colunas verticais, sendo que qualquer uma perde 2 quadrados, dependendo de que lado começou.* *Somando 2 lados com número igual por ex: 8x8, soma-se 2 lados de 8 e os outros por 6, subtrai 2 quadrados.* *Encontramos esses números colocando no lado direito e esquerdo o número pedido, e no superior e inferior colocamos os números menos 2 e somamos.* *Eu somei as paralelas verticais e das horizontais eu tirei 2 de cada e somei.*	Explicações de estratégias coerentes com a expressão escrita, mas com erros no modo de se expressar.
Eu e meu colega somamos os quadradinhos. *Nós encontramos através de um raciocínio lógico e básico.* *Através de um raciocínio lógico, rápido e fácil.* *Somando os quadrados.*	Respostas que sugerem ausência de estratégia.

Salientamos que a dificuldade de expressão dos alunos, em palavras, pode ser minimizada com o trabalho em grupos, valorizando a troca de idéias oralmente e o registro das conclusões por escrito.

3) Abaixo, apresentamos uma diversidade de respostas corretas para o item (c). Segue exemplo de explicação clara dada por aluno do 8º ano para esse item.

“Quando eu contei o segundo [5 x 5] eu percebi que os quadradinhos das pontas eram contados duas vezes, logo eu percebi que era para fazer a expressão algébrica 4x – 4, pois possui 4 lados”.

Um aluno falou alto para o colega: *o método adotado tem que funcionar para todos*, e respondeu: $x + x + w + w = D$.

4) Outras respostas encontradas.

Resposta	Observação
$4x - 4$ $x + x + x - 2 + x - 2$ $x - 1 \times 4$ [Colocou ao lado: $(x-1) \cdot 4$]	Corretas, com três modos de pensar distintos.
$X \times 4 - 4 = y$ $y + y + (y-2) + (y-2) = x$	Sugerem necessidade dos alunos de igualar a expressão a outra variável.
$x^2 + x - 2$ $x + y + 2 + m = n$	Sugerem incompreensão do fenômeno. Uso aleatório de letras e expressões.

Desafiar os alunos a mostrarem que expressões aparentemente distintas podem ser equivalentes é meio importante para que os alunos compreendam a utilidade das manipulações algébricas que aprendem.

5) Em trabalho com professores surgem ainda as seguintes expressões:

$x^2 - (x - 2)^2$

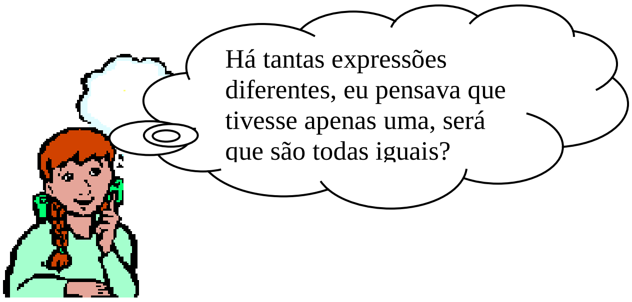
$x + (x - 1) + (x - 1) + (x - 2)$

$2n + 2\,(n - 2)$

6) Os erros freqüentes de multiplicar as dimensões ou calcular o perímetro da cerca devem- se, provavelmente, à experiência do aluno com as fórmulas para o cálculo da área e do perímetro do quadrado.

7) A riqueza dessa atividade está na diversidade de estratégias possíveis, com as respectivas expressões, distintas, porém equivalentes. Sugerimos incentivá-los a mostrar essa equivalência, por exemplo, como na proposta a seguir.

Dividir a turma em 7 grupos e sortear uma das fichas a seguir para cada um e fixar cópias de todas no quadro. Depois, propor a tarefa.



Mostre a Ana que todas são equivalentes bastando, para isto, utilizar as propriedades da matemática, e elas vão se reduzir a uma só.

$4(n-2) + 4$	$2n + 2(n-2)$	$x + x + x - 2 + x - 2$

$2(n + n-2)$	$a^2 - (a - 2)^2$	$(x-1).4$	$y + y + (y - 2) + (y - 2) = x$

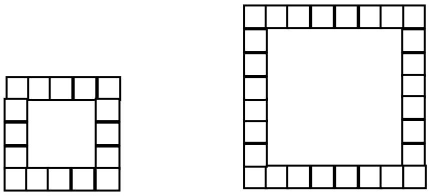
8) Observa-se que, a cada modo de explorar a figura, está associada uma expressão. Um exercício interessante é o de pedir aos alunos que façam essa associação, após a resolução da atividade. Segue-se uma sugestão que também pode ser feita em grupo.

Eduardo, professor de Matemática, prendeu no mural o seguinte desafio para todos os alunos da escola.

MURAL DA ESCOLA ALUNO BRILHANTE

DESAFIO

Na figura estão representadas “cercas” quadradas, formadas por quadradinhos 1 x 1.



5 x 5 8 x 8

$4x - 4$ Gr	$y + y + (y - 2) + (y - 2) = x$ Gr	$2(n + n-2)$ Gr	$2n + 2(n-2)$ Gr ....
$n + n-1 + n-1 + n-2$ Gr	$4(n-2) + 4$ Gr	$a^2 - (a - 2)^2$ Gr	$(x-1).4$ Gr ....

Henrique ficou responsável por colar no mural as soluções de sua turma. Enquanto organizava o mural as fichas caíram e se misturaram. Uma explicação caiu no bebedouro e se estragou. Ele ia fixar juntas a expressão algébrica e a respectiva justificativa. Ajude Henrique a montar o mural colocando o nome do grupo na ficha com a expressão correspondente e escrevendo a justificativa da expressão que sobrou.

Seguem as fichas com as explicações de cada grupo.

Grupo da Cecília - Nós diminuímos um do lado do quadrado e multiplicamos 4 vezes.

Grupo dos Nerdes - Eu e meu colega calculamos a área do quadrado e tiramos todos os quadradinhos de dentro.

Grupo do Felipe - Encontramos esses números colocando no lado direito e esquerdo o lado do quadrado, e no superior e inferior colocamos esse lado menos 2, e somamos.

Grupo do André - Soma lado de cima com o lado direito, tirando 2 quadradinhos e multiplica tudo isso 2 vezes.

Grupo da Ana - Somamos 2 linhas horizontais com as duas colunas verticais, sendo que estas perdem 2 quadrados.

Grupo da Bia - Nós somamos os lados esquerdo e direito, e somamos o de cima e o debaixo, mas sem somar os cantos, e depois somamos 4 para fechar.

Grupo da Lígia - Nós somamos um lado com o seguinte menos um quadradinho, mais o seguinte tirando um quadradinho, mais o último lado tirando dois quadradinhos.

<u>ATIVIDADE 8</u> – Traçando e Contando Segmentos

<u>Objetivos</u>

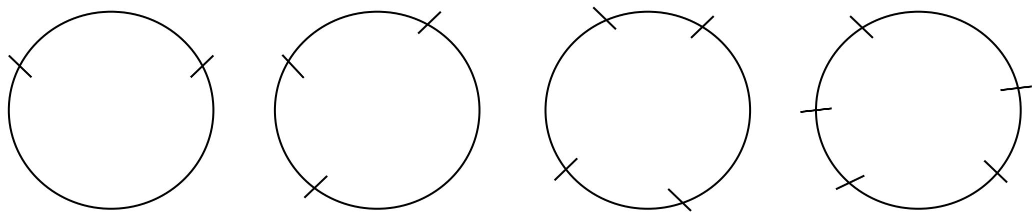
Além dos <u>objetivos</u> mencionados nas atividades 1 e 7, esta atividade visa a

- integrar a álgebra com a geometria e a combinatória.

<u>Enunciado</u>

Nas circunferências da figura estão marcados pontos arbitrários.

a) Determine o número de segmentos que podem ser traçados em cada circunferência, ligando esses pontos dois a dois.



2 pontos	3 pontos	4 pontos	5 pontos
...... segmento	...... segmentos	...... segmentos	...... segmentos

*b) Escreva uma expressão que dê o número de segmentos formados para um número **n** qualquer de pontos marcados sobre a circunferência.*

c) A expressão que você escreveu serviria para determinar os números pedidos no item a? Justifique.

d) Observando as figuras formadas, que significados geométricos podem ter esses segmentos?

*e) Escreva a expressão que dá o número de diagonais de um polígono de **n** lados. Utilizando a expressão do total de diagonais, obtenha a expressão que você escreveu para o total dos segmentos.*

<u>Comentários</u>

1) Na aplicação da atividade observamos a dificuldade de alguns alunos em interpretar o seu enunciado. Algumas dessas dúvidas são relativas à linguagem usada, outras são devidas ao não conhecimento dos conceitos geométricos envolvidos. A falta de experiência de alguns, com tarefas que não sejam apenas reprodução de algo feito pelo professor anteriormente, também requer a intervenção do professor. Esta intervenção, no entanto, deve sempre ter o caráter de provocar o raciocínio do aluno e não de responder à questão por ele.

2) O item (e) não é adequado para alunos que não conhecem a fórmula do número de diagonais de um polígono.

3) Não é necessário que o aluno tenha conhecimento formal de análise combinatória para resolver o problema. O raciocínio combinatório envolvido pode e deve ser desenvolvido em anos do ensino fundamental.

4) A discussão do item (c) deve levar o aluno a compreender que a resolução de um problema, na sua forma geral, abrange cada caso particular, ou seja, que resultados gerais e particulares não são independentes.

<u>ATIVIDADE</u> 9 – Estrutura da Ponte
(Adaptada de Cox & Bell, 1989)

Objetivos

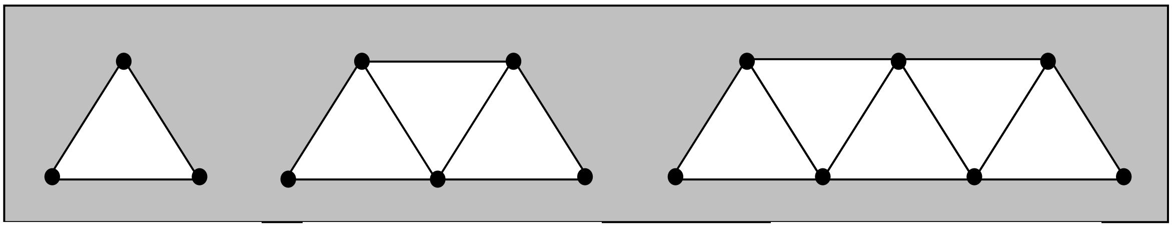
Além dos objetivos apresentados nas atividades 1 e 7, esta atividade visa a

- escrever uma equação em uma incógnita, a partir de outra equação que representa uma relação funcional.

Enunciado

A estrutura lateral de uma ponte é construída com barras de aço ligadas por parafusos, formando triângulos.

O desenho mostra as três primeiras etapas da construção dessa estrutura.



Base com 1 barra **Base com 2 barras** **Base com 3 barras**

a) Desenhe as duas próximas etapas.

b) Quantas barras formam a base da quarta etapa? .... E da quinta? ....

c) E quantos parafusos haverá nas estruturas, nessas etapas? .... e ....

d) Complete a tabela a seguir.

Número de barras da base da estrutura	1	2	3	4	5	6	20	35
Número total de parafusos	3	5	7					
Número de barras da base da estrutura	1	2	3	4	5	6	15	25
Número total de barras	3	7						

e) Como você pode relacionar o número total de parafusos necessários com o número de barras da base. Escreva uma expressão algébrica que traduza esta relação.

f) E como podemos relacionar o número total de barras usadas com o número de barras da base da estrutura. Represente esta relação por uma igualdade.

*g) Um aluno no item anterior, não considerou as barras da base, encontrando a expressão **3n-1**. Explique como você pode encontrar a expressão algébrica para o total de barras, aproveitando esta expressão (n é o número de barras da base).*

h) Se, numa estrutura desse tipo, você usar 7 parafusos, quantas barras na base você usará? E quantas barras você usará? E se forem 81 parafusos?
Como você calculou?

Comentários

1) Todos completaram os itens *a*, *b, c* e *d* corretamente.

2) Exemplos de respostas aos itens *(e)* e *(f)*.

(e) Total de parafusos – Nº de barras da base	**(f) Total de barras usadas – Nº de barras da base**
$2x + 1$ $x + x + 1$ $x \,.\, 2 + 1$ $x + (x + 1) = y$, x = nº de barras da base e y = nº de parafusos. $x + 1 + x = y$ $2.b + 1 = p$, b = base p = nº de parafusos. *De 2 em 2* ⟶ Não soube generalizar, mas observou a regularidade.	$4x – 1$ $m \,.\, 4 – 1 = k$ $p = b.4 - 1$, $p = 4b - 1$ $x \,.\, 4 – 1 = y$, x igual ao nº de barras da base da estrutura e y igual ao nº total de barras. $b \,.\, 4 - 1 = n$, b = base n = nº de barras. $m \times 4 – 1 = y$, m = nº de barras da estr. e y = nº total de barras.

Encontram-se respostas que, embora corretas, não mencionam explicitamente que variável é função de qual, mesmo no item *(f)*, no qual isto é pedido explicitamente.

3) Segue-se entrevista com aluna do 9º ano, que ilustra a dificuldade em usar letras para generalizar o fenômeno.

A - *Não entendi o item (e)*.

E - *Quero que você descubra uma relação entre o nº total de parafusos e o nº de barras da base e escreva uma expressão algébrica. Você sabe o que é uma expressão algébrica?*

A - *Usando letras*.

E - *Tente escrever uma expressão que sirva para encontrar o nº total de parafusos para qualquer nº de barras da base.*

Aluna continua não conseguindo.

E - *Vamos observar esta tabela. O que acontece com o número total de parafusos à medida que o nº de barras da base aumenta?*

A - *Vai aumentando 2*.

E - *Se fossem 7 barras na base, quantos parafusos seriam necessários?*

A – 15.

E - *E para qualquer nº de barras? Como você faria?*

A - *Teria que usar letra*.

E - Que letra você quer escolher?

A – *m*.

E – *Então, como ficaria?*

A - Tenta achar uma relação numérica até que responde: *é dobro mais um*.

E - *Como você pode escrever isso de uma forma geral?*

A - *2m + 1*. Aluna se espanta e diz: *é fácil*.

Nos itens *(f)*, *(g)* e *(h)* a dificuldade aumentou e a aluna só conseguiu fazer com a orientação do entrevistador.

4) As expressões gerais, na maioria das vezes, foram obtidas usando os dados das tabelas e não a figura. A entrevista seguinte mostra como um aluno do 9º ano generalizou a partir da figura.

E - *Como você completou a primeira tabela?*

A - *Comecei contando no desenho e depois fui somando de 2 em 2.* (Justificou com o desenho e com os números).

E - *O que acontece com o número de parafusos, quando aumentamos 1 barra na base?*

A - *Para os parafusos da base coloco em cima 1 parafuso a menos.*

E - *O que acontece com o número total de barras quando a base aumenta de uma barra?*

A - Observando os números da tabela e, depois, verificando no desenho que, para cada nova base, são acrescentadas 4 barras: *Está sendo somado de 4 em 4.*

E - Podemos calcular o número total de parafusos de uma ponte com um número qualquer **n** de barras na base, utilizando uma expressão algébrica.

A - Não sabe o que é uma expressão algébrica, então diz:

- *Se tiver n pode ser 9 em cima;*
- *A pessoa é que sabe que número é o n;*
- *Como o n é qualquer número eu coloco 20.*

E escreve: $n + n -1$.

E - *Responda agora o item g.*

A - *Tem que somar mais 1n, coloca 3n -1 + 1n.* Mas não simplificou.

5) No item *(h)*, apesar da orientação de entrevistador, dizendo que $n + n + 1 = 7$ é uma equação, que ele já aprendeu, o aluno resolve, por tentativa, colocando "*3 + 3 + 1 + 7*".

<u>Capítulo VII – Variação de Grandezas</u>

A noção de variável tem origem na necessidade do homem de descrever, analisar e prever fenômenos nos quais duas ou mais grandezas variam. Particularmente, tornou-se necessário estabelecer leis gerais para as situações que apresentam regularidade.

Por outro lado, a necessidade de resolver genericamente problemas da própria Matemática, como o da resolução de equações, deu origem à Álgebra, entendida como instrumento de resolver problemas e equações.

Hoje, como vimos na Introdução, consideramos quatro papéis para o ensino de Álgebra na escola básica, entre os quais se destaca o *estudo de fenômenos de variação.* Apesar da sua importância histórica e atual, os alunos deste nível escolar têm uma experiência muito restrita da Álgebra, que, em geral, só inclui os papéis de resolução de equações e o cálculo algébrico (concepção estrutural da Álgebra), que, isolados de um contexto de variação de grandezas, ficam muitas vezes sem sentido para os alunos. Com esse tipo de experiência, aliada ao fato de que os professores e livros só utilizam as letras x e y como incógnitas e a, b, ... como constantes, os alunos sequer cogitam da possibilidade de mudança destes papéis ou existência de outros, como parâmetros.

Conforme indicamos no esquema da introdução do Capítulo III, equações podem representar relações entre variáveis, ou seja, funções. No entanto, quando se tem uma função e se quer saber qual o valor da variável independente x que tem como imagem um certo valor fixado para a variável dependente, obtém-se uma equação propriamente dita. Por exemplo, sabendo que $y = f(x)$, se fixarmos um valor k para y, obtém-se a equação $f(x) = k$, que pode ser resolvida, determinando-se o valor de x. Isso também ocorre quando se quer o valor da variável independente que torna os valores de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ iguais. A equação, nesse caso, será $f(x) = g(x)$. Na verdade, o primeiro caso é um caso particular do segundo, sendo $g(x) = k$. Neste processo, o aluno terá oportunidade de experimentar a mudança de papéis das variáveis x e y. Nos dois casos, x passa de *variável independente* a *incógnita*. Experiências simples que envolvam essas noções podem ser exploradas desde cedo.

As noções de função e de variável, sendo fundamentais para uma iniciação à Álgebra, não devem ser desenvolvidas somente após longa experiência dos alunos com procedimentos algébricos. A complexidade destes conceitos, mencionada por inúmeros educadores matemáticos, em vez de sugerir o adiamento do seu tratamento para os níveis mais altos de escolaridade, exige que este tratamento seja feito, progressivamente, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. No livro *Construindo o Conceito de Função,* também do Projeto Fundão (2002), esse assunto é bastante explorado.

Ressaltamos ainda o papel da proporcionalidade no referido processo, uma vez que, segundo Sierpinska (1992) e outros, ela teve um papel central na construção histórica do conceito de função e, em geral, é trabalhada isoladamente no Ensino Fundamental. As experiências dos autores do presente trabalho e a dos grupos do Projeto Fundão que desenvolveram estudos sobre proporcionalidade (Tinoco, 1993) e funções (Tinoco, 2002) confirmam as idéias expostas por Post, Beher e Lesh (1994), que resumimos a seguir.

O pensamento proporcional pode contribuir para o desenvolvimento da Álgebra, se levarmos em conta que o raciocínio com proporções envolve: senso de co-variação, comparações múltiplas, predição e inferência, que utilizam métodos de pensamento qualitativo e quantitativo. Observe-se que o raciocínio qualitativo não depende de valores específicos, além de ser importante meio para se esboçar caminhos e respostas, bem como para verificar a adequação destes ao problema.

A relação entre grandezas variáveis foi bastante explorada no capítulo anterior e, neste sentido, este capítulo é sua continuação. De fato, a generalização de fenômenos que apresentam regularidade (particularmente, onde ocorre proporcionalidade) e a análise de fenômenos que não a apresentam é um profícuo caminho para a construção do conceito de variável. Há, no entanto, situações reais, mesmo que simples, nas quais a relação entre as grandezas que variam não pode ser representada por expressão algébrica. A idéia de que toda função tem representação analítica é um erro muitas vezes transmitido aos alunos. A representação gráfica de tais fenômenos pode fornecer informações importantes para a sua compreensão, como na situação a ser explorada na ATIVIDADE 4.

ATIVIDADES

<u>ATIVIDADE 1</u> – As Compras do Pedro

<u>Objetivos</u>

- Analisar situação real de relação funcional entre duas grandezas.
- Escrever equação que represente uma relação funcional.
- Identificar o campo de variação das variáveis envolvidas.

<u>Enunciado</u>

Pedro foi a uma loja de material de construção comprar latas de tinta que custavam 20 reais a unidade, sendo que, por esse preço, a loja entregava a mercadoria. Se o freguês comprasse pelo menos 5 unidades e levasse a compra em transporte próprio, a loja daria um desconto de 15 reais no total. Pedro só tinha 125 reais para gastar, mas podia transportar a mercadoria.

a) Por que a loja exigia um mínimo de unidades para dar o desconto?

b) Escreva uma igualdade que indique o preço a ser pago por um freguês qualquer, caso ele use o frete da loja.

O mesmo, para o caso de o freguês não usar o frete da loja.

c) Qual o menor número de unidades que Pedro poderia comprar para ter o desconto? E quanto ele iria pagar por essa compra?

d) Qual o maior número de unidades que Pedro poderia comprar? E quanto ele iria pagar por essa compra?

<u>Comentários</u>

1) A pergunta do item (a) deve provocar uma discussão informal, na qual a interpretação da situação é mais presente do que as contas.

2) Neste problema, o aluno explora a variação do total a pagar por uma compra, em função do número de itens de certo produto. Pelo fato de ser situação bem corriqueira, os conceitos de variável e de domínio da função se tornam bem naturais a partir das respostas aos itens (c) e (d).

3) Também o fato de que a função muda de acordo com a condição de utilizar ou não o frete merece ser explorado no item (b).

4) O aluno pode responder os itens (c) e (d) por tentativa, uma vez que o número de latas de tinta que Pedro pode comprar só pode ser 5, 6 ou 7, ou resolvendo uma equação simples. Eles preferem a primeira opção, o que não deve ser impedido.

<u>ATIVIDADE 2</u> – O Presente da D. Roselena

(Razões e Proporções, P. Fundão, Tinoco (Coord.), 1993)

Objetivos

- Analisar a variação de grandezas com relações distintas, em contexto semelhante.
- Identificar grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Enunciado

a) A turma 701 resolveu fazer uma "vaquinha" para dar um presente à D, Roselena. Todos os alunos vão colaborar. Se o presente custar R$ 200,00, cada aluno vai participar com R$ 8,00.

Se a turma escolher um presente de R$ 350,00, com quanto deverá contribuir cada aluno?

b) Tendo ou não encontrado a resposta do problema complete a tabela ao lado e responda às perguntas:

- *Que grandezas variam no problema?*
- *Elas são diretamente proporcionais? Por quê?*
- *Observe a tabela. Qual é o quociente entre os números de cada linha? Ele é constante?*
- *O que esse quociente representa?*

200	8
100	
50	
350	

c) Resolva o problema seguinte.

A turma 702 resolveu fazer uma "vaquinha" para dar um presente à D, Roselena. Se a turma toda cooperar, cada aluno deverá contribuir com R$ 8,00.

Se apenas metade da turma participar da "vaquinha", e o presente for o mesmo, a quantia que caberá a cada aluno será menor ou maior? De quanto será essa quantia?

Sabendo-se que a turma tem 24 alunos, quanto deverá dar cada aluno, se apenas 20 deles participarem da "vaquinha"?

d) Tendo ou não encontrado a resposta do problema, complete a tabela ao lado e responda às perguntas:

- *Que grandezas variam no problema?*
- *Elas são diretamente proporcionais? Por quê?*
- *O que se mantém constante em todas as linhas?*
- *O que esse produto representa?*

8	24
	12
	8
	20

Comentários

1) Esta atividade é exemplo de como o trabalho com proporcionalidade pode ser útil para o desenvolvimento do pensamento qualitativo e genérico, com base em situação real. A semelhança entre os enunciados dos dois problemas é intencional, para salientar a diferença nas estruturas dos dois.

2) A procura do que há de constante nas linhas de cada tabela permite observar a regularidade envolvida na proporcionalidade direta ou inversa.

3) Como a proporcionalidade direta é mais natural, os alunos tendem a aplicar em (c) o mesmo raciocínio de (a). A pergunta sobre a possibilidade de só a metade da turma contribuir serve como alerta para a mudança.

4) No item (d), caracterizamos a proporcionalidade inversa analisando os produtos dos números correspondentes, cujo significado é, em geral, fácil de perceber. É preciso que, depois de respondidas as perguntas, haja uma sistematização do conceito de grandezas inversamente proporcionais.

ATIVIDADE 3 - Telefone Celular

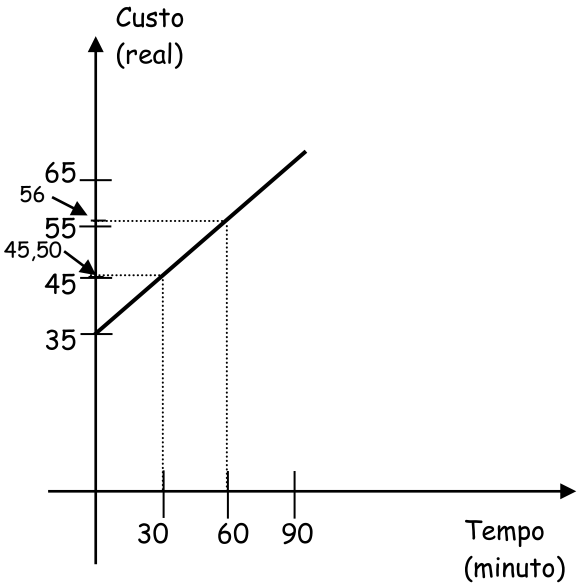
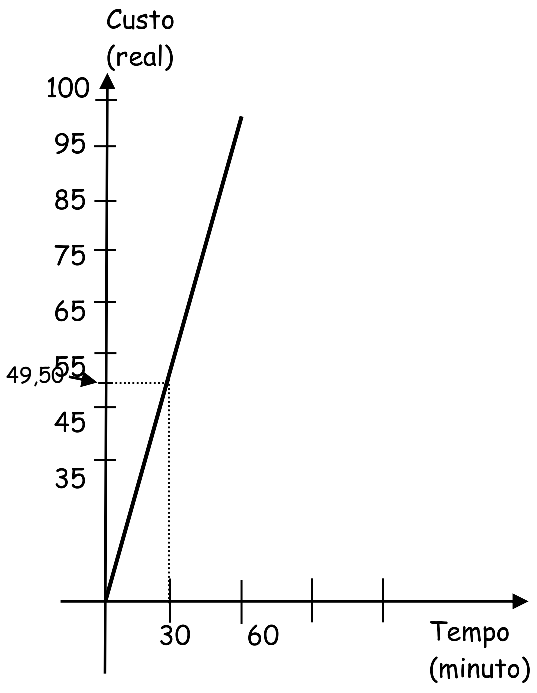
(Matemática na Vida e na Escola, 8ª s. Ed. do Brasil)

Objetivos

- Analisar gráficos cartesianos de funções.
- Analisar a existência ou não de proporcionalidade direta em situações distintas no mesmo contexto.
- Escrever expressão algébrica de função a partir do seu gráfico cartesiano.

Enunciado

Uma companhia de telefone celular oferece dois tipos de contrato, conforme as duas propostas a seguir.

<table>
<tr><th>Proposta I</th><th>Proposta II</th></tr>
<tr><td>Assinatura mensal - R$ 35,00
Tarifa de R$ 0,35 por minuto

</td><td>Assinatura mensal - Isenta
Tarifa de 1,65 por minuto

</td></tr>
</table>

Analisando essas propostas, responda às perguntas, justificando as suas respostas.

a) *Quanto uma pessoa que optar pela Proposta I terá que pagar no fim do mês, se fizer ligações num total de 30 minutos? E 60 minutos?*

b) *E se a pessoa optar pela Proposta II, qual será a sua conta mensal pelos 30 minutos? E pelos 60 minutos?*

c) *Em qual das duas propostas o preço a pagar no fim do mês é proporcional ao tempo usado nas ligações?*

d) Podemos afirmar que, nas duas propostas, a quantia a pagar mensalmente é função do tempo utilizado nas ligações?

e) Escreva as fórmulas que representam essas funções.

f) Se a pessoa não usar o telefone para fazer ligações, mas apenas para receber, em qual das duas propostas ela não terá que pagar nada no fim do mês?

g) Qual das propostas você acha mais vantajosa?

Comentários

1) Apesar das dificuldades que aparecem, atividades que tratam de assuntos do dia-a-dia dos alunos despertam o interesse dos mesmos e contribuem para a formação da cidadania e para a construção do conhecimento matemático com significado. Neste caso, tratando-se nova edição de livro antigo, o contexto está bem desatualizado, o que pode, no entanto, incentivar uma rica discussão.

2) Usualmente, porém incorretamente, para verificar se duas grandezas são proporcionais ou não, as pessoas perguntam apenas: *se uma cresce, a outra também cresce?* Com este raciocínio, os alunos concluem erradamente que nas duas propostas há proporcionalidade.

3) Os alunos em geral não têm experiência em analisar gráficos para obter informações sobre o comportamento da função. As perguntas (a), (b) e (f) permitem essa exploração; outras poderão ser criadas.

4) Particularmente, no estudo de proporções, não se exploram gráficos. Por isso, os alunos não observam que, como o gráfico da Proposta I não passa pela origem, não há proporcionalidade entre o que a pessoa paga no fim do mês e os minutos gastos em ligações. Observamos dificuldades entre eles quanto a esse fato, e até mesmo em explicar por que este gráfico começa no ponto (0,35).

5) A construção de tabelas correspondentes às duas propostas pode ajudar a compará-las.

6) A discussão da pergunta *g* é interessante pois a resposta não é única, depende do tempo que a pessoa usar o telefone. Para essa discussão a superposição dos dois gráficos, em papel transparente pode ser útil.

<u>ATIVIDADE 4</u> - As Alturas das Moças e dos Rapazes

(Adaptado de Ponte, J. P. da, 2005)

Objetivos

- Analisar o comportamento de duas grandezas variáveis a partir de informações dadas por um gráfico cartesiano.
- Identificar a variação da taxa de crescimento de uma função representada graficamente.

Enunciado

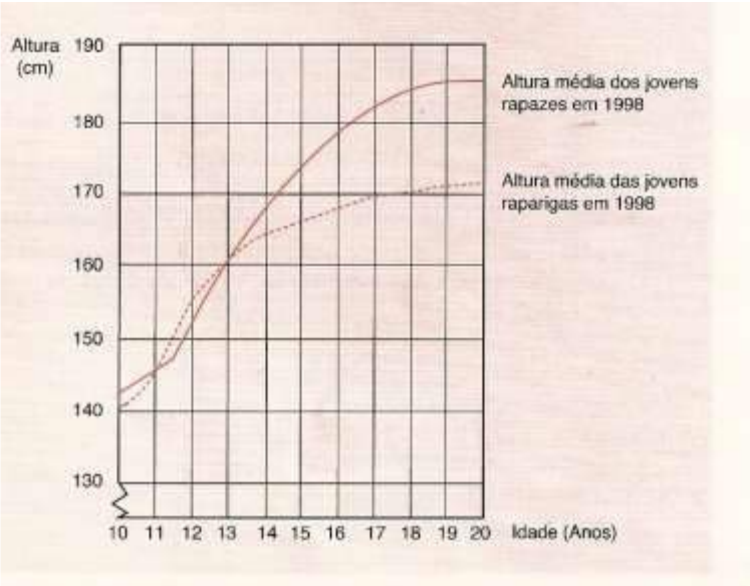
Os jovens estão cada vez mais altos.

No gráfico seguinte está representada a altura média dos jovens rapazes e moças de certo país, relativa ao ano de 1998.

a) De acordo com o gráfico, durante que período da sua vida as moças são, em média, mais altas do que os rapazes?

b) Em qual período de suas vidas as moças e os rapazes possuem, em média, a mesma altura?

c) Explique de que modo o gráfico mostra que, em média, o crescimento das moças é mais lento depois dos 12 anos de idade.



<u>Comentários</u>

1) Os itens (a) e (b) dependem apenas da observação do gráfico e reconhecimento dos pontos nos quais as curvas se cruzam. No entanto, a pouca familiaridade dos alunos com a noção de intervalo, muitas vezes faz com que alunos respondam, em (a), apenas "*12*".

2) No item (c) o aluno tem de observar a taxa de crescimento da altura das moças a partir da comparação da variação dessas alturas em intervalos iguais ou pela redução da inclinação da curva após os 12 anos. Isto já envolve um raciocínio de taxa de variação que, embora muito importante, não é trivial para aluno de nível básico.

3) Há uma crença, de certa forma reforçada na escola, de que toda função tem uma representação analítica. Este é um exemplo de que isto não é verdade e que é possível obter todas as informações sobre as funções a partir dos seus gráficos.

4) A resposta a seguir mostra o raciocínio de aluna de 2ª série do Ensino Médio.

a) "11 aos 13 anos".

b) "Aos 11 e aos 13 anos".

c) "Pois vai ficando mais horizontal do que vertical, dando a entender que está crescendo mais devagar".

ATIVIDADE 5 – A Área do Triângulo

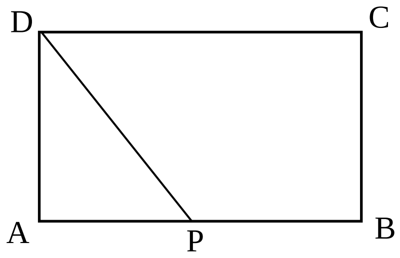
(Construindo o Conceito de Função, P. Fundão, 1996)

Objetivos

- Analisar situação na qual duas grandezas geométricas variam numa relação funcional.
- Identificar o conjunto domínio de uma função.
- Diferenciar variável contínua de variável discreta.

Enunciado

O retângulo da figura tem lados AB = 8 cm e BC = 4 cm.
Considere um ponto P, cuja posição varia do ponto A até o ponto B.



*a) Desenhe o triângulo ADP, cujo vértice **P** esteja a 0,5 cm do ponto **A** e pinte este triângulo.*

b) Qual a área do triângulo ADP?

*c) Represente a distância de **A** a **P** pela letra **x** e faça o que é pedido em (a) e (b) para: **x** =1,2 ; **x** = 3; **x** = 5,5; **x** = 7,8.*

*d) Existe triângulo **ADP** para **x** = 0,1? E **x** = 0? E **x** = 8? E **x** = $\sqrt{2}$?*

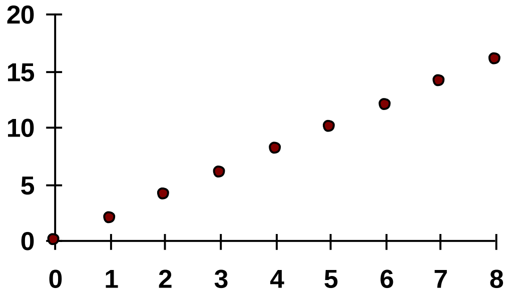
*e) Quais os valores inteiros que **x** pode assumir?*
*Que valores **x** pode assumir?*

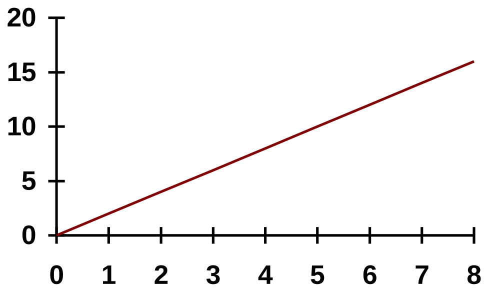
*f) A área do triângulo **ADP** depende do valor de **x**?*

*g) Qual o valor de **x** correspondente ao triângulo de maior área?*

*h) Dê uma expressão para a área do triângulo **ADP** em função de **x**.*

i) Observe os gráficos abaixo:
Qual deles representa a situação descrita pelo problema? Justifique.





*j) Qual a posição do ponto **P** para que a área do triângulo **ADP** seja 5? E 7,4?*

*l) A área do triângulo **ADP** aumenta ou diminui quando o ponto **P** se aproxima do vértice **B**?*

m) Que função o gráfico representa?

<u>Comentários</u>

1) Essa atividade surpreende os alunos. Como calcular a área de ADP, se não se sabe o valor de **x**? Isso denota a pouca familiaridade desses alunos com a idéia de variável.

2) Os desafios propostos nos itens (a) a (e) visam a uma discussão sobre a idéia de domínio, compreendido simplesmente como o conjunto dos valores que **x** pode assumir. Espontaneamente, os alunos, quase sempre, consideram apenas os valores inteiros.

3) Para que os alunos percebam a possibilidade de uma das variáveis se manter constante, o que não é natural, propõe-se que seja explorado o gráfico da função que dá a área de todos os triângulos **DCP** para os valores da variável **x** entre 0 e 8. Esta exploração é também uma forma de integrar Álgebra e Geometria.

4) Os mesmos aspectos tratados de (a) até (i) podem ser destinados propondo aos alunos que escrevam a função correspondente à área dos trapézios **DCBP**, para **P** entre **A** e **B**.

5) O item (i) pode não ser familiar a alunos com nível de escolaridade anterior ao 9º ano, mas, a partir desta série, é essencial.

<u>ATIVIDADE 6</u> - Motos e Carros

<u>Objetivos</u>

Reconhecer a importância de

- escolher adequadamente as variáveis ao traduzir um problema para a linguagem algébrica e
- criticar a resposta obtida para um problema e os procedimentos realizados no processo de resolução.

<u>Enunciado</u>

a) Num estacionamento, o espaço ocupado por uma moto está para o espaço ocupado por um carro na razão de 2 para 3.
Quantas motos ocuparão o espaço de 10 carros?
Ao equacionar o problema os alunos escrevem: $\frac{m}{c} = \frac{2}{3}$ *(*). Substituem c por 10 na equação e a resolvem, encontrando m = 6,333... (Há algo de errado, pois, esse número é menor do que 10!).*
Qual o erro cometido?

b) Resolva agora o problema seguinte.
Em Goiás, é muito comum andar de moto, sendo grande o número de veículos desse tipo. Num estacionamento de um prédio de uma cidade de Goiás, a certa hora, a razão entre o número de motos e o de carros é de 3 para 2. Quantos motos há nesse estacionamento, nesta hora, se o número de carros é 10?

<u>Comentários</u>

1) Uma das dificuldades que os alunos têm, no uso das variáveis, para escrever uma equação que permita resolver um problema, é saber exatamente o que essa variável representa. Para refletir sobre essa dificuldade, apresentamos estas duas situações.

2) As variáveis m e c, escritas na equação (*) *do problema (a),* representam **o espaço ocupado por uma moto e por um carro**, respectivamente, e não **o número de carros e de motos que cabem num mesmo espaço.**

Não tem sentido substituir *c* por 10, pois, não foi dito que o espaço ocupado por um carro é 10.

3) Interpretando corretamente a equação (*) e as variáveis envolvidas, teremos:

$$\frac{m}{c} = \frac{2}{3} \iff 3m = 2c.$$

Essas equações informam que **2 vezes o espaço ocupado por um carro é igual a 3 vezes o espaço ocupado por uma moto**, ou seja, **o espaço ocupado por 2 carros é igual ao espaço ocupado por 3 motos.**

Como queremos saber <u>quantas motos ocuparão o mesmo espaço de 10 carros</u>, basta multiplicar ambos os membros da equação por 5, obtendo: $15m = 10c$.

Concluímos que no espaço de 10 carros cabem 15 motos, que é a resposta correta.

4) No problema (b), pode-se armar a equação $\frac{m}{10} = \frac{3}{2}$ (#), na qual cada membro representa a razão entre <u>**o número** de motos e de carros existentes no estacionamento</u>. A variável ***m***, nesse caso, é o número de motos, pedido pelo problema, que é 15.

Capítulo VIII - Resolução de Problemas; nem sempre as Equações são Necessárias

Uma das funções da Álgebra, ressaltadas na introdução, é a de ser instrumento poderoso para resolver problemas. No entanto, esta função é reduzida quase sempre ao estudo de procedimentos para resolver equações. Neste sentido, alguns aspectos merecem reflexão.

Embora reconheçamos a importância de o aluno dominar técnicas de resolução de equações, consideramos que a ênfase mencionada nas equações no ensino de Álgebra e a forma como este ensino é feito contribuem para que o aluno não cogite utilizar outras estratégias para resolver problemas. Isto é muitas vezes acentuado por professores que incentivam e até consideram obrigatório o uso das equações. A diversidade de estratégias para resolver um mesmo problema e a exploração da relação entre elas é uma boa forma de enriquecer o trabalho em sala de aula e muitas vezes, de dar significado à resolução com o uso da manipulação simbólica.

A importância de o aluno saber avaliar as vantagens e desvantagens do uso da manipulação simbólica para resolver um problema, ao analisá-lo, antes de efetuar qualquer procedimento, deve preocupar o professor ao longo do seu trabalho com Álgebra. Como afirma Arcavi (1995)

> Defendemos que ter sentido do símbolo deve incluir uma sensibilidade intuitiva sobre quando usar os símbolos no processo de resolução de um problema e, inversamente, quando abandonar o tratamento simbólico para usar instrumentos melhores. (p. 40/41)

ATIVIDADES

Objetivos das atividades deste capítulo.

- Representar equivalências.
- Escolher diversas estratégias para resolver um problema.
- Identificar a vantagem do uso de estratégias que não a de escrever e resolver uma equação ou sistema de equações para solucionar um problema.

<u>ATIVIDADE 1</u> - O Tijolo

<u>Enunciado</u>

"Um tijolo pesa 1 kg mais meio tijolo. Em quilogramas, quanto pesa 1 tijolo?".

<u>Comentários</u>

1) Este problema é muito conhecido. Sua inclusão neste livro visa primeiramente sugerir a reflexão a respeito das duas perguntas a seguir.

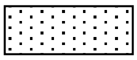
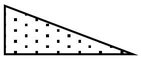
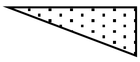
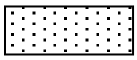
- Como um aluno com experiência apenas em aritmética resolveria esse problema?

- Como um aluno que já sabe equações poderia resolver esse problema?

Por outro lado, esse problema possibilita uma rica discussão sobre as várias formas de resolvê-lo, que devem ser valorizadas.

2) A má interpretação do enunciado – confundindo "meio tijolo" com "meio quilo" – leva muitos alunos a responder erroneamente 1,5 kg.

3) Soluções encontradas.

<table>
<tr>
<td>A) Por desenhos:
 = 1 + 
1 = , logo 2 = </td>
<td>B) Por equação: $x = 1 + \frac{x}{2}$
Um olhar compreensivo sobre essa equação permite concluir que $1 = \frac{x}{2}$, logo $x = 2$, mas a maioria a resolve convencionalmente.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">C) Usando proporcionalidade: $\times 2 \begin{array}{l} 1\text{ kg} \longrightarrow \frac{1}{2}\text{ tijolo} \\ 2\text{ kg} \longrightarrow 1\text{ tijolo} \end{array} \times 2$</td>
</tr>
</table>

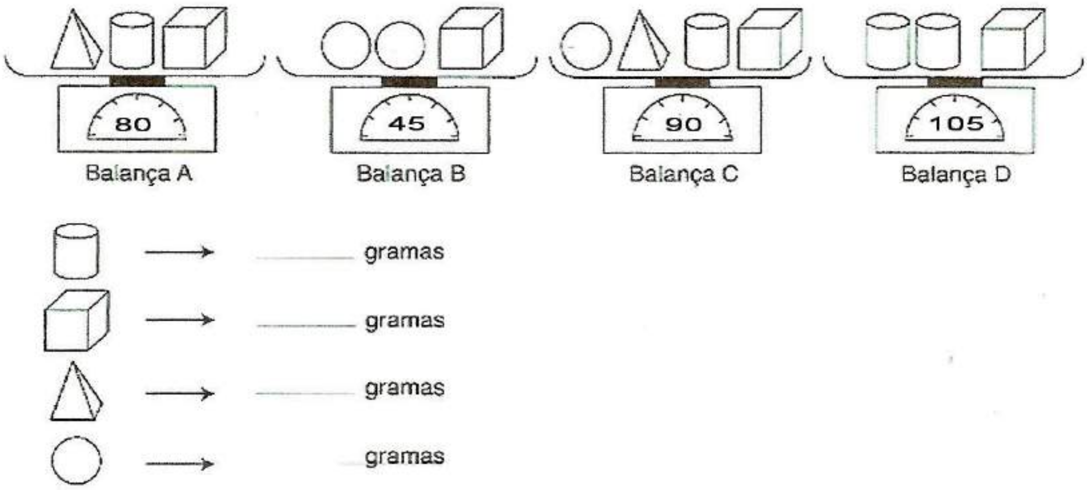
4) Ao explorar a solução do problema por meio de uma equação, é importante mostrar a possibilidade de resolvê-la a partir de uma "leitura compreensiva", sem os procedimentos usuais. De fato, esta "leitura" revela que 1 corresponde a $\frac{x}{2}$.

ATIVIDADE 2 - O Peso dos Sólidos
(Ponte, Matos e Branco, 2005)

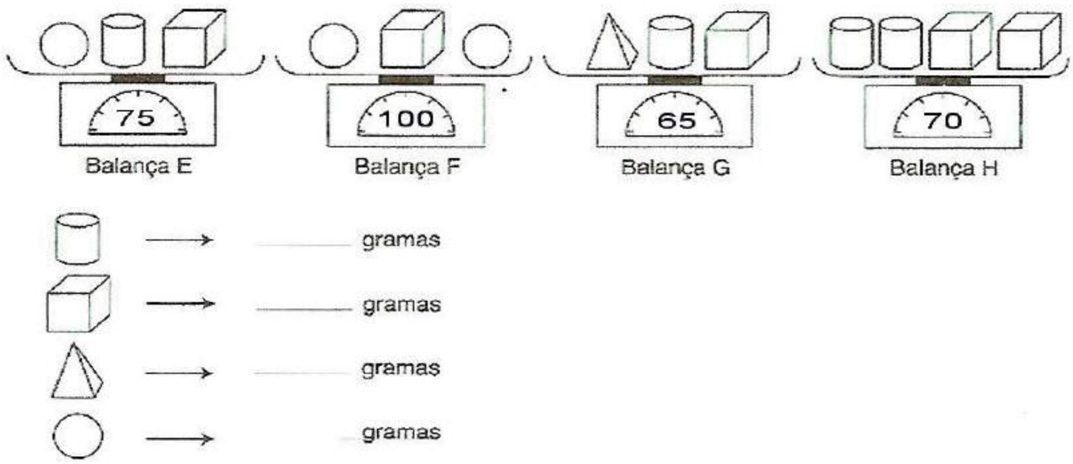
Enunciado

Em cada uma das situações, cada um dos sólidos das figuras tem um peso diferente.
Tente descobrir esses pesos em cada uma delas.
Escreva como você descobriu cada peso.

Situação 1



Situação 2



Comentários

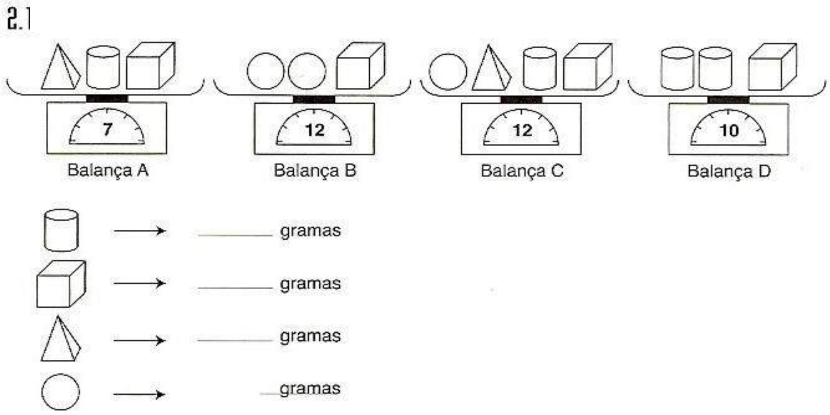
1) Esta atividade pode e deve ser explorada com alunos sem experiência em Álgebra. Um de seus objetivos é o de familiarizar o aluno com a associação entre símbolos (no caso, figuras geométricas) e números.

2) O uso de equações não é muito atraente, nesse caso, pelo fato de haver 4 incógnitas.

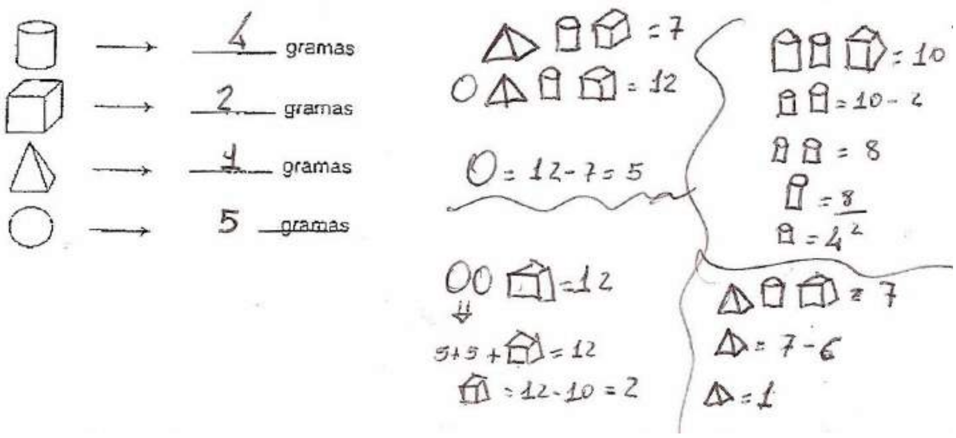
3) Ao ser testado em sala de aula, o enunciado da *Situação 1* tinha números menores nas balanças (como na figura a seguir), o que induzia os alunos a resolverem o problema somente por tentativa e erro. Para propiciar o uso mais intenso de outros tipos de estratégia, como na solução do exemplo, foram mudados os números do enunciado.

4) Segue exemplo de solução para o enunciado original (figura abaixo), usando uma sequência de equivalências.

Enunciado



Solução

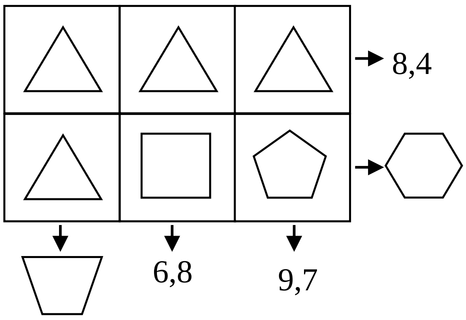


<u>ATIVIDADE</u> 3 – O Valor de Cada Figura

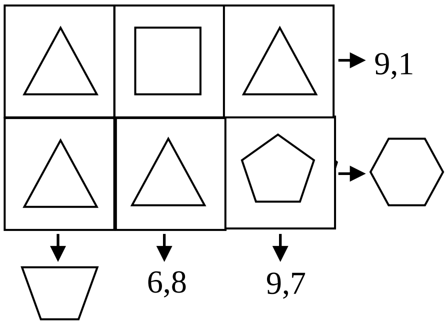
<u>Enunciado</u>

Nos quadros abaixo, figuras iguais representam números iguais. Determine esses números, em cada um deles.

A)



B)



<u>Comentários</u>

1) A dificuldade inicial dos alunos decorre do fato de não estar explícito no enunciado que os números depois das setas são a soma dos números da linha ou da coluna correspondente. Outra é coordenar as informações contidas nas linhas e colunas. Por isso, o item A é mais fácil.

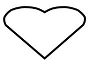
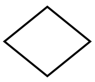
2) A atividade envolve cálculos simples com números decimais, o que é importante, uma vez que são os números que mais aparecem em situações reais. A presença deles em enunciados de outros tópicos pode contribuir para a familiarização dos alunos com este tipo de números.

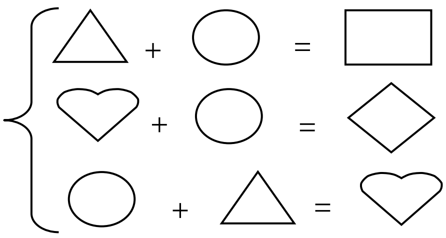
3) Se, no entanto, o professor quiser que o aluno se concentre apenas no estabelecimento de estratégias, o uso de calculadoras é indicado.

4) Para os alunos com maior dificuldade, pode ser apresentada a seguinte adaptação de questão de prova de seleção ao Colégio Pedro II.

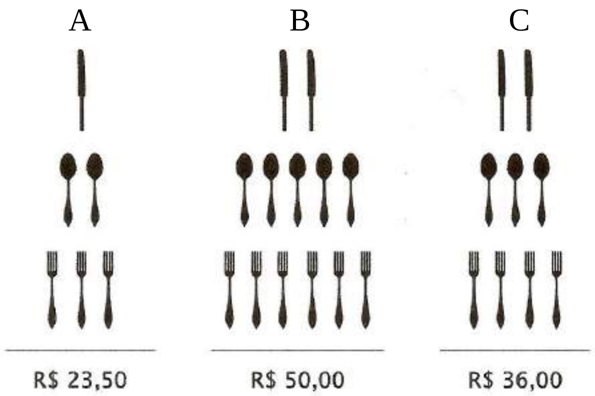
Nesta atividade, há, propositadamente, duas figuras diferentes com o mesmo valor. A nossa experiência mostra que os alunos iniciantes em Álgebra relutam em admitir que isso é possível.

No esquema abaixo, figuras iguais representam números iguais.
Determine esses números, usando as dicas.

Dicas:  = 17,  = 27



<u>ATIVIDADE 4</u> - O Preço dos Talheres



<u>Enunciado</u>

Examinando os anúncios, conclua o preço de cada garfo, faca e colher.
O preço de cada tipo de talher não muda de um anúncio para o outro.

<u>Comentários</u>

1) A tendência dos alunos que já estudaram sistemas de equações é de armar um sistema e resolvê-lo mecanicamente, o que é bastante trabalhoso. Essa tendência os impede de analisar as relações envolvidas no problema e as diversas estratégias possíveis para a sua solução.

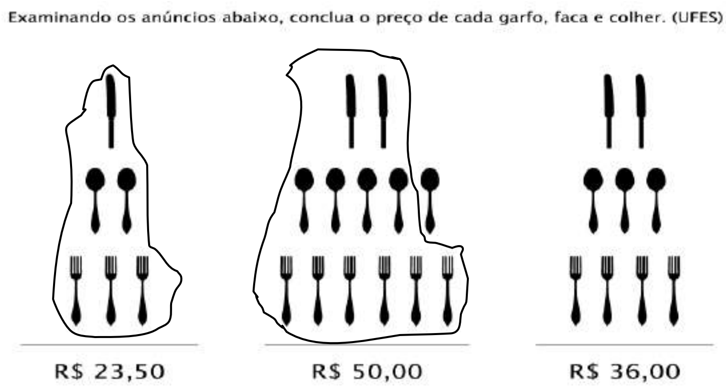
2) O uso de outras estratégias pode ser incentivado por meio de perguntas como as seguintes.

a) Elisa comprou dois conjuntos do anúncio A e Teresa comprou o do anúncio B.
Que tipo de talher Teresa comprou a mais que Elisa?
Quanto Teresa pagou a mais que Elisa?

b) Ana comprou a oferta do anúncio C e Paula a B.
Quantos e quais talheres Paula comprou a mais que Ana?
Quanto Paula pagou a mais que Ana?

3) Como na atividade anterior, o aluno não iniciado em Álgebra pode ser incentivado a usar letras para representar cada tipo de talher, mesmo que não arme equações.

4) A solução com base em destaques feitos em partes da figura do enunciado permite explorar equivalências, como nos exemplos a seguir.



A B C

I) *Comparando A e B temos que uma colher custa 3,00.*

2 x 23,50 = 47,00 e 50 – 47 = 3.

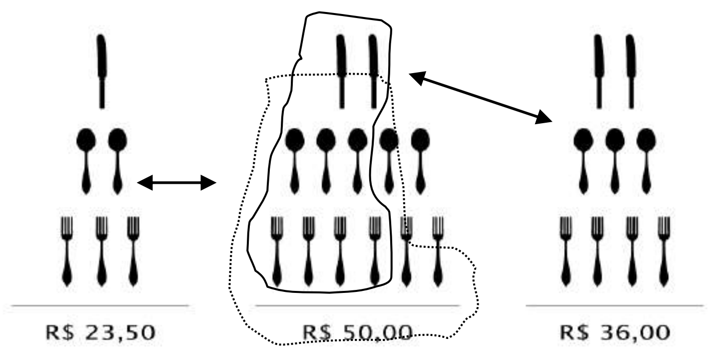
Comparando A e C temos que 1 colher e dois garfos custam 11,00.

(Observe que, para C ser o dobro de A, estão faltando 1 colher e 2 garfos).

47,00 – 36,00 = 11,00.

Daí, 1 garfo custa 4,00.
Logo, se 1 colher custa 3,00,
1 garfo custa 4,00.
Substituindo em algum dos casos, temos que 1 faca custa 5,50.

Examinando os anúncios abaixo, conclua o preço de cada garfo, faca e colher. (UFES)



II) *Comparando B com C, temos que 2 colheres e 2 garfos custam 14,00*
(50 – 36 = 14).
Substituindo no A, temos que 1 faca e 1 garfo custam 9,50.
(23,50 – 14,00 = 9,50).
Comparando A com B, obtemos que 1 colher → *3,00.*
Logo 2 x 3 + 2 garfos = 14
2 garfos = 8 → *1 garfo = 4.*
Daí, 1 faca + 4 = 9,50 → *1 faca = 5,50. (Lembrando que o preço é em reais).*

5) As soluções por meio de um sistema de equações são adotadas por muitos alunos do Ensino Médio e variam pouco de uma para outra. A que utiliza o escalonamento de matrizes equivale à resolução a partir de uma tabela, que pode ser realizada por alunos de Ensino Fundamental.

	Facas	**Colheres**	**Garfos**	**Total**
A	1	2	3	23,50
B	2	5	6	50,00
C	2	3	4	36,00

As manipulações possíveis, a partir das linhas dessa tabela, correspondem a operações elementares sobre as linhas da matriz do sistema, mas podem ser efetuadas por simples observação da tabela.

O aluno, em geral, não constrói a tabela espontaneamente. Cabe ao professor sugerir que o façam.

As comparações realizadas pelos alunos, a partir da figura, também podem ser mais bem visualizadas na tabela.

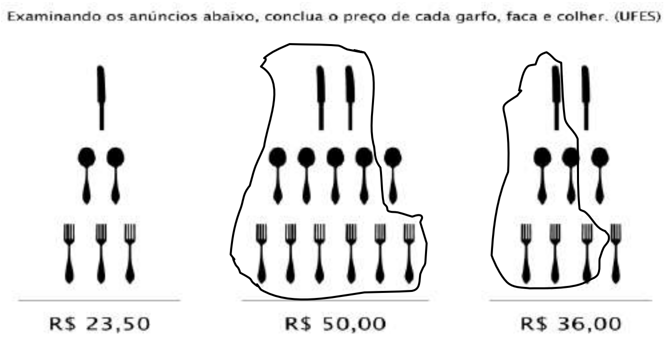
6) O problema foi testado inicialmente sem as perguntas (a) e (b) do comentário 2 e a maioria dos alunos apresentou grande dificuldade. Isto pode ter como causa a falta de experiência dos alunos com problemas desse tipo. Muitos consideraram os preços dos 3 tipos de talheres iguais. Tal dificuldade pode ser observada na entrevista que segue, com aluno de 9º ano.

A - Encontrou por tentativa alguns valores para os preços que satisfaziam ao primeiro anúncio.
E - *Verifique se esses preços valem também para os outros anúncios.*
A - Verifica que não valem.
E – *Compare o primeiro anúncio com o segundo e veja se você consegue achar o preço de uma colher.*
A - Com dificuldade, conseguiu achar.
Tentou então fazer de maneira semelhante, relacionando B e C.
Subtraiu: *50 - 36 =14* e respondeu:
O preço do garfo é 8 reais, pois se cada colher custa 3 reais, 14 – 6 = 8.
E - *Verifique quantos garfos sobram, quando você subtraiu C de B.*
A - *O preço do garfo é 4 reais, pois sobraram 2 garfos.*
Calculou então o preço da faca corretamente.

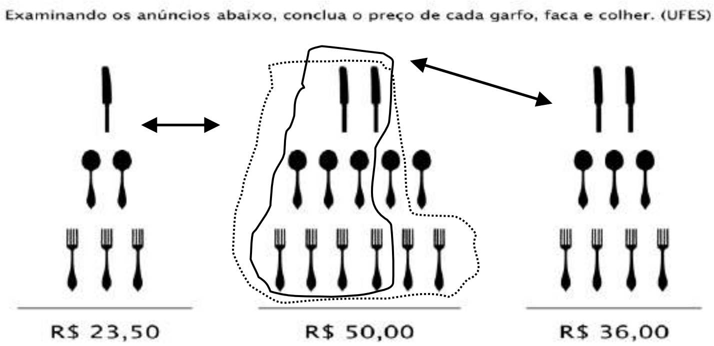
7) Conforme afirmamos nos comentários 4 e 5, a exploração da figura do problema ou uma tabela com os seus dados pode ajudar os alunos com dificuldade a resolvê-lo. A tentativa de explicar algo que foi feito por outra pessoa também pode contribuir para o aluno estabelecer uma estratégia. Sugerimos então o desafio a seguir.

Escolha uma das "dicas" apresentadas pelos seus colegas para resolver o problema. Explique-a e complete a solução.

<u>Primeira Dica</u> - Observe e descubra que comparações podem ser feitas.



<u>Segunda Dica</u> - Observe e descubra que comparações podem ser feitas (as setas dão o sentido da comparação feita pelo colega).



<u>Terceira dica</u> – Compare os dados da tabela com os do problema. Efetuando operações sobre as suas linhas, descubra o que se pede.

	Facas	**Colheres**	**Garfos**	**Total**
A	1	2	3	23.50
B	2	5	6	50,00
C	2	3	4	36,00

ATIVIDADE 5 – A Mochila, a Bola e o Livro

(Adaptação de Ponte, Matos e Branco, 2005)

Enunciado

Carlos ganhou no seu aniversário dinheiro para comprar seu presente. Numa loja, encontrou os preços indicados para quem comprasse dois objetos.

Para decidir o que comprar, Carlos pensou:

- Qual o objeto mais caro?
- Qual o objeto mais barato?
- Quanto o livro é mais caro do que a bola?
- O que representa a soma de todos os preços indicados?

Ajude a Carlos a responder essas perguntas e a determinar o preço de cada objeto.

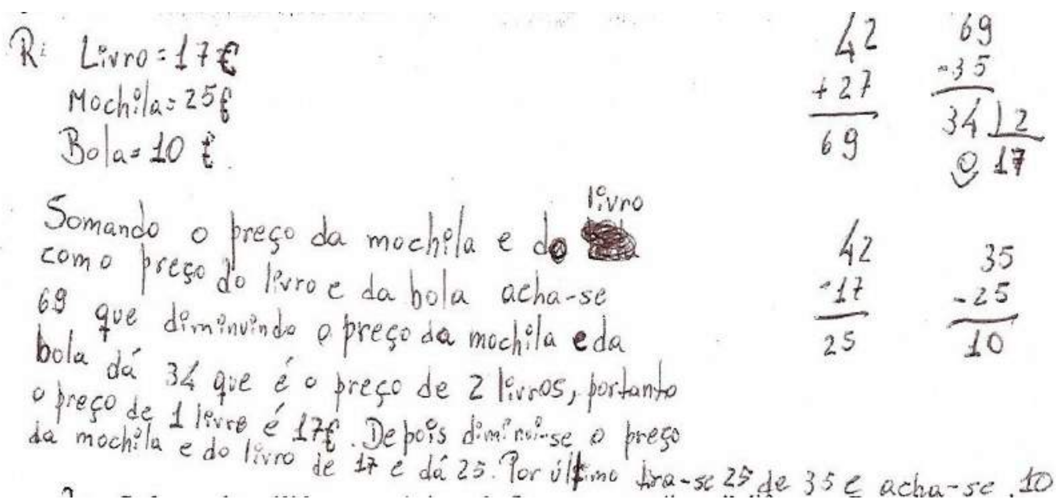
Comentários

1) Em geral, os alunos sentem muita dificuldade diante desse problema. A maioria, de todos os níveis escolares, tenta adivinhar ou divide por 2 cada quantia indicada, supondo que cada dois objetos têm o mesmo preço.

2) Alguns alunos respondem que a mochila é mais cara, pois, geralmente, uma mochila é mais cara que uma bola e que um livro. Uma justificativa razoável para a mochila mais cara: "*onde a mochila aparece os valores são maiores*". Outros acertam o preço da mochila, decompondo 35 em 25 e 10.

3) Alunos do ensino médio, principalmente os que estavam aprendendo este assunto na época, recorreram em sua maioria ao sistema de equações. Isto confirma a observação sobre a supervalorização das técnicas algébricas. Mesmo neste nível, sugere-se que o professor ao apresentar o problema, desafie os seus alunos a resolverem-no sem usar sistema.

4) Estratégias de comparação entre relações observáveis diretamente do enunciado foram usadas e devem ser estimuladas. Exemplo.


R: Livro = 17€
Mochila = 25€
Bola = 10 €.

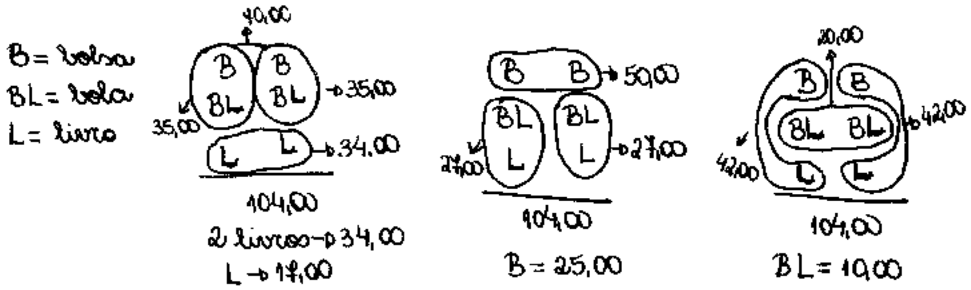
42 + 27 = 69
69 − 35 = 34
34 : 2 = 17
42 − 17 = 25
35 − 25 = 10

Somando o preço da mochila e do livro como preço do livro e da bola acha-se 69 que diminuindo o preço da mochila e da bola dá 34 que é o preço de 2 livros, portanto o preço de 1 livro é 17€. Depois diminui-se o preço da mochila e do livro de 17 e dá 25. Por último tira-se 25 de 35 e acha-se 10

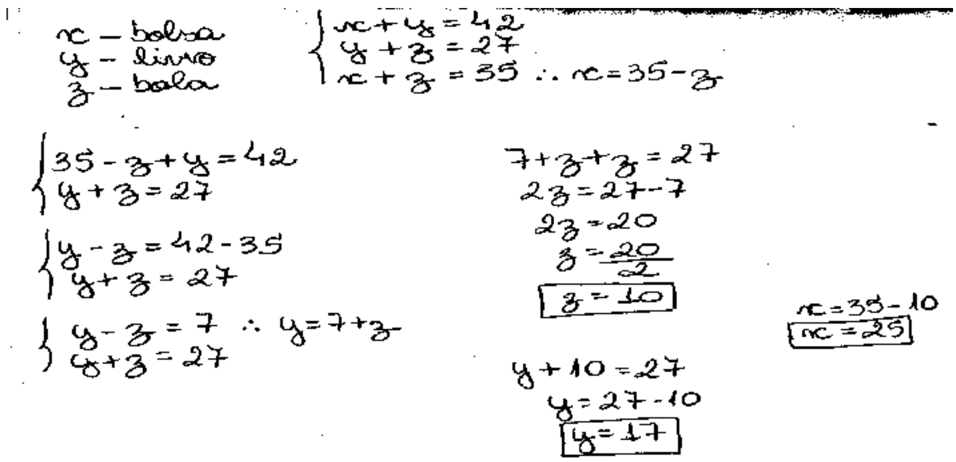
5) Experiências realizadas, na elaboração do livro *Argumentação e Provas no Ensino de Matemática*, do Projeto Fundão (Nasser e Tinoco, 2001), nos fazem acreditar que a análise pelos alunos de soluções dadas pode desenvolver neles a capacidade de criar as suas. Sugerimos, pois, o seguinte desafio.

Após ler e analisar as soluções dadas por colegas, responda as perguntas abaixo, comentando cada uma de suas escolhas.

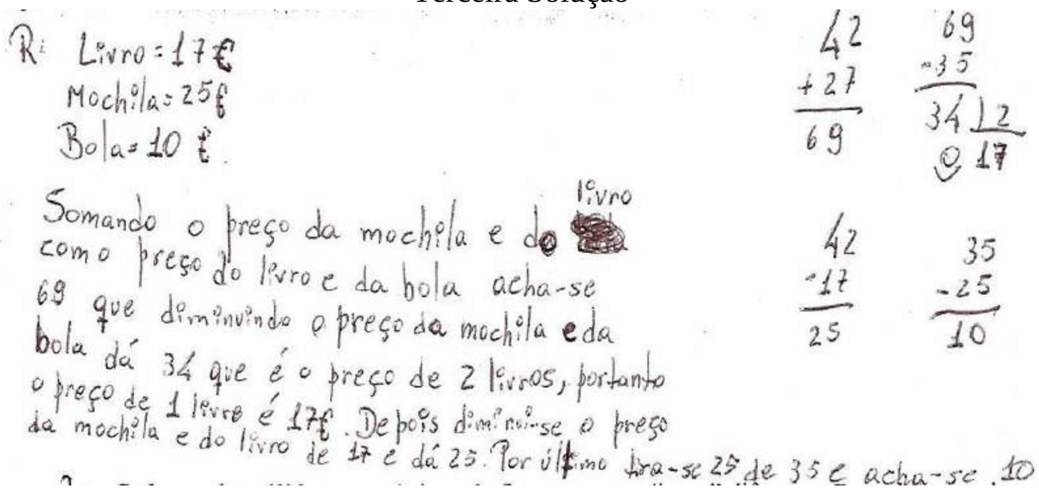
Primeira Solução



Segunda Solução



Terceira Solução



<u>*Perguntas*</u>

1) Qual das soluções é a mais parecida com a que você faria?
2) Qual das soluções é a mais simples para você explicar para um colega seu?
3) Qual das soluções você acredita que o seu professor consideraria a melhor?

Capítulo IX - Equações – Além dos Métodos de Resolução

Conforme salientamos na Introdução, as equações – definição, classificação e métodos para a resolução de alguns tipos – ocupam a maior parte dos estudos iniciais de Álgebra no Ensino Fundamental. No quadro dos PCN, apresentado na Introdução, as equações são referidas como uma das quatro dimensões da Álgebra, dimensão esta também mencionada por Souza e Diniz (1994), Fiorentini, Miorim, e Miguel (1993) e Coxford e Shulte (1994) como estudo de processos para resolução de problemas.

O estudo das equações consiste no primeiro, o mais valorizado e, muitas vezes, o único contato dos alunos com a Álgebra. Como, neste estudo, as variáveis têm apenas os papéis de incógnitas ou de constantes**,** o conceito de variável, para a maioria desses alunos, se restringe à idéia de incógnita, cujo valor (determinado) deve-se encontrar. Isto é muito prejudicial para a construção desse conceito. Como salientamos no capítulo anterior, um trabalho inicial, explorando relações funcionais entre grandezas variáveis, a partir de situações significativas para o aluno (Tinoco, 2002), é mais natural e possibilita a integração de duas concepções da Álgebra, possibilitando uma visão mais abrangente do conceito de variável em diversos contextos.

Trataremos a seguir do uso das equações como ferramenta para resolução de problemas. Insistimos em que a ênfase excessiva no estudo da classificação e dos métodos de resolução de equações é muitas vezes prejudicial. É comum este estudo preceder o estudo dos problemas, considerados como meras aplicações daquelas. Defendemos o contrário: o foco deve estar nos problemas, sendo as equações um novo meio de resolvê-los.

De fato, a abordagem de problemas por meio da sua tradução em linguagem algébrica e posterior resolução representa uma enorme mudança, dos pontos de vista de forma de pensar e de procedimentos. Um aspecto importante nessa mudança é o fato de que, uma vez escrita a equação de um problema, pode-se resolvê-lo, procedendo mecanicamente, sem levar em consideração as relações entre os objetos nele envolvidos nem a natureza dos mesmos. Isto é um aspecto positivo e representa muitas vezes economia de esforço. No entanto, as vantagens da manipulação algébrica merecem ser encaradas com cuidado, uma vez que considerar apenas as técnicas a executar pode prejudicar o desenvolvimento do que Arcavi (1995) chama de "sentido do símbolo". Segundo este pesquisador

> Indivíduos que sabem como executar as manipulações algébricas, mas não consideram a possível relevância dos símbolos para revelar a estrutura do problema que despertou sua curiosidade, não desenvolveram integralmente seu sentido de símbolo. (p.43).

Nosso desejo é de que estudantes e professores se dediquem mais à analise e à interpretação dos problemas e suas soluções, onde são utilizados diversos tipos de símbolos. De fato, no cenário maior em que estão incluídas as ferramentas algébricas, se destacam suas funções de compreensão do problema e, também, de expressão e comunicação de idéias e de raciocínios, que não podem ser desprezadas.

Em particular, resolver uma equação simples não requer, somente, manipulações padronizadas para fornecer o resultado desejado. "Ler" significativamente as relações estabelecidas numa equação consiste também em observar e questionar o como e o porquê do valor encontrado para a incógnita.

Exemplos.

A “leitura” de uma equação, antes de efetuar procedimentos-padrão é fundamental. Mesmo em equações simples, como $2x = 4$ ou $3x – 2 = 16$, essa “leitura” pode fornecer as soluções mentalmente. Por outro lado, para as equações $2x = 5$ ou $3x - 2 = 15$, a análise a *priori* pode fazer o aluno perceber que, embora as soluções não sejam números naturais, as operações a fazer são as mesmas dos casos anteriores correspondentes.

Observe-se, no entanto, que, sem uma “leitura” cuidadosa da equação $x + 2 = x + 3$, um aluno não seria capaz de concluir sobre a impossibilidade de resolvê-la; procedendo mecanicamente, ele obteria a igualdade $0 = 1$, gerando um impasse. Também, sem uma análise prévia, um estudante iniciante executaria vários “passos” para resolver a equação $3x + 2 = 4x$, sem perceber que o “x” que há a mais no segundo membro da equação é o 2 somado a 3x.

Merece igual atenção a dificuldade natural que os alunos têm em traduzir enunciados e resultados verbais para a linguagem algébrica. Pesquisadores como Lins (1994) chamam atenção para o fato de que o uso de expressões literais pelos alunos não se dá espontaneamente. A nossa experiência ao realizar este trabalho mostra que muitos deles sequer admitem que isso é possível.

Particularmente, no caso do uso das equações para resolver problemas, é relevante salientar que as equações traduzem a estrutura matemática dos problemas, sem levar em conta a natureza dos objetos envolvidos, o que é em geral novo para os alunos.

As atividades a seguir não visam a refletir sobre os mecanismos de resolução de equações, mas, sim, sobre os aspectos apontados anteriormente.

ATIVIDADES

Objetivos das três primeiras atividades deste capítulo:

- analisar significativamente equações, antes de efetuar procedimentos de resolução;
- escolher diversas estratégias para resolver equações e
- identificar propriedades das operações e do cálculo mental úteis para resolver equações ou decidir pela impossibilidade de fazê-lo.

<u>ATIVIDADE 1</u> – Comparando Igualdades

<u>Enunciado</u>

A) Complete a tabela com os valores pedidos, usando as informações das duas primeiras colunas.

a)	p + 5 = 8		p =
b)	u = v + 3	v = 1	u =
c)	m = 3n + 1	n = 4	m =
d)	r = s + t	r + s + t = 30	r =

B) Compare as igualdades de cada linha, observando as suas semelhanças e diferenças. Depois, complete as igualdades da segunda coluna.

e)	a + b = 43	a + b + 2 =
f)	e + f = 8	e + f + g =
g)	n – 246 = 762	n – 247 =
h)	t - 3 = 996	t + 1 =

<u>Comentários</u>

1) No item (a) a equação pode ser resolvida convencionalmente ou usando o cálculo mental.

Os itens (b) e (c) podem e devem ser propostos a alunos que não aprenderam a resolver sistemas de equações. Espera-se que a "leitura" compreensiva das mesmas permita a sua solução. Para os alunos que não têm essa experiência, inicialmente, para que haja essa compreensão, pode ser necessário o professor fazer a leitura das duas equações em voz alta.

O item (d) apresenta um maior índice de dificuldade, pois, não é dado nenhum valor numérico das variáveis e sim uma relação entre elas. O aluno terá que, depois de usar essa relação, resolver a equação resultante. Mesmo nesse caso, o cálculo mental é altamente recomendável. Alunos que não percebem como usar a relação dada respondem, por exemplo, "*30*" ou *"15+ 13 +2"*.

2) Na tabela B, observa-se uma tendência mecanicista do aluno a resolver as equações da primeira coluna, antes da análise das duas igualdades de cada linha. É preciso insistir para que os alunos façam esta análise. Ela é suficiente para dar uma resposta numérica para o item (e), bastante acertado. Novamente, neste caso, a leitura em voz alta facilita.

No item (f), aparece outra dificuldade: o aluno admitir que a sua resposta é uma expressão literal, a soma indicada 8 + g. Diante dessa expressão, alguns alunos escrevem *"8g"* ou, somente "*8"*, que parecem mais ser um resultado.

3) Nos itens (g) e (h), a tendência dos alunos é resolver as equações da primeira coluna e substituir o valor encontrado na segunda. No entanto, o raciocínio requerido tem muito mais a ver com a Aritmética do que com a Álgebra. O problema pode ser resolvido por simples aplicação de propriedades dos números e da subtração (Numa subtração, adicionando-se um número **a** ao subtraendo, e mantendo-se o minuendo, o resto fica diminuído de **a**).

A idéia errônea de que, ao se aprender Álgebra, a Aritmética pode ser abandonada aparece aqui claramente. O fato de que propriedades das operações são importantes bases para os procedimentos algébricos deve estar sempre presente em qualquer trabalho em Álgebra.

4) No item (d), a primeira reação dos alunos, ao verem mais de uma variável, é considerar todas como tendo o mesmo valor. Neste caso, o professor deve questioná-los.

5) As dificuldades mencionadas podem ser observadas na entrevista a seguir, com aluno do 8º ano do Ensino Fundamental.

A - (Ao ler o problema) - *Isto é fácil!*

Não apresentou dificuldade nos 3 primeiros itens, explicando corretamente como obteve a resposta. No item (d), escreveu que r valia 20.

E - *Como você achou 20?*

A - *Cada um vale 10 pois são 3, dividindo 30 por 3 dá 10.*

E - *Mas r é igual a s + t .*

A - *Então r vale 10.*

E - *Se r fosse igual a 2 mais 3, escrevendo no papel r = 2 + 3 e s + r = 12 qual seria o valor de s?*

A - *s seria 7.*

E - *Vamos agora voltar para essa situação (item d): poderia substituir s mais t por r?*

A - *Poderia, então r vale 15.*

Neste item, nota-se a dificuldade de o aluno trabalhar com letras, mas, se substituirmos as letras por números, ele não apresenta dificuldade.

<u>ATIVIDADE 2</u> – Reconhecendo Operações

<u>Enunciado</u>

Calcule o valor de x:

a) $2x+1=3$; *b) 4x = 6;* *c)* $\frac{12}{x}=4$ *d)* $\frac{x}{5}=3$ *e)* $\frac{5}{x}=3$

<u>Comentários</u>

1) Os alunos, em geral, resolvem as equações dos itens (a) e (b) utilizando procedimentos convencionais, embora elas possam ser resolvidas mentalmente, após uma boa leitura das mesmas. Tal leitura deve provocar a discussão sobre as operações envolvidas e suas propriedades, o que certamente minimizará as dificuldades que surgem nos três últimos itens, justamente aqueles nos quais a simples identificação da operação envolvida permite encontrar a solução. Particularmente, o item (e) difere do (c) por não ter solução inteira e alguns alunos julgam não existir número que multiplicado por 3 dê 5.

2) O hábito dos alunos de ler em voz alta a equação, antes de começar a resolvê-la, deve ser cultivado em aula, e é muito útil para a construção do significado da sua solução. Tarefas como a que se segue também podem ajudar.

> *Escreva duas maneiras de ler esta equação: 3x –1 = 4.*
> *Qual dessas duas formas indica melhor a idéia de como determinar o número x?*

3) A priorização das regras de resolução de equações escritas em formas padronizadas, em detrimento da aquisição de conceitos, provoca a dificuldade observada nessa questão.

A equação do item (c) tem a incógnita no denominador. A falta de familiaridade dos alunos com o conceito de fração como divisão fez com que cometessem erros como subtrair ou multiplicar os dados numéricos do problema.
Exemplos de soluções incorretas.

Item (c): *“$x = 4 – 12 \Rightarrow x = - 8$”* ou
“$x = 4 . 12 \Rightarrow x = 48$”.

Item (d): *“$x = 3 – 5 \Rightarrow x = - 2$”.*

4) Entre os acertos nesses itens, o procedimento mais encontrado foi o uso do produto em cruz. Tal “método” é muitas vezes ensinado, sem explicação, e desvinculado até das proporções, que é a sua origem. Embora correto, não tem caráter conceitual e sim procedural.

ATIVIDADE 3 – Manipular Algebricamente é sempre o Melhor Caminho?

Enunciado

Gincana –

Com a turma dividida em 2 grupos, o professor propõe aos alunos a tarefa a seguir. Um dos grupos usará lápis e papel e o outro deverá realizá-la mentalmente.
Cada item deverá ser proposto separadamente. O primeiro grupo que apresentar ao professor a resposta correta (por escrito ou oralmente, independentemente do grupo) ganha o ponto da tarefa e o professor propõe a seguinte.

Resolva as equações ou explique por que elas não podem ser resolvidas.

a) $4x = 12$

b) $3x – 1 = 20$

c) $2x = 9$

d) $5x - 2 = 10$

e) $x + 2 = x + 3$

f) $3x + 2 = 4x$

g) $\dfrac{2x+3}{4x+6} = 2$

Comentários

1) As observações feitas na ATIVIDADE 2 são válidas para esta.

2) Conforme observado na introdução deste capítulo, as duas primeiras equações podem ser resolvidas mentalmente, ou por meio dos métodos usuais de resolução das equações polinomiais de primeiro grau.

Sendo o resultado a obter um número natural, talvez, o grupo do cálculo mental se saia melhor. Já os itens (c) e (d), por terem como respostas números racionais não inteiros, possivelmente, induzirão os alunos que não dispõem de lápis e papel a julgarem as equações impossíveis.

3) Nos 3 últimos itens, a análise prévia da equação, por ambos os grupos, é essencial para decidir que os itens (e) e (g) são impossíveis e que a solução do item (f) é 2.

De fato: em (e), o mesmo número somado com 2 e com 3 não pode dar o mesmo resultado;

em (g), o numerador da fração é a metade do denominador, para todo $x \neq -\dfrac{3}{2}$ (para este valor, ambos os termos da fração são nulos, o que não é possível), logo ela não pode ser igual a 2 nunca e

em (f), 2 é o que se deve acrescentar a 3x para obter 4x, portanto é igual x.

Espera-se que os alunos sem lápis e papel sejam mais capazes de produzir respostas semelhantes às dadas acima, pois, a tendência dos outros será a de realizar os procedimentos de resolução, sem a análise necessária.

4) Mesmo alunos munidos de lápis e papel podem e devem concluir as respostas das equações mais simples sem efetuar contas, mas devem justificar tais respostas, mesmo que oralmente, quando solicitados pelo professor. A consciência de que certos cálculos são dispensáveis precisa ser desenvolvida.

<u>ATIVIDADE 4</u> – Mecanização sem Compreensão Pode Levar a Erro

<u>Objetivos</u>

- Criticar procedimentos de resolução de equações.
- Analisar criticamente soluções dadas para um problema.

<u>Enunciado</u>

A seguir são apresentadas soluções dadas por alunos a duas tarefas. Observe cada uma delas e responda às perguntas.

a) Ao resolver a equação $\mathbf{4 = x + 1}$*, Bruno fez:*

$$3 = x$$
$$-x = -3$$
$$x = 3$$

, e deu a resposta: **3**.

O que o Bruno fez está certo?
Ele poderia ter parado a resolução com a igualdade $\mathbf{3 - x}$*?*

b) Explique a seguinte solução da equação $\mathbf{x^2 + x = 1}$*, dada por Carlos:*

$$x\,(x + 1) = 1$$
$$x = 1 \text{ ou } x + 1 = 1,$$
$$x = 1 \text{ ou } x = 0.$$

<u>Comentários</u>

1) Este tipo de atividade, muito pouco familiar para a maioria dos alunos, é um instrumento para o desenvolvimento da compreensão dos alunos em relação a procedimentos usuais na resolução de equações.

2) O item (a) aponta um procedimento típico de aluno que aplica, sem reconhecer a propriedade reflexiva da igualdade, os chamados “passos” para a resolução da equação, alongando-a desnecessariamente.

3) O item (b) também mostra um erro decorrente da mecanização sem crítica. O aluno aplica nesta equação, cujo segundo membro é 1, um procedimento usado em equações do tipo do enunciado, com o segundo membro igual a 0, indicando que ele não tem conhecimento da propriedade da multiplicação (o produto de dois números é zero se, e só se, um deles é zero).

ATIVIDADE 5 – Combinando Enunciados e Equações

Objetivos desta e da atividade seguinte:

- analisar a relação entre problemas e equações que podem ser usadas para resolvê-lo;
- salientar a importância da leitura e escrita de textos em língua materna para a aprendizagem em Matemática e
- relacionar enunciados em linguagem corrente e em linguagem algébrica.

Enunciado

Relacione cada situação à equação que permite determinar a sua solução, justificando:

1) *Pedro quer comprar uma prancha de surfe que custa R$ 180,00. Ele já possui R$ 75,00 e pretende juntar R$ 15,00 por mês para obter a quantia que falta. Determine o número de meses que Pedro deverá economizar para realizar sua compra.*
2) *Seis pessoas da família Silva foram ao cinema e gastaram R$ 81,00 com os ingressos. Sabendo que nesse grupo há 3 estudantes e que estudante paga a metade do preço de um ingresso, qual era o preço de cada ingresso nesse cinema?*
3) *Uma firma organiza festas, cobrando R$ 230,00 de ornamentação e R$ 25,50 por pessoa. Luíza fez uma festa de aniversário com essa firma e gastou R$1046,00. Quantas pessoas compareceram à festa?*
4) *Manuela e Hugo recebem mesada dos seus pais. Manuela economiza bastante, mas Hugo gasta tudo e ainda pede emprestado. Certo mês, na semana seguinte à que receberam a mesada, Manuela tem 10 reais a mais que Hugo, que ainda deve a ela 12 reais. Se Hugo pagar o que deve a Manoela, ela ficará com o dobro do dinheiro que sobrará com ele. Que quantia Hugo ainda possui?*

( ) $a+10+12=2(a-12)$

( ) $230+25,5r=1046$

( ) $\frac{3x+3x}{2}=81$

( ) $75+15t=180$

( ) $y+10+12=2y-12$

( ) $230-25,5c=1046$

( ) $3b+\frac{3b}{2}=81$

( ) $15z=180+75$

Comentários

1) Os números presentes em cada enunciado podem influenciar a escolha da equação correspondente por parte dos alunos; a justificativa é importante para incentivar o raciocínio adequado.

2) A leitura do enunciado do problema em voz alta pode ajudar os alunos que tiverem dificuldade.

3) A situação 4 é bem difícil. O aluno consegue identificar a equação, entretanto, apresenta dificuldade em armá-la. Este tipo de atividade pode ser complementado com outras nas quais o aluno deve traduzir enunciados por meio de uma equação.

4) A entrevista com aluna do 8º ano ilustra as dificuldades.

Ao realizar sozinha a atividade, a aluna relacionou somente a situação 2 à equação correspondente e disse que não sabia fazer o resto.

1ª situação

E - *Leia em voz alta e escreva a equação correspondente a essa situação.*
A – (Foi necessária intervenção do entrevistador para chegar à resposta): *75 + 15 a = 180.*

2ª situação

A - Leu em voz alta.
E - *Quantas pessoas não pagaram a metade do preço?*
A – *3.*
E - *Qual a equação que corresponde a esta situação?*

A - $3\,b + \dfrac{3b}{2} = 81$

E - *Por que você não escolheu esta* (apontou $\dfrac{3x + 3x}{2} = 81$)*?*

A - *Por que só três pessoas pagam meia*.

3ª situação

A – Leu em voz alta e depois respondeu: *230 - 25,5 c = 1046.*

Questionada pelo entrevistador, conseguiu identificar a equação.

4ª situação

A- Leu em voz alta e apontou a resposta correta.
E - *Por que assinalou essa equação?*
A - *Identifiquei pelos valores dados na situação.*
E - *Mas a equação y + 10 + 12 = 2y – 12, também tem os valores dessa situação e você não a escolheu. Por quê?*
A - *Não sei.*

Novamente houve a necessidade da orientação do entrevistador, pedindo para a aluna escrever a equação.

A - Foi capaz de escrever o seguinte: *Manoela: x + 10*
Hugo: x
x - 12.

<u>ATIVIDADE 6</u> – Vestindo Equações

Enunciado

1) Para cada uma das equações abaixo, invente um problema que possa ser representado por meio dela.

a) $p + 2(p + 1) = 74$

b) $a + 10 = 28$

c) $x + (x + 10) = 52$

d) $4y + 66 = 211$

e) $0{,}50n + 0{,}30(60-n) = 22{,}80$

2) Compare cada problema que você escreveu com o escrito abaixo.
Em que eles se parecem? E em que eles são diferentes?

a) A soma de um número com o dobro do seu consecutivo é 74. Qual é esse número?

b) Daqui a 10 anos Karina terá 28 anos. Qual é a idade atual de Karina?

c) Júnior e Luís jogam no mesmo time de futebol de areia. No último campeonato, os dois juntos marcaram 52 gols. Júnior marcou 10 gols a mais que Luis. Quantos gols Luís marcou nesse campeonato?

d) Num fim de semana, um pai de família tinha R$ 211,00 para distribuir pelos seus 4 filhos e sua mulher. Deu então R$ 63,00 à mulher e distribuiu o restante igualmente entre os filhos. Quanto cada filho recebeu?

e) Um feirante levou 60 mamões para vender na feira. Começou vendendo cada um por 50 centavos. Depois, como a venda estava fraca, baixou o preço unitário para 30 centavos, e vendeu os outros. Sabendo que arrecadou um total de R$ 22,80, quantos mamões vendeu pelo preço mais caro?

Comentários

1) A primeira dificuldade que essa atividade apresenta é o pouco hábito dos alunos com a leitura e escrita de textos, principalmente em aulas de Matemática. A leitura em voz alta e a possibilidade de eles conversarem a respeito da tarefa, antes de escreverem, pode ajudar bastante. O trabalho em duplas é, portanto, recomendável.

2) A comparação entre os enunciados diferentes, correspondentes a uma mesma equação, que devem surgir da resolução do item 1, possibilita a compreensão do papel estruturante da linguagem algébrica.

3) A resposta dos alunos, no item 2, pode ser simplesmente: *os dados são iguais.* Nesse caso, o professor deve apresentar um enunciado com os mesmos dados, mas com estrutura diferente e discutir o fato de a equação revelar a estrutura matemática do problema.

4) O item (e) tem uma dupla dificuldade. A presença dos números decimais e o tipo de equação.

Capítulo X – Jogos

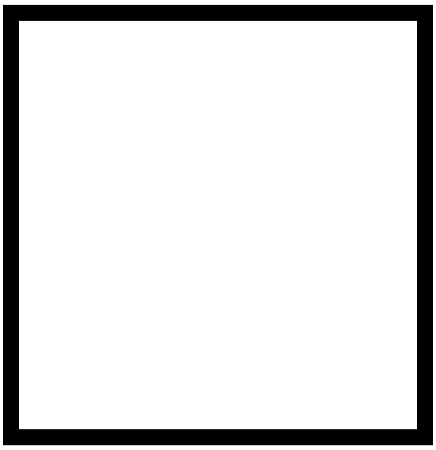
Considerando a importância dos jogos no processo ensino-aprendizagem em geral, incluímos neste capítulo quatro sugestões.

Alguns deles são adaptações de jogos tradicionais e podem ter função de fixação e/ou avaliação de aspectos do cálculo algébrico. Em todos há um conjunto de perguntas que pode ser alterado de acordo com os objetivos e condições do professor e o perfil dos alunos. Após o jogo, professor pode também propor que os próprios alunos criem outros tipos de perguntas com suas respectivas respostas, abordando outros conteúdos.

Objetivos

- Efetuar cálculos algébricos simples mentalmente.
- Identificar estratégias próprias no desenvolvimento do jogo.
- Ler oralmente informações algébricas.

QUEM ESTÁ ESCONDIDO?



A
B
C
D
E
F
G

Material

- Uma transparência, ou um cartaz com a foto de uma pessoa conhecida da mídia, um vulto histórico. Um retângulo do mesmo tamanho, de papel opaco, subdividido em faixas, cada uma com uma letra, que, quando retiradas, revelem parte da foto. (Ver figura)
- Um conjunto de fichas com perguntas e respectivas respostas, uma para cada letra do retângulo.

Desenvolvimento

- Cubra a fotografia com o retângulo das faixas.
- Separe a turma em dois grupos e sorteie o grupo que começa.
- O primeiro grupo a jogar escolhe uma letra.
- O professor faz ao grupo a pergunta correspondente à letra escolhida.
  Caso acerte, é retirada a faixa de papel correspondente a essa letra. O grupo que acertou tem o direito de "chutar" quem é a pessoa da foto. Caso erre a resposta da questão ou quem é a pessoa, passa a vez, e a faixa não é retirada.
- Ganha quem descobrir mais rápido de quem é a foto.

Perguntas e Respostas

Pergunta A - Qual é a soma de m com n?
Resposta: m + n.

Pergunta B - Um dos lados do retângulo mede x – 2 e o outro mede 2. Qual a área desse retângulo? Resposta: 2x – 4.

Pergunta C - Quanto vale 12x + 6 se x vale 1/6?
Resposta: 8

Pergunta D - Qual é o quadrado de (2x – 8)?
Resposta: $4x^2 - 32x + 64$.

Pergunta E - Qual é o resultado da divisão de 3k por k?
Resposta: 3.

Pergunta F - Qual é o dobro de 12 m^2n?
Resposta: 24 m^2n.

Pergunta G - Qual é o produto de $6a^2$ por $(-2a^2)$?
Resposta: $-12a^4$.

Comentários

1) Para aguçar o suspense do jogo, as perguntas mais difíceis devem corresponder às faixas que cobrem as partes mais características da figura, mas com cuidado de não serem tão difíceis a ponto de desestimularem os alunos.

2) Uma boa integração com a geometria pode ser feita substituindo a figura humana por um quadrilátero ou triângulo. A ordem na qual os grupos vão jogar é sorteada. Nesse caso, as faixas que cobrem o retângulo devem ser retiradas na ordem alfabética, uma por cada grupo que acertar a pergunta, lida pelo professor. Retirada a faixa, o mesmo grupo deve “chutar” qual a figura que está escondida, justificando. Se a justificativa estiver certa, o grupo ganha um ponto, mesmo que a figura não tenha acertado qual é a figura. Se a justificativa estiver errada, o grupo não ganha ponto. Acaba o jogo quando o grupo da vez acertar a figura.

O jogo pode ser repetido com várias figuras e os pontos de cada grupo vão se somando.

JOGO DA VELHA

Material

A	**B**	**C**
D	**E**	**F**
G	**H**	**I**

- Conjuntos de 9 cartões, cada um com uma pergunta e uma letra (de A até I) no verso.
- Conjuntos de 9 cartões com as respostas e as letras correspondentes às suas perguntas no verso.
- Quadros divididos em 9 casas, com as letras de A a I. como o da figura ao lado.

Obs. O número de conjuntos e de quadros deve ser a metade do número de alunos da turma.

Desenvolvimento

- Cada dupla receberá um quadro e dois conjuntos, um deles com as perguntas e outro com as respostas.
- Os alunos sorteiam quem começa. O primeiro aluno escolhe uma letra, retira a questão correspondente a ela e resolve-a. O outro aluno verifica a resposta olhando o cartão correspondente; caso esteja certa, quem a resolveu coloca sua marca no quadro, no lugar da letra escolhida; caso esteja errada, quem marca é o outro. O segundo aluno retira outra questão e continua o jogo da mesma maneira.
- Ganha quem conseguir primeiro colocar sua marca em três casas na vertical, horizontal ou diagonal.

Conjunto de perguntas

Pergunta A - Qual é a expressão que representa o quadrado de $(2x – 8)$?

Pergunta B - Um lado de um retângulo é $x – 2$ e o outro é 2. Qual é a expressão que representa a área desse retângulo?

Pergunta C - Se x vale 1/6, quanto vale $12x + 6$?

Pergunta D - Qual é a expressão que representa o triplo de $(4x – 2)$?

Pergunta E - Quais são os fatores da expressão $x^2 – 4$?

Pergunta F -
Qual é a diferença entre $(2x–4)$ e 4?

Pergunta G -
Qual é o produto de $6a^2$ por $-2a$?

Pergunta H - Qual é a forma mais simplificada da expressão $5a + 3b + 7a$?

Pergunta I -
Qual é a raiz da equação $3x = 4$?

Conjunto das Respostas

Resposta A: $4x^2 - 32x + 64$	**Resposta B:** 2x - 4	**Resposta C:** 8
Resposta D: 12x - 6	**Resposta E:** 1; $x^2 - 4$; $(x - 2)$ e $(x + 2)$	**Resposta F:** 2x – 8
Resposta G: $- 12a^3$	**Resposta H:** 12a + 3b	**Resposta I:** $\frac{4}{3}$

Comentários

1) Na experiência feita, em um grupo, os alunos consideraram as perguntas difíceis, o que os desmotivou um pouco. Mas, em outro, os alunos ficaram bastante motivados, inclusive, em procurar aprender o que não sabiam. Se as perguntas forem bem adaptadas ao nível dos alunos, esse jogo interessará os alunos de qualquer idade.

2) Intencionalmente, as perguntas A e E sugeridas são as mais difíceis, por corresponderem às posições por onde o aluno em geral começa o jogo.

BATALHA NAVAL

A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								
H								
	1	2	3	4	5	6	7	8

Material

- Uma cartela como a ao lado para cada aluno.
- Um conjunto de 10 fichas com perguntas e suas respectivas respostas para cada 2 alunos.

Desenvolvimento

- Cada aluno recebe uma cartela.
- Cada um deles deve desenhar na cartela que recebeu cinco figuras em cinco quadradinhos, aleatoriamente escolhidos, que representarão os submarinos.
- Cada dupla sorteia quem começa. O aluno que começar o jogo diz ao adversário as coordenadas (número, letra) onde cairá a bomba que ele lançará.

- Caso a bomba encontre água no local indicado pelo jogador, o adversário fará o seu lançamento.
- Caso a bomba encontre um submarino, o adversário sorteia uma ficha no monte das perguntas para que outro resolva a questão.
- Caso o colega acerte a resposta, o submarino é afundado e ele continua o jogo; caso o colega erre a resposta, o adversário lança sua bomba e o jogo continua.
- Ganha o aluno que conseguir afundar primeiro os submarinos do adversário ou o aluno que tiver afundado mais submarinos do outro quando as perguntas acabarem.

Perguntas e Respostas

Pergunta - O triplo de $4x – 2$ é?
Resposta: $12x - 6$

Pergunta - O produto de $- 6a$ por $(-2a^2)$ é?
Resposta: $12 a^3$

Pergunta - A expressão que representa o perímetro de um quadrado de lado $7x$ é?
Resposta: $28x$

Pergunta - Se um dos lados do retângulo é $x - 2$. Qual a área desse retângulo cujo comprimento do outro lado é 2? Resposta: $2x - 4$

Pergunta - A expressão que representa a área de um quadrado de lado $7x$ é?
Resposta: $49 x^2$

Pergunta - A forma mais simples da expressão $5a + 3b + 7a$ é?
Resposta: $12 a + 3b$

Pergunta - O valor de x na equação $3x = 4$ é? Resposta: $x = 4/3$

Pergunta - O número $2x – 4$ menos 4, vale?
Resposta: $2 x - 8$

Pergunta - Qual o cubo de $(- 2a)$?
Resposta: $-8a^3$

Pergunta - O termo geral de uma sequência é $4n - 3$.
Quanto vale o termo correspondente a $n = 5$?
Resposta: 17.

Comentários

1) O número de submarinos desenhados e o número de perguntas pode ser aumentado para aumentar a chance de os alunos acertarem os submarinos.

2) Mais uma vez, observamos a adequação necessária do nível de dificuldade das perguntas ao nível dos alunos.

JOGO DAS FICHAS

Material

- Conjunto de fichas nas cores preto, azul e verde, com versos iguais, num total igual ao número de alunos do grupo.
- Três conjuntos de cartões com perguntas a serem sorteadas e outro com as respectivas respostas, em número igual ao de alunos do grupo. Os três conjuntos devem ter nível crescente de dificuldade.

Desenvolvimento

- A turma é dividida em grupos e o professor determina a ordem de jogar em cada grupo.
- Cada aluno, na sua vez, vira uma ficha e sorteia uma pergunta do conjunto de perguntas mais fáceis.
- Se a ficha for preta, o aluno resolve a questão sorteada. Caso acerte, ganha 10 pontos, caso erre, não ganha ponto. Se a ficha for azul, o aluno tem a opção de resolver a questão sorteada ou escolher alguém para ajudá-lo. Caso acertem, ganham 5 pontos cada (se o aluno acertar sozinho, ganha 10 pontos), caso errem, não ganham ponto. Se a ficha for verde, o aluno passa a vez e não ganha ponto.
- Depois de uma rodada, o grupo recomeça o jogo com o segundo conjunto de perguntas. Depois deste, passa ao terceiro e último conjunto.
- Ao final, ganha(m) o(s) aluno(s) que fizer(em) mais pontos.

Obs – Sugerimos a seguir, conjuntos de 3 perguntas.

Conjunto 1 – Fácil	**Conjunto 2 – Médio**	**Conjunto 3 – Difícil**
Pergunta A_1 - Se x = 1, quanto vale x + 1?	**Pergunta A_2** - Se p = 1/3, quanto vale 3p + 2?	**Pergunta A_3 -** Qual a diferença entre o produto de m por m e a soma de m com m?
Pergunta B_1 - O resultado da expressão 2a + 3a é?	**Pergunta B_2** - A diferença entre 3k e k é?	**Pergunta B_3 -** Qual a área de um quadrado de perímetro $12l$?
Pergunta C_1 - O quadrado de 2x é?	**Pergunta C_2** - O cubo de $(-2x^2)$ é?	**Pergunta C_3** - O resultado da divisão de 3b + 7b por 2 é?
Resposta A_1: 2	Resposta A_2: 3	Resposta A_3: m(m – 2)
Resposta B_1: 5a	Resposta B_2: 2k	Resposta B_3: $9l^2$
Resposta C_1: $4x^2$	Resposta C_2: $-8x^6$	Resposta C_3: 5b

<u>Comentário</u>

O fato de as perguntas estarem em níveis crescentes de dificuldade é bastante positivo. Também influi o fator sorte, pois uma das perguntas do conjunto 3 é mais fácil do que as outras.

ANEXO - TESTE

Na primeira fase da pesquisa, duas professoras do grupo aplicaram um teste por meio de entrevista com 7 alunos de 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Três alunos eram do 9º ano, um aluno do 8º ano e os alunos restantes ainda estavam no 7º ano.

Nessa entrevista, o objetivo foi o de detectar indícios de lacunas na formação algébrica desses alunos, o que poderia servir de base para a conscientização dos professores sobre a necessidade de mudança. Especificamente, pretendeu-se observar se esses alunos reconhecem a noção de variável em diversos contextos e, no caso afirmativo, como a usam. Ou seja, como eles usam letras para generalizar um fenômeno ou para expressar o resultado de uma medição ou de uma operação; se admitem a possibilidade de usar letra ou expressão algébrica para representar um dado numérico; se escrevem expressões algébricas e se resolvem equações simples, escritas na forma padrão ou não.

Ao analisar as entrevistas, o grupo resolveu aplicar o mesmo teste, por escrito, sem intervenção do professor, a 100 alunos de 5 turmas de ensino médio, com o objetivo de observar o desempenho de alunos, supostamente, mais maduros do que os entrevistados. A amostra desta vez incluiu 5 turma de 1º ano do Ensino Médio, sendo uma delas de colégio particular com enfoque para o vestibular, outra de colégio estadual diurno e o restante de colégio estadual noturno.

Os resultados deste teste e das entrevistas serviram de base para o desenvolvimento do trabalho ora publicado.

QUESTÕES

Nome: ____

Escola: ____

Questão 1

Em uma cidade, o metrô foi planejado para que a distância entre duas estações consecutivas seja sempre 10 km.

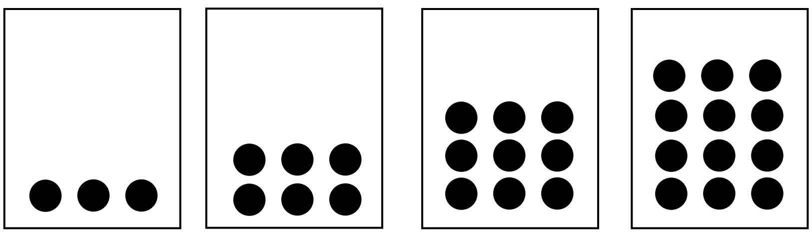
O que você pode dizer sobre a distância percorrida pelo trem:

a) após 7 paradas?

b) após 12 paradas?

c) após y paradas?

Questão 2



Posição 1 Posição 2 Posição 3 Posição 4

Observe que, em cada posição, o cartão tem números diferentes de bolinhas.

a) *Você é capaz dizer quantas bolinhas haverá num cartão que esteja numa posição qualquer?*

b) *Como você representaria essa quantidade em linguagem matemática?*

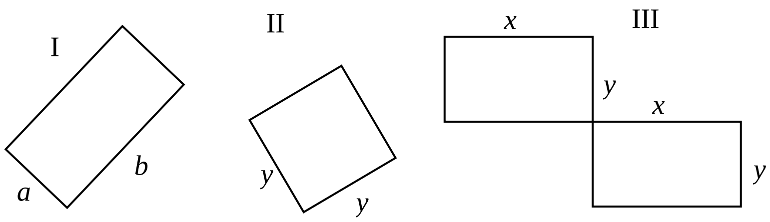
Questão 3

No último campeonato brasileiro o Flamengo marcou Z gols e o Vasco H gols.

Quantos gols os dois times marcaram?

Questão 4

Calcule o perímetro de cada figura abaixo.

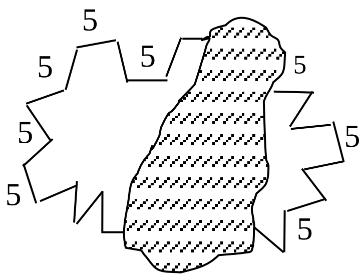


Questão 5

O que você seria capaz de escrever sobre o perímetro desta figura?

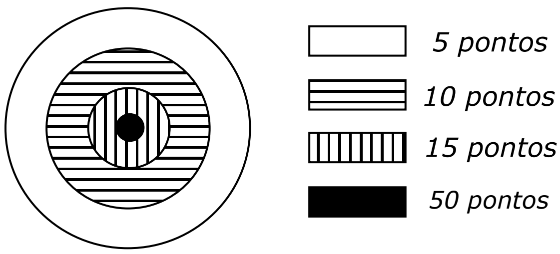
Observe que parte da figura está escondida.

Ao todo são n lados, cada um de comprimento 5.

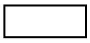


Questão 6

Este é o alvo de um jogo de dardos.



a) João acertou

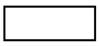
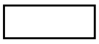
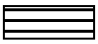
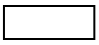
4 vezes no  *e*

5 vezes no .

Quantos pontos ele fez?

Como você calculou?

b) Quantos pontos fez uma pessoa que acertou:

- *3 vezes no*  *e **y** vezes no*  *?*
- ***f** vezes no*  *e **p** vezes no*  *?*
- ***a** vezes no* *, 5 vezes no*  *e **y** vezes no*  *?*

<u>Questão 7</u>

a + b + c = a + d + c

Essa afirmação é verdadeira

a) sempre?   B) nunca?   c) às vezes?

<u>Questão 8</u>

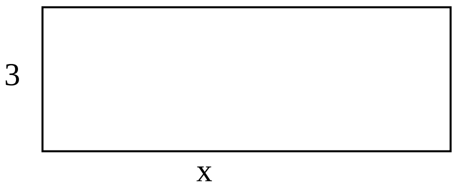
Calcule o valor de x.

a) 2x +1=3

b) $\frac{5}{x} = 3$

<u>Questão 9</u>

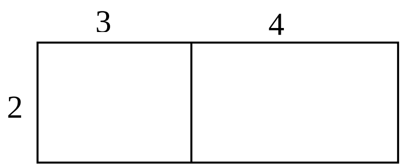
Calcule a área.

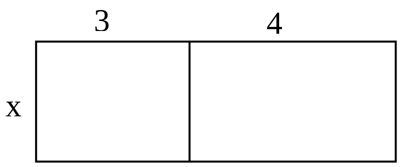


a) *Você sabe calcular a área de um retângulo?*
b) *O que representa a letra x?*
c) *Escreva uma expressão que represente a área desse retângulo.*

<u>Questão 10</u>

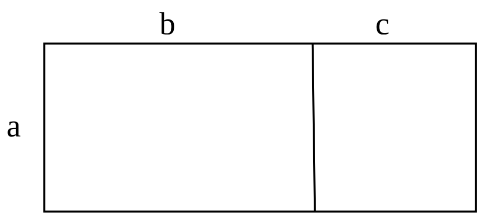
Calcule a área.





<u>Questão 11</u>

Calcule a área.



<u>Questão 12</u>

Em uma loja há cinco vezes mais rapazes do que moças. Utilizando as letras ***p*** *e* ***q*** *para representar o número de rapazes e moças, respectivamente, use a linguagem matemática para traduzir essa situação.*

Resumo dos Resultados

As respostas ao teste escrito e às entrevistas se complementaram. A diferença de nível escolar não afetou o tipo de respostas e/ou as dificuldades, que coincidem também com as apontadas nos estudos analisados.

Em geral, os alunos não parecem admitir que o resultado de uma contagem, de uma operação ou de uma medição possa ser dado por uma expressão algébrica, principalmente se esta expressão tiver mais de um termo. Daí a freqüência de respostas nas quais a variável é substituída por um valor numérico, pelos mais diversos critérios.

Há respostas sugestivas de que seus autores estão na fase de transição entre o retórico e o simbólico do desenvolvimento da linguagem algébrica, o que é natural, mas exige atenção especial para que esta transição se complete.

Mesmo entre os alunos que escrevem expressões algébricas, foram detectadas dificuldades como: pensar que essa expressão tem de ser igualada a um número ou pelo menos a uma letra (em geral, x); transformar erroneamente uma expressão, tentando simplificá-la; usar sinais de pontuação (parêntesis) inadequadamente; igualar indevidamente uma expressão a 0, obtendo uma equação; interpretar precariamente informações codificadas, por exemplo, por legenda; realizar procedimentos aparentemente aleatórios ao resolver equações.

Como resultados positivos, observamos alunos que reconhecem a relação de proporcionalidade em situação dada e usam o conceito de divisão para resolver equação sob forma não padronizada.

Bibliografia

ARCAVI, A.. O sentido do símbolo, atribuindo um sentido informal à matemática formal. Em: **Série Reflexões em Educação Matemática – Álgebra, História, Representação**, MEM/USU, p. 38 -72, Rio de Janeiro, 1995.

BAUMGART, K. J.**. Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula – álgebra.** Atual Editora, São Paulo, 1992.

BOOTH, L. R.. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. Em: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. (org), **As idéias da Álgebra**, p. 23-37, Atual Ed., São Paulo, 1994.

BORDEAUX, A. L., e outros. **Matemática na vida e na escola**. Ed. do Brasil, São Paulo, 2001.

CARAÇA, B. J.. **Conceitos fundamentais da matemática**. Ed. Sá da Costa, Lisboa, 1984.

CARRAHER, T., CARRAHER, D. e SCHLIEMANN, A.. **Na vida dez, na escola zero**. Ed. Cortez, São Paulo, 1988.

CASTRO, M. R.. Educação algébrica e resolução de problemas a proposta de interatividade do salto para o futuro. Em: **BOLETIM do GEPEM**, nº 42, p. 11-25, Rio de Janeiro, fev./jul., 2003.

COX, C. J. e BELL, D.. **National curriculum edition understanding mathematics.** Second edition, British Library Cataloguing in Publication, Oxford, 1989.

COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P.. **As idéias da Álgebra.** Atual Editora, São Paulo, 1994.

CURY, H. N., BROLEZZI, A. C. e VIANA, C. R.. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. Em: **Educação Matemática em Revista**, nº 4, p. 9-15, SBEM, São Paulo, 2002.

DELEDICQ, A.. **Énigmes et défis mathématiques**. Acl. Lês Editions Du Kangourou, Paris, 2006.

FALCÃO, J. T. R.. A Álgebra como Ferramenta de Representação e Resolução de Problemas, em: SCHLIEMANN, A. D. e outros. Em: **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**, p. 85 -107, ed. UFPE, Recife, 1993.

FALCÃO, J. T. R.. **Alfabetização algébrica nas séries iniciais**. Em: www.redebrasil.tv.br/salto/boletins2003, acessado 04/08/2003.

FIORENTINI, D.. Pensamento algébrico x habilidade em álgebra. Em: **Minicurso na Semana Regional de Educação Matemática,** outubro, Rio de Janeiro, 1996.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. Â. e MIGUEL, A.. Contribuindo para um repensar a educação algébrica elementar. Em: **Proposições**, FE/UNICAMP, vol. 4, nº 1, p. 78 - 91, Campinas, 1993.

GUELLI, O.. **Contando a história da matemática - equação**. Editora Ática, 2002.

LINS, R. C.. Álgebra e pensamento algébrico na sala de aula. Em: **Educação Matemática em Revista**, nº 2, p. 26-31, SBEM, São Paulo, 1º sem. 1994.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J.. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Editora Papirus/SBEM, Campinas, 1997.

MEC/SEF. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática, terceiro e quarto ciclos**. MEC/SEF, Brasília, 1998.

MEIRA, L.. Atividade algébrica e produção de significados em matemática: um estudo de caso, em: DIAS, M. G. B. P. B. e PINILLO, A. F. (org.). Em: **Tópicos em Psicologia Cognitiva,** cap. 6, p. 168 -192, Ed. UFPE, Recife, 1996.

MEIRA, L.. Significados e modelagem na atividade algébrica. Em: **BOLETIM do GEPEM,** v. 42, p. 37- 45, Rio de Janeiro, julho, 2003.

MENDES, M. H. M.. **O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas pelos alunos na transição do 2º para o 3º grau**. Tese de Mestrado, PUC/Rio, Rio de Janeiro, 1994.

MORETTI, R. L. e GRAND, R. C.. Conhecimento algébrico que os alunos apresentam no início do curso de licenciatura em matemática: um olhar sob os aspectos da álgebra elementar. Em: **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, UFPE, Recife, 2004.

MOURA, A. R. L., SOUZA, M. do C. de. Lógico-histórico: uma perspectiva para o ensino de álgebra. Em: **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática,** UFPE, Recife, 2004.

NASSER, L. e TINOCO, L. A. A. (coord.). **Argumentação e provas no ensino de matemática.** Projeto Fundão, IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.

OLIVEIRA, A. T. C. C. de. Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra. Em: **Educação Matemática em Revista,** SBEM, nº 12, p. 35-39, São Paulo, junho 2002.

PONTE, J. P. da. Álgebra no currículo escolar. Em: revista **Educação e Matemática**, nº 85, p. 36 - 41, APM, Lisboa, 2005.

PONTE, J. P. da, MATOS, A. e BRANCO, N.. Como vai o pensamento algébrico dos alunos? Em: revista **Educação e Matemática**, nº 85, p. 54-59, APM, Lisboa, 2005.

POST, T. R., BEHER, M. J. e LESH, R.. A proporcionalidade o desenvolvimento de noções pré-álgebra. Em: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. (org.), **As Idéias da Álgebra,** p. 89-103, Atual Ed., São Paulo, 1994.

ROQUE, T.. **História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Zahar Editora, Rio de Janeiro, 2012.

SIERPINSKA, A.. On Understanding the notion of function. Em: DUBINSKY, E. S. e HAREL, G. (ed), **The concept of function aspects of epistemology and pedagogy**, MAA Notes, p. 25-58, Londres, 1992.

SOUZA, E. R. de S. e DINIZ, M. I. de S. V.. **Álgebra: das variáveis às equações e funções**. IME/USP, CAEM, São Paulo, 2ª ed.,1994.

STRUIK, J. D.. **História concisa das matemáticas**. Ed. Gradiva, Lisboa, Portugal, 1989.

TELES, R. A. de M.. A aritmética e a álgebra na matemática escolar. Em: **Educação Matemática em Revista,** nº 16, p. 8-15, SBEM, São Paulo, maio 2004.

TINOCO, L. A. A. (coord). **Construindo o conceito de função.** 4ª. Ed. Instituto de Matemática, UFRJ, Projeto Fundão, Rio de Janeiro, 2002.

TINOCO, L. A. A. (coord). **Razões e proporções**. Projeto Fundão, IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

USISKIN, Z.. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. Em: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. (org.), **As Idéias da Álgebra**, p. 9-22, Atual Ed., São Paulo, 1994.

WALLE, J. A. V. de. **Elementary and middle school mathematics**. Library of Congress Cataloging-in-publication data, USA, 6ª ed., 2007.

ZENERE, L. C. S.. **Álgebra: como encontrar o "x" da questão?** Monografia do Curso de Especialização em Ensino de Matemática, UNIVATES, Lajeado, RS, 2005.

O Projeto Fundão desenvolve, desde 1984, na UFRJ, atividades de Educação Matemática e Ensino de Ciências, com os seguintes objetivos:

- Estimular e estender a interação entre a UFRJ e o sistema de ensino básico.
- Apoiar os professores das redes oficial e privada de ensino no sentido do aprimoramento da sua prática pedagógica, e a consequente melhoria do ensino de Matemática e Ciências.

Como produto dos seus estudos e pesquisas, a partir da década de 90, o Setor Matemática do Projeto Fundão publicou os seguintes livros:

- Álgebra: pensar, calcular, comunicar...
- Área e Perímetro: Práticas Acessíveis a Alunos Surdos e Alunos com Deficiência Visual.
- Argumentação e Provas no Ensino de Matemática.
- Atividades de Contagem com Adaptações para Alunos Surdos e Alunos com Deficiência Visual.
- Atividades Matemáticas para Deficientes Visuais.
- Avaliação da Aprendizagem e Raciocínio em Matemática: Métodos Alternativos.
- Construindo Conceito de Função.
- Curso Básico de Geometria - Enfoque Didático.
    - Módulo I- Formação de Conceitos Geométricos.
    - Módulo II - Visão Dinâmica da Congruência de Figuras.
    - Módulo III- Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras.
- Equações: ler, resolver, utilizar....
- Fazer Matemática em Sala de Aula Usando Diversos Recursos.
- Geometria Euclidiana por meio da Resolução de Problemas.
- Geometria Euclidiana: Resolução dos Problemas.
- Geometria na Era da Imagem e do Movimento.
- Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele.
- Histórias para Introduzir Noções de Combinatória e Probabilidade.
- Números: Linguagem Universal.
- Razões e Proporções.
- Tratamento da Informação Atividades para o Ensino Básico.
- Tratamento da Informação Explorando Dados Estatísticos e Noções de Probabilidades nas Séries Iniciais.
- Visualizando Figuras Espaciais.

As atividades propostas nesses livros são subsídios para professores de Ensino Fundamental e Médio. A participação de professores desses níveis de ensino foi essencial, tanto na sua elaboração, como na sua testagem em sala de aula, tornando-as assim adequadas à realidade e às condições de trabalho das escolas.

EDITORA
IM/UFRJ