TEXTOS DE MATEMÁTICA
EDITORA INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

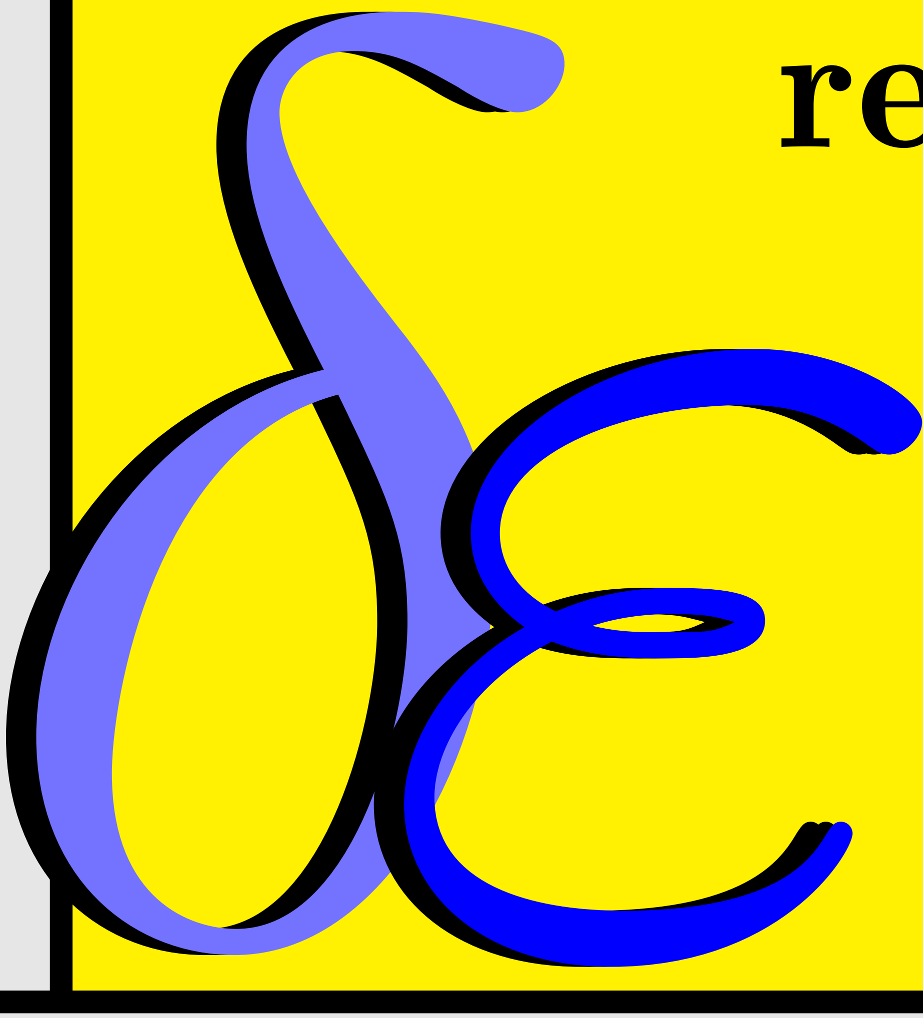
CURSO DE ANÁLISE REAL

— CASSIO NERI —
e
— MARCO CABRAL —

1ª Edição – 2021

Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

curso de análise real



Cassio Neri e Marco Cabral

Curso de Análise Real

Primeira Edição Digital (2021)

Cassio Neri Moreira
Doutor em Matemática pela Université Paris Dauphine – França

Marco Aurélio Palumbo Cabral
PhD em Matemática pela Indiana University — EUA

Editora Instituto de Matemática
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
Novembro de 2021

Pode-se baixar o PDF deste livro diretamente da Editora do Instituto de Matemática em `www.im.ufrj.br` e o fonte LaTeX em `gitlab.com/mapcabral/livro-analise-real`

Segunda edição impressa de julho de 2008 com adição de exercícios e modificação do texto por Marco Cabral, após autorização de Cassio Neri.

Primeira edição em versão digital de dezembro de 2021 pela Editora do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Neri, Cassio M.; Cabral, Marco A.P.

N577b Curso de Análise Real / Cassio Neri; Marco Cabral - 1 ed. digital

Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2021.

191p - 23cm.

Inclui bibliografia / inclui índice remissivo.

ISBN: **978-65-86502-04-6**

1. Análise Real.

I. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática.

II. Título.

Sai che ti avverrà,
praticando il disegnare di penna?
che ti farà sperto, pratico,
e capace di molto disegno entro la testa tua.

Sabe o que te acontecerá, praticando o desenho a pena?
tornar-te-ás perito, prático,
e capaz de muitos desenhos dentro de tua mente.

- Cennino Cennini da Colle di Valdelsa
Il Libro dell'arte (1437) - Cap. XIII.

Sobre os Autores

Cassio Neri é mineiro. Fez Bacharelado em Matemática na UFRJ, o Mestrado em Matemática Aplicada na UFRJ e o Doutorado em Matemática em Paris IX (França). Suas áreas de atuação são as Equações a Derivadas Parciais, Análise Numérica e Finanças. É atualmente Analista Quantitativo do Lloyds Banking Group. Ex-Analista Quantitativo do Dresdner Kleinwort e Commerzbank AG. Ex-Professor do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Marco Cabral é carioca. Fez o Bacharelado em Informática na UFRJ, o Mestrado em Matemática Aplicada na UFRJ e o Doutorado em Matemática na Indiana University (EUA). Suas áreas de atuação são as Equações a Derivadas Parciais e Análise Numérica. É professor no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Prefácio

Porque estudar análise?

Além da razão óbvia, ser muito legal e divertido:

(a) para desenvolver habilidade analítica e de resolução de problemas (no sentido amplo, de qualquer problema do mundo real): quais as hipóteses envolvidas, quais as ferramentas que podem ser utilizadas;

(b) para se preparar para entendimento sólido de probabilidade (teoria dos conjuntos, integração);

(c) para se preparar para entendimento sólido de equações diferenciais e análise numérica (funções contínuas, derivadas);

(d) para se acostumar com espaços abstratos envolvidos em modelagem matemática de fenômenos.

Aos alunos

As Seções e as demonstrações de Teoremas e Proposições marcadas com $\star$ podem ser omitidas em uma primeira leitura.

O livro possui cerca de 380 exercícios. É parte **fundamental** do curso resolvê-los, tantos quanto for possível. Existe uma grande integração entre o texto e os exercícios, com diversas referências cruzadas. Para ajudar na tarefa de escolha de quais devem ser feitos, eles são divididos em:

(a) Lista recomendada de exercícios a serem feitos, indicados por $\Longrightarrow$;

(b) Lista complementar: após serem feitos os da lista recomendada, indicados por $\longrightarrow$;

(c) Lista de exercícios extras, que expandem a teoria (não são necessariamente mais difíceis), que podem ser omitidos em primeira leitura, indicados por $\star$ (extra);

(d) Exercícios difíceis, que podem expandir a teoria ou não, indicados por $\sharp$ (difícil).

O índice do livro é bem completo e é ótima porta de entrada para os curiosos. Foram indexados também tópicos abordados somente nos exercícios.

Modificações da segunda edição

Este livro foi escrito originalmente por Cassio Neri e publicado em 2006. Em julho de 2008 foi modificado por Marco Cabral em diversos pontos, com os seguintes destaques:

(a) acrescentado capítulo de classes de equivalência e construção dos números reais por sequências de Cauchy;

(b) reescrito o capítulo de integração, com utilização de imagem direta e inversa para simplificar as demonstrações;

(c) acréscimo de 260 exercícios ao livro, com indicação de quais devem ser feitos.

(d) reescrito o início do capítulo de números reais, tornando-o auto contido e com definições mais claras;

(e) introduzida, no capítulo de topologia, a notação $B_\varepsilon(x)$ para intervalos;

(f) reescrito parte do capítulo de funções contínuas para conectá-lo diretamente com conceitos do capítulo de topologia: abertos, conexos e compactos;

(g) modificado o nome e reduzido número de diversas seções;

(h) introduzido nome para quase todo Teorema, Lema e Proposição.

Na Versão 2.1 (julho de 2009), além de pequenas correções:

(i) Adequamos o livro ao recente acordo ortográfico (sequências perderam parte do charme);

(j) Acrescentamos cerca de 30 exercícios;

(k) Incluímos como Proposição (na página 20) o argumento diagonal de Cantor.

(l) Colorimos todas as definições, teoremas, proposições, lemas e princípios.

(m) Reescrevemos várias frases do livro, introduzindo de forma explícita algumas definições e observações novas.

Na Versão 2.4 de dezembro de 2011 foram feitas pequenas correções ao longo do texto ou exercícios. Na Versão 2.5 de setembro de 2021 foram feitas pequenas correções em exercícios. A terceira edição de dezembro de 2021 é editada pela Editora do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Agradecimentos

Aos alunos do curso de Análise Real do IM - UFRJ que ajudarem a melhorar o texto e retirar erros dos exercícios, em especial aos alunos da Matemática Aplicada –UFRJ: de 2008 Hugo Tremonte de Carvalho e Renata Stella Khouri; de 2009 Gabriel de Oliveira Martins de 2009.

Ajudaram indicando erros no texto ou exercício os alunos da UFRJ Felipe Pagginelli e Gustavo Pfeiffer. Agradeço também a Vanize Ambrósio de Souza da UNICENTRO, Guarapuava-PR.

Sumário

Capítulo 1

Noções de Teoria dos Conjuntos

1.1 Conjuntos e operações.

A noção intuitiva que se tem da palavra conjunto nos é satisfatória e uma apresentação rigorosa da Teoria dos Conjuntos é difícil e além dos objetivos do curso. Para detalhes leia o clássico [Ha].

DEFINIÇÃO 1.1. *Um* **conjunto** *é constituído de objetos chamados* **elementos**. *Usamos a notação $x \in A$ (lê-se x pertence a A) para dizer que x é um elemento do conjunto A. Se x não é um elemento de A, então escrevemos $x \notin A$ (lê-se x não pertence a A).*

Uma forma de caracterizar um conjunto é através da lista dos seus elementos, escrevendo-os separados por vírgulas "," no interior de duas chaves "{" e "}".

Exemplo 1.1. *Seja A o conjunto cujos elementos são os números $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ e 6. Escrevemos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Temos $1 \in A,\ 2 \in A$ e $7 \notin A$.*

Outra maneira de caracterizar um conjunto é através de uma propriedade P possuída por todos os seus elementos e apenas por estes (na Seção 1.2 faremos mais considerações sobre isto). Escrevemos neste caso $\{x\ ;\ P(x)\}$, $\{x \mid P(x)\}$ ou $\{x\ :\ P(x)\}$ (lê-se o conjunto dos elementos x tais que $P(x)$ é verdadeira, ou ainda, dos elementos x que possuem a propriedade P). Salientamos que a letra x é arbitrária de modo que $\{x\ ;\ P(x)\} = \{y\ ;\ P(y)\}$.

Exemplo 1.2. *Seja P a propriedade "é um número presente na face de um dado" e seja $A = \big\{x\ ;\ P(x)\big\}$. Então $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,* i.e.[1], *A é o mesmo conjunto do Exemplo 1.1.*

DEFINIÇÃO 1.2. *Dizemos que A é um* **subconjunto** *de B ou que A é uma* **parte** *de B, ou ainda, que A* **está contido em** *B e escrevemos $A \subset B$ se todo elemento de A pertence a B. Dizemos também que B* **contém** *A e escrevemos $B \supset A$.*

[1] *i.e.*, abreviação de "*id est*" que, em latim, significa "isto é".

DEFINIÇÃO 1.3. *Quando* $A \subset B$ *e* $B \subset A$*, os conjuntos* A *e* B *são ditos* **iguais** *e escrevemos* $A = B$*. Caso contrário eles são* **diferentes** *e escrevemos* $A \neq B$*. A notação* $A \subsetneq B$ *(ou* $B \supsetneq A$*) é uma abreviação para* $A \subset B$ *com* $A \neq B$*, neste caso dizemos que* A *é um* **subconjunto próprio** *de* B*.*

Observação 1.1 *Para provar que dois conjuntos* A *e* B *são iguais deve-se provar que* $A \subset B$ *e depois que* $B \subset A$*.*

Exemplo 1.3. *Sejam* $A = \{2, 4, 6\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. Temos que* $A \subsetneq B$*.*

Exemplo 1.4. *Sejam* A *o conjunto dos números inteiros múltiplos de* 4 *e* B *o conjunto dos números pares. É óbvio que* $A \subset B$ *porém, vamos demonstrar esta afirmação. O primeiro passo consiste em interpretar a definição do conjunto* A*. Um número inteiro* n *é múltiplo de* 4 *se* $n/4$ *é inteiro, ou equivalentemente, se existe um inteiro* m *tal que* $n = 4m$*. Logo,*

$$A = \{n\ ;\ \text{existe um inteiro } m \text{ tal que } n = 4m\}.$$

Analogamente,

$$B = \{n\ ;\ \text{existe um inteiro } m \text{ tal que } n = 2m\}.$$

Estamos preparados para a demonstração. Seja $n \in A$*. Então existe um inteiro* m *tal que* $n = 4m = 2(2m)$*. Como* m *é inteiro,* $2m$ *também é. Concluímos que* $n \in B$*.*

Como n *é um elemento arbitrário de* A *(além de* $n \in A$ *não fizemos nenhuma hipótese sobre* n*) concluímos que qualquer que seja* $n \in A$ *temos* $n \in B$, i.e, *que todo elemento de* A *pertence a* B*, ou seja, que* $A \subset B$*. Isto termina a demonstração.*

Exemplo 1.5. *Sejam* $A = \{0, 1, 2\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4\}$*. Pergunta:* $A \subset B$*? Por quê? Resposta: Não, pois* $0 \in A$ *e* $0 \notin B$*.*

De maneira geral, se A não é um subconjunto de B significa que existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B.

DEFINIÇÃO 1.4. *O* **conjunto vazio***, denotado por* $\varnothing$*, é um conjunto que não possui nenhum elemento, ou seja, não existe* x *tal que* $x \in \varnothing$*.*

Uma propriedade interessante do conjunto vazio é que ele é subconjunto de qualquer conjunto. Vejamos isto mais precisamente. Suponhamos que exista um conjunto A tal que $\varnothing$ não seja subconjunto de A. Pelo que vimos anteriormente, isto significa que existe algum elemento $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$. Mas, por definição de vazio, não podemos ter $x \in \varnothing$. Esta contradição nos obriga a concluir que $\varnothing \subset A$ pois, senão, chegaríamos a uma conclusão absurda.

Acabamos de mostrar que $\varnothing \subset A$ usando um argumento do tipo "**demonstração por absurdo**" ou "**demonstração por contradição**". Neste tipo de argumento supomos inicialmente que a conclusão desejada seja falsa e, a partir desta hipótese, chegamos a um absurdo. Desta forma, somos obrigados a admitir que a suposição é falsa e, portanto, que a conclusão desejada é verdadeira.

Existem conjuntos cujos elementos são conjuntos como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.6. *Sejam* $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $\mathcal{C} = \{A, B\}$. *Tente se convencer de que todas as afirmativas abaixo são verdadeiras.*

$$A \in \mathcal{C}, \quad B \in \mathcal{C}, \quad \{A\} \subset \mathcal{C}, \quad \{B\} \subset \mathcal{C}, \quad 1 \notin \mathcal{C}, \quad 2 \notin \mathcal{C}, \quad 3 \notin \mathcal{C}.$$

Perceba ainda que é errado dizer $\{2\} \subset \mathcal{C}$, $\{3\} \subset \mathcal{C}$ *ou* $\big\{\{2\}\big\} \subset \mathcal{C}$. *Entretanto, é verdade que* $\big\{\{3\}\big\} \subset \mathcal{C}$ *(esta é simplesmente a quarta das afirmações acima).*

DEFINIÇÃO 1.5. *Quando* $\mathcal{C}$ *é um conjunto de conjuntos (para simplificar a linguagem) dizemos que* $\mathcal{C}$ *é uma* **coleção**, *uma* **classe** *ou uma* **família** *de conjuntos. Elementos de* $\mathcal{C}$ *são comumente chamados de* **membros**.

Para famílias utiliza-se também notação especial (como veremos na Seção 1.4, p.9). Por falar em conjuntos de conjuntos...

DEFINIÇÃO 1.6. *Seja* A *um conjunto. A coleção de todos os subconjuntos de* A *é dita* **conjunto das partes** *de* A *e é denotada por* $\mathcal{P}(A)$ *ou por* 2^A. *Em símbolos,*

$$\mathcal{P}(A) = \{B \; ; B \subset A\}.$$

Portanto, $B \in \mathcal{P}(A)$ *se, e somente se,* $B \subset A$.

Exemplo 1.7. *Temos que* $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. *Note que* $\varnothing \neq \mathcal{P}(\varnothing)$ *(porque?). Se* $A = \{1\}$, *então* $\mathcal{P}(A) = \big\{\varnothing, \{1\}\big\}$.

DEFINIÇÃO 1.7. *Sejam* A *e* B *dois conjuntos. Existe um conjunto, chamado* **união** *ou* **reunião** *de* A *e* B *(denotado por* $A \cup B$*), cujos elementos pertencem a* A *ou a* B. *Também existe um conjunto chamado* **interseção** *de* A *e* B *(denotado por* $A \cap B$*) cujos elementos pertencem a* A *e a* B. *Em outros termos*

$$A \cup B = \{x \; ; \; x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad \text{e} \quad A \cap B = \{x \; ; \; x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

De maneira geral, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.8. *Se* $\mathcal{C}$ *é uma coleção não vazia de conjuntos, então a* **união** *ou* **reunião** *da coleção* $\mathcal{C}$ *é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um membro de* $\mathcal{C}$. *Em símbolos,*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \; ; \; \text{existe } A \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \in A\}.$$

A **interseção** *da coleção* $\mathcal{C}$ *é constituída pelos elementos que pertencem a todos os membros de* $\mathcal{C}$. *Em símbolos,*

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \; ; \; x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{C}\}.$$

Por definição $A \cap B \cap C = \{x \; ; \; x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C\}$. Neste caso podemos substituir o conectivo "e" por uma vírgula "," escrevendo $A \cap B \cap C = \{x \; ; \; x \in A, \; x \in B \text{ e } x \in C\}$. Porém, o conectivo "ou" é sempre preservado.

Exemplo 1.8. *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 4, 8\}$. *Temos* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ *e* $A \cap B = \{1, 2\}$.

DEFINIÇÃO 1.9. *Sejam* A *e* B *conjuntos. O conjunto* **diferença** *entre* A *e* B *(denotado por* $A \setminus B$ *ou* $A - B$*) é constituído pelos elementos de* A *que não pertencem a* B. *Em símbolos,* $A \setminus B = \{x\ ;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

DEFINIÇÃO 1.10. *Quando trabalhamos apenas com subconjuntos de um determinado conjunto* X *(subentendido no contexto) definimos o* **complementar** *de* A *por* $X \setminus A$ *e o denotamos* $A^{\complement}$.

Dissemos anteriormente que um conjunto pode ser definido pela lista de seus elementos. Devemos ressaltar que a ordem dos elementos na lista não importa e que repetições são irrelevantes. Desta forma, $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, a, b\} = \{a, a, b, c\}$. Quando queremos que a ordem ou repetições sejam relevantes usamos o conceito de par ordenado.

DEFINIÇÃO 1.11. *Dados dois objetos* a *e* b *definimos o* **par ordenado** (a, b) *cuja primeira* **coordenada** *é* a *e a segunda é* b. *Dois pares ordenados* (a, b) *e* (c, d) *são iguais se eles forem iguais coordenada por coordenada,* i.e.,

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{se, e somente se,} \quad a = c \text{ e } b = d.$$

Repare que $(a, b) \neq (b, a)$ salvo se $a = b$ e que $(a, a) \neq a$. De maneira análoga definimos **triplas ordenadas** (a, b, c) ou $\mathbf{n}$**-uplas ordenadas** $(a_1, \ldots, a_n)$.

DEFINIÇÃO 1.12. *Dados dois conjuntos* A *e* B *existe um conjunto chamado de* **produto cartesiano** *de* A *e* B *(denotado* $A \times B$*) formado pelos pares ordenados* (a, b) *tais que* $a \in A$ *e* $b \in B$. *Em símbolos:* $A \times B = \{(a, b)\ ;\ a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Em particular, podemos definir $A \times A$ e, por simplicidade, o denotamos A^2. De maneira análoga definimos $A \times B \times C = \{(a, b, c)\ ;\ a \in A,\ b \in B \text{ e } c \in C\}$, $A^3 = A \times A \times A$, $A^n = A \times \cdots \times A$ (n vezes).

Observação 1.2 *Repetidas vezes usamos expressões do tipo "existe", "para todo", "qualquer que seja", etc. Para simplificar a escrita destas expressões introduziremos alguns símbolos que as representam, a saber:*

$\exists$	*significa "existe";*
$\exists!$	*significa "existe um único";*
$\forall$	*significa "para todo" ou "qualquer que seja";*
$\Longrightarrow$	*significa "se ... então ..." ou "implica que";*
$\Longleftrightarrow$ *ou "sse"*[1]	*significa "se, e somente se,".*

Desta maneira, podemos escrever que, por definição, $A \subset B$ sse $x \in A \implies x \in B$.

[1]Este neologismo é derivado de outro em inglês *iff* que significa *if and only if*. Foi o matemático Halmos que o inventou. A ele devemos também o pequeno quadrado que indica final de demonstração.
Paul Richard Halmos: $\star$ 03/03/1916, Budapeste, Hungria.

1.2 ⋆ Teoria dos conjuntos é fácil?

Não entramos nos fundamentos lógicos da Teoria dos Conjuntos e tudo parece trivial e familiar. Mas (in)felizmente a Teoria dos Conjuntos não é tão fácil como possa parecer. Por exemplo, nossa exposição apresenta uma inconsistência lógica, ou paradoxo, conhecido como Paradoxo de Russel[1].

Logo na primeira seção dissemos que dada uma propriedade P podemos definir, ou melhor, existe o conjunto A dos elementos que possuem a propriedade P e escrevemos

$$A = \big\{x \ ; \ P(x)\big\}.$$

Ora, não há nada mais razoável.

Nada nos impede de considerar conjuntos cujos elementos são conjuntos (como já fizemos ao introduzir coleções) e de questionar se um conjunto é elemento dele mesmo. Como exemplo, considere o conjunto C de todos objetos que não são bolas. Ora, C não é uma bola, logo, $C \in C$. Vejamos como isto gera um paradoxo.

Diremos que um conjunto X é **normal** se ele não pertence a si próprio, *i.e.*, se $X \notin X$. Seja N o conjunto dos conjuntos normais:

$$N = \{X \ ; \ X \text{ é normal}\} = \{X \ ; \ X \notin X\}.$$

Perguntamo-nos se N é normal. Existem duas respostas possíveis: sim ou não. Vamos analisar cada uma delas.

$\boxed{1^{\underline{a}} \text{ possibilidade: } N \textbf{ é } \text{normal.}}$ Por definição, N é o conjunto dos conjuntos normais e, sendo ele próprio normal, temos que $N \in N$. Isto implica, por definição de conjunto normal, que N <u>não é</u> normal. Temos então uma contradição! Pode-se pensar que este argumento seja apenas uma demonstração por absurdo que mostra que a primeira possibilidade não funciona e então devemos concluir que é a segunda que é a boa. Vejamos.

$\boxed{2^{\underline{a}} \text{ possibilidade: } N \textbf{ não é } \text{normal.}}$ Pela definição de N, e como N não é normal, devemos ter $N \notin N$. Logo, por definição de conjunto normal, concluímos que N <u>é</u> normal. Novamente temos uma contradição. Nenhuma das duas possibilidades é possível - paradoxo!

Para eliminar este paradoxo da Teoria dos Conjuntos (que é o pilar de toda a Matemática) uma solução é a seguinte. Ao invés de admitir que dada uma propriedade P existe o conjunto dos elementos que possuem a propriedade P, admitimos que dada uma propriedade P e um conjunto A existe o subconjunto dos elementos de A que possuem a propriedade P. Escrevemos $\big\{x \in A \ ; \ P(x)\big\}$. Feito isto o argumento usado no Paradoxo de Russel se transforma em um teorema (veja exercício 8, p.11) segundo o qual não existe o conjunto de todas as coisas ou, de forma mais "poético-filosófica", "nada contém tudo". Boa viagem!

1.3 Funções.

Todos sabemos que o valor da prestação de uma televisão comprada em 12 parcelas iguais e sem juros depende do seu preço à vista. Por isto, dizemos que o valor da prestação é função

[1]Bertrand Arthur William Russell, ⋆ 18/05/1872, Ravenscroft, País de Gales - † 02/02/1970, Penrhyndeudraeth, País de Gales

do preço à vista. Neste caso, se x é o preço à vista, então o valor da prestação é $x/12$. A função "valor da prestação" a cada "valor à vista" x associa o "valor da prestação", dado por $x/12$. De maneira geral, uma função associa, através de uma regra precisa, cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro conjunto (os dois conjuntos em questão podem ser iguais).

O exemplo anterior é de uma função numérica definida através de uma fórmula, mas nem toda função é deste tipo. Por exemplo, cada pessoa possui um único tipo sanguíneo, logo, podemos considerar a função que a cada elemento do conjunto das pessoas associa o seu tipo sanguíneo que é um elemento do conjunto $\{A, B, AB, O\}$. Mudando a regra a função muda. Assim, a função anterior é diferente da função que a cada pessoa associa o tipo sanguíneo do pai.

DEFINIÇÃO 1.13. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma* **função** *$f : A \to B$ (lê-se função f de A em B) é definida por uma regra de associação, ou relação, entre elementos de A e B que a cada $x \in A$ associa um único elemento $f(x)$ (lê-se f de x) em B, dito* **imagem** *de x por f. O conjunto A é o* **domínio** *de f enquanto que B é o* **contradomínio** *de f.*

Note que não pode haver exceção à regra: todo $x \in A$ possui uma imagem $f(x) \in B$. Por outro lado, pode existir $y \in B$ que não seja imagem de nenhum $x \in A$. Note também que, dado $x \in A$, não pode haver ambiguidade com respeito a $f(x)$. Entretanto, o mesmo elemento $y \in B$ pode ser imagem de mais de um elemento de A, *i.e.*, pode ocorrer $f(x_1) = f(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$.

Exemplo 1.9. *Sejam* $A = \{\text{alunos da UFRJ}\}$, $B = \{\text{números inteiros}\}$. *Como exemplo de função, temos $f : A \to B$ que a cada $x \in A$ associa seu ano de nascimento. Outro exemplo é a função $g : A \to B$ que a cada $x \in A$ associa seu ano de entrada na UFRJ.*

Exemplo 1.10. *Seja* $A = \{\text{pessoas}\}$. *Se a cada $x \in A$ fazemos corresponder $f(x) \in A$ de maneira que $f(x)$ seja irmão de x, então f não é uma função por duas razões. Primeiro por exceção pois nem toda pessoa tem irmão. Segundo por ambiguidade pois existem pessoas que têm mais de um irmão.*

DEFINIÇÃO 1.14. *Sejam $f, g : A \to B$ duas funções. Dizemos que f e g são* **iguais** *se são dadas pela mesma regra de associação, ou seja, se*

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in A.$$

A condição acima só tem sentido (podendo ser falsa) se f e g tiverem o mesmo domínio (no caso A). No entanto, é dispensável que f e g tenham o mesmo contradomínio. Por esta razão, podemos considerar iguais duas funções de contradomínios diferentes. Desta forma, a função

$$h : \{\text{alunos da UFRJ}\} \to \{\text{números inteiros positivos}\},$$

que a cada $x \in \{\text{alunos da UFRJ}\}$ associa seu ano de entrada na UFRJ é igual a função g do Exemplo 1.9. Mais delicado é considerar que funções de domínios diferentes sejam iguais. Entretanto, cometemos este abuso quando, por exemplo, o domínio de uma função contém o domínio da outra. Quando a prudência mandar, devemos lidar com os conceitos de restrição e extensão.

DEFINIÇÃO 1.15. *Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to B$. Dizemos que f é uma* **restrição** *de g ou que g é uma* **extensão** *de f se $A \subset C$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Neste caso escrevemos $f = g|_A$.*

DEFINIÇÃO 1.16. *Dados dois conjuntos A e B, denotamos por $\mathcal{F}(A; B)$ o conjunto de todas as funções $f : A \to B$.*

DEFINIÇÃO 1.17. *Dado $A \subset C$, definimos a* **função característica** *ou* **indicadora** *de A por $I_A : C \to \{0, 1\}$ (também denotada por χ_A) por $I_A(x) = \begin{cases} 0; & \text{se } x \notin A; \\ 1; & \text{se } x \in A. \end{cases}$*

A função indicadora (ou característica) é muito utilizada em teoria da integração e em probabilidade. Podemos escrever que $I : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{F}(C; \{0, 1\})$ ou $I \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(C); \mathcal{F}(C; \{0, 1\}))$, pois I associa a cada subconjunto $A \in \mathcal{P}(C)$ a função I_A.

DEFINIÇÃO 1.18. *Seja $f : A \to B$. Definimos $\widetilde{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ para cada $C \in \mathcal{P}(A)$ (ou, o que é a mesma coisa, para cada $C \subset A$) por*

$$\widetilde{f}(C) = \big\{y \in B \ ; \ \exists x \in C \text{ tal que } f(x) = y\big\} = \big\{f(x) \ ; \ x \in C\big\},$$

a **imagem** *ou* **imagem direta** *de C por f. Abusamos a notação e escrevemos simplesmente $f(C)$ (sem o til). Em particular, o conjunto $f(A)$ é chamado de* **imagem** *de f.*

DEFINIÇÃO 1.19. *Seja $f : A \to B$. Definimos $\widetilde{f^{-1}} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ para cada $C \in \mathcal{P}(B)$ (ou, o que é a mesma coisa, para cada $C \subset B$) por*

$$\widetilde{f^{-1}}(C) = \big\{x \in A \ ; \ f(x) \in C\big\},$$

a **imagem inversa** *ou* **pré-imagem** *de C por f. Abusamos a notação e escrevemos simplesmente $f^{-1}(C)$ (sem o til). Outros abusos são: $f^{-1}(y)$ (em vez de $\widetilde{f^{-1}}(\{y\})$) e $x = f^{-1}(C)$ (em vez de $\widetilde{f^{-1}}(C) = \{x\}$).*

Exemplo 1.11. *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = |x|$. Então $f([-2, 2]) = [0, 2]$, $f([-5, 1)) = [0, 5]$. Além disso, $f^{-1}((1, 2)) = (1, 2) \cup (-2, -1)$, $f^{-1}(3) = \{3, -3\}$, $f^{-1}((-3, -1)) = \varnothing$, $f^{-1}(0) = 0$.*

DEFINIÇÃO 1.20. *Uma função $f : A \to B$ é dita* **sobrejetiva** *se $f(A) = B$, ou seja, se qualquer que seja $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Ao se verificar a sobrejetividade de uma função, deve estar claro qual conjunto está sendo considerado como contradomínio. Modificando-o, uma função que não é sobrejetiva pode passar a ser.

Exemplo 1.12. *Seja* $A = \{a, b\}$. *A função* f, *definida por* $f(x) = x$ *para todo* $x \in A$, *não é sobrejetiva de* A *em* $\{a, b, c\}$ *mas é sobrejetiva de* A *em* $\{a, b\}$. *De modo geral, toda função é sobrejetiva na sua imagem.*

DEFINIÇÃO 1.21. *Uma função* $f : A \to B$ *é dita* **injetiva** *ou* **injeção** *se para quaisquer* $x, y \in A$ *tais que* $x \neq y$ *temos* $f(x) \neq f(y)$, *ou equivalentemente, se* $x, y \in A$ *são tais que* $f(x) = f(y)$, *então* $x = y$; *ou ainda, se para todo* $y \in f(A)$ *existe um único* $x \in A$ *tal que* $f(x) = y$.

DEFINIÇÃO 1.22. *Dizemos que a função* f *tem a propriedade* P *em* A *se* $f|_A$ *tem a propriedade* P.

Por exemplo, dizer que f é injetiva em A significa que $f|_A$ é injetiva. Isto é muito usual, sobretudo em conversas informais entre matemáticos. Entretanto, isto deve ser usado com cuidado para não cairmos em armadilhas (veja exercício 10, p.117).

DEFINIÇÃO 1.23. *Uma função* $f : A \to B$ *é dita* **bijetiva** *ou* **bijeção** *se ela é injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo 1.13. *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ *e* $C = \{1, 4, 9, 16\}$. *Consideremos as funções* $f : A \to B$, $g : A \to C$ *e* $h : A \to A$ *definidas por*

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = 2 \quad \forall x \in A.$$

Temos que f *é injetiva e sobrejetiva e, portanto, bijetiva. Temos ainda que* g *é injetiva mas não é sobrejetiva e* h *não é injetiva e nem sobrejetiva.*

DEFINIÇÃO 1.24. *Sejam* $f : A \to B$ *e* $g : C \to D$ *tais que* $f(A) \subset C$. *Definimos a* **função composta** $g \circ f : A \to D$ *que a cada* $x \in A$ *associa* $g\big(f(x)\big) \in D$.

A definição anterior faz sentido pois dado $x \in A$ temos que $f(x) \in f(A)$ e como $f(A) \subset C$ temos $f(x) \in C$. Neste caso podemos aplicar g e encontrar $g(f(x)) \in D$.

Observamos ainda que a operação de composição de funções é associativa, *i.e.*, se $f : A \to B$, $g : C \to D$ e $h : E \to F$ com $f(A) \subset C$ e $g(C) \subset E$, então temos

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))) \quad \forall x \in A.$$

DEFINIÇÃO 1.25. *Para* $f : A \to A$ *definimos* $f^n : A \to A$ *por* $f^n = f \circ \cdots \circ f$ *(*n *vezes).*

DEFINIÇÃO 1.26. *Sejam* $f : A \to B$ *e* $g : B \to A$ *tais que* $(g \circ f)(x) = x$ *para todo* $x \in A$ *e* $(f \circ g)(y) = y$ *para todo* $y \in B$. *Dizemos que* f *é* **invertível**, *que* g *é a* **inversa** *de* f *e escrevemos* $g = f^{-1}$.

Não devemos confundir f^{-1} da definição acima com $\widetilde{f^{-1}}$ da Definição 1.19. Sempre que aplicamos f^{-1} em conjuntos está subentendido que trata-se da imagem inversa. Quando se aplica f^{-1} num elemento y, pode-se entender como $f^{-1}(y)$, caso a inversa exista, ou $\widetilde{f^{-1}}(\{y\})$, a imagem inversa de um conjunto unitário.

Repare que intercambiando f com g, A com B e x com y as hipóteses da Definição 1.26 não mudam, porém a conclusão dirá que f é a inversa de g. Concluímos que f é a inversa de g se, e somente se, g é a inversa de f.

Se $f : A \to B$ é injetiva, então mesmo quando ela não for sobrejetiva, ainda poderemos considerar sua função inversa f^{-1} ficando subentendido que o domínio de f^{-1} é $f(A)$ (e não B). Desta forma $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$ e $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para todo $y \in f(A)$.

1.4 Famílias

Dissemos anteriormente (Definição 1.5, p.3) que a palavra família pode ser usada para designar conjuntos de conjuntos. De fato, este é o principal uso da palavra família mas não o único. Na verdade, uma família é uma função para a qual usamos uma notação especial.

DEFINIÇÃO 1.27. *Sejam I e C conjuntos não vazios. Uma* **família** *$(A_i)_{i\in I}$ de elementos de C é uma função $A : I \to C$ para a qual denotamos por A_i (em vez de $A(i)$) a imagem de i por A. Dizemos que a família está indexada pelo* **índice** *$i \in I$, que I é o* **conjunto de índices** *e que A_i é o i-ésimo elemento (ou membro) da família. Quando I é o conjunto dos números naturais substituímos a palavra família por* **sequência***.*

Os gramáticos que nos perdoem $\left(\ddot{\smile}\right)$ mas usamos o sufixo "ésimo" em i-ésimo mesmo quando i não é um número cardinal.

Observe que na notação $(A_i)_{i\in I}$ não aparece o contradomínio C da função. Por isto, ao introduzirmos uma família, é obrigatório dizer que tipo de objetos constituem o seu contradomínio. Por exemplo, uma família de pessoas é uma função cujo contradomínio é um conjunto de pessoas. Da mesma forma, uma família de macacos é uma função cujo contradomínio é um conjunto de macacos (agora são os biólogos que hão de nos perdoar).

Como dito anteriormente, o uso mais frequente do termo família é quando o contradomínio é uma coleção de conjuntos. Trata-se, então, de uma família de conjuntos. Neste caso, existem notações especiais para a união e a interseção da coleção. Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de conjuntos, então a união e a interseção da família são definidas, respectivamente, por

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \; ; \; \text{existe } i \in I \text{ tal que } x \in A_i\} \quad \text{e} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \; ; \; x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Exemplo 1.14. *Sejam $A_i = (i, i+1)$ e $B_i = (-i^2 - 1, i^2)$. Então:*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{Q}} A_i = \mathbb{R}, \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{Q}} B_i = (-1, 0), \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{Q}} A_i = \varnothing, \qquad \bigcup_{i\in\mathbb{Q}} B_i = \mathbb{R}, \qquad \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} A_i = \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

Se I é o conjunto dos números inteiros de m até n, então também é usual escrever

$$\bigcup_{i=m}^{n} A_i = A_m \cup \cdots \cup A_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=m}^{n} A_i = A_m \cap \cdots \cap A_n.$$

Se I é o conjunto de todos os inteiros positivos, então as notações usuais são

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots .$$

O símbolo ∞ (**infinito**) que aparece nas notações anteriores não é um número. Ele é apenas um símbolo tipográfico cujo papel é dizer que tanto a união quanto a interseção da família $(A_i)_{i\in I}$ são tomadas para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Este mesmo símbolo aparecerá em várias notações ao longo do texto sendo que em cada uma delas seu papel será diferente. Porém, sempre devemos ter em mente que infinito não é número!

1.5 Exercícios.

1.5.1 Conjuntos e operações

$\rightarrow$ **1.** Calcule:

(a) $\displaystyle\bigcap_{x\in[1,+\infty)} \left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$; (b) $\displaystyle\bigcup_{x\in[1,2]} \left(\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}\right)$; (c) $\displaystyle\bigcap_{x>2} \left(0, \frac{1}{x}\right)$;

(d) $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$; (e) $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$; (f) $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} \left\{\frac{1}{x}\right\}$.

$\Longrightarrow$ **2.** Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que

(a) $A \cup \varnothing = A$; (b) $A \cap \varnothing = \varnothing$; (c) $A \cup X = X$;

$\Longrightarrow$(d) $A \cap X = A$; (e) $\varnothing^{\complement} = X$; (f) $X^{\complement} = \varnothing$;

(g) $A \subset B$ e $B \subset C$ implica que $A \subset C$; $\Longrightarrow$(h) $A \subset B$ implica que $B^{\complement} \subset A^{\complement}$.

$\rightarrow$ **3.** Prove que as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) $A \subset B$; (b) $A \cap B = A$; (c) $A \cup B = B$.

4. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributividade da interseção);

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributividade da união);

(c) $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$ (lei de Morgan[1]); (d) $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ (lei de Morgan).

Estas **leis de distributividade** e **leis de Morgan** podem ser generalizadas. Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de X. Prove que:

(e) $A \cap \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap A)$; (f) $A \cup \big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup A)$;

$\Longrightarrow$(g) $\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}$; (h) $\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\complement}$.

5. A **diferença simétrica** entre dois conjuntos A e B é definida por $A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$. Nos itens abaixo $\oplus$ representa união, intersecção, diferença ou diferença simétrica entre conjuntos ([L] p.23 no.10 e 11).

[1]Augustus De Morgan: $\star$ 27/06/1806, Madura, Índia - † 18/03/1871, Londres, Inglaterra.

(a) prove que $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$ (propriedade distributiva);
(b) Examine a validade da lei de cancelamento "$A \oplus B = A \oplus C$ implica $B = C$".

6. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos e $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Prove que existe uma família $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $B_n \subset B_{n+1}$ e $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ([T] p.11 no.5.1).

7. Determine se:
(a) $W = \{\{x\}; x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$; (b) $Z = \{A \times B;\ A, B \subset \mathbb{R}\} = \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

$\star$ **8.** (extra) Usando o argumento do Paradoxo de Russel, prove que dado um conjunto A, existe um conjunto N tal que $N \notin A$. Conclua que não existe o conjunto de todas as coisas, nem o conjunto de todos os conjuntos.

1.5.2 Funções

$\Longrightarrow$ **9.** Para cada um dos itens abaixo, defina (indicando domínio e contradomínio) e determine se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva uma função que a cada:
$\Longrightarrow$(a) dois números naturais associa seu MDC;
$\Longrightarrow$(b) matriz associa a sua matriz transposta;
(c) matriz associa seu determinante;
$\Longrightarrow$(d) polinômio $p(x)$ de grau 0, 1 ou 2 associa $(p(1), p(2), p(3))$;
(e) subconjunto de $\mathbb{R}$ associa seu complementar;
(f) subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ associa seu menor elemento;
(g) função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa sua derivada;
$\Longrightarrow$(h) função integrável $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ associa o valor de sua integral.

$\to$ **10.** Dado um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n defina uma função que associa a p seu valor nos pontos $1, 2, \ldots, m$. Determine condições em n e m para que esta função seja:
(a) injetiva; (b) sobrejetiva; (c) bijetiva.
Dica: Faça o caso $n = 1$ (retas) e $n = 2$ (parábolas). Monte sistema linear. Para o caso geral utilize **matriz de Vandermonde**.

$\Longrightarrow$ **11.** Sejam $A, B \subset C$ e funções indicadoras (ou características) I_A, I_B. Prove que
(a) $A \subset B$ se, e somente se, $I_A \leq I_B$;
(b) $I_{A\cup B} \leq I_A + I_B$, valendo a igualdade se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$.

12. Determine as funções indicadoras $I_{A\cup B}$, $I_{A\cap B}$ e $I_{A^\complement}$ em termos de I_A e I_B.

13. Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Prove que $f = f^2$ sse $f = I_A$ para algum $A \subset X$ ([Sp] p.48 no.9).

$\Longrightarrow$ **14.** Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 9$. Determine $f(X)$ para:
$\Longrightarrow$(a) $X = (-4, 4)$; (b) $X = [1, 9]$; (c) $X = [-2, -1] \cup [2, 3]$; (d) $X = \{5\}$.

$\Longrightarrow$ **15.** Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Determine $f^{-1}(Y)$ para:
(a) $Y = (-4, 4)$; (b) $Y = [1, 9]$; (c) $Y = [-1, 0]$; (d) $Y = \{5\}$.

16. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Determine $f^{-1}(Y)$ para:
(a) $Y = \{-1\}$; (b) $Y = (0, 1)$; (c) $Y = [1, 9]$; (d) $Y = (-4, 0)$.

$\to$ **17.** Considere $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{N}$. Determine $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{5, 6, 7\})$, $f^{-1}(\{2\})$ para:

(a) $f(n)$ igual ao maior fator primo de n;
(b) $f(n)$ igual a soma dos expoentes na decomposição em primos de n.

$\Longrightarrow$ **18.** Considere $f : A \to B$ qualquer e $b \in B$. O que se pode afirmar sobre $f^{-1}(\{b\})$ (imagem inversa do conjunto unitário $\{b\}$) sabendo que:
(a) f é injetiva? (b) f é sobrejetiva?

19. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$. Determine $f^{-1}(Y)$ para:
(a) $Y = \{1\}$; (b) $Y = \{0\}$; (c) $Y = (-\infty, 0)$; (d) $Y = [0, 1]$.

$\to$ **20.** Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Determine $f^{-1}(Y)$ e $f(X)$ para:
(a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2/9 + y^2/4 = 1\}$ e $Y = [4, 9]$;
(b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \le 1\}$ e $Y = [-4, -1]$;
(c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 4x + 7 + y^2 + 4y = 0\}$ e $Y = [-1, 1]$.

$\to$ **21.** Considere $f : A \to B$ qualquer. Prove que:
(a) se $Y \subset \widetilde{Y} \subset B$ então $f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(\widetilde{Y})$;
(b) se $Y \subset B$ então $f^{-1}(Y^{\complement}) = [f^{-1}(Y)]^{\complement}$;
$\to$(c) se $Y \subset B$ então $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$;
$\to$(d) se $X \subset A$ então $X \subset f^{-1}(f(X))$;
(e) a igualdade ocorre em cada um dos 2 itens anteriores se, e somente se, f for injetiva ou sobrejetiva. Determine a condição exata para cada item;
(f) se $\widetilde{Y}, Y \subset B$ então $f^{-1}(\widetilde{Y} - Y) = f^{-1}(\widetilde{Y}) - f^{-1}(Y)$.
Obs: f^{-1} tem o sentido da Definição 1.19, p.7 (imagem inversa) e f da Definição 1.18, p.7 (imagem direta).

$\to$ **22.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, $X = [-2, 3]$ e $Y = [-5, -1]$. Determine:
(a) $f(X \cup Y)$ e compare com $f(X) \cup f(Y)$: qual conjunto é maior?
(b) $f(X \cap Y)$ e compare com $f(X) \cap f(Y)$: qual conjunto é maior?
(c) faça (a) e (b) utilizando $g(x) = 3x + 1$ ao invés de f;
(d) faça (a) e (b) utilizando f^{-1} (imagem inversa) ao invés de f.

$\Longrightarrow$ **23.** Considere $f : A \to B$. Prove que:
(a) $f(X \cup \widetilde{X}) = f(X) \cup f(\widetilde{X})$ para todo $X, \widetilde{X} \subset A$;
(b) $f(X \cap \widetilde{X}) \subset f(X) \cap f(\widetilde{X})$ para todo $X, \widetilde{X} \subset A$;
$\Longrightarrow$(c) f é injetiva se, e somente se, $f(X \cap \widetilde{X}) = f(X) \cap f(\widetilde{X})$ para todo $X, \widetilde{X} \subset A$;
(d) f é injetiva se, e somente se, $f(X^{\complement}) \subset [f(X)]^{\complement}$ para todo $X \subset A$;
(e) f é sobrejetiva se, e somente se, $[f(X)]^{\complement} \subset f(X^{\complement})$ para todo $X \subset A$. Conclua que a igualdade ocorre se, e somente se, f for bijetiva;
(f) f é injetiva se, e somente se, $f(A - X) = f(A) - f(X)$ para todo $X \subset A$;
Dica: Utilize os itens (c) e (d).
(g) f é injetiva se, e somente se, $f(\widetilde{X} - X) = f(\widetilde{X}) - f(X)$ para todo $\widetilde{X}, X \subset A$.

$\Longrightarrow$ **24.** Sejam $f : A \to B$, $(B_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de B e $C, D \subset B$. Prove que:
$\Longrightarrow$(a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$; $\Longrightarrow$(b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;
(c) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$; (d) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
Obs: f^{-1} tem o sentido da Definição 1.19, p.7 (imagem inversa).

25. Seja $f : A \to B$. Prove que f é injetiva se, e somente se, $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ para toda família $(A_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de A.

$\Longrightarrow$ **26.** Seja f restrição da função g. Prove que:
(a) se g é injetiva então f é injetiva; (b) a recíproca é falsa.

27. Seja $f : A \to B$. Prove que f é invertível se e somente se f é bijetiva.

$\Longrightarrow$ **28.** Prove que existe $f : A \to B$ injetiva se, e somente se, existe $g : B \to A$ sobrejetiva.

29. Prove que dados dois conjuntos A e B existem $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ disjuntos tais que existe bijeção de A com $\widetilde{A}$ e bijeção de B com $\widetilde{B}$.
Dica: Tome $x \notin A \cup B$ e considere o produto cartesiano de $\{x\}$ com A e B.

1.5.3 Funções entre conjuntos de funções

$\Longrightarrow$ **30.** Determine se existe injeção, sobrejeção ou bijeção de $\mathcal{F}(X;Y)$ em $\mathcal{F}(X;W)$ se:
$\Longrightarrow$(a) $Y \subset W$; (b) existe injeção de Y em W;
(c) existe sobrejeção de Y em W; (d) existe bijeção de Y em W.

$\Longrightarrow$ **31.** Determine se existe injeção, sobrejeção ou bijeção de $\mathcal{F}(X;W)$ em $\mathcal{F}(Y;W)$ se:
$\Longrightarrow$(a) $X \subset Y$; (b) existe injeção de X em Y;
(c) existe sobrejeção de X em Y; (d) existe bijeção de X em Y.

$\Longrightarrow$ **32.** Seja X um conjunto não vazio. Determine uma bijeção entre:
$\Longrightarrow$(a) $\mathcal{F}(\{1,2\};X)$ e $X \times X$;
(b) $\mathcal{F}(A;X)$ e $X^N = \prod_{n=1}^{N} X = X \times \cdots \times X$ (N vezes), se A é finito com N elementos;
$\Longrightarrow$(c) $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{F}(X;\{0,1\})$.
Dica para (c): Associe a f o conjunto $f^{-1}(\{1\})$ ou a $A \subset X$ a função característica I_A.

33. Suponha que $B \cap C = \varnothing$. Prove que existe uma bijeção entre $\mathcal{F}(B \cup C;A)$ e $\mathcal{F}(B;A) \times \mathcal{F}(C;A)$ ([T] p.11 no.5.5).

$\to$ **34.** Estabeleça uma bijeção entre $\mathcal{F}(A \times B;C)$ e $\mathcal{F}(A;\mathcal{F}(B;C))$ ([L] p.24 no.21).

35. (argumento diagonal de Cantor)
(a) Prove que nenhuma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})$ é sobrejetiva.
Generalize este resultado: Seja X um conjunto não-vazio qualquer e Y um conjunto com pelo menos 2 elementos. Prove que nenhuma função:
(b) $\varphi : X \to \mathcal{F}(X;Y)$ é sobrejetiva; (c) $\psi : X \to \mathcal{P}(X)$ é sobrejetiva.
Dica: Argumento diagonal de Cantor da Proposição 2.11, p.20. Ver também Dica1 do exercício 8, p.27.

36. Considere $\Psi : \mathcal{F}(\mathbb{Z};Y) \times \mathbb{Z} \to Y$ definida por $\Psi(\omega, z) = \omega(z)$. Prove que Ψ é sobrejetiva.

$\sharp$ **37.** (difícil) Dado $u = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}$ (assumimos que $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$), $n \in \mathbb{N}$, definimos $P_u : \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ por $P_u f = (f(t_1), \ldots, f(t_n)) \in \mathbb{R}^n$. Agora para cada

$B \subset \mathbb{R}^n$ definimos $C(u, B) = P_u^{-1}(B)$, o subconjunto das funções $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tais que $(f(t_1), \dots, f(t_n)) \in B$. Dizemos que $C(u, B)$ é um cilindro.

(a) entenda as definições e porque dizemos que $C(u, B)$ é um cilindro.

(b) Dado u e B como no enunciado, $v = \{s_1, \dots, s_k\} \subset \mathbb{R}$ (assumimos que $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$), $k \in \mathbb{N}$, definimos $w = u \cup v$, $|w| =$ número de elementos de w. Prove que existe $D \subset \mathbb{R}^{|w|}$ tal que $C(u, B) = C(w, D)$.

Dica: Qual restrição deve ser colocada em $f(s_i)$? Estas ideias são utilizadas no Teorema da extensão de Kolmogorov de probabilidade.

Capítulo 2

Números naturais, inteiros e racionais

2.1 Naturais, inteiros e indução.

O conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ é usado para contagens. De tão natural, $\mathbb{N}$ é chamado de conjunto dos **números naturais**, o primeiro conjunto numérico que aparece na história de qualquer civilização ou em qualquer tratado sobre os fundamentos da Matemática.

Admitiremos conhecidos os conjunto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (dos **números inteiros**) bem como suas propriedades algébricas de soma e multiplicação e sua relação de ordem $\leq$. Para um esboço da construção de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ leia as Seções 5.2.1 e 5.2.2 na p.85.

No conjunto $\mathbb{N}$ valem dois princípios fundamentais: o "Princípio da Boa Ordem" e o "Princípio da Indução". Vamos provar mais adiante que são equivalentes.

PRINCÍPIO 2.1. (Da Indução (finita)) *Seja $A \subset \mathbb{N}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$1 \in A; \tag{2.1}$$

$$n \in A \quad \textit{implica que} \quad n + 1 \in A. \tag{2.2}$$

Então $A = \mathbb{N}$.

PRINCÍPIO 2.2. (Da Boa Ordem) *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui* **elemento mínimo***, ou seja, se $B \subset \mathbb{N}$ com $B \neq \varnothing$, então existe $n \in B$ tal que $n \leq m$ para todo $m \in B$.*

O Princípio da Indução (e suas variantes) é usado para demonstrar que certas propriedades são verdadeiras para todo número natural. A estratégia é a seguinte. Definimos o conjunto A constituído pelos números naturais que possuem uma certa propriedade P. A seguir, mostra-se que A satisfaz (2.1) e (2.2). Daí, concluímos que $A = \mathbb{N}$ e, portanto, que P é verificada por todo número natural. Este tipo de argumento é chamado de **demonstração por indução**. É conhecido por indução finita pois existe a indução transfinita (veja exercício 32, p.29).

Exemplo 2.1. *Vamos demonstrar, por indução, a conhecida fórmula* $1+\cdots+n = n(n+1)/2$ *válida para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Seja* A *o conjunto dos* $n \in \mathbb{N}$ *para os quais a fórmula é valida,* i.e.,

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}.$$

Pelo Princípio da Indução, basta mostrar que A *satisfaz (2.1) e (2.2) para concluir que* $A = \mathbb{N}$, *ou seja, que fórmula acima é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Evidentemente, $1 \in A$ *pois* $1 = 1(1+1)/2$. *Tomemos* $n \in A$ *e mostremos que* $m = n+1 \in A$. *Como* $n \in A$ *temos* $1 + \cdots + n = n(n+1)/2$. *Segue que*

$$1 + \cdots + m = 1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

TEOREMA 2.3. (Boa Ordem = Indução) *Vale o Princípio da Boa Ordem se, e somente se, vale o Princípio da Indução.*

Demonstração. Suponha válido o Princípio da Boa Ordem. Seja $A \subset \mathbb{N}$ satisfazendo (2.1) e (2.2). Suponhamos, por absurdo, que $A \neq \mathbb{N}$. Isto significa que existe algum elemento de $\mathbb{N}$ que não pertence a A e, portanto, o conjunto $B = A^{\complement}$ é não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordem, B possui um elemento mínimo $m \in B$. Com certeza $m > 1$ pois como $1 \in A$, $1 \notin B = A^{\complement}$. Assim, $m-1$ é um natural menor que m. Pela minimalidade de m, temos que $m - 1 \notin B$ e portanto $m-1 \in A$. De (2.2) concluímos que $m = (m-1)+1 \in A$, o que é absurdo.

Suponha válido o Princípio da Indução. Seja $B \subset \mathbb{N}$ não vazio. Suponhamos por absurdo que B não possua elemento mínimo. Em particular, $1 \notin B$ (senão 1 seria elemento mínimo de B). Seja

$$A = \{n \in \mathbb{N} \; ; \; n < m \; \forall m \in B\}.$$

Observamos inicialmente que $A \cap B = \varnothing$. De fato, se $A \cap B \neq \varnothing$, então existe $n \in A \cap B$. Tendo $n \in A$ temos também $n < m$ qualquer que seja $m \in B$, em particular, tomando $m = n \in B$ obtemos $n < n$ o que é absurdo. Concluímos que $A \cap B = \varnothing$.

Mostraremos a seguir que $A = \mathbb{N}$. Vejamos agora que isto é suficiente para concluir a demonstração. Neste caso temos $\varnothing = A \cap B = \mathbb{N} \cap B = B$ contradizendo a hipótese $B \neq \varnothing$.

Mostremos, por indução, que $A = \mathbb{N}$. Já sabemos que $1 \notin B$ e portanto $1 < m$ qualquer que seja $m \in B$, ou seja, $1 \in A$. Tomemos $n \in A$. Por definição de A temos $n < m$ qualquer que seja $m \in B$, logo $n+1 \leq m$ para todo $m \in B$. Se $n+1 \in B$ então $n+1$ é um elemento mínimo de B. Como, por hipótese, B não possui elemento mínimo, segue que $n+1 \notin B$ e portanto $n+1 < m$ para qualquer $m \in B$. Concluímos que $n+1 \in A$. Pelo Princípio da Indução $A = \mathbb{N}$. ■

2.2 Cardinalidade.

Como dissemos na Seção 2.1 o conjunto $\mathbb{N}$ é o conjunto usado para contagens. Quando queremos contar, por exemplo, o número de integrantes do grupo *The Beatles* procedemos da seguinte maneira. A cada músico associamos um elemento do conjunto $\mathbb{N}$ seguindo a sua ordem usual: Paul 1, John 2, George 3 e Ringo 4.

Acabamos de definir uma função injetiva f do conjunto $A = \{Beatles\}$ no conjunto $\mathbb{N}$, de modo que $f(Paul) = 1,\ f(John) = 2,\ f(George) = 3$ e $f(Ringo) = 4$. Bastava tomar o conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$ como contradomínio que f ainda seria injetiva. Porém, isto não seria possível se B fosse $\{1, 2, 3\}$ pois, neste caso, pelo menos um elemento de B estaria associado a mais de um músico (e portanto f não seria injetiva). De fato, 4 é o menor número n tal que o conjunto $\{1, \dots, n\}$ possa ser contradomínio sem que f deixe de ser injetiva. Estas considerações nos levam às seguintes definições:

DEFINIÇÃO 2.4. *Dizemos que um conjunto A é* **enumerável** *se ele é vazio ou se existe uma função injetiva $f : A \to \mathbb{N}$. Caso contrário dizemos que A é* **não-enumerável**.

DEFINIÇÃO 2.5. *Seja A um conjunto não vazio. Se existe $n \in \mathbb{N}$ e uma função injetiva $g : A \to \{1, \dots, n\}$ diremos que A é* **finito**, *caso contrário, A é* **infinito**. *O menor número n que verifica esta propriedade é dito* **número de elementos** *de A. Escrevemos $\#A = n$. Diremos também que o conjunto vazio é finito e que seu número de elementos é 0.*

Observamos que o número de elementos de um conjunto finito A não vazio é bem definido graças ao Princípio da Boa Ordem. De fato, o conjunto dos números $n \in \mathbb{N}$ que verificam a propriedade "existe função injetiva $g : A \to \{1, \dots, n\}$" é um subconjunto não vazio (pois A é finito) de $\mathbb{N}$ e portanto possui um elemento mínimo.

Vejamos outro exemplo de contagem. Um professor vai aplicar uma prova e não tem certeza se a sala destinada a este efeito tem um número suficiente de cadeiras para acomodar os alunos. Ele pode contar as cadeiras e os alunos e comparar os resultados para obter a resposta. Uma alternativa óbvia a este método é pedir aos alunos que se acomodem e três coisas podem acontecer ao final do processo:

i. existem alunos de pé e todas as cadeiras estão ocupadas;
ii. existem cadeiras livres e todos os alunos estão sentados;
iii. todos os alunos estão sentados e todas as cadeiras estão ocupadas.

No primeiro caso temos que o número de alunos é maior que o de cadeiras, no segundo caso ocorre o contrário e, finalmente, no terceiro eles são iguais. Obtemos assim a resposta à pergunta "qual conjunto tem mais elementos?" sem necessariamente conhecer os números de elementos dos conjuntos envolvidos. Estas considerações motivam a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.6. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Dizemos que A e B têm a mesma* **cardinalidade** *ou que a cardinalidade de A* **é igual** *à de B e escrevemos $\#A = \#B$, se existe uma bijeção $f : A \to B$. Caso contrário dizemos que eles não têm a mesma cardinalidade ou que suas cardinalidades são diferentes e escrevemos $\#A \neq \#B$.*

A definição anterior faz sentido mesmo se os conjuntos A e B são infinitos. Nela o símbolo $\#A$ isoladamente não tem nenhum sentido. Apenas as expressões $\#A = \#B$ e $\#A \neq \#B$ têm. Por outro lado, se A é finito então $\#A$ é um número natural e tendo eles a mesma cardinalidade temos que $\#A = \#B$ e esta "igualdade" tem dois sentidos distintos: como igualdade de números naturais e como apresentado na Definição 2.6. Porém a "igualdade" ocorre num sentido se, e somente se, ocorre no outro. Por esta razão, podemos pensar no conceito de cardinalidade como generalização do conceito de número de elementos.

DEFINIÇÃO 2.7. *Sejam A e B conjuntos não vazios. Se existe função injetiva $f : A \to B$, então dizemos que a* **cardinalidade** *de A é* **menor ou igual** *à de B e escrevemos $\#A \leq \#B$. Se existe uma função sobrejetiva $g : A \to B$, então dizemos que a* **cardinalidade** *de A é* **maior ou igual** *a de B e escrevemos $\#A \geq \#B$. Se $\#A \leq \#B$ e $\#A \neq \#B$, então escrevemos $\#A < \#B$ (lê-se a cardinalidade de A é* **menor** *que a de B). Analogamente, se $\#A \geq \#B$ e $\#A \neq \#B$, então escrevemos $\#A > \#B$ (lê-se a cardinalidade de A é* **maior** *que a de B).*

Feita esta definição, temos que $A \neq \varnothing$ é enumerável se, e somente se, $\#A \leq \#\mathbb{N}$.

Exemplo 2.2. *Seja A um conjunto não vazio. É evidente que $\#A = \#A$ pois a função* **identidade** *$Id : A \to A$ dada por $Id(x) = x$ para todo $x \in A$ é uma bijeção.*

Exemplo 2.3. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios com $A \subset B$. Obviamente $\#A \leq \#B$ pois a função $Id : A \to B$ dada por $Id(x) = x$ para todo $x \in A$ é injetiva.*

PROPOSIÇÃO 2.8. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Então $\#A \leq \#B$ se, e somente se, $\#B \geq \#A$.*

Demonstração. Consequência do exercício 28, p.13: "Prove que existe $f : A \to B$ injetiva se, e somente se, existe $g : B \to A$ sobrejetiva." ∎

Outra propriedade que se espera do símbolo $\leq$ é dada pelo teorema seguinte.

⋆ **TEOREMA 2.9. (De Cantor[1]-Bernstein[2]-Schröder[3])**
Se $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, então $\#A = \#B$.

Antes de apresentar a demonstração, vamos comentar a ideia da prova.

O objetivo é construir uma bijeção h de A em B. Estão à nossa disposição dois ingredientes: uma função f de A em B e uma função g de B em A, ambas injetivas. Existem, portanto, dois "caminhos" naturais que vão de A até B: f e g^{-1}. Considerando isto na definição de h, o problema resume-se a decidir quais pontos de A seguirão o primeiro caminho e quais seguirão o segundo. Ou seja, dividimos A em duas partes complementares, X_0 e $X_0^{\complement}$, e fazemos $h = f$ em X_0 e $h = g^{-1}$ em $X_0^{\complement}$.

A função h será bijetiva se, e somente se, as imagens de X_0 e $X_0^{\complement}$ forem complementares (em B). Ou seja, devemos escolher X_0 de modo que $f\left(X_0\right)^{\complement} = g^{-1}\left(X_0^{\complement}\right)$ ou, de modo

[1]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor: ⋆ 03/03/1845, São Petersburgo, Rússia - † 06/01/1918 Halle, Alemanha.

[2]Felix Bernstein: ⋆ 24/02/1878, Halle, Alemanha - † 03/12/1956, Zurique, Suíça.

[3]Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder: ⋆ 25/11/1841, Mannheim, Alemanha - † 16/07/1902, Karlsruhe, Alemanha.

equivalente, $g\left(f(X_0)^\complement\right) = X_0^\complement$. A última equação é reescrita como $F(X_0) = X_0$, sendo F definida por: $F(X) = g\big(f(X)^\complement\big)^\complement$.

Por verificar $F(X_0) = X_0$, X_0 é dito **ponto fixo** de F. Argumentos de ponto fixo são bastante usuais em Análise. A ideia, intuitiva, é a seguinte. Considere uma função $F : Y \to Y$ para a qual queremos encontrar um ponto fixo. Tomamos $y \in Y$ e iteramos F "infinitas" vezes obtendo o resultado y_0. Aplicando F a y_0, teremos como resultado F iterada "infinitas" vezes, a partir de y, ou seja, encontraremos novamente y_0. Portanto, $F(y_0) = y_0$. A descrição dada aqui foge aos padrões de rigor da Matemática. A ideia de iterar "infinitas" vezes é formalizada tomando a sequência $F(y),\ F(F(y)),\ F(F(F(y))),\ \dots$ e verificando se ela tende a algum elemento que, naturalmente, esperamos ser ponto fixo de F.

Demonstração. Por hipótese, existem $f : A \to B$ e $g : B \to A$ injetivas. Considere $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ dada por

$$F(X) = g\big(f(X)^\complement\big)^\complement \quad \forall X \subset A.$$

Seja $X_0 = \bigcap\limits_{i=0}^{+\infty} F^i(A)$ (convencionando que $F^0(A) = A$). Como f é injetiva, temos

$$f(X_0) = f\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} F^i(A)\right) = \bigcap_{i=0}^{+\infty} f\big(F^i(A)\big).$$

Portanto,

$$F(X_0) = g\left(\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} f\big(F^i(A)\big)\right)^\complement\right)^\complement = g\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} f\big(F^i(A)\big)^\complement\right)^\complement = \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} g\left(f\big(F^i(A)\big)^\complement\right)\right)^\complement$$
$$= \bigcap_{i=0}^{+\infty} g\left(f\big(F^i(A)\big)^\complement\right)^\complement = \bigcap_{i=0}^{+\infty} F\big(F^i(A)\big) = \bigcap_{i=1}^{+\infty} F^i(A) = \bigcap_{i=0}^{+\infty} F^i(A) = X_0.$$

Segue que $X_0^\complement = F(X_0)^\complement = g\big(f(X_0)^\complement\big)$. Concluímos que g é uma bijeção de $f(X_0)^\complement$ em $X_0^\complement$, logo, g^{-1} é uma bijeção de $X_0^\complement$ em $f(X_0)^\complement$. Também temos que f é uma bijeção de X_0 em $f(X_0)$. Destas observações segue que $h : A \to B$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X_0, \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X_0^\complement, \end{cases}$$

é bijetiva. ∎

Na demonstração anterior não foi necessário considerar limites pois é natural dizer que uma sequência de conjuntos encaixantes: $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ "converge" para $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Veja o exercício 29, p.74 para definição de limite de sequências de conjuntos.

Observação 2.1 *Outra propriedade que se espera do símbolo $<, =$ e $>$ entre cardinalidades é que, dados A e B dois conjuntos quaisquer vale (um resultado difícil) a* **tricotomia da cardinalidade**: *$\#A = \#B$ ou $\#A > \#B$ ou $\#A < \#B$. Veja exercício 36, p.30.*

Exemplo 2.4. $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$. *Escrevendo* $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ *uma bijeção de* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *nos salta aos olhos. Ela é dada por* $f(1) = 0, f(2) = 1,\ f(3) = -1,\ f(4) = 2,\ f(5) = -2,\ f(6) = 3,\ \ldots$, *mais precisamente,*

$$f(n) = \begin{cases} m & \text{se } n = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \\ -m & \text{se } n = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

PROPOSIÇÃO 2.10. $\mathbb{N}^2$ *é enumerável.*

Demonstração. Pela unicidade da fatoração de naturais como produto de primos, (Teorema Fundamental da Aritmética) temos que a função $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dada por $g(m, n) = 2^m 3^n$ é injetiva. ∎

Exemplo 2.5. $\#\mathbb{N}^2 = \#\mathbb{N}$. *De fato,* $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{N}^2$ *pois a função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ *dada por* $f(n) = (n, n)$ *é claramente injetiva. Por outro lado, pela Proposição 2.10,* $\#\mathbb{N}^2 \leq \#\mathbb{N}$. *Pelo Teorema 2.9 (Cantor-Bernstein-Schöreder),* $\#\mathbb{N}^2 = \#\mathbb{N}$.

Outra demonstração que $\#\mathbb{N}^2 = \#\mathbb{N}$, *bastante popular e de caráter geométrico, é obtida através do esquema mostrado na Figura 2.1. Uma bijeção* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ *é definida seguindo*

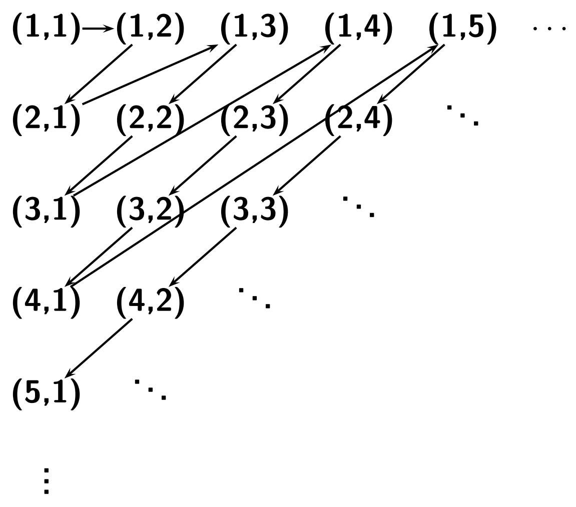


Figura 2.1: Bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}^2$.

as setas da seguinte maneira: $h(1) = (1, 1),\quad h(2) = (1, 2),\quad h(3) = (2, 1),\quad h(4) = (1, 3),\quad h(5) = (2, 2),\quad \ldots$

PROPOSIÇÃO 2.11. (argumento diagonal de Cantor) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *é não-enumerável.*

Demonstração. Pela Proposição 2.8 basta mostrar que, dada uma função $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ qualquer, g não pode ser sobrejetiva.

IDEIA: Considere a lista de conjuntos $g(1), g(2), g(3), \ldots$ Construa conjunto A tal que:

- $1 \in A$ sse $1 \notin g(1)$;

- $2 \in A$ sse $2 \notin g(2)$;
- $3 \in A$ sse $3 \notin g(3)$;
- $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$.

Assim, por construção, $A \neq g(1)$, $A \neq g(2)$, $A \neq g(3)$, ... Portanto $A \neq g(n)$ para todo n e g não é sobrejetiva. Isto é conhecido como argumento diagonal de Cantor.

Com rigor: defina $A = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ n \notin g(n)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Como $n \in A$ se, e somente se, $n \notin g(n)$, concluímos que $g(n) \neq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo g não é sobrejetiva. ■

Observação 2.2 *Fazer o exercício 35, p.13 do argumento diagonal de Cantor generalizado.*

O argumento diagonal de Cantor usado na Proposição 2.11 lembra muito o Paradoxo de Russel. Georg Cantor foi o primeiro matemático a se interessar pelas questões de cardinalidade. A ele devemos este conceito. Ele procurou, sem sucesso, um conjunto A tal que $\#\mathbb{N} < \#A < \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Finalmente ele conjeturou que não existia tal conjunto: a chamada "Hipótese do Contínuo". Demonstrá-la ou encontrar contraexemplo foi o primeiro da lista de 16 problemas não resolvidos no século XIX que, segundo Hilbert[1], seriam os principais a serem estudados no século XX. A questão foi totalmente resolvida em 1963. Numa primeira etapa, em 1940, Gödel[2] [Go] mostrou que ele era consistente com os axiomas de Teoria dos Conjuntos propostos por Zermelo[3] e Fraenkel[4], ou seja, Gödel mostrou que não era possível demonstrar que a Hipótese do Contínuo era falsa. Finalmente, em 1963, Cohen[5] [Co] mostrou que, por outro lado, não era possível mostrar que ela era verdadeira! Desta forma demonstrou-se que a Hipótese do Contínuo é independente dos axiomas da Teoria dos Conjuntos. Um exemplo do uso desta hipótese é o exercício 35, p.30.

PROPOSIÇÃO 2.12. (união de enumeráveis é enumerável) *Se A e B são enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável.*

Demonstração. Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, então a proposição é imediata. Suponhamos que ambos sejam não vazios. Então, existem funções injetivas $f : A \to \mathbb{N}$ e $g : B \to \mathbb{N}$. Definimos $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ da seguinte maneira:

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) & \text{se } x \in A, \\ 2g(x) + 1 & \text{se } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Temos que h é bem definida e é, claramente, injetiva (observe que $h(A) \cap h(B) = \varnothing$ pois os elementos de $h(A)$ são números pares enquanto que os de $h(B \setminus A)$ são ímpares). ■

Esta Proposição é generalizada pela próxima Proposição.

PROPOSIÇÃO 2.13. (união enumerável de enumeráveis é enumerável) *Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n é enumerável, então $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ é enumerável.*

[1]David Hilbert: ⋆ 23/01/1862, Kaliningrad, Rússia - † 14/02/1943, Göttingen, Alemanha.
[2]Kurt Gödel: ⋆ 28/04/1906, Brno, República Tcheca - † 14/01/1978, Princeton, Estados Unidos.
[3]Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo: ⋆ 27/07/1871, Berlim, Alemanha - † 21/05/1953, Freiburg, Alemanha.
[4]Adolf Abraham Halevi Fraenkel: ⋆ 17/02/1891, Munique, Alemanha - † 15/10/1965, Jerusalém, Israel.
[5]Paul Joseph Cohen: ⋆ 02/04/1934, Long Branch, Estados Unidos.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $A_n \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Por hipótese, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que A_n é enumerável, logo, existe $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ sobrejetiva. Vamos mostrar que a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ & (n,m) & \longmapsto & f_n(m) \end{array}$$

é sobrejetiva. De fato, se $x \in A$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$. Como f_n é sobrejetiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(m) = x$. Segue que $f(n,m) = f_n(m) = x$. Na Proposição 2.10 vimos que $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{N}^2$. Portanto, existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ sobrejetiva. Segue que $f \circ g : \mathbb{N} \to A$ é sobrejetiva. ■

2.3 $\star$ O Hotel de Hilbert

David Hilbert foi grande entusiasta das descobertas de Cantor, chegando a afirmar que "ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós". Para ilustrar o conceito de infinitude e enumerabilidade, Hilbert imaginou um hotel de infinitos quartos. Vamos explorar a ideia de Hilbert com uma dose (extra) de ficção.

O Hotel de Hilbert fica ao bordo do Mar Mediterrâneo, em Saint Tropez, na badalada Cote d'Azur. Seu edifício, cinza e branco, construído em 1925 é um belo exemplo do estilo *art-déco* dos anos 20 e 30 do século XX. Grande e confortável, o hotel tem uma infinidade enumerável de quartos suficientes para hospedar clientes dos mais diversos gostos. Desde aqueles em busca de dias tranquilos e ensolarados aos que preferem noites em boîtes agitadas. O gerente, o próprio David Hilbert, é um homem muito gentil, de barba bem tratada que nunca é visto sem seus óculos e chapéu branco.

Como é alta temporada, o hotel está lotado. Porém, o painel localizado em sua entrada informa que há vagas disponíveis! Chega um homem de camiseta florida, carregando uma pequena e elegante valise marrom. Ele pede um quarto a Hilbert que responde:

– Apesar do hotel estar completamente lotado, providenciarei um quarto vazio para o senhor. Aguarde um minuto, por favor.

Aproveitando que os hóspedes são muito solícitos, pelo alto-falante, Hilbert se dirige a eles:

– Perdoem-me por incomodá-los. Gostaria de pedir a cada um de vocês que troque de quarto. Quem está ocupando o quarto n passará ao quarto $n+1$. Grato pela compreensão.

E o cliente, satisfeito, se instala no quarto número 1.

A época é de muita procura. Chega um ônibus de excursão com uma infinidade enumerável de cadeiras. Todas estão ocupadas mas, de acordo com as estritas normas de segurança do lugar, ninguém viaja em pé. O animador do grupo, facilmente reconhecível por sustentar uma pequena flâmula vermelha com a marca da agência, dirige-se a Hilbert solicitando os quartos que havia reservados para seus clientes.

Confirmando a reserva, Hilbert solicita um minuto para providenciar os quartos. Novamente pelo alto-falante, dirige-se aos hóspedes:

– Perdoem-me por incomodá-los outra vez. Peço novamente que troquem de quarto, desta vez, obedecendo a seguinte regra: quem estiver ocupando o quarto n mudará para o quarto $2n$. Mais uma vez, agradeço a compreensão.

Hilbert informa ao animador que ele seu grupo podem acomodar-se. Quem está na cadeira m ocupará o quarto $2m-1$.

Fim do verão e o hotel se esvazia. Outra excursão chega. O animador, com bandeira amarela, é menos experiente que seu colega e não reservou os quartos antecipadamente pois acreditava em baixa ocupação no outono. O ônibus está cheio mas, novamente, não há pessoas em pé. Além disto, para cada número real há uma cadeira no ônibus com aquele número! Surpreendentemente, Hilbert informa que, apesar do hotel estar completamente vazio, não há vagas suficientes para acomodar a todos. E, amavelmente, sugere o **Hotel Real** que é maior que o seu.

No próximo capítulo veremos porque Hilbert não podia receber o último grupo.

2.4 Racionais: operações, enumerabilidade e ordem.

Lembramos que um **número racional** é aquele que pode ser expresso como razão entre dois inteiros $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, *i.e.*,

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \exists m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \quad \text{tais que} \quad x = \frac{m}{n}.$$

$\mathbb{Q}$ é o conjunto dos **números racionais**. Como $m/1 = m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ temos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Como fizemos com $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ admitiremos neste curso que o leitor já está familiarizado com as propriedades básicas do conjunto $\mathbb{Q}$. Para um esboço da construção de $\mathbb{Q}$ leia a Seção 5.2.3, p.85. Nesta e nas próximas duas seções revisaremos algumas destas propriedades e estudaremos outras menos familiares.

PROPOSIÇÃO 2.14. *$\mathbb{Q}$ é enumerável e $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Como $N \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, temos que $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{Q}$. Vamos mostrar que $\#\mathbb{N} \geq \#\mathbb{Q}$. A definição de número racional diz que a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(m,n) = m/n$ é sobrejetiva. Vimos no Exemplo 2.4 que $\mathbb{Z}$ é enumerável. Segue do exercício 7, p.27 que $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ também é enumerável. Logo existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sobrejetiva. Terminamos a demonstração observando que $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ é sobrejetiva. Para outra prova ver exercício 13, p.28. ■

As operações de adição e multiplicação de números racionais verificam certas propriedades algébricas que definem o conceito de corpo.

DEFINIÇÃO 2.15. *Seja $\mathbb{K}$ um conjunto munido de duas operações binárias chamadas* **adição** *e* **multiplicação** *da seguinte maneira: a cada par $x, y \in \mathbb{K}$ a adição e a multiplicação fazem corresponder, respectivamente, a sua* **soma** $x + y \in \mathbb{K}$ *e o seu* **produto** $x \cdot y \in \mathbb{K}$ *(por simplicidade, às vezes omitimos o "$\cdot$"). Dizemos que o terno $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um* **corpo** *se valem as seguintes propriedades.*

i. $x + y = y + x \quad$ *e* $\quad x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$ *(comutatividade).*

ii. $(x + y) + z = x + (y + z) \quad$ *e* $\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}$ *(associatividade).*

iii. $\exists! x \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + y = y \quad \forall y \in \mathbb{K}$ *(existência do elemento neutro da adição). O elemento neutro x será denotado 0 e chamado de* **zero**.

iv. $\forall x \in \mathbb{K}, \quad \exists! y \in \mathbb{K} \quad$ *tal que* $\quad x + y = 0$ *(existência de oposto). O elemento y que é o* **oposto** *de x será denotado por $-x$.*

v. $\exists! x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *tal que* $\quad x \cdot y = y \quad \forall y \in \mathbb{K}$ *(existência do elemento neutro da multiplicação). O elemento neutro x será denotado 1 e chamado de* **um**.

vi. $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \exists! y \in \mathbb{K} \quad$ *tal que* $\quad x \cdot y = 1$ *(existência de inverso). O elemento y que é o* **inverso** *de x será denotado por x^{-1}.*

vii. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}$ *(distributividade).*

A multiplicação tem prioridade sobre a soma: $x \cdot y + x \cdot z$ significa $(x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Exemplo 2.6. *O terno $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição e multiplicação (de números racionais), é um corpo.*

A Propriedade (iii) nos diz que zero existe e é único. Na verdade a unicidade do zero pode ser demonstrada a partir de sua existência, *i.e.*, poderíamos substituir o símbolo "$\exists!$" por "$\exists$" que não faria diferença. De fato, suponhamos que 0 e $0'$ sejam dois zeros, ou melhor, dois elementos neutros da adição. Mostraremos que $0 = 0'$. Como 0 é elemento neutro da adição, $0 + y = y$ para todo $y \in \mathbb{K}$. Em particular, para $y = 0'$, temos $0 + 0' = 0'$. Da mesma maneira, obtemos que $0' + 0 = 0$. Portanto, $0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$.

Analogamente a existência do oposto de x implica a sua unicidade. De fato, suponhamos que y e z são opostos de x. Isto significa que $x + y = 0$ e $x + z = 0$, logo $x + y = x + z$. Adicionando y aos dois lados da equação obtemos

$$y+x+y = y+x+z \implies (y+x)+y = (y+x)+z \implies 0+y = 0+z \implies y = z.$$

Cabe ao leitor a tarefa de verificar as unicidades de 1 e do inverso.

Da definição de oposto e da comutatividade da soma, temos que x é o oposto de y se, e somente se, y é o oposto de x. Em outros termos, o oposto de $-x$ é x, ou ainda $-(-x) = x$. Observação análoga vale para o inverso.

Para simplificar a escrita, usaremos as seguintes convenções:

$$x - y = x + (-y) \quad \text{e} \quad \frac{x}{y} = x/y = x \cdot y^{-1}.$$

Observação 2.3 *Além dos corpos famosos como $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, existem outros: extensões de $\mathbb{Q}$ (exercício 51, p.33), corpo dos números algébricos (exercício 32, p.52), corpos finitos (exercício 52, p.33), quatérnios (exercício 16, p.88).*

As operações de um corpo podem ser estendidas às funções com contradomínio neste corpo. Este é o objeto da próxima definição.

DEFINIÇÃO 2.16. *Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e $f, g : A \to \mathbb{K}$. As funções* **soma**, **produto**, **diferença** *e* **quociente** *de f e g são definidas e denotadas, respectivamente, por*

i. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ *para todo* $x \in A$;

ii. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *para todo* $x \in A$;

iii. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ *para todo* $x \in A$;

iv. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ *para todo* $x \in A$ *tal que* $g(x) \neq 0$.

Dado $c \in \mathbb{K}$ definimos ainda $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ para todo $x \in A$.

No conjunto dos números racionais está definida uma relação de ordem completa.

DEFINIÇÃO 2.17. *Uma relação $\leq$ num corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é dita* **ordem total** *ou, simplesmente,* **ordem** *se valem as seguintes propriedades.*

i. se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (transitiva).

ii. se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ (antissimétrica).

iii. $\forall x, y \in \mathbb{K}$ temos $x \leq y$ ou $y \leq x$ (completa).

iv. se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{K}$ (adição é monótona).

v. se $x \leq y$, então $x \cdot z \leq y \cdot z$ quando $0 \leq z$ e $y \cdot z \leq x \cdot z$ quando $z \leq 0$ (multiplicação é monótona).

Neste caso, dizemos que $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é um **corpo ordenado**.

DEFINIÇÃO 2.18. *Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e sejam $x, y \in \mathbb{K}$. Se $x \leq y$, então dizemos que x é* **menor ou igual** *a y, ou ainda, que y é* **maior ou igual** *a x e também escrevemos $y \geq x$. Se $x \leq y$ e $x \neq y$, então dizemos que x é* **menor** *que y e escrevemos $x < y$, ou ainda, que y é* **maior** *que x e escrevemos $y > x$.*

DEFINIÇÃO 2.19. *Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $A \subset \mathbb{K}$. Dizemos que A é* **limitado superiormente** *pela* **cota superior** *$s \in \mathbb{K}$ se $a \leq s$ para todo $a \in A$. Caso contrário, A é* **ilimitado superiormente**. *De modo análogo define-se conjunto* **limitado inferiormente**, **cota inferior** *e conjunto* **ilimitado inferiormente**. *Finalmente, A é dito* **limitado** *se ele é limitado superior e inferiormente. Caso contrário, A é* **ilimitado**.

DEFINIÇÃO 2.20. *Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $f : A \to \mathbb{K}$. Dizemos que f é* **limitada superiormente** *se $f(A)$ é limitado superiormente. Analogamente define-se função* **limitada inferiormente**, **função limitada** *e* **função ilimitada**.

DEFINIÇÃO 2.21. *Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado, $A \subset \mathbb{K}$ e $f : A \to \mathbb{K}$.*

i. f é **crescente** *quando $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$.*

ii. f é **decrescente** *quando $x < y$ implica que $f(y) \leq f(x)$.*

iii. f é **monótona** *quando é crescente ou decrescente.*

iv. f é **estritamente crescente** *quando $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$.*

v. f é **estritamente decrescente** *quando $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$.*

vi. f é **estritamente monótona** *quando é estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

2.5 $\star$ Corpos Arquimedianos.

Uma importante propriedade do corpo ordenado $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é ser arquimediano. Para isto, dado um corpo qualquer $\mathbb{K}$ com 1 elemento neutro da multiplicação, definimos por $\widetilde{\mathbb{N}}$ o conjunto $\{1,\ 1+1,\ 1+1+1, \ldots\}$. É claro que para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

DEFINIÇÃO 2.22. *Dizemos que um corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é* **arquimediano** *se $\widetilde{\mathbb{N}}$ é um subconjunto de $\mathbb{K}$ ilimitado superiormente, ou seja, para todo $x \in \mathbb{K}$ existe $m \in \widetilde{\mathbb{N}}$ tal que $x < m$.*

De fato, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é arquimediano pois se $x \in \mathbb{Q}$, com $x > 0$, então, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $x = m/n$. Como $x > 0$, temos $m \in \mathbb{N}$. Concluímos observando que $x = m/n \leq m < m + 1 \in \mathbb{N}$. Um exemplo de corpo não-arquimediano é o corpo $\mathbb{Z}_p$ com p primo (veja exercício 52, p.33).

2.6 Exercícios.

2.6.1 Naturais, inteiros e indução

$\Longrightarrow$ **1.** Prove que o conjunto dos números primos é infinito.

Dica1: Suponha, por absurdo, que N é o maior primo. Prove que $N! + 1$ também será primo.

Dica2: Suponha, por absurdo, que exista um número finito de primos. Tome m o MMC destes números. Agora $m + 1$ também será primo. Prova apresentada por Euclides[1] no livro IX, proposição 20. Em particular, isto mostra que nos Elementos de Euclides têm, além de Geometria, Álgebra.

Obs: Seja $\pi(n)$ o número de primos menores que n. Provamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(n) = +\infty$. Um problema difícil (que pertence a teoria analítica dos números) é estimar $\pi(n)$ para n grande. Foi provado em 1896 por Hadamard [2] e Vallée-Poussin [3] o teorema dos números primos: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(n)}{n/\log(n)} = 1$. Isto mostra que $\pi(n) \approx n/\log(n)$ para n grande ([O] p.75).

$\Longrightarrow$ **2.** Prove por indução que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \left(0, \frac{1}{i}\right)$ é não-vazio. Podemos utilizar indução para concluir que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{i}\right)$ é não-vazio?

$\Longrightarrow$ **3.** Prove por indução que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$\rightarrow$(a) $n! > 2^n$ (para $n \geq 4$);

(b) $1^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$;

[1] Euclides da Alexandria: $\star$ 325 AC, Grécia – † 265 AC, Alexandria, Egito.

[2] Jacques Salomon Hadamard: $\star$ 08/12/1865, Versailles, França – † 17/10/1963, Paris, França.

[3] Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin: $\star$ 14/08/1866, Louvain, Bélgica – † 02/03/1962, Louvain, Bélgica.

(c) $(a-1)\sum_{i=1}^{n} a^i = a^{n+1} - 1$; $\Longrightarrow$(d) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$;

(e) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ **(binômio de Newton)**.$\Longrightarrow$(f) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \geq \dfrac{1}{2}$;

$\Longrightarrow$(g) $(1+a)^n \geq 1 + na$ **(desigualdade de Bernoulli)**,[1] com $a \geq -1$.

(h) $\sqrt{n} < \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{i}}$ para $n \geq 2$.

(i) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ para $n \geq 1$.

4. Seja $f_0(x) = x/(x+1)$ e f_n definida de forma indutiva por $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$. Prove que $f_n(x) = x/((n+1)x+1)$.

$\star$ **5.** (extra) Os **axiomas de Peano** que definem $\mathbb{N}$ podem ser apresentados da seguinte forma: Seja A um conjunto e $s : A \to A$ uma função injetiva (a função sucessor) com $A - s(A) = \{a\}$ (conjunto unitário) e $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} s^{(n)}(a)$. Então este A será o $\mathbb{N}$. Prove que:

(a) se eliminarmos a condição $A - s(A)$ unitário então A pode ser um conjunto finito;

(b) podemos substituir a condição $A - s(A)$ unitário pela existência de um único $a \in A$ tal que $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} s^{(n)}(a)$;

(c) se a não for único então A será finito;

Defina a operação binária (soma) $+ : A \times A \to A$ por $m, n \in A$: i. $m + a = m$ e ii. $m + s(n) = s(m+n)$.

(d) Prove que a soma está definida para todos elementos de A. Prove que $a + m = m$ para todo $m \in A$. Pode-se provar que a soma é associativa e comutativa.

2.6.2 Cardinalidade

6. Seja $X \subset \mathbb{N}$ infinito. Prove que existe uma única bijeção crescente $f : \mathbb{N} \to X$.

$\Longrightarrow$ **7.** Prove que se A_1 e A_2 são enumeráveis, então $A_1 \times A_2$ é enumerável. Prove, por indução, que se $A_1, \ldots, A_n$ são enumeráveis, então $A_1 \times \cdots \times A_n$ é enumerável.

$\Longrightarrow$ **8.** Prove que $\mathcal{F}(\mathbb{N}; \mathbb{N})$ é não-enumerável.

Dica1: **(argumento diagonal de Cantor da Proposição 2.11, p.20)** Dada $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(\mathbb{N}; \mathbb{N})$, construa uma $f_\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}; \mathbb{N})$ que não esteja na imagem de Φ (por exemplo com $f_\Phi(i) \neq (\Phi(i))(i)$ para todo i.

Dica2: $\{0, 1\} \subset \mathbb{N}$, exercício 31, p.13 e exercício 32(c), p.13.

9. Suponha que $X \neq \varnothing$ e $\#Y > 1$. Prove que $\#X < \#\mathcal{F}(X; Y)$.

Dica: ver Dica1 do exercício anterior.

[1] Jacques Bernoulli: $\star$ 27/12/1654, Basileia, Suíça - † 16/08/1705, Basileia, Suíça.

$\rightarrow$ **10.** Suponha que $X \neq \varnothing$. Prove que $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

Dica: Argumento diagonal de Cantor da Proposição 2.11, p.20 e tricotomia da cardinalidade (exercício 36, p.30). Concluímos que existem infinitas cardinalidades infinitas: $\#X < \#\mathcal{P}(X) < \#\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ etc.

$\rightarrow$ **11.** Seja A um conjunto infinito enumerável. Prove que o conjunto $\{B \in \mathcal{P}(A);\quad \#B < \#\mathbb{N}\}$ é enumerável. Note que $\mathcal{P}(A)$ é não-enumerável!

12. Use a Proposição 2.12 para provar, de maneira diferente do Exemplo 2.4, que $\mathbb{Z}$ é enumerável.

$\Longrightarrow$ **13.** ($\mathbb{Q}$ é enumerável) Defina $A_j = \{m/n;\quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$ com $|m| + n = j\}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Prove que:

(a) $\#A_j = 2j - 1$; (b) $\mathbb{Q} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$; (c) $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Obs: Definindo a norma de $q = m/n$ por $|m| + |n|$ (chamado de norma l^1), A_j é um "círculo" de raio j.

$\Longrightarrow$ **14.** Baseado no exercício anterior, escreva um programa de computador que imprima todos os números racionais.

15. Sejam X e Y conjuntos finitos. Prove que:

(a) $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$; (b) $\#(X \times Y) = \#X \cdot \#Y$;
(c) $\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}$; (d) $\#\mathcal{F}(X;Y) = \#Y^{\#X}$;
(e) o conjunto das bijeções de X em X possui $(\#X)!$ elementos.

$\rightarrow$ **16.** Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que a distância $d(x, y) \in \mathbb{Q}$ para todo $x, y \in A$. Prove que A é enumerável (ou finito). O resultado continua válido para $A \subset \mathbb{R}^n$? ([T] p.13 no.5.35)

Dica: fixe 3 pontos não-colineares de A e escolha sistema de coordenadas.

17. Construa uma bijeção de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ tomando dígitos de forma intercalada: (por exemplo $f(13, 24) = 1234$, $f(3, 724) = f(003, 724) = 070234$, e de forma geral, $f(a_k \cdots a_0,\ b_k \cdots b_0) = a_k b_k \cdots a_1 b_1 a_0 b_0)$. Corrija esta construção ou certifique-se de que está correta. A primeira questão é se a função está bem definida.

$\Longrightarrow$ **18.** Prove que se X é finito e Y é enumerável então $\mathcal{F}(X;Y)$ é enumerável ([L] p.45 no.20). Generalizado no exercício 33, p.30

19. Considere $X \subset \mathcal{F}(\mathbb{N};\mathbb{N})$ o conjunto das funções que valem 1 em todos os pontos menos num conjunto finito. Portanto se $f \in X$ então $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{N}$ a menos de um conjunto finito (ou ainda, gastando notação de teoria de conjuntos, $f^{-1}(\{1\}^{\complement})$ é finito). Prove que X é enumerável (adaptado de [L] p.45 no.20).

$\sharp$ **20.** (difícil) Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(n)$ seja infinito ([L] p.44 no.15).

Dica: Decomponha em fatores primos.

$\Longrightarrow$ **21.** Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção dele com uma parte própria $Y \subset X$, $Y \neq X$.

Obs: Esta foi a definição dada por Dedekind para conjunto infinito.

22. Considere o conjunto das sequências de inteiros não-negativos $\{(n_i);\ n_i \in \mathbb{Z}, n_i \geq 0\}$. Determine se é enumerável o subconjunto das sequências:

(a) que são zero a partir de um certo termo ([T] p.13 no.5.29);

(b) que são decrescentes ($n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \cdots \geq 0$);

(c) que são estritamente crescentes ($n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$) ([L] p.45 no.26).

23. Construa uma bijeção entre $(-1, 1)$ e $\mathbb{R}$. Note que existe uma bijeção (simples) entre $S^1 - \{N\}$ (circunferência sem um ponto) e $(-1, 1)$.

$\rightarrow$ **24.** Construa uma bijeção entre $S^2 - \{N\}$ (esfera sem o polo norte) e $\mathbb{R}^2$.

Dica: **projeção estereográfica**.

$\Longrightarrow$ **25.** Considere os intervalos $(0, 1]$ e $(0, 1)$.

(a) prove que <u>existe</u> uma bijeção entre eles utilizando o Teorema 2.9 (Cantor-Bernstein-Schröder);

(b) construa uma bijeção entre eles (note que a existência é mais fácil do que a construção).

Dica1: Defina $f : (0, 1] \to (0, 1)$ por: $f(1) = 1/2$, $f(1/2) = 1/3$, $f(1/3) = 1/4$, etc. Nos outros pontos, f é a identidade.

Dica2: Aplique a demonstração do teorema de Cantor-Bernstein-Schröder (caminho difícil).

26. Construa uma bijeção entre $(0, 1)$ e $(0, 1) \cup \{1, 2, \ldots, k\}$.

Dica: exercício anterior.

$\Longrightarrow$ **27.** Construa uma bijeção entre $(0, 1)$ e $(0, 1) \cup \mathbb{N}$.

Dica: exercício anterior.

$\rightarrow$ **28.** Prove que o conjunto dos círculos no plano com raio racional e com centro com coordenadas racionais é enumerável ([T] p.13 no.5.26).

$\rightarrow$ **29.** Considere os seguintes subconjuntos do plano ($\mathbb{R}^2$):

$A = \{(x, y);\ x^2 + y^2 < 1\}$ (disco aberto), $B = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ (disco fechado),

$C = \{(x, y);\ 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ (disco furado), $D = \{(x, y);\ 1/2 < x^2 + y^2 < 1\}$ (anel aberto).

Construa bijeções entre cada um deste conjuntos.

$\Longrightarrow$ **30.** Aqui generalizamos os resultados apresentados na sequência de exercícios anteriores. Considere X um conjunto infinito e $Y \subset X$ finito. Prove que:

(a) $\#X = \#(X - Y)$; (b) $\#X = \#(X \cup \mathbb{N})$.

Dica: Extraia de X um subconjunto com cardinalidade igual a $\mathbb{N}$. Note que usando (a) podemos provar (b).

$\Longrightarrow$ **31.** Prove que um conjunto qualquer $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de intervalos não-degenerados (não pode ter comprimento zero) disjuntos dois a dois é enumerável ([T] p.13 no.5.26).

Dica: Use enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ para montar função injetiva de B em $\mathbb{Q}$.

$\sharp$ **32.** (difícil) Se X e Y são conjuntos infinitos então:

(a) $\#(X \times X) = \#X$; (b) $\#(X \cup Y) = \max(\#X, \#Y)$.

Dica: É surpreendentemente difícil. Precisamos de mais teoria do que aprendemos. Podemos fazer por **indução transfinita**. Remeto os curiosos para [Ha].

Obs: Este exercício generaliza o fato que $\#(\mathbb{N}^k) = \#(\mathbb{N})$. Implica que $\#(\mathbb{C}) = \#(\mathbb{R}^2) = \#(\mathbb{R}^3) = \#(\mathbb{R})$. Veja exercício 28, p.51.

$\sharp$ **33.** (difícil) Prove que se X é infinito e A finito com $\#A = N$ então $\#\mathcal{F}(A; X) = \#X$.

Dica: Use exercício 32(b), p.13 para provar que $\#\mathcal{F}(A; X) = \#(X^N)$ e exercício 32, p.29 (a).

$\sharp$ **34.** (difícil) Suponha que A é infinito. Prove que possuem a mesma cardinalidade:

(a) $\mathcal{F}(A; A)$; (b) $\mathcal{P}(A)$; (c) $\mathcal{F}(A, \mathcal{P}(A))$.

Dica: Use página 13: exercícios 34, 31 e 32(c) e exercício 32 (a).

Obs: Isto mostra que não obtemos cardinalidades mais altas tomando conjunto de funções. De fato, a forma de aumentar a cardinalidade é tomando conjunto das partes.

$\sharp$ **35.** (difícil) Suponha que A ou B é infinito (caso contrário é exercício de combinatória calcular cardinalidade). Prove que:

(a) se $\#B = 1$ então $\#\mathcal{F}(A; B) = \#A$;

(b) Se $\#B > 1$ então $\#\mathcal{F}(A; B) = \max(\#\mathcal{P}(A), \#B)$.

Dica: Item (a) é fácil. Para o item (b) existem dois casos. Se $\#\mathcal{P}(A) \geq \#B$ use dicas do exercício anterior. Se $\#\mathcal{P}(A) < \#B$ temos dois casos. Se A for finito use exercício no. 33. Se A for infinito (B também será infinito) use hipótese do contínuo generalizado: $\#B = \#\mathcal{P}^{(k)}(A)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Defina $C = \mathcal{P}^{(k-1)}(A)$. Conclua que $\#\mathcal{F}(A; B) = \#\mathcal{F}(A; \mathcal{P}(C))$. Usando exercício anterior e suas dicas podemos limitar $\#\mathcal{F}(A; \mathcal{P}(C))$ por $\#\mathcal{P}(C) = \#B$. Por outro lado $\#B = \#\mathcal{F}(\{1\}; B) \leq \#\mathcal{F}(A; B)$.

$\sharp$ **36.** (difícil) Dados A e B dois conjuntos, então é verdade que (**tricotomia da cardinalidade**): $\#A = \#B$ ou $\#A > \#B$ ou $\#A < \#B$.

Obs: Precisamos do lema da boa ordenação (teoria dos conjuntos) como em [Ha].

$\star$ **37.** (extra) Considere X_0 e F definidos na demonstração do Teorema 2.9 (Cantor-Bernstein-Schröder) na p. 18. Defina $Z_0 \triangleq \bigcup_{i=0}^{+\infty} F^i(\varnothing)$.

(a) Prove que Z_0 é ponto fixo de F.

(b) Prove que X_0 é o **maior** e Z_0 é o **menor** ponto fixo de F, ou seja:

- $F(X_0) = X_0$,
- $F(Z_0) = Z_0$, e
- se $F(Y_0) = Y_0$ (Y_0 é ponto fixo de F), então $Z_0 \subset Y_0 \subset X_0$.

(c) Prove que $F(X) = (g \circ f)(X) \cup g(B)^\complement$.

(d) Prove que (o menor ponto fixo de F) $Z_0 = \bigcup_{i=0}^{+\infty} (g \circ f)^{(i)}[g(B)^\complement]$. Note que esta fórmula é bem mais fácil de calcular do que a dada originalmente para X_0.

(e) Utilize a fórmula em (d) para explicitar uma bijeção entre $[0, 1]$ e $(0, 1)$.

Dica: (a) siga prova de C-S-B; (b) $\varnothing \subset Y_0 \subset A$. Aplique F^n em todos os termos. (c) use fato que se h é injetiva, $h(X - Y) = h(X) - h(Y)$. (d) Verifique que $F^{(i)}(\varnothing) = \bigcup_{n=0}^{i-1} (g \circ f)^{(n)}[g(B)^\complement]$.

OBS 1: Existe um argumento informal que Z_0 definido pelo item (d) é o menor ponto fixo. Elementos que não estão na imagem de g (isto é, elementos de $g(B)^\complement$) tem que estar em Z_0 pois só poderão ir para B com f (impossível ir com g^{-1}!). Consequentemente, elementos de $g(f(g(B)^\complement))$ só poderão ir para B com f (Porque não poderão ir para B com g^{-1}?). Prosseguindo de forma indutiva chegaremos ao conjunto Z_0.

OBS 2: Existe uma demonstração de C-S-B aparentemente diferente que pode ser vista em Halmos (Naive Set Theory). Ela utiliza a linguagem de descendentes e ancestrais de elementos para particionar A em três partes (disjuntas) de acordo com a origem da "família" do elemento: A_A, A_B, A_∞. Ficará claro numa leitura atenta que: $A_A = Z_0$ (o menor ponto fixo) e $A_A \cup A_\infty = X_0$ (o maior ponto fixo).

Assim como $A_A = Z_0$ (menor ponto fixo) é mais fácil de se calcular que X_0, B_B também é mais fácil, bastando inverter papel de f e g no item (d): $B_B = \bigcup_{i=0}^{+\infty} (f \circ g)^{(i)}[f(A)^\complement]$. Como $g(B_B) = A_B$ e $A_B^\complement = A_A \cup A_\infty = X_0$ (maior ponto fixo) é mais difícil de ser calculado pela fórmula original, podemos calcular mais facilmente por

$$X_0 = \left(g\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (f \circ g)^{(i)}[f(A)^\complement] \right) \right)^\complement .$$

OBS 3: Esta prova utilizando ponto fixo é caso particular do Teorema do ponto fixo para reticulados (em inglês *lattices*) de Tarski-Davis.

OBS 4: Se $A = B$, $f = g = Id$, $A_A = A_B = \varnothing$ e $A_\infty = A$: menor ponto fixo é o $\varnothing$, maior é o A.

2.6.3 Racionais

$\Longrightarrow$ **38.** Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado.

(a) Prove que $0 \leq x \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{K}$ e conclua que $0 < 1$.

(b) Prove que se $0 \leq x$, então $-x \leq 0$ e conclua que $-1 < 0$. (Atenção: desigualdade estrita).

$\Longrightarrow$(c) Diga porque é impossível definir uma relação de ordem no conjunto dos complexos de modo que $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ seja um corpo ordenado.

Sugestão: Em 38(a) considere separadamente os casos $0 \leq x$ e $x \leq 0$ e utilize a monotonia de $\leq$ para a multiplicação. Em 38(b) use a monotonia de $\leq$ para a adição. Em 38(c) use 38(a) e 38(b) e considere $x = i$.

39. Seja $f : A \to B$ uma função crescente e decrescente ao mesmo tempo. Prove que f é **constante**, *i.e.*, $f(x) = f(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in A$.

$\star$ **40.** (extra) Prove que um número possui dízima com $s > 0$ termos na parte não-periódica se, e somente se, o denominador da fração irredutível possui fator 2^s ou 5^s mas não possui fator 2^{s+1} nem 5^{s+1}.

$\star$ **41.** (extra) Seja $m/n \in \mathbb{Q}$ com $m, n \in \mathbb{N}$ uma fração positiva irredutível ($\mathrm{MDC}(m, n) = 1$). Prove que são equivalentes:

(a) m/n possui expansão decimal finita; (b) 10^s é múltiplo de n para algum $s \in \mathbb{N}$;
(c) $n = 2^\alpha 5^\beta$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

$\star$ **42.** (extra) Formule (e resolva) um exercício semelhante ao anterior porém para expansão de α na base 6. E na base k?

$\sharp$ **43.** (difícil) Prove que qualquer racional positivo pode ser escrito como a soma finita de números distintos da forma $1/n$ com $n \in \mathbb{N}$ ([Sp] p.411 no.22). Um corolário é que a série harmônica (veja página 65) diverge.

Dica: se p/q estiver estritamente entre $1/n$ e $1/(n+1)$ então o numerador de $p/q - 1/(n+1)$ é menor que p.

$\sharp$ **44.** (difícil) (teoria da expansão decimal, vide [O] p.319 e [Hd]) Seja $m/n \in \mathbb{Q}$ com $m, n \in \mathbb{N}$ uma fração positiva irredutível, isto é, $\mathrm{MDC}(m,n) = 1$. Sejam $s, p \in \mathbb{N}$ mínimos com $p \geq 1$ tais que $10^{s+p} - 10^s$ é múltiplo de n. Então a expansão decimal de m/n possui uma dízima periódica de período p que começa após s dígitos à direita da casa decimal.

Mais ainda, se $n = 2^\alpha 5^\beta Q$ com $\mathrm{MDC}(Q, 10) = 1$ então $s = \max(\alpha, \beta)$.

Obs: Como consequência, a característica da dízima de m/n depende SOMENTE de n. Podemos calcular a tabela abaixo. Assim, por exemplo, se $n = 3$, toda fração $m/3$ irredutível possuirá dízima periódica começando imediatamente após a casa decimal ($s = 0$) com período 1 ($p = 1$). Se $n = 18$ toda fração $m/18$ irredutível possuirá dízima periódica começando após uma ($s = 1$) casa decimal com período 1 ($p = 1$). Quando a expansão decimal é finita ($1/2$ por exemplo) podemos interpretar como uma dízima com o algarismo 0 se repetindo ($p = 1$).

n	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
s	1	0	2	1	1	0	3	0	0	2	0	1	1	4	0	1	0	2
p	1	1	1	1	1	6	1	1	2	1	6	6	1	1	16	1	18	1

Obs: Esta teoria pode ser facilmente generalizada para outras bases. Basta modificar o 10 que aparece acima pela outra base.

Obs: Podemos determinar s e p do seguinte modo. Calcule $10^i \bmod n$ (resto da divisão por n) para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Como são no máximo n restos distintos (0 até $n-1$), eles se repetirão. Isto é, existem $0 \leq s < j \leq n$ tais que $10^j \bmod n = 10^s \bmod n$. Portanto, tomando $p = j - s$, teremos que $10^{s+p} - 10^s \bmod n = 0$.

$\star$ **45.** (extra) Dado um corpo $\mathbb{K}$ qualquer existe um conjunto $\mathbb{M} \subset \mathbb{K}$ homeomorfo a $\mathbb{Z}$, isto é, existe $f : \mathbb{M} \to \mathbb{Z}$ tal que f preserva as operações de soma e produto.

Dica: Identifique o elemento neutro da soma com o 0, o neutro do produto com 1 e obtenha os outros elementos de $\mathbb{M}$ através da soma (ou subtração) do elemento identidade do produto.

$\star$ **46.** (extra) Prove a unicidade de 1 a partir de sua existência e da comutatividade da multiplicação, ou seja, prove que se a operação $\cdot$ é comutativa em $\mathbb{K}$ e existe $x \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = y$ qualquer que seja $y \in \mathbb{K}$, então ele é único.

$\star$ **47.** (extra) Prove a unicidade do inverso de $x \in \mathbb{K} - \{0\}$ a partir de sua existência e da comutatividade da operação de multiplicação.

$\star$ **48.** (extra) Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e $x, y \in \mathbb{K}$. Prove que

(a) $x \cdot 0 = 0$; (b) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$; (c) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
Dica: (a) use $0 = 0 + 0$; (b) use (a); (c) use (b) duas vezes.

$\star$ **49.** (extra) Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado. Sejam $x, y \in \mathbb{K}$. Prove que
(a) se $x < 0$, então $x^{-1} < 0$; (b) se $0 < x < y$, então $0 < y^{-1} < x^{-1}$.
(c) se $x \geq 0$ e $y \leq 0$, então $x \cdot y \leq 0$; (d) se $x < 0$ e $y < 0$, então $x \cdot y > 0$.

$\star$ **50.** (extra) Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $x, y, z \in \mathbb{K}$. Prove que
(a) se $x < y$, então $x + z < y + z$;
(b) se $x < y$, então $x \cdot z < y \cdot z$ quando $0 < z$ e $y \cdot z < x \cdot z$ quando $z < 0$.

$\star$ **51.** (extra) Para cada $\mathbb{K}$ definido abaixo, determine se é corpo e, neste caso, determine a fórmula do inverso aditivo e do inverso multiplicativo:
(a) $\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{2}; \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$; (b) $\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{n}; \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$, com $n \in \mathbb{N}$;
(c) $\mathbb{K} = \{a + b\sqrt[3]{2}; \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$; (d) $\mathbb{K} = \{a + b\sqrt[4]{3} + c\sqrt[4]{9} + d\sqrt[4]{27}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

$\star$ **52.** (extra) $\mathbb{Z}_n$ é o conjunto formado por $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ cujas operações são feitas módulo n. Por exemplo, em $\mathbb{Z}^3$ temos que $2 \cdot 2 = 1$; $2 + 1 = 0$; $-2 = 1$. Prove que todos elementos de $\mathbb{Z}_n$ possuem inverso multiplicativo se, e somente se, n é primo. Conclua que, neste caso, $\mathbb{Z}_n$ é corpo não-arquimediano. Um contraexemplo é $\mathbb{Z}_4$, pois $2 \cdot 2 = 0$, o que implica (porque?) que 2 não tem inverso multiplicativo em $\mathbb{Z}_4$.

$\star$ **53.** (extra) Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado arquimediano, e $a \in \mathbb{K}$ com $a > 0$. Prove que se $b \in \mathbb{K}$ e $b > 1$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < b^n$.

$\star$ **54.** (extra) Prove que um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é arquimediano (i.e. $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado superiormente) se, e somente se ([L] p.59 e p.72 no.25), dados $a, b \in \mathbb{K}$ com $a > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:
(a) $n \cdot a > b$; (b) $0 < \dfrac{1}{n} < a$; (c) $0 < \dfrac{1}{2^n} < a$.

Capítulo 3

Números reais

3.1 Descoberta dos irracionais.

Uma das figuras mais importantes da Matemática grega foi Pitágoras[1]. Nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, ele viajou pelo Egito e Babilônia antes de se estabelecer em Crotona (atualmente na Itália) e lá fundar a chamada Escola Pitagórica. Mais do que uma escola matemática ela era uma sociedade secreta dotada de várias doutrinas científicas, filosóficas, políticas e morais. Uma delas dizia que o conhecimento era um bem comum à sociedade, e por isso, a atribuição de descobertas não era feita a nenhum membro específico da escola. Por esta razão, é melhor não falar da obra de Pitágoras mas sim da obra dos pitagóricos.

O famoso Teorema de Pitágoras já era conhecido, provavelmente, por outras civilizações mas imagina-se que foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo.

Segundo outra doutrina pitagórica "tudo é número", ou seja, tudo podia ser explicado através dos números (inteiros) e suas razões (números racionais). Acreditava-se também que dados dois segmentos quaisquer eles eram sempre **comensuráveis**, *i.e.*, que existia um terceiro segmento, menor que os dois primeiros, tal que cada um deles era múltiplo inteiro do menor. Em termos modernos, se a e b são os comprimentos dos dois segmentos, então existe um segmento de comprimento c e dois inteiros m e n tais que $a = mc$ e $b = nc$. Daí conclui-se que $a/b = m/n$. Muitas das demonstrações da época eram baseadas neste fato. Vejamos o que, junto com o Teorema de Pitágoras, isto acarreta.

Consideremos um quadrado de lado 1 e seja d o comprimento de sua diagonal. Pelo Teorema de Pitágoras $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Pela comensurabilidade entre a diagonal e o lado, existem inteiros m e n tais que $d/1 = m/n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que m e n não têm divisor comum maior que 1. Assim, $2 = d^2 = m^2/n^2$. Segue que $m^2 = 2n^2$ e, portanto, m^2 é par, o que implica que m também é. Logo, existe um inteiro p tal que $m = 2p$. Temos então $2n^2 = m^2 = 4p^2$ e, portanto, $n^2 = 2p^2$. Daí concluímos que n^2 é par e, logo, n também é. Provamos que tanto m quanto n são pares contradizendo o fato que eles não possuem divisor comum maior que 1. Isto mostra que 1 e d são **incomensuráveis**.

A comensurabilidade entre dois segmentos quaisquer é equivalente ao fato que todo

[1] Pitágoras de Samos: $\star$ $\approx$ 569 A.C., Samos, Grécia - $\dagger$ $\approx$ 475 A.C., ?.

número é racional! A incomensurabilidade entre 1 e d significa que $d = \sqrt{2}$ não é racional. Isto mostrou aos Pitagóricos que, ao contrário do que eles preconizavam, os números (inteiros) e suas razões não eram capazes de explicar tudo. Acredita-se este resultado foi descoberto e revelado por Hippasus de Metapontum[1] que, por este motivo, foi expulso da confraria (pior, segundo a lenda, ele foi jogado ao mar).

Foi Eudoxo[2] quem resolveu a crise surgida com a descoberta dos incomensuráveis introduzindo uma nova definição de proporção de segmentos tal como ela aparece no livro V de "Os Elementos" de Euclides[3].

Como os números racionais são insuficientes para representar todos os segmentos devemos completá-los. Isto é feito introduzindo o corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ dos números reais, que contém o conjunto dos números racionais.

Com certeza o leitor está habituado a trabalhar com números reais. Porém, se este é seu primeiro Curso de Análise, é muito provável que ele nunca tenha visto a construção do conjunto dos números reais. Existem várias maneiras de construir este corpo ordenado. Neste texto, apresentamos:

(a) na Seção 3.2 deste Capítulo, a construção através de cortes de Dedekind[4] [De] (ver também [Hd]) que pode ser vista como uma modernização da ideia de Eudoxo;

(b) na Seção 5.2.4, a construção como classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais;

(c) no exercício 17, p.89, a construção como decimais infinitas, como costuma ser ensinado no ensino fundamental e médio.

3.2 $\star$ Cortes de Dedekind.

Os gregos da época pitagórica conheciam e manipulavam números racionais e apenas eles. Suas demonstrações eram baseadas nas propriedades dos racionais e somente nelas. Por outro lado, eles sabiam que existiam outros "números" (por exemplo $\sqrt{2}$) e, pelo fato de não saberem como eles eram, os gregos eram incapazes de manipulá-los. Este foi o motivo da crise descrita na seção precedente.

Peço ao leitor que se comporte, simultaneamente, com duas posturas diferentes. Deve esquecer tudo o que conhece sobre números reais - até mesmo a existência. Deve admitir, neste momento, que conhece, além de Teoria dos Conjuntos, apenas funções, números racionais e suas propriedades (operatórias, ordem, etc). Por outro lado, o leitor deve manter em mente o conjunto dos números reais pois a experiência adquirida com ele nos guiará para a sua construção. Sabendo onde se deve chegar fica mais fácil percorrer o caminho ate lá.

A mesma tipografia usada para as definições, exemplos, teoremas, etc será usada, e identificada pela palavra **IDEIA**, para explicar a ideia intuitiva sobre os números reais que estará por trás das demonstrações e definições que a seguirão. Porém, elas servem apenas para isto e não podem ser usadas como fato constatado. Começamos por uma destas ideias.

[1]Hippasus de Metapontum: $\star$ $\approx$ 500 A.C., Metapontum, Itália - † ?

[2]Eudoxo de Cnido: $\star$ 408 A.C., Cnido, Turquia - † 355 A.C., Cnido, Turquia.

[3]Euclides de Alexandria: $\star$ $\approx$ 325 A.C., ? - † $\approx$ 265 A.C., Alexandria, Egito.

[4]Julius Wihelm Richard Dedekind: $\star$ 06/10/1831, Braunschweig, Alemanha - † Braunschweig, Alemanha.

IDEIA. *Seja A um intervalo (de números reais) aberto, ilimitado inferiormente e limitado superiormente. Claramente, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $A = (-\infty, a)$. Reciprocamente, dado um número real a o intervalo $(-\infty, a)$ é aberto, ilimitado inferiormente e limitado superiormente. Desta forma, existe uma correspondência biunívoca entre números reais e intervalos abertos, ilimitados inferiormente e limitados superiormente. A nossa construção será baseada nesta correspondência: consideraremos intervalos do tipo $(-\infty, a)$ e no conjunto de tais intervalos definiremos uma relação de ordem assim como operações de soma e multiplicação. Ao final diremos que cada intervalo destes* **é** *um número real.* O nosso trabalho consiste então em definir um intervalo aberto, ilimitado inferiormente e limitado superiormente, *i.e.*, um intervalo do tipo $(-\infty, a)$ sem considerar o número a que, rigorosamente falando, não existe! A definição seguinte cumpre este objetivo.

DEFINIÇÃO 3.1. *Dizemos que $A \subset \mathbb{Q}$ é um* **corte** *se valem as seguintes propriedades.*
i. $A \neq \varnothing$ e $A \neq \mathbb{Q}$.
ii. Se $p \in A$ e $q < p$ então $q \in A$.
iii. Para todo $p \in A$ existe $q \in A$ tal que $p < q$.
Denotamos o conjunto de todos os cortes por Ω.

IDEIA. *As duas primeiras condições da Definição 3.1 implicam que A é um conjunto da forma $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$ ou $(-\infty, a] \cap \mathbb{Q}$. A terceira condição exclui a segunda possibilidade (quando $a \in \mathbb{Q}$) dizendo que A não tem máximo.*

Exemplo 3.1. *Seja $r \in \mathbb{Q}$. O conjunto $Z(r) = \{p \in \mathbb{Q} \;;\; p < r\}$ é um corte. De fato, é fácil ver que $Z(r)$ satisfaz as duas primeiras propriedades da definição de corte. Falta mostrar que ele satisfaz a terceira. Seja $p \in Z(r)$ e tomemos $q = (p + r)/2$. Claramente temos $p < q$ e $q < r$ (logo $q \in Z(r)$). Definimos desta maneira uma função $Z : \mathbb{Q} \to \Omega$ que é claramente injetiva. Veremos, posteriormente, outras de suas importantes propriedades.*

O exemplo anterior é fundamental. Para destacá-lo, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.2. *O cortes da forma $Z(r) = \{p \in \mathbb{Q} \;;\; p < r\}$, com $r \in \mathbb{Q}$, são ditos* **cortes racionais**.

IDEIA. *Sejam a e b dois números reais. Temos que $a \leq b$ se, e somente se, $(-\infty, a) \subset (-\infty, b)$. Isto nos indica que a relação de inclusão entre cortes é a maneira natural de definir uma relação de ordem no conjunto Ω. Já sabemos que a relação de inclusão é transitiva e antissimétrica. Porém, ela não é completa pois existem $A \subset \mathbb{Q}$ e $B \subset \mathbb{Q}$ que não são comparáveis,* i.e., *nem $A \subset B$ nem $B \subset A$. Entretanto se A e B são cortes uma destas inclusões deve ser verdadeira. Este é o assunto do próximo teorema.*

TEOREMA 3.3. *Sejam $A, B \in \Omega$. Temos $A \subset B$ ou $B \subset A$.*

Demonstração. Se $A = B$, então não há nada a ser demonstrado. Suponhamos que $A \neq B$. Então, existe $p \in B$ tal que $p \notin A$ ou existe $q \in A$ tal que $q \notin B$.

No primeiro caso devemos ter $A \subset B$. De fato, qualquer que seja $r \in A$ temos $r < p$ (pois senão, se fosse $p \leq r$, então, como A é corte, teríamos $p \in A$) e, como B é corte, $r \in B$.

De maneira análoga, concluímos que no segundo caso temos $B \subset A$. ■

PROPOSIÇÃO 3.4. *Seja $A, B \in \Omega$. O conjunto*

$$C = \{r \in \mathbb{Q}\ ;\ r = p + q \text{ com } p \in A \text{ e } q \in B\}$$

é corte.

Demonstração. Claramente $C \neq \varnothing$. Sejam $p_0 \in A^{\complement}$ e $q_0 \in B^{\complement}$. Vamos mostrar que $p_0 + q_0 \notin C$ (e portanto que $C^{\complement} \neq \varnothing$). Suponhamos, por absurdo, que $p_0 + q_0 \in C$. Então, existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $p_0 + q_0 = p + q$. Não podemos ter $p_0 \leq p$ (senão teríamos $p_0 \in A$) nem $q_0 \leq q$ (senão teríamos $q_0 \in B$). Logo $p < p_0$ e $q < q_0$. Pela monotonia da adição $p + q < p + q_0 < p_0 + q_0$, que é absurdo.

Sejam $r \in C$ e $s < r$. Existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $r = p + q$. Seja $t = s - p$. Mostremos que $t \in B$. De fato, devemos ter $t < q$ pois senão, se $q \leq t$, então $p + q \leq p + t$, *i.e.*, $r \leq s$. Portanto $t < q$ e, como B é corte, segue que $t \in B$. Concluímos que $s = p + t$ com $p \in A$ e $t \in B$ e, portanto, $s \in C$.

Finalmente, seja $r \in C$ e mostremos que existe $s \in C$ tal que $r < s$. Ora, $r \in C$ significa que $r = p + q$ com $p \in A$ e $q \in B$. Existe $t \in A$ tal que $p < t$, logo, $r = p + q < t + q$. Para concluir, basta tomarmos $s = t + q$. ∎

DEFINIÇÃO 3.5. *Sejam $A, B \in \Omega$. O corte C dado na Proposição 3.4 é denotado $A \oplus B$ é chamado de* **soma** *ou* **adição** *de A e B.*

Observação 3.1 *É fácil ver que se $A, B \in \Omega$ são tais que $Z(0) \subset A \cap B$, então $Z(0) \subset A \oplus B$.*

Fica assim definida uma operação de adição entre cortes. Mostraremos que esta operação satisfaz algumas das propriedades da adição em um corpo.

TEOREMA 3.6. *Sejam $A, B, C \in \Omega$. Temos que:*
i. $A \oplus B = B \oplus A$; *ii.* $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$; *iii.* $A \oplus Z(0) = A$.

Demonstração. (i) Seja $r \in A \oplus B$. Podemos escrever $r = p + q$ com $p \in A$ e $q \in B$. Pela comutatividade da soma de números racionais, temos $r = q + p$ com $q \in B$ e $p \in A$. Concluímos que $r \in B \oplus A$ e, portanto, $A \oplus B \subset B \oplus A$. Da mesma maneira mostra-se a inclusão contrária.

(ii) Esta propriedade é consequência imediata da associatividade da soma de números racionais (assim como (i) é da comutatividade).

(iii) Seja $r \in A \oplus Z(0)$. Escrevemos $r = p + q$ com $p \in A$ e $q \in Z(0)$. Ora $q \in Z(0)$ significa $q < 0$, logo, $p + q < p + 0$, *i.e.*, $r < p$. Como A é corte, segue que $r \in A$. Mostramos assim que $A \oplus Z(0) \subset A$. Reciprocamente, seja $r \in A$. Tomemos $p \in A$ tal que $r < p$. Se $q = r - p$, então $q < 0$ e, portanto, $q \in Z(0)$. Concluímos que $r = p + q \in A \oplus Z(0)$. ∎

IDEIA. *Para cada $a \in \mathbb{R}$ está associado o intervalo $A = (-\infty, a)$ e ao seu oposto $-a$ está associado o intervalo $B = (-\infty, -a)$. Devemos ser capazes de definir B em termos de A sem considerar o número a. Inicialmente observamos que $p \in B$ se, e somente se, $-p \in (a, +\infty)$. Mas $A^{\complement} = [a, +\infty)$, logo, $p \in B$ se, e somente se, $-p \in A^{\complement}$ e $-p \neq a$. Para dizer que $-p \neq a$, evitando usar o número a, basta dizer que $-p$ não é mínimo de $A^{\complement}$.*

PROPOSIÇÃO 3.7. *Seja $A \in \Omega$. O conjunto*

$$B = \{p \in \mathbb{Q} \ ; \ -p \in A^{\complement} \text{ e } \exists q \in A^{\complement} \text{ tal que } q < -p\}$$

é corte.

Demonstração. Sejam $p \in A$ e $q \in A^{\complement}$. É fácil ver que $-(q+1) \in B$ e $-p \in B^{\complement}$. Portanto, $B \neq \varnothing$ e $B^{\complement} \neq \varnothing$.

Sejam $p \in B$ e $q < p$. Temos que $-p < -q$. Como $-p \in A^{\complement}$, segue que $-q \in A^{\complement}$ e que $-q$ não é mínimo de $A^{\complement}$. Concluímos que $q \in B$.

Seja $p \in B$. Por definição de B, existe $q \in A^{\complement}$ tal que $q < -p$. Tomando $r = (p-q)/2$ temos que $p < r$ e também que $q < -r$, logo, $r \in B$. ■

DEFINIÇÃO 3.8. *O corte B da Proposição 3.7 é denotado $\ominus A$ e chamado* **oposto** *de A.*

Observação 3.2 *Seja $A \in \Omega$. É fácil ver que:*
i. $A = Z(0) \iff \ominus A = Z(0)$; *ii.* $A \neq Z(0) \iff \ominus A \neq Z(0)$;
iii. $A \supset Z(0) \iff \ominus A \subset Z(0)$; *iv.* $A \supsetneq Z(0) \iff \ominus A \subsetneq Z(0)$.

O teorema justifica porque chamamos o corte $\ominus A$ de oposto de A.

TEOREMA 3.9. *Seja $A \in \Omega$. Temos que $A \oplus (\ominus A) = Z(0)$.*

Demonstração. Seja $r \in A \oplus (\ominus A)$. Então existem $s \in A$, $p \in \ominus A$ e $q \in A^{\complement}$ tais que $r = s + p$ e $q < -p$. Como $s \in A$ e $q \in A^{\complement}$, temos $s < q$. De $q < -p$ segue que $p < -q$ e, pela monotonia da adição, $s + p < s - q$. Portanto, $r = s + p < s - q < 0$. Concluímos que $r \in Z(0)$.

Finalmente, seja $r \in Z(0)$, *i.e.*, $r < 0$. Sejam ainda $s \in A$ e n o menor natural tal que $s - nr/2 \in A^{\complement}$. Tomemos

$$p = s - \frac{(n-1)r}{2}, \quad t = s - \frac{nr}{2} \quad \text{e} \quad q = s - \frac{(n+1)r}{2}.$$

É fácil ver que $t, q \in A^{\complement}$ e $t < q$, logo, $-q \in \ominus A$. Também temos $p \in A$ e $r = p - q$. Segue que $r \in A \oplus (\ominus A)$. ■

IDEIA. *Queremos definir multiplicação de cortes. A primeira ideia é imitar a definição da soma. Definimos o conjunto C, produto dos cortes A e B, formado pelos produtos $p \cdot q$ sendo $p \in A$ e $q \in B$. Porém, isto não funciona pois o conjunto C não é corte. Para ver isto, considere o exemplo $A = B = Z(2)$. Neste caso, $C = \mathbb{Q}$. De fato, $-1, 1 \in A$ e se $r < 0$, então $r \in B$. Segue que $-r, r \in C$ e, portanto, $C = \mathbb{Q}$.*

Vamos adaptar esta ideia inicialmente para cortes "positivos". Posteriormente, estenderemos a definição para todos os cortes. Como vimos no exercício 49, p.33, o produto de números positivos é positivo. Portanto, tomando apenas os racionais positivos nos cortes A e B obteremos apenas os racionais positivos de C. Para que C seja corte, faltará incluir os racionais negativos.

PROPOSIÇÃO 3.10. *Sejam $A, B \in \Omega$ tais que $Z(0) \subset A$ e $Z(0) \subset B$. O conjunto*

$$C = \{r \in \mathbb{Q}\ ;\ r < 0 \text{ ou } r = p \cdot q \text{ com } p \in A,\ q \in B,\ p \geq 0 \text{ e } q \geq 0\}$$

é corte.

Demonstração. Claramente $-1 \in C$. Sejam $p_0 \in A^{\complement}$ e $q_0 \in B^{\complement}$. Vamos mostrar que $p_0 \cdot q_0 \notin C$ (e, portanto, que $C^{\complement} \neq \varnothing$). Suponhamos, por absurdo, que $p_0 \cdot q_0 \in C$. Então, existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $p_0 \cdot q_0 = p \cdot q$. Não podemos ter $p_0 \leq p$ (senão teríamos $p_0 \in A$) nem $q_0 \leq q$ (senão teríamos $q_0 \in B$). Logo, $p < p_0$ e $q < q_0$. Pela monotonia da multiplicação, $p \cdot q \leq p \cdot q_0 < p_0 \cdot q_0$, que é absurdo.

Sejam $r \in C$ e $s < r$. Se $s < 0$, então é imediato que $s \in C$. Suponhamos $s \geq 0$ e, portanto, $r > 0$. Da definição de C, segue que existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $r = p \cdot q$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Como $r > 0$, segue que $p > 0$. Seja $t = s/p$. Mostremos que $t \in B$. De fato, devemos ter $t < q$ pois senão, se $q \leq t$, então $p \cdot q \leq p \cdot t$, *i.e.*, $r \leq s$. Portanto, $t < q$ e, como B é corte, segue que $t \in B$. Concluímos que $s = p \cdot t$ com $p \in A$ e $t \in B$ e, portanto, $s \in C$.

Finalmente, seja $r \in C$ e mostremos que existe $s \in C$ tal que $r < s$. Se $r < 0$, então basta tomar $s = r/2$. Suponhamos $r \geq 0$. Neste caso, $r \in C$ significa que $r = p \cdot q$ com $p \in A$, $q \in B$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Existem $t \in A$ e $u \in B$ tal que $p < t$ e $q < u$, logo $r = p \cdot q \leq t \cdot q < t \cdot u$. Para concluir, basta tomarmos $s = t \cdot u$. ■

DEFINIÇÃO 3.11. *Sejam $A, B \in \Omega$ tais que $Z(0) \subset A$ e $Z(0) \subset B$. O corte C dado na Proposição 3.10 e denotado $A \odot B$ é chamado de* **produto** *ou* **multiplicação** *de A e B.*

Observação 3.3 *Da Definição 3.11 segue-se imediatamente que se $Z(0) \subset A$ e $Z(0) \subset B$, então $Z(0) \subset A \odot B$.*

IDEIA. *Para estender a definição de produto para cortes não positivos, procedemos como quando aprendemos a multiplicar números negativos pela primeira vez (no Ensino Fundamental). Fazemos o produto dos módulos e ao resultado impomos o sinal de acordo com a regra dos sinais. Vejamos a definição de módulo de um corte e, em seguida, a definição geral do produto.*

DEFINIÇÃO 3.12. *Dado $A \in \Omega$, o* **módulo** *de A, denotado por $|A|$, é definido por*

$$|A| = \begin{cases} A & \text{se } Z(0) \subset A, \\ \ominus A & \text{se } A \subsetneq Z(0). \end{cases}$$

Em vista da Observação 3.2, p.39 temos que $|A| \supset Z(0)$ para todo $A \in \Omega$.

DEFINIÇÃO 3.13. *Sejam $A, B \in \Omega$. Definimos $A \odot B$ por*

$$A \odot B = \begin{cases} |A| \odot |B| & \text{se } Z(0) \subset A \text{ e } Z(0) \subset B, \\ \ominus(|A| \odot |B|) & \text{se } Z(0) \subset A \text{ e } B \subsetneq Z(0), \\ \ominus(|A| \odot |B|) & \text{se } A \subsetneq Z(0) \text{ e } Z(0) \subset B, \\ |A| \odot |B| & \text{se } A \subsetneq Z(0) \text{ e } B \subsetneq Z(0). \end{cases} \tag{3.1}$$

TEOREMA 3.14. *Sejam $A, B, C \in \Omega$. Temos que:*
i. $A \odot B = B \odot A$; *ii. $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$;* *iii. $A \odot Z(1) = A$.*
Onde $Z(1) = \{p \in \mathbb{Q} \ ; \ p < 1\}$ (conforme a Definição 3.2).

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que $Z(0) \subset A \cap B \cap C$.

(i) Seja $r \in A \odot B$. Se $r < 0$, então é imediato que $r \in B \odot A$. Suponhamos $r \geq 0$. Podemos escrever $r = p \cdot q$ com $p \in A$, $q \in B$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Pela comutatividade do produto de números racionais, temos $r = q \cdot p$ com $q \in B$, $p \in A$, $q \geq 0$ e $p \geq 0$. Concluímos que $r \in B \odot A$ e, portanto, $A \odot B \subset B \odot A$. Da mesma maneira mostra-se a inclusão contrária.

(ii) Esta propriedade é consequência imediata da associatividade do produto de números racionais (assim como (i) é da comutatividade).

(iii) Observamos inicialmente que $Z(0) \subset Z(1)$. Seja $r \in A \odot Z(1)$. Novamente, se $r < 0$, então é imediato que $r \in Z(0) \subset A$. Suponhamos $r \geq 0$. Escrevemos $r = p \cdot q$ com $p \in A$, $q \in Z(1)$ e $p \geq 0$. Ora $q \in Z(1)$ significa $q < 1$, logo, $p \cdot q \leq p \cdot 1$, *i.e.*, $r \leq p$. Como A é corte, segue que $r \in A$. Mostramos assim que $A \odot Z(1) \subset A$. Reciprocamente, seja $r \in A$. Se $r < 0$, então $r \in A \odot Z(1)$. Suponhamos $r \geq 0$. Tomemos $p \in A$ tal que $0 \leq r < p$. Se $q = r/p$, então $0 \leq q < 1$ e, portanto, $q \in Z(1)$. Concluímos que $r = p \cdot q \in A \odot Z(1)$.

O caso geral é consequência da parte já demonstrada. Por exemplo, vamos mostrar (i) para $A \subsetneq Z(0) \subset B$. Neste caso, $A \odot B = \ominus(|A| \odot |B|) = \ominus(|B| \odot |A|) = B \odot A$. A primeira igualdade segue da terceira linha de (3.1), a segunda igualdade é a parte já demonstrada do teorema e a terceira igualdade segue da segunda linha de (3.1). Deixo para o leitor a tarefa de terminar a prova do teorema. ■

PROPOSIÇÃO 3.15. *Seja $A \in \Omega$ tal que $Z(0) \subsetneq A$. O conjunto*

$$B = \{p \in \mathbb{Q} \ ; \ p \leq 0 \text{ ou } p^{-1} \in A^{\complement} \text{ e } \exists q \in A^{\complement} \text{ tal que } q < p^{-1}\}$$

é corte.

Demonstração. Claramente temos $-1 \in B$. Seja $p \in A$ tal que $p > 0$. Temos que $p^{-1} \in B^{\complement}$. De fato, se fosse $p^{-1} \in B$, então teríamos $p = (p^{-1})^{-1} \in A^{\complement}$, que é absurdo.

Sejam $p \in B$ e $q < p$. Se $q \leq 0$, então trivialmente temos $q \in B$. Suponhamos $q > 0$ e, portanto, $p > q > 0$. Temos $p^{-1} < q^{-1}$. Como $p^{-1} \in A^{\complement}$, segue que $q^{-1} \in A^{\complement}$ e que q^{-1} não é mínimo de $A^{\complement}$. Concluímos que $q \in B$.

Seja $p \in B$. Vamos mostrar que existe $q \in B$ tal que $p < q$. Claramente existe $q \in B$ com $q > 0$, logo, se $p \leq 0$, então não há nada a ser demonstrado. Suponhamos $p > 0$. Por definição de B, existe $r \in A^\complement$ tal que $r < p^{-1}$. Tomando $s = (r + p^{-1})/2$ temos $r < s < p^{-1}$ e, portanto, $s \in A^\complement$. Tomando $q = s^{-1}$ temos $p < q$ e também $q \in B$ pois $q^{-1} \in A^\complement$ e $r < q^{-1}$. ■

DEFINIÇÃO 3.16. *Seja $A \in \Omega$ tal que $A \neq Z(0)$. Se $Z(0) \subsetneq A$ então o corte B da Proposição 3.15 é denotado $A^{\ominus 1}$ e chamado* **inverso** *de A. Se $A \subsetneq Z(0)$, então definimos $A^{\ominus 1} = \ominus(|A|^{\ominus 1})$.*

O teorema a seguir justifica porque chamamos o corte $A^{\ominus 1}$ de inverso de A.

TEOREMA 3.17. *Seja $A \in \Omega$ tal que $A \neq Z(0)$. Temos $A \odot (A^{\ominus 1}) = Z(1)$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $Z(0) \subsetneq A$.

Seja $r \in A \odot (A^{\ominus 1})$. Se $r \leq 0$, então $r \in Z(1)$. Suponhamos $r > 0$. Então existem $s \in A$, $p \in A^{\ominus 1}$ e $q \in A^\complement$ tais que $r = s \cdot p$, $s > 0$, $p > 0$ e $q < p^{-1}$. Como $s \in A$ e $q \in A^\complement$, temos $s < q$. De $q < p^{-1}$ segue que $p < q^{-1}$ e, pela monotonia da multiplicação, $s \cdot p < s/q$. Portanto, $r = s \cdot p < s/q < 1$. Concluímos que $r \in Z(1)$.

Reciprocamente, seja $r \in Z(1)$. Como antes, se $r < 0$, então é imediato que $r \in A \odot (A^{\ominus 1})$. Por outro lado, se $r = 0$, então, como $0 \in A$ e $0 \in A^{\ominus 1}$, temos $r = 0 \cdot 0 \in A \odot (A^{\ominus 1})$. Suponhamos $r > 0$. Seja $s \in A$ com $s > 0$ e n o menor natural tal que $s \cdot (r^{-1})^n \in A^\complement$ (tal n existe pois $r < 1$ e, portanto, $r^{-1} > 1$). Tomemos

$$p_1 = s \cdot (r^{-1})^{n-1} \quad \text{e} \quad t = s \cdot (r^{-1})^n.$$

Pela escolha de n, temos $p_1 \in A$ e $t \in A^\complement$. Seja $p \in A$ tal que $p_1 < p$ e tomemos $q = t^{-1} \cdot p^{-1} \cdot p_1$. De $p_1 < p$ segue que $t < t \cdot p \cdot p_1^{-1} = q^{-1}$. Obtemos assim que $q \in A^\complement$ e daí que $q \in A^{\ominus 1}$. Temos ainda

$$p \cdot q = p \cdot t^{-1} \cdot p^{-1} \cdot p_1 = s^{-1} \cdot r^n \cdot s \cdot (r^{-1})^{n-1} = r.$$

Concluímos que $r \in A \odot A^{\ominus 1}$.

Consideremos o caso $A \subsetneq Z(0)$. Temos trivialmente que $A^{\ominus 1} \subsetneq Z(0)$. Da definição de produto de cortes e da parte já demonstrada do teorema obtemos

$$A \odot (A^{\ominus 1}) = |A| \odot |A^{\ominus 1}| = |A| \odot \ |\ominus (|A|^{\ominus 1})| = |A| \odot (|A|^{\ominus 1}) = Z(1).$$

■

TEOREMA 3.18. *Sejam $A, B, C \in \Omega$. Temos que $(A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente $Z(0) \subset A \cap B \cap C$.

Seja $r \in (A \oplus B) \odot C$. Vamos mostrar que $r \in (A \odot C) \oplus (B \odot C)$. Em vista das observações 3.1 e 3.3 temos $Z(0) \subset (A \odot C) \oplus (B \odot C)$ e, portanto, basta considerar o caso $r \geq 0$. Podemos supor ainda que $r > 0$ pois, neste caso, se r é elemento do corte $(A \odot C) \oplus (B \odot C)$, então 0 também é. Neste caso, existem $p \in A \oplus B$ e $q \in C$ tais que

$r = p \cdot q$, $p > 0$ e $q > 0$. Ora $p \in A \oplus B$, logo, podemos escrever $p = s + t$ com $s \in A$ e $t \in B$. Vamos mostrar que $s \cdot q \in A \odot C$ (da mesma maneira mostra-se que $t \cdot q \in B \odot C$). Se $s \cdot q < 0$, então, novamente graças às observações 3.1 e 3.3, é imediato que $s \cdot q \in A \odot C$. Por outro lado, se $0 \leq s \cdot q$, então, como $q > 0$, temos que $s \geq 0$ e daí segue que $s \cdot q \in A \odot C$. Tendo $r = s \cdot q + t \cdot q$ com $s \cdot q \in A \odot C$ e $t \cdot q \in B \odot C$, concluímos que $r \in (A \odot C) \oplus (B \odot C)$.

Seja $r \in (A \odot C) \oplus (B \odot C)$ e mostremos que $r \in (A \oplus B) \odot C$. Como antes, basta considerar o caso $r > 0$. Existem $p \in A \odot C$ e $q \in B \odot C$ tais que $r = p + q$. Como $0 < r$, temos $p > 0$ ou $q > 0$. Para fixar as ideias, suponhamos $p > 0$. Neste caso, existem $s \in A$ e $t \in C$ tais que $p = s \cdot t$, $s > 0$ e $t > 0$. Vamos considerar separadamente os casos $q > 0$, $q = 0$ e $q < 0$.

$\boxed{q > 0}$. Existem $u \in B$ e $v \in C$ tais que $q = u \cdot v$, $u > 0$ e $v > 0$. Suponhamos $v \leq t$ (o caso $v > t$ se trata analogamente). Temos $r = s \cdot t + u \cdot v = (s + u \cdot v/t) \cdot t$. Como $v/t \leq 1$ temos que $u \cdot v/t \in B$. Segue que $r \in (A \oplus B) \odot C$.

$\boxed{q = 0}$. Tomemos $q' \in B \odot C$ tal que $q < q'$. Como $r = p + q < p + q'$ e, pelo caso anterior, $p + q' \in (A \oplus B) \odot C$, concluímos que $r \in (A \oplus B) \odot C$.

$\boxed{q < 0}$. Escrevemos $r = (s + q \cdot t^{-1}) \cdot t$. Como $q \cdot t^{-1} < 0$, segue que $q \cdot t^{-1} \in B$. Concluímos que $r \in (A \oplus B) \odot C$ (observe que $s + q \cdot t^{-1} > 0$).

Cada um dos outros casos (para os quais não vale $Z(0) \subset A$, $Z(0) \subset B$ e $Z(0) \subset C$) é tratado de maneira análoga ou é consequência deste que acabamos de demonstrar. ■

Os teoremas 3.6, 3.9, 3.14, 3.17 e 3.18 nos dizem que $(\Omega, \oplus, \odot)$ é um corpo. Além disto, a relação de inclusão $\subset$ é uma relação transitiva, antissimétrica e completa em Ω. Para concluirmos que $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$ é um corpo ordenado falta estabelecer a monotonia das operações. Este é o assunto do próximo teorema.

TEOREMA 3.19. *Sejam $A, B, C \in \Omega$. Temos:*
i. se $A \subset B$, então $A \oplus C \subset B \oplus C$;
ii. se $A \subset B$ e $Z(0) \subset C$, então $A \odot C \subset B \odot C$;
iii. se $A \subset B$ e $C \subset Z(0)$, então $B \odot C \subset A \odot C$.

Demonstração. Seja $r \in A \oplus C$. Então existem $p \in A$ e $q \in C$ tais que $r = p + q$. Ora, $A \subset B$ e, portanto, $p \in B$. Segue que $A \oplus C \subset B \oplus C$.

Do item (i), tomando $C = \ominus A$, obtemos $Z(0) \subset B \oplus (\ominus A)$. Graças à Observação 3.3, p.40 temos $Z(0) \subset (B \oplus (\ominus A)) \odot C = (B \odot C) \oplus (\ominus A) \odot C$. Somando $A \odot C$, novamente do item (i), obtemos (ii).

O último item se demonstra de maneira análoga a (ii). ■

Terminaremos esta seção com uma importante proposição sobre a função Z.

PROPOSIÇÃO 3.20. *A função Z é injetiva. Além disto Z é um* **homomorfismo** *de corpos ordenados,* i.e., *para todo $p, q \in \mathbb{Q}$ temos:*
i. $p \leq q$ se, e somente se, $Z(p) \subset Z(q)$;
ii. $Z(p + q) = Z(p) \oplus Z(q)$;
iii. $Z(p \cdot q) = Z(p) \odot Z(q)$.

Demonstração. A injetividade de Z e a Propriedade (i) são triviais.

Vamos mostrar (ii). Seja $r \in Z(p+q)$, *i.e.*, $r < p+q$. Temos

$$r = \left(p + \frac{r-p-q}{2}\right) + \left(q + \frac{r-p-q}{2}\right).$$

Vemos que $r-(p+q) < 0$ e, portanto, $p+(r-p-q)/2 < p$. Segue que $p+(r-p-q)/2 \in Z(p)$. Analogamente, $q+(r-p-q)/2 \in Z(q)$. Concluímos que $r \in Z(p) \oplus Z(q)$. Tomemos agora $r \in Z(p) \oplus Z(q)$ e sejam $s \in Z(p)$ e $t \in Z(q)$ tais que $r = s+t$. Como $s < p$ e $t < q$, temos $r = s+t < p+q$. Concluímos que $r \in Z(p+q)$.

Note que aplicando o item (ii) a $q = -p$ obtemos $Z(0) = Z(p) \oplus Z(-p)$ e, portanto, $\ominus Z(p) = Z(-p)$.

(iii) Suponhamos inicialmente $p \geq 0$ e $q \geq 0$, de modo que $Z(0) \subset Z(p) \cap Z(q)$. Seja $r \in Z(p \cdot q)$, *i.e.*, $r < p \cdot q$. Se $r < 0$, então temos imediatamente $r \in Z(p) \odot Z(q)$. Suponhamos $r \geq 0$. Teremos então $p > 0$ e $q > 0$. Seja $s = (r + p \cdot q)/2$, de modo que $r < s < p \cdot q$. Temos $r = \left(p \cdot \frac{r}{s}\right) \cdot \left(q \cdot \frac{s}{p \cdot q}\right)$. Vemos que $r/s < 1$ e, portanto, $pr/s < p$. Segue que $pr/s \in Z(p)$. Da mesma maneira $q \cdot s/(p \cdot q) \in Z(q)$. Concluímos que $r \in Z(p) \odot Z(q)$. Seja agora $r \in Z(p) \odot Z(q)$. Se $r < 0$, então trivialmente temos $r \in Z(p \cdot q)$. Suponhamos $r \geq 0$. Existem $s \in Z(p)$ e $t \in Z(q)$ tais que $r = s \cdot t$, $s \geq 0$ e $t \geq 0$. De $0 \leq s < p$ e $0 \leq t < q$, graças à monotonia da multiplicação, obtemos $s \cdot t \leq p \cdot t < p \cdot q$. Concluímos que $r \in Z(p \cdot q)$.

O caso geral (p e q não necessariamente positivos) segue do que acabamos de demonstrar usando a regra dos sinais e o fato que $\ominus Z(p) = Z(-p)$. ■

Uma propriedade fundamental de $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$ e a chamada **completeza**. Antes de enunciá-la precisamente, vamos interpretar a Definição 2.19 de subconjunto limitado superiormente em $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$. Um conjunto $\Gamma \subset \Omega$ é limitado superiormente pela cota superior $S \in \Omega$ se $A \subset S$ para todo $A \in \Gamma$.

A próxima definição, com adaptação óbvia, tem sentido em qualquer corpo ordenado. Porém, nos limitaremos a $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$.

DEFINIÇÃO 3.21. *Seja $\Gamma \subset \Omega$, não vazio. Se existir $S \in \Omega$ que seja a menor cota superior de Γ, isto é,*

i. $A \subset S$ para todo $A \in \Gamma$; *ii. se R é cota superior de Γ, então $S \subset R$;*

então dizemos que S é ***supremo*** *(finito) de Γ, e escrevemos $\sup \Gamma = S$. Quando Γ é ilimitado superiormente (não existe cota superior para Γ), dizemos que o* ***supremo*** *de Γ é mais infinito e escrevemos $\sup \Gamma = +\infty$.*

Exemplo 3.2. *Seja $\Gamma = \{A \in \Omega \ ; \ A \subset Z(0)\}$. É imediato que $Z(0)$ é cota superior de Γ e, portanto, Γ é limitado superiormente. Também é imediato que $Z(0)$ é o supremo de Γ.*

TEOREMA 3.22. *O corpo ordenado $(\Omega, \odot, \oplus, \subset)$ é* **completo**, i.e., *todo subconjunto de Ω não vazio e limitado superiormente tem supremo finito.*

Demonstração. Seja $\Gamma \subset \Omega$ não vazio e limitado superiormente e seja S a união de todos os elementos de Γ, *i.e.*, $S = \bigcup_{A \in \Gamma} A$. É imediato que $A \subset S$ para todo $A \in \Gamma$ e também que

$S \subset M$ quando $M \in \Omega$ que é cota superior de Γ. Logo, basta mostrar que S é corte para concluir que S é o supremo de Γ.

Claramente $S \neq \varnothing$. Seja $M \in \Omega$ uma cota superior de Γ. Temos que $S \subset M$ e, portanto, que $M^\complement \subset S^\complement$. Em particular, temos que $S^\complement \neq \varnothing$.

Seja $p \in S$ e $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < p$. Sendo $p \in S$ temos que existe $A \in \Gamma$ tal que $p \in A$. Ora, A é corte, logo, $r \in A$ e existe $q \in A$ tal que $p < q$. Como $A \subset S$, temos $r \in S$ e $q \in S$. Concluímos a prova de que S é corte. ■

Terminamos nossa tarefa de mostrar que $(\Omega, \oplus, \odot, \subset)$ é um corpo ordenado completo. A partir de agora, vamos mudar as notações e nomenclaturas. Um corte será chamado de **número real**, o conjunto Ω passa a ser denotado $\mathbb{R}$ e será chamado de **conjunto dos números reais**. Os símbolos $\oplus$ e $\odot$ serão substituídos por $+$ e $\cdot$ respectivamente. E, em se tratando de cortes, passamos a escrever $x \leq y$ ao invés de $x \subset y$. Observamos que, rigorosamente falando, um número racional não é número real. De fato, um número racional é um elemento do conjunto $\mathbb{Q}$ enquanto que um número real é um subconjunto de $\mathbb{Q}$. No entanto, através da função Z (Definição 3.2) passamos de um número racional r ao número real $Z(r)$. Sendo Z injetiva (ver Proposição 3.20) temos que o conjunto $Z(\mathbb{Q})$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que é uma espécie de "cópia" ou "clone" de $\mathbb{Q}$. Esta noção é precisada matematicamente pelo fato de Z ser um homomorfismo injetivo (ver Proposição 3.20). Por esta razão, podemos, e faremos, os seguintes abusos de notação e de linguagem: "$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$" ou "todo número racional é número real". E ainda, $Z(0)$ passa a ser notado 0, $Z(1)$ passa a ser notado 1, etc.

3.3 Números reais.

Neste ponto assumimos que construímos o corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ dos números reais. Vamos definir o **supremo** (simbolizado por $\sup$) e **ínfimo** (simbolizado por $\inf$) de subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Para isto primeiro introduzimos os conceitos de **cota superior** e **cota inferior**.

DEFINIÇÃO 3.23. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio. Dizemos que:*
i. r é **cota superior** *de A se $a \leq r$ para todo $a \in A$;*
ii. r é **cota inferior** *de A se $r \leq a$ para todo $a \in A$.*

DEFINIÇÃO 3.24. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio. Se existir $s \in \mathbb{R}$ que seja a menor cota superior de A, isto é,*
i. $a \leq s$ para todo $a \in A$ (s é cota superior);
ii. se r é cota superior de A, então $s \leq r$ (s é a menor cota superior);
então dizemos que s é **supremo** *(finito) de A, e escrevemos $\sup A = s$. Quando A é ilimitado superiormente (não existe cota superior para A) dizemos que o* **supremo** *de A é mais infinito e escrevemos $\sup A = +\infty$.*

DEFINIÇÃO 3.25. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio. Se existir $i \in \mathbb{R}$ que seja a maior cota inferior de A, isto e,*

i. $i \leq a$ para todo $a \in A$ (i é cota inferior);

ii. se r é cota inferior de A, então $r \leq i$ (i é a maior cota inferior);

então dizemos que i é ***ínfimo*** *(finito) de A, e escrevemos $\inf A = i$. Quando A é ilimitado inferiormente (não existe cota inferior para A), dizemos que o* ***ínfimo*** *de A é menos infinito e escrevemos $\inf A = -\infty$.*

Agora introduzimos a propriedade que distingue $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 3.26. *Dizemos que um corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é* ***completo*** *se todo subconjunto de $\mathbb{K}$ não-vazio limitado superiormente tem supremo (finito).*

É parte fundamental nas construções dos números reais apresentadas na página 36 que $\mathbb{R}$ é completo e contém $\mathbb{Q}$.

TEOREMA 3.27. ($\mathbb{R}$ é completo) *Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio. Se A é limitado superiormente, então A tem supremo finito. Se A é limitado inferiormente, então A tem ínfimo finito.*

Demonstração. Para a construção feita na Seção 3.2, observamos que as definições 3.24 e 3.21 são equivalentes, diferindo apenas na notação. Da mesma forma, a primeira afirmação do Teorema 3.27 é uma nova versão do Teorema 3.22.

A segunda afirmação do Teorema 3.27 é consequência da primeira (independente da construção dos reais que foi feita). De fato, verifica-se facilmente que se A é limitado inferiormente, então $B = \{-x \ ; \ x \in A\}$ é limitado superiormente e $\inf A = -\sup B$. ■

Daqui por diante não precisaremos saber da construção do conjunto de números reais. Tudo que precisamos saber é que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ é um **corpo ordenado completo**, isto é:

i. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ satisfaz as propriedades da Definição 2.15, p.24 (é corpo);

ii. a relação $\leq$ em $\mathbb{R}$ satisfaz as condições da Definição 2.17, p.25 (ordenado);

iii. $\mathbb{R}$ é completo conforme Definição 3.26, p.46.

Num certo sentido $\mathbb{R}$ é o **único** corpo ordenado completo (veja exercício 31, p.52 para detalhes). Outros exemplos de corpos são:

- $\mathbb{C}$, que não pode ser ordenado pelo exercício 38(c), p.31;
- o conjunto dos números algébricos, introduzido no exercício 30, p.51, que está contido em $\mathbb{R}$ e contém $\mathbb{Q}$ mas não é completo, e é corpo pelo exercício 32, p.52;
- quatérnios e octônios, generalizações dos complexos, apresentados na Seção 5.2.6;
- outras extensões de $\mathbb{Q}$, apresentadas no exercício 51, p.33;
- corpos finitos ($\mathbb{Z}_p$) apresentados no exercício 52, p.33.

Um número real que não é racional é dito **número irracional**. Além disso, no exercício 30, p.51, definimos **números algébricos** e **transcendentes**.

Exemplo 3.3. *Sejam* $A = \{p \in \mathbb{R} \; ; \; p < 0$ *ou* $p^2 < 2\}$ *e* $B = \{q \in \mathbb{R} \; ; \; q > 0$ *e* $q^2 > 2\}$. *Claramente,* A *e* B *são não vazios.*

Segue facilmente das definições que A *é limitado superiormente e que* B *é limitado inferiormente. Mais precisamente, qualquer elemento de* A *é menor que qualquer elemento de* B.

Pelo Teorema 3.27 existem $r, s \in \mathbb{R}$ *com* $r = \sup A$ *e* $s = \inf B$. *É imediato que* $r, s \geq 0$. *Como* $p \leq q$ *para todo* $p \in A$ *e* $q \in B$, *temos que* $r \leq s$ *e, portanto,* $r^2 \leq s^2$.

Vamos mostrar que B *não possui elemento mínimo. Seja* $q \in B$. *Temos* $q > 0$ *e* $q^2 - 2 > 0$, *de modo que podemos tomar* $h \in \mathbb{R}$ *tal que* $h < q$ *e*

$$0 < h < \frac{q^2 - 2}{2q}.$$

Temos $2qh - h^2 < 2qh < q^2 - 2$ *e, portanto,* $(q - h)^2 > 2$. *Logo,* $q - h$ *é um elemento de* B *estritamente menor que* q. *Em particular,* q *não é elemento mínimo de* B. *De modo análogo, mostra-se que* A *não possui elemento máximo.*

Temos que $s^2 \leq 2$ *pois, senão,* s *seria elemento mínimo de* B. *Analogamente, mostra-se que* $r^2 \geq 2$. *Concluímos que* $r^2 = s^2 = 2$.

Este exemplo mostra que, graças à completeza, existe $r \in \mathbb{R}$ *tal que* $r > 0$ *e* $r^2 = 2$. *Veremos posteriormente, que existe um único número com esta propriedade (chamado* **raiz de 2** *e denotado por* $\sqrt{2}$*). Porém, como não existe nenhum racional com esta propriedade (*$\sqrt{2}$ *é irracional) concluímos que* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *não é completo.*

PROPOSIÇÃO 3.28. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *é arquimediano.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente e seja $s = \sup \mathbb{N}$. Temos que $n \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $n + 1 \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $n \leq s - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $s - 1$ é cota superior para $\mathbb{N}$ que é menor que $s = \sup \mathbb{N}$. Absurdo. ∎

DEFINIÇÃO 3.29. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $a \leq b$. *Um* **intervalo** *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *de qualquer uma das formas abaixo:*

i. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq x \leq b\}$; *ii.* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq x < b\}$;
iii. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a < x < b\}$; *iv.* $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a < x \leq b\}$;
v. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq x\}$; *vi.* $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; a < x\}$;
vii. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x \leq b\}$; *viii.* $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x < b\}$;
ix. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Quando $a = b$, *temos* $[a, a] = \{a\}$ *e* $[a, a) = (a, a) = (a, a] = \varnothing$. *Logo, o conjunto vazio e conjuntos unitários são intervalos. Estes dois tipos de intervalo são ditos* **degenerados** *enquanto que os outros são ditos* **não degenerados**.

O intervalo $\varnothing$ *e os intervalos dos tipos (iii), (vi), (viii) e (ix) são ditos* **abertos**. *O intervalo* $\varnothing$ *e os intervalos dos tipos (i), (v), (vii), (ix) são ditos* **fechados**.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. O símbolo (a, b) é ambíguo pois representa ao mesmo tempo um intervalo e um par ordenado. Isto poderia ser fonte de confusão (por isto alguns autores usam a notação $]a, b[$ para intervalos). Porém, fazendo as coisas como elas devem ser feitas, isto é, sendo preciso nas argumentações, de acordo com o contexto entende-se imediatamente qual das duas possibilidades é a correta. Por exemplo, na afirmação $1 \in (0, 1)$ fica claro que $(0, 1)$ representa um intervalo, mesmo sendo falsa a afirmação. Por outro lado, ao considerarmos $(0, 1)$ como um par ordenado, ambas as afirmações $1 \in (0, 1)$ e $1 \notin (0, 1)$ não têm sentido e, portando, não cabe a questão de saber qual delas é correta.

Observação 3.4 *De acordo com a Definição 3.29, os conjunto $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ são intervalos abertos e fechados ao mesmo tempo. Isto não deve causar nenhuma confusão já que $\mathbb{R}$ e $\varnothing$* **não são portas**. *Acabamos de ver as definições matemáticas de* intervalo aberto *e de* intervalo fechado. *Mesmo se as palavras "aberto" e "fechado" têm outros sentidos na vida comum, são os sentidos da Definição 3.29 que serão usados ao longo de todo o texto. Observe que, por definição, $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ são os únicos intervalos que possuem esta propriedade. Perceba também que existem intervalos que não são abertos nem fechados.*

O próximo teorema é outra consequência da completeza.

TEOREMA 3.30. (dos intervalos encaixantes) *Se $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de intervalos* **encaixantes**, i.e., $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ *para todo $n \in \mathbb{N}$, então* $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Demonstração. Seja $A = \{a_m \ ; \ m \in \mathbb{N}\}$. De $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ obtemos que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Daí, segue facilmente que $a_m \leq b_n$ quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, qualquer b_n é cota superior de A. Pelo Teorema 3.27 existe $s = \sup A$. Mostremos que $s \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n]$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos que s é cota superior de A, logo, $s \geq a_n$. Além disto, s é a menor cota superior de A, portanto, $s \leq b_n$. Concluímos que $a_n \leq s \leq b_n$, ou seja, $s \in [a_n, b_n]$. ∎

Já vimos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Vamos mostrar agora que na verdade "existem mais números irracionais do que racionais". Mais precisamente, na próxima proposição mostraremos que $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$. Como consequência, obtemos $\#\mathbb{Q} < \#(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. De fato, se fosse $\#(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \leq \#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$, então, como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, teríamos $\#\mathbb{R} \leq \#\mathbb{N}$ (veja a Proposição 2.12).

PROPOSIÇÃO 3.31. *O conjunto $\mathbb{R}$ é não-enumerável, ou seja, $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$.*

Demonstração. Devemos mostrar que não existe função sobrejetiva de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ ou, de maneira equivalente, que qualquer função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva.

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e seja $I_1 = [a_1, d_1]$ um intervalo fechado tal que $f(1) \notin I_1$. Dividimos este intervalo em três partes da seguinte maneira: tomamos $b_1, c_1 \in I_1$ tais que $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$ e assim obtemos $I_1 = [a_1, b_1] \cup [b_1, c_1] \cup [c_1, d_1]$. Certamente $f(2)$ não pertence a algum destes três intervalos que denotaremos I_2. Repetimos o processo com o intervalo I_2: o dividimos em três partes e definimos I_3 como sendo uma destas partes tal que $f(3) \notin I_3$. Continuando indefinidamente este processo, construímos uma família $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos fechados e limitados tais que $I_n \supset I_{n+1}$ e $f(n) \notin I_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema

3.30 existe s tal que $s \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue imediatamente que $s \neq f(n)$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e portanto f não é sobrejetiva. ■

Outra prova que $\mathbb{R}$ é não-enumerável é pelo argumento diagonal de Cantor (ver exercício 24, p.51).

3.4 Exercícios.

3.4.1 Irracionais

$\Longrightarrow$ **1.** Prove que $r \in \mathbb{Q}$ se, e somente se a expansão decimal periódica de r é finita ou periódica.

Dica: Se $r = p/q$ então o resto da divisão por q possui no máximo q elementos distintos. Note que isto será verdade em qualquer base.

$\Longrightarrow$ **2.** Prove que $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ (número de Liouville[1]) é irracional.

3. Considere a sequência (a_i) definida indutivamente por: $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + n$. Prove que $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-a_n}$ é irracional.

$\Longrightarrow$ **4.** Prove que são irracionais: (a) $\sqrt{3}$; (b) $\sqrt[3]{2}$; (c) $\sqrt[3]{4}$; (d) $\sqrt{21}$.

$\to$ **5.** Dados $m, n \in \mathbb{N}$ prove que $\sqrt[n]{m}$ ou é um inteiro ou é um irracional.

Dica: Generalize argumento do exercício anterior.

6. Prove que se x satisfaz $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ para inteiros $a_i's$ então x é irracional a não ser que x seja um inteiro ([Sp] p.31 no.17). Note que isto generaliza o exercício anterior.

Dica: veja dica do próximo exercício.

$\to$ **7.** **(Teorema de Gauss[2] segundo [Hd] p.7)** Seja $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes inteiros ([L] p.73, no.42).

(a) Se um racional p/q (p e q primos entre si) é raiz do polinômio, prove que p divide a_0 e q divide a_n.

Dica: Substitua p/q no polinômio e multiplique tudo por q^n;

(b) Determine todas as possíveis raízes racionais de $21x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13x + 10 = 0$;

(c) Prove que se $a_0 = a_n = 1$ as únicas possíveis raízes racionais são 1 e -1;

(d) Se $a_n = 1$ as raízes são inteiras ou irracionais; Corolário: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ prove que $\sqrt[n]{m}$ ou é um inteiro ou é um irracional (outra prova do exercício anterior).

(e) Prove que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional.

8. Sejam a, b racionais positivos. Prove que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se, e somente se, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ forem ambos racionais ([L] p.72 no.30).

Dica: Multiplique pelo conjugado.

---

[1] Joseph Liouville: ⋆ 24/03/1809, Saint-Omer, França – † 08/09/1882, Paris, França.

[2] Johann Carl Friedrich Gauss: ⋆ 30/04/1777, Brunswick, Alemanha – † 23/02/1855, Göttingen, Alemanha.

$\rightarrow$ **9.** Sejam $q \neq 0$ racional e x, y irracionais. Determine se são racionais ou irracionais:
(a) $1/x$; (b) $q + x$; (c) qx; (d) $x + y$; (e) xy.

3.4.2 $\star$ Cortes de Dedekind

$\star$ **10.** (extra) Seja $A = \{p \in \mathbb{Q} \; ; \; p < 0$ ou $p^2 < 2\}$. Prove que
(a) A é corte; (b) $A \odot A \subset Z(2)$; (c) Não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $Z(r) = A$.
Dica: 10(a) Seja $p \in A$ tal que $p \geq 0$. Prove que se $h < 1$ é bem escolhido, então tomando $q = p + h$ teremos $q \in A$ e $p < q$. 10(c) Proceda por absurdo e, usando a Proposição 3.20, conclua que se $Z(r) = A$ com $r \in \mathbb{Q}$ então $r^2 = 2$.

$\star$ **11.** (extra) Prove que:
(a) $\ominus Z(0) = Z(0)$; (b) $A \supset Z(0)$ sse $\ominus A \subset Z(0)$; (c) $|A| = A$ sse $A \in \Omega^+$.

3.4.3 Números reais

$\Longrightarrow$ **12.** Lembremos que o **módulo** de $x \in \mathbb{R}$, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Prove que se $x, y, z, \varepsilon \in \mathbb{R}$, sendo $\varepsilon > 0$, então:
(a) $|x| = \max\{x, -x\}$; (b) $|xy| = |x||y|$; (c) $|x - y| < \varepsilon$ sse $x \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$;
(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$; (e) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$; (f) $\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x - y|$.
Cada uma das três desigualdades acima é conhecida como **Desigualdade Triangular**.

$\Longrightarrow$ **13.** Determine o sup e o inf de ([Sp] p.117 no.1):
(a) $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n; \quad n \in \mathbb{N}\right\}$; (b) $\{1/n; \quad n \in \mathbb{N}\}$; (c) $\{\mathrm{sen}(1/x); \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}\}$;
(d) $\{1/n; \; n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$; (e) $\{x \in \mathbb{R}; \; x^2 + x - 1 < 0\}$; (f) $\left\{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right); \; n \in \mathbb{N}\right\}$;
(g) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \right\}$; (h) $\{\cos(n + 1); \; n \in \mathbb{N}\}$.
Dica (h): é difícil, ver exercício 33, p.75

$\Longrightarrow$ **14.** Suponha que $a = \sup A \notin A$. Prove que $\forall \varepsilon > 0$ o conjunto $(a - \varepsilon, a) \cap A$ é infinito.

$\Longrightarrow$ **15.** Seja $A \subset \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente por $s \in \mathbb{R}$ (s é cota superior de A). Prove que $s = \sup A$ se, e somente se:
(a) se $r < s$ então existe $x \in A$ tal que $r < x \leq s$;
(b) para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $s - \varepsilon < x$.
Obs: Trata-se, portanto, de outra definição para o supremo.

$\rightarrow$ **16.** Seja $a \in \mathbb{R}$.
(a) Defina $\lfloor a \rfloor = \sup\{x \in \mathbb{Z}; \quad x \leq a\}$, chamada de *floor* (chão) em inglês ou função parte inteira (Definição 4.6). Porque?
(b) Defina $\lceil a \rceil = \inf\{x \in \mathbb{Z}; \quad x \geq a\}$, chamada de *ceiling* (teto) em inglês. Porque?
(c) Para quais $a \in \mathbb{R}$, $\lfloor a \rfloor = \lceil a \rceil$?

17. Suponha que $\beta > 0$. Prove que todo número $x \in \mathbb{R}$ pode ser escrito de forma única na forma $x = k\beta + y$ onde $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq y < \beta$ ([Sp] p.119 no.10).

Dica: $k = \lfloor x/\beta \rfloor$.

$\Longrightarrow$ **18.** Sejam $A \subset B \subset \mathbb{R}$ não vazios. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

19. Seja $-A := \{-x; \quad x \in A\}$. Prove que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

$\Longrightarrow$ **20.** Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, investigue a relação entre:

(a) $\sup(A + B)$ e $\sup A + \sup B$; (b) $\lambda \sup A$ e $\sup(\lambda A)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dica: (a) Tente alguns intervalos; (b) vale igualdade dependendo de sinal de λ. Veja exercício 19.

$\Longrightarrow$ **21.** Sejam $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ intervalos encaixantes com $A = \{a_m \,;\; m \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_m \,;\; m \in \mathbb{N}\}$. Prove que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = [\sup A, \inf B]$.

Obs: O intervalo pode degenerar em um único ponto.

$\Longrightarrow$ **22.** Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitadas e tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$. Prove:

(a) $\sup\{f(x) \,; x \in A\} \leq \sup\{g(x) \,; x \in A\}$;

(b) $\inf\{f(x) \,; x \in A\} \leq \inf\{g(x) \,; x \in A\}$;

$\Longrightarrow$(c) $\sup\{-f(x) \;;\; x \in A\} = -\inf\{f(x) \;;\; x \in A\}$;

(d) $\inf\{-f(x) \;;\; x \in A\} = -\sup\{f(x) \;;\; x \in A\}$.

23. Prove que $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo (ver Definição 3.29, p.47) se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in J$ com $x_1 < x_2$ temos que $[x_1,\ x_2] \subset J$.

Dica: $\sup J$ e $\inf J$.

$\Longrightarrow$ **24.** Prove que $\mathbb{R}$ é não-enumerável pelo argumento diagonal de Cantor (veja Proposição 2.11, p.20): suponha que exista uma lista com todos números reais no intervalo $(0, 1)$. Construa um novo número em $(0, 1)$ que não está nesta lista (outra prova da Proposição 3.31).

Dica: Veja, por exemplo [Sp] p.370 no.6 ou [L] p.42.

$\Longrightarrow$ **25.** Prove que o conjunto dos números irracionais é não-enumerável.

$\rightarrow$ **26.** Se $X \subset \mathbb{R}$ é enumerável então $X^{\complement}$ é não-enumerável (generalização do exercício anterior).

$\Longrightarrow$ **27.** Prove que $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{F}(\mathbb{Z}; \{0, 1\})$ (sequências de 0's e 1's). Conclua que $\#\mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Dica: base 2 e exercício 32(c), p.13.

$\Longrightarrow$ **28.** Prove que $\#(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \#\mathbb{R}$. Prove (por indução) que $\#\mathbb{R}^n = \#\mathbb{R}$.

Dica: Dados $a, b \in \mathbb{R}$ construa $c \in \mathbb{R}$ intercalando os dígitos da representação decimal de a e b. Com isto defina função injetiva. Este é um caso particular do exercício 32, p.29.

29. Prove que $\#\mathbb{R} < \#\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Dica: exercício 32(c), p.13, exercício 30, p.13, exercício 10, p.28.

$\rightarrow$ **30.** **(Números algébricos e transcendentes)** Um número real é algébrico quando é raiz de um polinômio não-trivial $p \not\equiv 0$ com coeficientes inteiros. Denotamos o conjunto dos algébricos por $\mathcal{A}$. Alguns exemplos são: $\sqrt{2}$, $\sqrt[7]{3 + \sqrt[3]{2/3 + \sqrt{2}}}$ (porque?).

(a) Prove que $\mathbb{Q} \subset \mathcal{A}$. Conclua que os algébricos generalizam o conceito de racional.

(b) Prove que o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável.

(c) Dada uma enumeração destes polinômios, o conjunto A_n de raízes de p_n é finito. Como $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, conclua que $\mathcal{A}$ é enumerável.

(d) Prove que $\mathcal{T} = \mathbb{R} - \mathcal{A}$ (chamados de transcendentes) é não-enumerável.

Obs: Isto mostra a existência de números transcendentes. O Teorema 4.32 mostra que e é irracional e o Teorema 9.22 que π é irracional. É difícil provar que π e e são números transcendentes.

$\sharp$ **31.** (difícil) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo. Prove que existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ bijeção que preserva as operações de soma e produto. Isto prova que todo corpo ordenado completo pode ser identificado a $\mathbb{R}$ ([L] p.75 no.55, [Sp] p.509).

Dica: Através do neutro da soma e produto de $\mathbb{K}$ podemos identificar $\mathbb{Z}$ com $\mathbb{Z}' \subset \mathbb{K}$ (ver exercício 45, p.32). Denotamos por p' o inteiro correspondente a $p \in \mathbb{Z}$, isto é, $f(p) = p'$. Definimos f em $\mathbb{Q}$ por $f(p/q) = f(p)/f(q) = p'/q'$. Finalmente para $x \in \mathbb{R}$ qualquer nós definimos $f(x) = \sup\{p'/q' \in \mathbb{K}, \quad p/q < x\}$.

$\sharp$ **32.** (difícil) (precisa de Álgebra; Veja [Fi2]) Sejam $x, y \in \mathcal{A}$, o conjunto dos algébricos. Prove que:

(a) $x + y \in \mathcal{A}$ (fechado para soma);

(b) $x \cdot y \in \mathcal{A}$ (fechado para produto);

(c) Existe $z \in \mathcal{A}$ tal que $x + z = 0$ (inverso aditivo);

(d) Existe $z \in \mathcal{A}$ tal que $x \cdot z = 1$ (inverso multiplicativo).

Obs: Isto prova que os algébricos formam um corpo (subcorpo de $\mathbb{R}$).

Capítulo 4

Sequências e séries

4.1 Sequências convergentes e subsequências.

A Definição 1.27, p.9 tratou do conceito de sequências, em geral, e de sequências de números reais, em particular. A próxima definição é apenas uma revisão.

DEFINIÇÃO 4.1. *Uma* **sequência de números reais** *é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ para a qual denotamos o valor de x em n por x_n em vez de $x(n)$.*

Geralmente usamos a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para representar uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Às vezes a denotamos também por $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Dizemos que x_n é o **termo de ordem** n ou que x_n é o n-**ésimo termo** da sequência.

Quando quisermos explicitar que a imagem da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contida em $A \subset \mathbb{R}$ escreveremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$.

Como sequências são funções, as definições de função limitada, crescente, decrescente, monótona, etc, também fazem sentido para sequências.

Exemplo 4.1. *Seja $a \in \mathbb{R}$ e tomemos $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante. É imediato que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.*

Exemplo 4.2. *A sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ é limitada mas não é monótona.*

Exemplo 4.3. *Sejam $a, r \in \mathbb{N}$. Considere $x_1 = a$, $x_2 = a + r$, $x_3 = a + 2r$, de maneira geral, $x_n = a + (n-1)r$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma* **Progressão Aritmética** *de primeiro termo a e razão r. Se $r = 0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante e, portanto, limitada. Se $r > 0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente e, portanto, limitada inferiormente. Finalmente, se $r < 0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente e, portanto, limitada superiormente.*

DEFINIÇÃO 4.2. *Dizemos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma* **subsequência** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 4.4. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a Progressão Aritmética de termo inicial a e razão r. A Progressão Aritmética $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão $2r$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De fato, tomando $n_k = 2k-1$ ($k\in\mathbb{N}$) obtemos*

$$x_{n_k} = a + (n_k - 1)r = a + (2k-2)r = a + (k-1)(2r) = y_k.$$

Intuitivamente, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para x se seus termos se aproximam de x quando n cresce. Esta ideia não está de todo errada. Porém, ela pode induzir a uma ideia equivocada de convergência. Somos tentados a dizer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x quando a distância entre x_n e x diminui à medida que n cresce, ou seja, a função $f(n) = |x_n - x|$ é decrescente. Não é bem assim. Veja a Figura 4.1. Ela foge um pouco do assunto "sequências de números reais" mas ilustra bem o que queremos dizer por "se aproximar". Imagine que, partindo do ponto A, percorremos no sentido anti-horário o caminho desenhado como indicado pelas setas. Ninguém duvida, e com razão, de que estaremos assim nos aproximando do ponto O. Porém, a ideia de que a nossa distância ao ponto O decresce com o tempo mostra-se errada. Convença-se disto percebendo que passamos primeiro por B antes de chegar a C e, entretanto, o segmento $\overline{BO}$ é menor que o segmento $\overline{CO}$. De fato, a distância a O cresce quando percorremos o segmento $\overline{BC}$. Podemos perceber que existem muitos trechos do caminho sobre os quais a distância a O é crescente com o tempo, de modo que não existe nenhum ponto a partir do qual a distância a O passe a ser decrescente com o tempo.

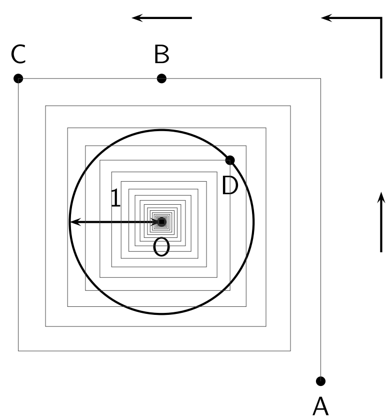


Figura 4.1: Espiral da convergência

Continuemos analisando a Figura 4.1 em busca da boa definição de convergência. Observamos que nossa distância a O fica tão pequena quanto quisermos, bastando para isto que continuemos andando por um tempo suficientemente longo. Por exemplo, nossa distância a O será menor que 1 depois que passarmos pelo ponto D. Ou seja, em certo instante entramos na bola de raio 1 centrada em O e dela não saímos mais. Da mesma forma, a partir de outro instante (futuro) entramos na bola de raio $1/2$, centrada em O, e aí ficamos. De modo geral, dado qualquer número positivo ε, existe um instante a partir do qual nossa distância a O será menor que ε. Aí está a definição. Para sequências de números reais ela é expressa da seguinte maneira.

DEFINIÇÃO 4.3. *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dita* **convergente** *se existe* $x \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n \geq N \quad \textit{implica que} \quad |x_n - x| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $x_n \to x$ *e dizemos que* x *é* **limite** *da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou que* x_n **converge para** *(ou* **tende a***)* x *quando* n *tende a mais infinito (*$n \to +\infty$*). Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é convergente, então dizemos que ela é* **divergente**.

Exemplo 4.5. *Seja* $x \in \mathbb{R}$ *e considere a sequência dada por* $x_n = x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Temos que* $x_n \to x$*. De fato,* $|x_n - x| = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Portanto, podemos escrever*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad n \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad |x_n - x| < \varepsilon.$$

Exemplo 4.6. *Considere a sequência* $x_n = 1/n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Vamos mostrar que* $x_n \to 0$*. Dado* $\varepsilon > 0$*, tomemos* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $N > 1/\varepsilon$*. Temos então* $0 < 1/N < \varepsilon$*. Mas se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $n \geq N$*, então* $x_n = 1/n \leq 1/N = x_N$*. Logo, podemos escrever*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_n - 0| < \varepsilon.$$

O leitor talvez conheça a notação $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ para $x_n \to x$. Vamos refletir sobre ela. Por enquanto, façamos de conta que não conhecemos a definição de limite. Suponhamos que ao abrir um livro de Análise, pela primeira vez, encontremos as seguintes inscrições:

$$x_n \to 0 \quad \text{e} \quad x_n \to 1.$$

Não ficaríamos chocados. Porém, se estivesse escrito

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

Seríamos levados a concluir que $0 = 1$. Ora, é o sinal de igual "=" que nos leva a esta confusão. Se não tivermos a unicidade do limite, então a notação $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ é fortemente enganosa. Apenas para constar, informo ao leitor interessado a definição de convergência num contexto mais geral (de espaços topológicos), do qual a nossa é um caso particular, permite a não unicidade do limite (isto ocorre em espaços que não são de Hausdorff[1]). Entretanto, a próxima proposição nos dará direito ao uso da notação $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

PROPOSIÇÃO 4.4. (unicidade do limite) *Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência e* $x, y \in \mathbb{R}$ *tais que* $x_n \to x$ *e* $x_n \to y$*. Então* $x = y$*.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $x \neq y$. Seja $\varepsilon = |x - y|/2 > 0$. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \quad \Longrightarrow |x_n - x| \quad < \varepsilon.$$

[1]Felix Hausdorff: ⋆ 08/11/1868, Wroclaw, Polônia - † 02/01/1942, Bonn, Alemanha.

Também temos $x_n \to y$. Logo, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N' \quad \Longrightarrow \quad |x_n - y| < \varepsilon.$$

Seja n o maior dos números N e N'. Para tal n as duas conclusões anteriores são válidas. Temos então

$$|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |x - y|.$$

Concluímos que $|x - y| < |x - y|$, o que é absurdo. ∎

PROPOSIÇÃO 4.5. *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a x se, e somente se, toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a x.*

Demonstração. Suponhamos que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$. Seja $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *i.e.*, $y_k = x_{n_k}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) para alguma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente. Mostremos que $y_k \to x$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon$. Como $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ é estritamente crescente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq K$, então $n_k \geq N$. Segue que

$$k \geq K \quad \Longrightarrow \quad |y_k - x| < \varepsilon.$$

Portanto $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x. A recíproca é imediata (basta observar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de si mesma). ∎

Exemplo 4.7. *A sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ é divergente. De fato, se ela fosse convergente, então pela proposição anterior todas as suas subsequências seriam convergentes para o mesmo limite. Porém, $(1, 1, 1, \dots)$ e $(0, 0, 0, \dots)$ são duas de suas subsequências sendo que a primeira converge para 1 enquanto que a segunda converge para 0.*

Como corolário da proposição anterior, obtemos que se x_n tende a x, então x_{n+2006} tende a x. Não há nada de especial com o número 2006. Mais geralmente, fixado $p \in \mathbb{N}$, temos que se x_n tende a x, então x_{n+p} tende a x. É fácil perceber que a recíproca também é verdadeira, ou seja, se para algum $p \in \mathbb{N}$ temos que x_{n+p} tende a x, então é porque x_n tende a x. Verifique! A importância deste fato é a seguinte. Se conhecermos alguma propriedade que garanta a convergência de uma sequência e soubermos que tal propriedade só é valida a partir do seu p-ésimo termo então, ainda sim, podemos concluir que a sequência é convergente. Vejamos um exemplo esclarecedor, mas antes de apresentá-lo façamos uma definição.

DEFINIÇÃO 4.6. *A função* **Parte Inteira** *é definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, por*

$$\lfloor x \rfloor = n \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad n \leq x < n + 1.$$

Veja exercício 16, p.50 para outra definição.

Exemplo 4.8. *Temos $\lfloor 1 \rfloor = 1,\ \lfloor 1.4 \rfloor = 1$ e $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$.*

Exemplo 4.9. *Sabemos que sequências constantes são convergentes. Considere a sequência (não constante) dada por* $x_n = \lfloor 1000/n \rfloor$*, sendo* $\lfloor x \rfloor$ *a função* **Parte Inteira** *de* x*, definida abaixo:*

$$\lfloor x \rfloor = m \qquad \text{se} \qquad m \in \mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad m \leq x < m+1.$$

É fácil ver que $x_n = 0$ *para todo* $n > 1000$*. Ou seja,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é constante a partir do seu milésimo-primeiro termo. Concluímos que ela é convergente.*

TEOREMA 4.7. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in \mathbb{R}$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de sequência convergente, concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < 1$, *i.e.*, $x_n \in (x-1, x+1)$. Tomando

$$a = \min\{x_1, \dots, x_N, x-1\} \quad \text{e} \quad b = \max\{x_1, \dots, x_N, x+1\}$$

temos imediatamente que $x_n \in [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. ■

4.2 Sequências monótonas, limitadas e de Cauchy.

A recíproca do Teorema 4.7 é falsa como mostra o Exemplo 4.7. Porém, existem algumas recíprocas parciais que veremos nesta seção. Muitos dos resultados aqui apresentados utilizam, em sua demonstração, a caracterização do supremo vista no exercício 15, p.50.

PROPOSIÇÃO 4.8. (sequência monótona limitada converge) *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente e limitada superiormente, então* $x_n \to \sup\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$*. Da mesma forma, se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente e limitada inferiormente, então* $x_n \to \inf\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$*.*

Demonstração. Vamos provar apenas a primeira parte da proposição já que a segunda se demonstra de modo análogo. Seja $s = \sup\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $s - \varepsilon < x_N \leq s$. Logo, para $n \geq N$, temos $s - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq s$. Concluímos daí que $|x_n - s| < \varepsilon$. ■

TEOREMA 4.9. (Bolzano[1]-Weierstrass[2]) *Toda sequência limitada possui subsequência convergente.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Considere o seguinte conjunto:

$$M = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ x_n > x_m, \ \forall m > n\}.$$

Existem duas possibilidades: M é infinito ou M é finito.

[1]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano: ⋆ 05/10/1781, Praga, República Tcheca - † 18/12/1848, Praga, República Tcheca.

[2]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass: ⋆ 31/10/1815, Ostenfelde, Alemanha - † 19/02/1897, Berlim, Alemanha.

$\boxed{M \text{ é infinito.}}$ Escrevamos $M = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ com $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ Assim, se $i < j$ então $n_i < n_j$ e, como $n_i \in M$, obtemos que $x_{n_i} > x_{n_j}$. Concluímos que a subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente. Sendo ela limitada obtemos, finalmente, que ela é convergente.

$\boxed{M \text{ é finito.}}$ Como M é finito, existe $n_1 \in \mathbb{N}\setminus M$ cota superior de M. Ora, $n_1 \notin M$ logo, existe $n_2 > n_1$ (e portanto $n_2 \notin M$) tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$. Mas de $n_2 \notin M$ segue que existe $n_3 > n_2$ (e portanto $n_3 \notin M$) tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Por indução, definimos uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que é crescente e, portanto, convergente (pois ela é limitada). ■

Uma demonstração geométrica do Teorema de Bolzano-Weierstrass utilizando a ideia de bisseção é apresentada no exercício 27, p.74. Ideia semelhante surge na demonstração do Teorema de Borel-Lebesgue (Teorema 6.17, p.96).

DEFINIÇÃO 4.10. *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita de* **Cauchy**[1] *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n, m \geq N \quad \textit{implica que} \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Uma sequência é de Cauchy se seus termos se aproximam uns dos outros. Repare que não apenas termos consecutivos mas sim todos eles. É natural acreditar que qualquer sequência convergente é de Cauchy e vice-versa. Vamos admitir, por hora, que sequências convergentes são de Cauchy (este fato será demonstrado a seguir). Façamos alguns comentários sobre a recíproca.

Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionais convergente para, por exemplo, $\sqrt{2}$ (existe tal sequência?). Sendo convergente ela é de Cauchy. Como a definição de sequência de Cauchy não faz menção ao limite, mesmo se só conhecêssemos números racionais ainda estaríamos de acordo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Porém, neste caso, não seríamos capazes de mostrar a existência do limite. Ou seja, se considerássemos apenas números racionais, não seria possível mostrar que toda sequência de Cauchy é convergente.

Já que sequências de Cauchy são convergentes em $\mathbb{R}$ mas não em $\mathbb{Q}$, isto deve estar relacionado à completeza. De fato, podemos usar (ver construção de $\mathbb{R}$ na página 86) sequências de Cauchy de números racionais para construir $\mathbb{R}$. A vantagem desta construção é que ela pode ser empregada para "completar" outros conjuntos (ou melhor, espaços métricos) que não sejam corpos ordenados.

TEOREMA 4.11. (sequências de Cauchy) *Uma sequência é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para o limite x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Portanto, se $m, n \geq N$ temos

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 4.7 mostra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada (verifique). Pelo Teorema

[1] Augustin Louis Cauchy: ⋆ 21/08/1789, Paris, França - † 23/05/1857, Sceaux, França.

de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para o limite x. Mostremos que $x_n \to x$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \quad \text{implica que} \quad |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Como $x_{n_k} \to x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N$ e $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$. Daí e de (4.1) segue que, se $n \geq N$, então

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

4.3 Limites infinitos.

Existem sequências divergentes que possuem limite! Isto é apenas um jogo de palavras. A definição seguinte diz que certas sequências têm limites que não são números reais. Não diremos que tais sequências são convergentes.

DEFINIÇÃO 4.12. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que x_n tende a* **mais infinito** *quando n tende a mais infinito ou que* **mais infinito** *é limite da sequência e escrevemos $x_n \to +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ se,*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n \geq N \quad \textit{implica que} \quad x_n > M.$$

DEFINIÇÃO 4.13. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que x_n tende a* **menos infinito** *quando n tende a mais infinito ou que* **menos infinito** *é limite da sequência e escrevemos $x_n \to -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ se,*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n \geq N \quad \textit{implica que} \quad x_n < M.$$

Insistimos no fato que se $x_n \to +\infty$ ou $x_n \to -\infty$, então não podemos dizer que a sequência é convergente. Uma sequência é dita convergente exclusivamente quando satisfaz a condição da Definição 4.3. Além disto, se $x_n \to +\infty$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente e, portanto, é divergente. Da mesma forma, se $x_n \to -\infty$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada inferiormente e, portanto, é divergente.

Observação 4.1 *Com estas convenções sobre uso dos termos "sequência convergente" e de "limite de sequência" a Proposição 4.5 também é válida (obviamente com outra demonstração) se substituirmos x por $+\infty$ ou por $-\infty$.*

Como $x_n > M$ é equivalente a $-x_n < -M$, temos que $x_n \to +\infty$ se, e somente se, $-x_n \to -\infty$. Portanto toda afirmação sobre limite mais infinito tem uma análoga para limite menos infinito.

4.4 Operações com limites.

Temos a seguir algumas propriedades aritméticas de limites finitos.

PROPOSIÇÃO 4.14. (propriedades do limite) *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes para x e y, respectivamente, e $c \in \mathbb{R}$. Temos:*
i. $x_n + y_n \to x + y$; *ii. $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$;* *iii. $c \cdot x_n \to cx$;*
iv. se $y \neq 0$, então $y_n^{-1} \to y^{-1}$.

Demonstração. (i) Seja $\varepsilon > 0$. Graças às convergências de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existem N' e N'' tais que, se $n \geq N'$, então $|x_n - x| < \varepsilon/2$, e se $n \geq N''$, então $|y_n - y| < \varepsilon/2$. Seja $N = \max\{N', N''\}$. Assim, se $n \geq N$, então $n \geq N'$ e $n \geq N''$ e, daí,

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mostramos assim que $x_n + y_n \to x + y$.

(ii) Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, ela é limitada. Logo, existe $C > 0$ tal que $|x_n| < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|y_n - y| < \varepsilon$. Desta forma, para $n \geq N$, temos

$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - x \cdot y| &\leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n \cdot y - x \cdot y| = |x_n| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| \\ &\leq C \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| < (C + |y|)\varepsilon.\end{aligned}$$

Isto mostra que $x_n \cdot y_n$ converge para $x \cdot y$.

(iii) É consequência do item anterior, tomando $y_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Seja $\varepsilon > 0$ e $N' \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N'$, então $|y_n - y| < \varepsilon$. Temos ainda que $y \neq 0$, consequentemente, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que, $|y_n| > |y|/2$, *i.e.*, $|y_n|^{-1} < 2|y|^{-1}$, quando $n \geq N''$. Tomando $N = \max\{N', N''\}$, para todo $n \geq N$, temos que

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|} < \frac{2}{|y|^2}\varepsilon.$$

Isto conclui a demonstração. ■

Exemplo 4.10. *Considere $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma* **Progressão Geométrica** *de razão r.*

Se $|r| < 1$, então multiplicando por $|r^n| \geq 0$, obtemos $0 \leq |r^{n+1}| \leq |r^n|$. Logo, $(|r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, limitada inferiormente e, portanto, convergente para, digamos, l. Ora, $|r^{n+1}| = |r||r^n|$, então, passando o limite, obtemos $l = |r|l$. Como $|r| \neq 1$, temos $l = 0$. Segue, finalmente, que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 (exercício 4(a), p.71).

Se $|r| > 1$, então $|r| = 1 + h$ com $h > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, $|r^n| = |r|^n \geq 1 + nh$ e, portanto, $|r^n| \to +\infty$. Em particular, $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente (exercício 4(b), p.71).

Deixamos para o leitor o estudo dos casos $r = 1$ e $r = -1$.

Vejamos agora as propriedades "aritméticas" de limites infinitos.

PROPOSIÇÃO 4.15. (propriedades do limite) *Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sequências. Suponhamos que* $x_n \to +\infty$. *Temos:*

i. se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada inferiormente, então* $x_n + y_n \to +\infty$;

ii. se $y_n \geq c > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $x_n \cdot y_n \to +\infty$;

iii. $x_n^{-1} \to 0$.

Demonstração. (i) Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $M \in \mathbb{R}$, como $x_n \to +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > M - a$. Segue que se $n \geq N$, então $x_n + y_n \geq x_n + a > M$. Concluímos que $x_n + y_n \to +\infty$.

(ii) Dado $M \in \mathbb{R}$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > |M|/c$. Desta forma, se $n \geq N$, então $x_n \cdot y_n \geq x_n \cdot c > |M| \geq M$. Portanto $x_n \cdot y_n \to +\infty$.

(iii) Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $x_n > \varepsilon^{-1}$. Segue que se $n \geq N$, então $|x_n^{-1} - 0| = x_n^{-1} < \varepsilon$. Concluímos que $x_n^{-1} \to 0$. ■

4.5 Limite superior e limite inferior.

4.5.1 Definição

Nem toda sequência possui limite. Podemos, no entanto, introduzir uma extensão do conceito de limite que fará com que toda sequência possua limite. Existem outras possibilidades de extensão (ver exercício 35, p.75).

DEFINIÇÃO 4.16. *Dada uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *se ela for limitada superiormente, definimos a sequência* $\overline{X_n} = \sup\{x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots\}$, *que é monótona decrescente (porque?) e portanto possui limite (pode ser* $-\infty$*). O* **limite superior** *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é definido por*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é ilimitada superiormente;} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{X_n}, & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada superiormente.} \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 4.17. *Dada uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *se ela for limitada inferiormente, definimos a sequência* $\underline{X_n} = \inf\{x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots\}$, *que é monótona crescente (porque?) e portanto possui limite (pode ser* $+\infty$*). O* **limite inferior** *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é definido por*

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é ilimitada inferiormente;} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \underline{X_n}, & \text{se } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada inferiormente.} \end{cases}$$

Exemplo 4.11. *Considere a sequência* $(1,\ 1,\ 2,\ 1/2,\ 3,\ 1/3,\ \ldots,\ n,\ 1/n,\ \ldots)$. *Seu* $\liminf$ *é* 0 *e seu* $\limsup$ *é* $+\infty$.

Exemplo 4.12. *Considere a sequência* $(0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -2,\ 0,\ 1,\ -3,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ -n,\ \ldots)$. *Seu* $\liminf$ *é* $-\infty$ *e seu* $\limsup$ *é* 1.

Exemplo 4.13. *Considere a sequência* $(-1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -n,\ \ldots)$. *Seu* $\liminf = \limsup = -\infty$.

LEMA 4.18. *Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais.*

i. $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n \le \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$*;*

ii. o limite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ *existe se, e somente se,* $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$*.*

Demonstração. Vamos provar somente quando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for limitada (superiormente e inferiormente). Deixamos para o leitor completar a prova para o caso geral.

Tomando o limite nos dois lados da desigualdade $\underline{X_n} \le \overline{X_n}$ obtemos (i).

Suponha que $\limsup = \liminf$. É claro que $\underline{X_n} \le x_n \le \overline{X_n}$. Portanto, se os limites dos extremos são iguais, o limite do meio vai existir e será igual ao dos extremos (conhecido como Teorema do Sanduíche, ver exercício 7, p.71). Agora suponha que $\lim$ existe. Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy e, portanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$ se $n > N$, para todo $k > 0$. Como $x_n \le \overline{X_n}$, $0 \le \overline{X_n} - x_n = \sup\{0,\ x_{n+1}-x_n,\ x_{n+2}-x_n,\ \dots,\ x_{n+k}-x_n,\ \dots\} < \varepsilon$ se $n > N$. Logo a sequência $\overline{X_n} - x_n \to 0$. Portanto $\lim = \limsup$. Argumento similar vale para o $\liminf$. ■

Veja no exercício 29, p.74 como definir $\liminf$ e $\limsup$ de sequências de conjuntos.

4.5.2 ⋆ Quase Cota

Vamos definir $\liminf$ e $\limsup$ de outra forma.

DEFINIÇÃO 4.19. *Denotamos por $\widetilde{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, o conjunto $\mathbb{R}$ mais os pontos no infinito. Em $\widetilde{\mathbb{R}}$ estendemos a relação de ordem usual em $\mathbb{R}$ convencionando que $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Pode-se estender a Definição 3.24, p.45 para se definir $\sup$ e $\inf$ de subconjuntos de $\widetilde{\mathbb{R}}$: menor das cotas superiores ou maior das cotas inferiores, onde maior e menor é dada pela relação de ordem acima. Assim, se $+\infty \in A$, $\sup A = +\infty$ e se $-\infty \in A$, $\inf A = -\infty$.

DEFINIÇÃO 4.20. *Dizemos que $r \in \widetilde{\mathbb{R}}$ é* **quase cota superior** *de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe somente um número finito de termos x_n com $x_n \ge r$ e* **quase cota inferior** *se existe somente um número finito de termos x_n com $x_n \le r$.*

Note que $+\infty$ é sempre quase cota superior e $-\infty$ é sempre quase cota inferior. Logo os conjuntos de quase cotas superiores e inferiores são sempre não-vazios.

DEFINIÇÃO 4.21. *Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, seja A o conjunto de quase cota superiores e B o conjunto de quase cota inferiores. O* **limite superior** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definido por*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \inf A.$$

O **limite inferior** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definido por*

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \sup B.$$

4.5.3 $\star$ Valor de Aderência

Vamos definir $\liminf$ e $\limsup$ de uma terceira forma.

DEFINIÇÃO 4.22. *Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é* **valor de aderência** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para x. Dizemos que $y \in \widetilde{\mathbb{R}}$ é* **valor de aderência generalizado** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para y.*

Utilizando estas definições, o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante que toda sequência limitada possui valor de aderência em $\mathbb{R}$. Por outro lado, se a sequência for ilimitada ela possuirá $+\infty$ ou $-\infty$ como valor de aderência. Desta forma, o conjunto de valores de aderência generalizados de uma sequência será sempre não-vazio.

DEFINIÇÃO 4.23. *Seja A o conjunto dos valores de aderência generalizados de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O* **limite superior** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definido por*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \sup A.$$

O **limite inferior** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definido por*

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \inf A.$$

Essencialmente, o limite superior de uma sequência é o seu maior valor de aderência generalizado, enquanto que o limite inferior é seu menor valor de aderência generalizado.

4.6 Séries.

DEFINIÇÃO 4.24. *Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n.$$

A sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **das somas parciais** *da* **série** *$\sum x_n$ e x_n é o n-***ésimo termo** *ou* **termo geral** *da série. Escrevemos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

quando o limite acima existe e, neste caso, ele é dito **limite da série**.

DEFINIÇÃO 4.25. *Dizemos que $\sum x_n$ é:*

i. **convergente** *se a sequência $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ é convergente para um valor finito caso contrário dizemos que é* **divergente**.

ii. **absolutamente convergente** *se a série $\sum |x_n|$ é convergente.*

iii. **condicionalmente convergente** *se $\sum x_n$ é convergente mas $\sum |x_n|$ é divergente.*

Exemplo 4.14. *A série* $\sum x_n = 1 + 1 + 1 + \cdots$ *diverge (para infinito).*
A série $\sum x_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$ *diverge (pois* S_n *alterna entre 1 e 0).*
A série (termos de uma PG de razão $1/2$*)* $\sum x_n = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 \cdots$ *converge.*

Exemplo 4.15. *Considere a* **Série Geométrica** *de termo geral* $x_n = r^{(n-1)}$*. Temos*

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}.$$

Se $r = 1$*, então é imediato que* $S_n = n$*. Segue que* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge e, portanto,* $\sum x_n$ *diverge. Suponhamos* $r \neq 1$*. Multiplicando por* S_n *por* r *obtemos*

$$\begin{aligned} rS_n &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n \\ &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n - 1 \\ &= S_n + r^n - 1. \end{aligned}$$

Portanto, $S_n = (r^n - 1)/(r - 1)$*. Assim,* $\sum x_n$ *converge se, e somente se,* $|r| < 1$ *e, neste caso,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \frac{1}{1-r}.$$

A próxima proposição é uma versão da Proposição 4.14 para séries.

PROPOSIÇÃO 4.26. (propriedades de séries) *Sejam* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *duas séries convergentes e* $c \in \mathbb{R}$*. Temos que*
i. $\sum(x_n + y_n)$ *é convergente para* $\sum x_n + \sum y_n$*;*
ii. $\sum(c \cdot x_n)$ *é convergente para* $c \cdot \sum x_n$*.*

Demonstração. A demonstração é trivial: basta aplicar a Proposição 4.14 para as sequências das somas parciais de $\sum x_n$ e de $\sum y_n$. ■

Observamos que, em geral, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n \cdot y_n) \neq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Passamos ao estudo da natureza de séries, *i.e.*, estamos interessados em critérios que determinem se uma série é convergente ou divergente.

TEOREMA 4.27.
i. $\sum x_n$ *converge se, e somente se,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq m \geq N \text{ implica que } \left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| < \varepsilon.$$

ii. Se $\sum x_n$ *converge, então* $x_n \to 0$*.*
iii. Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração. (i) O critério dado diz simplesmente que a sequência das somas parciais é de Cauchy. O resultado segue do Teorema 4.11.

(ii) Segue de (i), tomando $m = n$.

(iii) Observamos que para todo $m, n \in N$ temos

$$\left|\sum_{i=n}^{m} x_i\right| \leq \sum_{i=n}^{m} |x_i| = \left|\sum_{i=n}^{m} |x_i|\right|$$

Portanto, por (i), a convergência de $\sum |x_n|$ implica a de $\sum x_n$. ∎

O item (iii) do teorema anterior está intimamente ligado ao fato de $\mathbb{R}$ ser completo. Devemos ressaltar ainda que a sua recíproca não é verdadeira, ou seja, existem séries que são convergentes mas não absolutamente convergentes. Veremos um exemplo posteriormente.

Exemplo 4.16. *Pelo item (ii), a condição $x_n \to 0$ é necessária para a convergência da série $\sum x_n$ porém ela não é suficiente. A* **Série Harmônica** *$\sum 1/n$ é o contraexemplo mais famoso. De fato, agrupando de 1 em 1, 2 em 2, 4 em 4, ..., 2^k em 2^k termos e estimando por baixo temos que*

$$\begin{aligned}
S_{2^n} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}\right) + \frac{1}{2^n} \\
&> 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + \cdots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Contando o número de vezes que $1/2$ aparece, obtemos que $S_{2^n} \geq 1 + (n-1)/2$. Daí, segue que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2^n} = +\infty$. Concluímos que a série diverge. Podemos obter o mesmo resultado (utilizando outras técnicas) pelo exercício 43, p.32 ou pelo exercício 71, p.81 ou pelo exercício 3(f), p.27 ou pela Proposição 4.39, p.70.

Vamos tratar agora de alguns critérios de convergência para séries de termos positivos. Claramente, todos os critérios aqui expostos podem ser adaptados para séries de termos negativos. De fato, se $\sum x_n$ é uma série de termos negativos, então $\sum(-x_n)$ é uma série de termos positivos e, além disto, a primeira converge se, e somente se, a segunda converge.

Eventualmente, podemos usar também critérios sobre séries de termos positivos para uma série $\sum x_n$ que tenha termos de sinais variáveis. Ora, se ao aplicarmos algum destes critérios para a série $\sum |x_n|$ concluirmos que ela é convergente, então, como toda série absolutamente convergente é convergente, concluiremos que $\sum x_n$ converge. Por outro lado, se o critério nada disser, ou mesmo se ele nos informar que $\sum |x_n|$ é divergente, em geral, nada poderemos afirmar sobre a convergência da série $\sum x_n$.

Observamos também o seguinte fato, já mencionado no caso de sequências. Os primeiros termos de uma série nada influem na sua natureza. De fato, a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, a série $\sum x_{n+2006}$ converge. De maneira geral, fixado $p \in \mathbb{N}$ a série $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum x_{n+p}$ é convergente. Desta forma, todos os critérios que determinam a natureza de uma série através de alguma propriedade verificada por todos os seus termos continuam válidos se a tal propriedade é verificada à partir de algum termo (por exemplo, 2006). Por outro lado, não podemos desprezar nenhum termo de uma série convergente quando estamos interessados em determinar o valor do seu limite.

PROPOSIÇÃO 4.28. *Uma série de termos positivos é convergente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais é limitada superiormente.*

Demonstração. Por definição, $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Como $x_n \geq 0$, temos imediatamente que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Logo, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se, e somente se, ela é limitada superiormente (ver proposições 4.7 e 4.8) ■

TEOREMA 4.29. (Critério da Comparação) *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $0 \leq x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

i. Se $\sum y_n$ converge, então $\sum x_n$ converge.

ii. Se $\sum x_n$ diverge, então $\sum y_n$ diverge.

Demonstração. Sejam $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as sequências de somas parciais de $\sum x_n$ e $\sum y_n$, respectivamente. De $x_n \leq y_n$ segue imediatamente que $S_n \leq T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente, então $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é. Por outro lado, se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é. Concluímos graças à Proposição 4.28. ■

Exemplo 4.17. *Vamos estudar a natureza da série $\sum 1/n^p$ segundo os valores de p. É claro que se $p \leq 0$, então ela diverge pois neste caso $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 0$.*

Suponhamos $0 \leq p \leq 1$. Temos $1/n \leq 1/n^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, por comparação com a Série Harmônica, concluímos que a série diverge.

Finalmente, consideremos o caso $p > 1$. Vamos utilizar técnica similar a utilizada no estudo da série harmônica para mostrar que a série converge. Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência das somas parciais. Agrupando de 1 em 1, 2 em 2, 4 em 4, ..., 2^k em 2^k termos e estimando por cima obtemos que

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}\\
&\leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p}\\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p}\right)\\
&\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} = \sum_{i=1}^{n} (2^{1-p})^{(i-1)}.
\end{aligned}$$

Como $p > 1$ temos $2^{1-p} < 1$ e, portanto, a Série Geométrica de razão 2^{1-p} converge. Segue que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente e portanto $\sum 1/n^p$ é convergente.

TEOREMA 4.30. (Teste da Razão, ou de d'Alembert[1]) *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números estritamente positivos.*

i. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n < 1$, então $\sum x_n$ é convergente.

ii. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n > 1$, então $\sum x_n$ é divergente.

[1] Jean Le Rond d'Alembert: ⋆ 17/11/1717, Paris, França - † 29/10/1783, Paris, França.

Demonstração. (i) Tomemos $r \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n < r < 1$. O resultado do exercício 6(a), p.71 garante que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+1}/x_n < r$ para todo $n \geq N$. Temos então

$$\begin{aligned} x_{N+1} &< rx_N; \\ x_{N+2} &< rx_{N+1} < r^2 x_N; \\ x_{N+3} &< rx_{N+2} < r^3 x_N; \\ &\vdots \end{aligned}$$

De maneira geral, $x_n < r^{n-N} x_N$, para todo $n \geq N$. Tomando $y_n = r^{n-N} x_N$ (para todo $n \in \mathbb{N}$) temos que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$. Como $\sum y_n$ é uma Série Geométrica de razão $r \in (0,1)$, ela é convergente. O resultado segue do Critério de Comparação.

(ii) Usando o resultado do exercício 6(b), p.71 concluímos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+1}/x_n \geq 1$ para todo $n \geq \mathbb{N}$. Portanto, $x_{n+1} \geq x_n$ para todo $n \geq N$. Segue que a sequência dos termos gerais da série é crescente a partir do N-ésimo termo e, portanto, não converge para zero. Logo, a série é divergente. ■

Exemplo 4.18. *A série $\sum 1/n!$ é convergente pois*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Analogamente, dado $x \in \mathbb{R}$, mostra-se que $\sum x^n/n!$ é (absolutamente) convergente e, em particular, $x^n/n! \to 0$. Para outra prova ver exercício 20, p.72. Esta série será revista na Seção 10.5.

Definiremos a seguir as constantes e e π, que estão entre as cinco principais da Análise. As outras três são 0, 1, e i (a última aparece na Análise Complexa). Bem menos conhecida é a constante γ (gamma) de Euler (ver exercício 24, p.73) e a razão áurea Φ (ver exercício 25, p.73).

DEFINIÇÃO 4.31. $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$

Podemos definir e também através do exercício 20, p.72.

TEOREMA 4.32. *O número e é irracional.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$. Então, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $\mathrm{e} = p/q$, ou seja, $\displaystyle\frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Multiplicando por $q!$ e rearranjando obtemos

$$p(q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} = \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{n!}.$$

Claramente o termo do lado esquerdo da igualdade é inteiro. Concluiremos a prova mostrando que o termo do lado direito não é inteiro. De fato,

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{n!} &= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + \dots \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1. \end{aligned}$$

■

Observação 4.2 *A prova que e é transcendente pode ser vista em [Sp] capítulo 20.*

Quando $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 1$, o Teste da Razão nada permite concluir (nem convergência nem divergência). Há outras versões do Teste da Razão. A aqui apresentada não é a mais geral delas. Por exemplo, no Teorema 4.30 (i), podemos substituir o símbolo de limite pelo símbolo de limite superior que a afirmação continua válida. Analogamente, a conclusão do Teorema 4.30 (ii), permanece válida ao substituirmos o símbolo de limite pelo de limite inferior.

Exemplo 4.19. *Vejamos exemplos para os quais o Teste da Razão não é conclusivo. Considere as séries $\sum 1/n$ e $\sum 1/n^2$. Já vimos que a primeira é divergente enquanto que a segunda é convergente. Porém, para ambas temos que $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 1$. De fato,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

TEOREMA 4.33. (Teste da Raiz, ou de Cauchy) *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos.*

i. Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, então $\sum x_n$ é convergente.

ii. Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, então $\sum x_n$ é divergente.

Demonstração. (i) Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} < r < 1$. Do resultado do exercício 6(a), p.71 obtemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{x_n} < r$, ou seja, $x_n < r^n$ para todo $n \geq N$. O resultado segue por comparação com a Série Geométrica $\sum r^n$.

(ii) Análogo ao item anterior. ■

Quando $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, o Teste da Raiz nada permite concluir (nem convergência nem divergência). Também há outras versões do Teste da Raiz. A apresentada acima não é a mais geral de todas. Por exemplo, (i) se generaliza ao substituirmos o símbolo de limite pelo símbolo de limite superior. Analogamente, em (ii), podemos substituirmos o símbolo de limite pelo de limite inferior.

Exemplo 4.20. *Considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $(1/2, 1/3, 1/2^2, 1/3^2, 1/2^3, 1/3^3, \dots)$. O que os testes da Razão e da Raiz nos dizem sobre a natureza da série $\sum x_n$? Vejamos. Temos que*

$$\frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \frac{1/3^n}{1/2^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad e \quad \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = \frac{1/2^{n+1}}{1/3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Segue que $\limsup_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = +\infty$ *e* $\liminf_{n\to+\infty} x_{n+1}/x_n = 0$. *Portanto o Teste da Razão nada diz. Temos ainda*

$$\sqrt[2n]{x_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad e \quad \sqrt[2n-1]{x_{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2n-1]{2}}.$$

Portanto $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1/\sqrt{2} < 1$. *Pelo Teste da Raiz, a série converge.*

No exemplo anterior o Teste da Razão não permitiu concluir, enquanto que o da raiz sim. Isto não é uma simples coincidência. O Teste da Raiz é mais eficiente que o da Razão. Mais precisamente, em todos os casos nos quais o Teste da Razão permite concluir (seja por convergência ou por divergência) o Teste da Raiz também será concludente. Entretanto, o Teste da Razão é, em geral, mais fácil de ser aplicado.

TEOREMA 4.34. (Teste da Raiz, ou de Cauchy) *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números positivos.*

i. Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, *então* $\sum x_n$ *é convergente.*

ii. Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, *então* $\sum x_n$ *é divergente.*

DEFINIÇÃO 4.35.(série alternada) *A série* $\sum x_n$ *é dita* **alternada** *se* $x_n x_{n+1} < 0$, *isto é, se os termos sucessivos da série possuem sinal oposto e portanto alternam entre termos positivos e negativos.*

O próximo teorema apresenta um critério de convergência de séries alternadas conhecido como critério de Leibniz[1]. Para a demonstração veja exercício 57, p.79.

TEOREMA 4.36. (Critério de Leibniz) *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência decrescente de números positivos convergente para* 0, *então a série* $\sum(-1)^{n+1}x_n$ *é convergente.*

Exemplo 4.21. *Utilizando o critério de Leibniz podemos provar que as séries abaixo convergem. Podemos determinar* **para onde** *convergem com um esforço a mais. Veja exercício 59, p.79 e exercício 60, p.79.*

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots = \ln 2$. *(b)* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots = \frac{\pi}{4}$.

O item (b) do exemplo acima motiva a definição abaixo.

DEFINIÇÃO 4.37. $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots\right)$.

Para justificar a definição, faça exercício 60, p.79. Podemos definir π também através do exercício 61, p.80 ou da Definição 10.26, p.180. A irracionalidade de π é provada na Seção 9.4, p.154.

O próximo teorema, cujos passos para demonstração estão no exercício 62, p.80, apresenta uma propriedade surpreendente de séries **condicionalmente convergente**: Caso você reordene seus termos podemos fazer com que a série convirja para **qualquer** valor. Contraste com séries absolutamente convergentes, em que reordenações não alteram o limite: veja exercício 63, p.80.

[1] Gottfried Wilhelm von Leibniz: ⋆ 01/07/1646, Leipzig, Alemanha - † 14/11/1716, Hannover, Alemanha.

TEOREMA 4.38. (Riemann) *Seja $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente. Existem reordenações (b_n) e (c_n) dos termos desta série tais que:*
(a) $\sum b_n = +\infty$; *(b) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer, $\sum c_n = \alpha$.*

4.7 ⋆ A série dos inversos dos primos.

Terminamos o capítulo com um interessante resultado sobre a série dos inversos dos primos. O primeiro a demonstrá-lo foi Euler[1] [Eu]. A demonstração que apresentaremos aqui é mais uma das preciosidades de Erdös[2] [Er]. O argumento é do tipo combinatório. Um corolário imediato é a divergência da série harmônica.

PROPOSIÇÃO 4.39. *Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência estritamente crescentes dos números primos ($p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \dots$). A série $\sum 1/p_n$ diverge.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\sum 1/p_n$ converge. Portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}.$$

Seja $M = 2^{2N}$. Temos que $M = \#A + \#B$, sendo

$$A = \big\{m \in \{1, \dots, M\}\ ;\ m \text{ é múltiplo de algum dos primos } p_N, p_{N+1}, \dots\big\},$$
$$B = \big\{m \in \{1, \dots, M\}\ ;\ m \text{ não é múltiplo de nenhum dos primos } p_N, p_{N+1}, \dots\big\}.$$

Vamos mostrar que $\#A < M/2$ e $\#B \le M/2$ chegando assim a uma contradição.

O número de múltiplos do primo p que são menores que M é $\lfloor M/p \rfloor$ (ver Definição 4.6 desta função). Segue que

$$\#A \le \sum_{n=N}^{+\infty} \left\lfloor \frac{M}{p_n} \right\rfloor \le \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{M}{p_n} < \frac{M}{2}.$$

Também é fácil ver que todo $m \in B$ pode ser escrito como $m = a \cdot b^2$ sendo a um produto de primos distintos, todos menores que p_N, e b^2 um produto de quadrados de primos, também menores que p_N. Existem exatamente 2^{N-1} números nas condições de a. Temos ainda que $b^2 \le m \le M$ e portanto $b \le \sqrt{M} = 2^N$. Segue que existem, no máximo, 2^N números nas condições de b. Portanto $\#B \le 2^{N-1} \cdot 2^N = 2^{2N-1} = M/2$. ■

4.8 Exercícios.

4.8.1 Sequências

⟹ **1.** Prove, utilizando a definição que:

[1]Leonhard Euler: ⋆ 15/04/1707, Basileia, Suíça - † 18/09/1783 - São Petersburgo, Rússia.
[2]Paul Erdös: ⋆ 26/03/1913, Budapeste, Hungria - † 20/09/1996, Warsaw, Polônia.

(a) $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n+1} = 0$; (b) $\lim_{n\to+\infty} (n+1)^2 = +\infty$.

2. Considere a sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$. Para quais $\beta \in \mathbb{R}$ existe subsequência convergindo para β? ([Sp] p.380 no.2)

3. Identifique a função $f(x) = \lim_{n\to+\infty} (\lim_{k\to+\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k})$. ([Sp] p.381 no. 5 e [Hd])

$\Longrightarrow$ **4.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Prove (utilizando a definição) que:
(a) se $|x_n| \to 0$, então $x_n \to 0$; (b) se $x_n \to x$, então $|x_n| \to |x|$;
(c) prove que a recíproca de (b) é falsa.
(d) se $x_n \to +\infty$ e $c > 0$, então $c \cdot x_n \to +\infty$.

$\Longrightarrow$ **5.** Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes para x e y, respectivamente. Prove que:
$\Longrightarrow$(a) $x_n - y_n \to x - y$; (b) se $y \neq 0$, então $x_n/y_n \to x/y$;
$\to$(c) $(x_n)^k \to (x)^k$ qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow$ **6.** Sejam $y \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in \mathbb{R}$.
$\Longrightarrow$(a) Prove que se $y < x$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y < x_n$ para todo $n \geq N$.
(b) Prove que se $x < y$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y$ para todo $n \geq N$.
(c) Prove que se $x_n \geq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \geq y$;
(d) Se $y < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então podemos afirmar que $y < x$?

$\Longrightarrow$ **7.** Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências convergentes para x e y, respectivamente. Suponhamos que $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que
(a) $x \leq y$; (b) **(Teorema do Sanduíche)** se $x = y$, então $z_n \to x$.

8. Prove (utilizando somente definição) que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy, então é limitada.
Observação: Seria fácil provar usando o Teorema 4.7, p.57, mas objetivo aqui é usar somente a definição de sequência de Cauchy.

9. Prove que se $x_n \to a$ então existe subsequência monótona $x_{n_k} \to a$.
Dica: $\{n;\ x_n \geq a\}$ ou $\{n;\ x_n \leq a\}$ é infinito.

10. Sejam $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}, (m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estritamente crescentes e tais que $\{n_k\ ;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k\ ;\ k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se, e somente se, as subsequências $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergem para x.

11. Seja $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ uma sequência crescente. Prove que
(a) se $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então ela é constante a partir de um certo termo;
(b) se $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente, então $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Conclua que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ não é limitada superiormente.

12. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida indutivamente por $x_1 = 0$ e

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prove que
(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente; (b) $x_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$; (c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.
Determine $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

$\Longrightarrow$ **13.** Considere $a_n = \sqrt[n]{a}$ com $a > 0$. Prove que:

(a) é decrescente se $a > 1$ e crescente caso contrário;
(b) é limitada e portanto convergente;
(c) o limite é um.
Dica: ([C] cap.I, parag.5, p.31) Forma direta de provar que o limite é 1 é escrever $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ (p/ $a > 1$) com $h_n > 0$ e utilizar a desigualdade de Bernoulli $(1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n$. Se $a < 1$ escrever $\sqrt[n]{a} = 1/(1 + h_n)$.

$\rightarrow$ **14.** Considere $a_n = \sqrt[n]{n}$. Prove que:
(a) é monótona decrescente limitada inferiormente e portanto converge;
Dica: Para provar que é decrescente precisamos provar que $n^{n+1} > (n + 1)^n$ ou seja, que $n > (1 + 1/n)^n$ o que é verdade pois $(1 + 1/n)^n < 3$. Desta forma a sequência é decrescente para $n \geq 3$.
(b) converge para 1.
Dica1: Tome $n = 2^k$ e prove que a subsequência $b_k := a_{2^k}$ converge para 1.
Dica2: ([C] cap.I, parag.7, p.35) Forma direta de provar que o limite é 1 é escrever $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ e usar a desigualdade $(1 + h_n)^n \geq n(n - 1)h_n^2/2$.

15. Prove que a sequência $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$ converge para 1.
Dica: Veja dica2 do exercício anterior.

$\Longrightarrow$ **16.** Dado $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ definimos $\|v\|_p = \sqrt[p]{|a|^p + |b|^p}$. Prove que $\lim_{p\to\infty} \|v\|_p = \max(|a|, |b|)$. Isto justifica a definição $\|v\|_\infty = \max(|a|, |b|)$.

17. Prove que ([Sp] p.380 no.1):

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2 + 1} - \sqrt[4]{n + 1} = 0$; (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p + 1}$; (c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{n} = 0$, onde $\alpha(n)$ é o número de primos que dividem n.
Dica: (a) Prove que o limite de $\sqrt[8]{n^2 + 1} - \sqrt[8]{n^2}$ é 0. (c) Expanda $n!$.

$\Longrightarrow$ **18.** Seja $c = \sup X$. Prove que:
(a) existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to c$;
(b) podemos tomar uma sequência monótona no item (a).
Dica: exercício 15, p.50.

$\Longrightarrow$ **19.** Uma definição possível para o número "e" pode ser feita através do limite da sequência $a_n = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i!}$ quando n vai para o infinito. Prove que esta sequência é monótona crescente e limitada e portanto converge pela Proposição 4.8.
Dica: Para provar que é limitada use o fato que $i! > 2^i$ para todo $i \geq 4$.

$\Longrightarrow$ **20.** Uma definição possível para o número "e" pode ser feita através do limite da sequência $b_n = (1 + 1/n)^n$ quando n vai para o infinito. Prove que esta sequência é monótona crescente e limitada e portanto converge pela Proposição 4.8.
Dica: ([C]) Utilize o binômio de Newton e fatore adequadamente para obter que:

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - 1/n) + \frac{1}{3!}(1 - 1/n)(1 - 2/n) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - 1/n)(1 - 2/n) \cdots (1 - (n - 1)/n).$$

$\star$ **21.** (extra) Prove que as duas definições acima para "e" determinam o mesmo número real.
Dica: É claro que $b_n \leq a_n$. Portanto $\lim b_n \leq \lim a_n$. Para $p \in \mathbb{N}$ fixo,

$$b_n \geq 1+1+\frac{1}{2!}(1-1/n)+\frac{1}{3!}(1-1/n)(1-2/n)+\cdots+\frac{1}{p!}(1-1/n)(1-2/n)\cdots(1-(p-1)/n).$$

Fazendo $n \to \infty$ (e mantendo p fixo) o segundo membro tende a a_p. Logo $\lim b_n \geq a_p$. Passando o limite em p concluímos a desigualdade contrária.

$\star$ **22.** (extra) Prove que o número "e" definido nos exercícios acima é o único numero real cuja área entre $[1, e]$ e o gráfico da função $1/x$ é igual a 1.

Dica: Isto implica que $\log(e) = 1$. Da definição de derivada, $1/x = \lim_{h \to 0} 1/h \log(1 + h/x)$. Tomando $z = 1/x$ e exponenciando, $e^z = \lim_{h \to 0} (1 + zh)^{1/h}$. Para $z = 1$ obtemos o resultado ([C]).

$\star$ **23.** (extra) Objetivo desta atividade é aproximar a **função fatorial**. É fácil ver que $\left(\ddot\smile\right)$

$$n! = (1/2)(2/3)^2(3/4)^3\cdots((n-1)/n)^{n-1}n^n.$$

Logo $n! = n^n \prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{j}{j+1}\right)^j = n^n / \prod_{j=1}^{n-1}(1+1/j)^j$. Já sabemos que o termo $(1+1/j)^j$ tende para "e" quando j tende para infinito. Portanto $n! \approx n^n/e^{n-1} = e(n/e)^n$ (vide [Fe]). Utilizando esta aproximação, determine os limites, quando n vai para infinito, de:

(a) $n/n!$; (b) $n^5/n!$; (c) $e^n/n!$; (d) $n^{n/2}/n!$; (e) $n^{3n}/n!$; (f) $n^n/n!$.

Obs: Podemos definir "fatorial" de não-inteiros (e até mesmo de complexos) com a função gama de Euler definida no exercício 24, p.163.

Obs: Utilizando outro caminho (vide [C] p.361–364 ou [Sp] p.483) obtemos a **fórmula de Stirling**[1]: $n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{\theta n}$ com $|\theta| \leq 1/12$.

$\to$ **24.** Considere a sequência $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)$. Prove que ela é monótona, decrescente e limitada inferiormente. Seu limite é chamado de **constante gama de Euler**, que vale aproximadamente 0.5772156649. É um problema aberto se γ é racional ou irracional.

Dica: Use a definição de log através da integral $\ln(x) = \int_1^x dx/x$ e prove que $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$.

Obs: A constante gama de Euler está relacionada com a função gama de Euler, conforme exercício 24, p.163.

$\star$ **25.** (extra) A **sequência de Fibonacci**[2] $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ modela o crescimento no número de casais de coelhos (sem mortes). Cada casal, após 1 ano de maturação, dá origem a um novo casal. A população que nasce num instante de tempo é igual a população que

[1] James Stirling: $\star$ 05/1692, Garden, Escócia – † 05/12/1770, Edinburgh, Escócia.

[2] Leonardo Pisano Fibonacci: $\star$ 1170, Pisa, Itália – † 1250, Pisa, Itália

havia 2 anos antes devido ao tempo de maturação. Dividindo tudo por a_{n+1} chegamos a relação entre as razões das populações em anos sucessivos $r_k = 1 + 1/r_{k-1}$. Normalmente assumimos que $a_0 = a_1 = 1$ mas, de todo modo, como trate-se de população podemos supor somente que $a_0, a_1 > 0$

(a) Prove que (r_k) converge;

Dica: Prove que $1 < r_k < 2$. Além disso, para k par (ou ímpar), r_k é monótona. Expresse $r_{k+2} - r_k$ em função de r_{k+1} e r_{k-1}. Defina $c_k = |r_{k+1} - r_k|$, prove que $c_k \leq c_{k-1}/(1+\varepsilon)$.

(b) Determine, analiticamente (isto é, de forma exata), o limite desta sequência.

Dica: Passe ao limite dos dois lados e resolva a equação resultante. Encontraremos a famosa **razão áurea** $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618$, que aparece em Artes e em Biologia. Concluímos que $a_n \approx a_0 \Phi^n$.

$\rightarrow$ **26.** Aplicação de exponencial: Juros compostos contínuos. Suponha um capital c investido com juros anuais de k por cento ao ano. Colocando $\alpha = k/100$, após m anos, o valor total será $c(1+\alpha)^m$ (porque?). Agora se os juros forem computados mensalmente, a taxa mensal será de $\alpha/12$ e o total será, após um ano, $c(1+\alpha/12)^{12}$. E se quisermos computar por dia: $c(1+\alpha/365)^{365}$. Finalmente podemos computar por hora, minuto, segundo, etc. Qual será o total após um ano se computarmos juros compostos contínuos?

$\Longrightarrow$ **27.** Demonstre o Teorema 4.9, p.57 (Bolzano-Weierstrass) de outra forma. Como a_n é limitada, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$. Divida o intervalo $[-M, M]$ ao meio. Existirá uma infinidade de elementos da sequência em uma das metades. Proceda desta maneira para construir uma sequência de intervalos encaixantes cujo diâmetro vai para zero.

$\star$ **28.** (extra) Prove a versão 2D do Teorema de Bolzano: Toda sequência limitada no plano possui uma subsequência convergente.

Dica: Assuma, sem perda de generalidade, que a região é um quadrado. Divida a região em quatro e prove que em pelo menos uma delas existe um número infinito de termos.

$\star$ **29.** (extra) Definimos o limsup e o liminf de uma sequência de conjuntos por:

$$A_{\text{sup}} = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \quad \text{e} \quad A_{\text{inf}} = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right).$$

Caso $A_{\text{sup}} = A_{\text{inf}}$ definimos

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_{\text{sup}} (= A_{\text{inf}}).$$

Calcule limsup e liminf para:

(a) $A_n = (0, n)$; (b) $B_n = (n, \infty)$; (c) $C_n = \{(-1)^n\}$;
(d) $D_n = (-1/n, 1/n)$; (e) $E_n = (0, n \bmod 3)$; (f) $F_n = (n \bmod 4, n \bmod 6]$

Obs: Não é necessário topologia (noção de convergência) para estas definições.

$\star$ **30.** (extra) Prove que:

(a) $A_{\text{inf}} \subset A_{\text{sup}}$;

$\Longrightarrow$(b) $A_{\text{sup}} = \{x;\quad x \in A_n$ para uma infinidade de n's$\}$;

(c) $A_{\text{inf}} = \{x;\quad x \in A_n$ para todo $n > N_0\}$;

→(d) se $A_n \subset A_{n+1}$ então $A_{\text{sup}} = A_{\text{inf}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;
(e) se $A_{n+1} \subset A_n$ então $A_{\text{sup}} = A_{\text{inf}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

31. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada superiormente e que não tem valor de aderência. Prove que $x_n \to -\infty$.

♯ **32.** (difícil) Seja $G = \{n\sqrt{2} \bmod 1; \quad n \in \mathbb{N}\}$. Prove que:
(a) se $a, b \in G$ com $a > b$ então $a - b \in G$; (b) $\#G = \#\mathbb{N}$;
(c) existe $g_n \in G$ com $g_n \to g_0$;
Dica: Aplique o Teorema de Bolzano-Weierstrass.
(d) existe $h_n \in G$ com $h_n \to 0$; (e) $\inf G = 0$;
(f) G é denso em $[0, 1]$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ e $x \in [0, 1]$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|m\sqrt{2} \bmod 1 - x| < \varepsilon$.
Obs: Podemos trocar $\sqrt{2}$ por $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ qualquer. Ver exercício 36, p.101.

♯ **33.** (difícil) Prove que o conjunto dos valores de aderência da sequência $a_n = \operatorname{sen}(n)$ é $[-1, 1]$.
Dica: $n \bmod 2\pi$ é denso em $[0, 2\pi]$ pelo exercício anterior.

⋆ **34.** (extra) Seja (a_n) uma sequência. Defina $b_n = (1/n)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ (a média dos n primeiros termos da sequência).
(a) Prove que se (a_n) é convergente então (b_n) converge para mesmo limite que (a_n);
(b) Seja $a_n = (-1)^{n+1}$. Prove que $b_n \to 0$;
(c) Seja $a_n = n \bmod 2$. Prove que $b_n \to 1/2$;
(d) Seja $(a_n) = (0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots,)$. Prove que $b_n \to 2/3$.
Obs: Desta forma generalizamos o conceito de sequência convergente (no sentido de Cesáro[1], dita **césaro somável**). Uma aplicação importante é na convergência da série de Fourier.

♯ **35.** (difícil) Generalizando o exercício anterior, podemos tomar médias ponderadas com pesos distintos (ver [L] p.124 no.26). Mais precisamente **(matriz de Toeplitz[2])** sejam $q_{in} \in (0, 1)$ para $i, n \in \mathbb{N}$ com

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_{in} = 0$; (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q_{in} = 1$.

Defina $b_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} q_{in} a_i$. Prove que se (a_n) é convergente então (b_n) converge para mesmo limite que (a_n).
Dica: Assuma que a sequência converge para zero.
Obs: Caso (b_n) convirja dizemos que (a_n) é Toeplitz-convergente mesmo que (a_n) não convirja no sentido clássico.

♯ **36.** (difícil) Generalizando o exercício anterior (vide [R]) sejam $q_{in} \in \mathbb{R}$ (podem ser negativos) para $i, n \in \mathbb{N}$ e $M > 0$ independente de n tais que:

[1] Ernesto Cesáro: ⋆ 02/03/1859, Nápoles, Itália – † 12/09/1906, Torre Annunziata, Itália.
[2] Otto Toeplitz: ⋆ 01/08/1881, Breslau (agora Wroclaw, Polônia), Alemanha – † 15/02/1940, Jerusalém, Israel.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} q_{in} = 0$; (b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |q_{in}| < M$; (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} q_{in} = 1$.

Defina $b_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} q_{in}a_i$. Prove que se (a_n) é convergente então (b_n) converge para mesmo limite que (a_n).

Obs: Foi demonstrado por Steinhaus (veja [R]) que para (q_{in}) qualquer existe uma sequência limitada (a_n) tal que (b_n) não converge.

$\star$ **37.** (extra) Prove que se omitirmos o primeiro termo da sequência (a_n) nos exercícios anteriores, construindo uma sequência $(\widetilde{a}_n)$, então (b_n) converge para o mesmo valor que $(\widetilde{b}_n)$. Por indução podemos omitir um número finito de elementos da sequência.

$\star$ **38.** (extra) (outra prova da Proposição 4.14 ii) Prove que se $|x-x_0| < \min\left(\dfrac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right)$ e $|y-y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$ então $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$ ([Sp] p.19 no.20).

$\star$ **39.** (extra) (outra prova da Proposição 4.14 iv) Prove que se $y_0 \neq 0$ e $|y-y_0| < \min\left(\dfrac{|y_0|}{2}, \dfrac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right)$ então $y \neq 0$ e $\left|\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y_0}\right| < \varepsilon$ ([Sp] p.19 no.21).

$\star$ **40.** (extra) O objetivo deste exercício é provar o seguinte resultado: para todo $m \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ com $m \geq 2$ e $a \geq 0$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0$ e $x^m = a$. Tal x é dito **raiz** m**-ésima** de a e é denotado $\sqrt[m]{a}$ (ou simplesmente $\sqrt{a}$ no caso $m = 2$). Para isto considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida indutivamente por $x_1 = 1$ e

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - a}{mx_n^{m-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prove que

(a) a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^m$ é estritamente crescente em $[0, +\infty)$. Conclua a unicidade da raiz m-ésima de a;

(b) $y^m \geq x^m + mx^{m-1}(y-x) \quad \forall x, y \geq 0$; (c) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(d) $x_{n+1}^m \geq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$; (e) $x_{n+2} \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(f) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e o seu limite x verifica $x \geq 0$ e $x^m = a$.

Sugestão: Em 40(b) use 40(a) e considere separadamente os casos $x < y$, $x > y$ e $x = y$. Use ainda a seguinte igualdade:

$$\frac{y^m - x^m}{y - x} = y^{m-1} + y^{m-2}x + \cdots + yx^{m-2} + x^{m-1}.$$

Em 40(c) proceda por indução. Em 40(d) use 40(b) e em 40(e) use 40(d). Finalmente use a Proposição 4.8 em 40(f).

$\star$ **41.** (extra) (**Frações continuadas**[1] Parte I: vide [St]) Considere uma sequência (a_i) tal

[1]Introduzidas em 1613 por Pietro Antonio Cataldi: $\star$ 15/04/1548, Bologna, Itália – † 11/02/1626, Bologna, Itália.

que $a_i \geq 1$ para $i > 0$ (a_0 pode ser zero). Denotamos por $\langle a_0, \ldots, a_k \rangle$ a expressão

$$\langle a_0, \ldots, a_k \rangle := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \frac{1}{a_k}}}}}.$$

Seja $b_k = \langle a_0, \ldots, a_k \rangle$, definimos $\alpha = \langle a_0, a_1, \ldots, \rangle$ através do limite $\alpha = \lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to+\infty} \langle a_0, \ldots, a_k \rangle$. Prove que:

(a) $\langle 1, 1, 1, \ldots, \rangle = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ (a chamada razão áurea);
Dica: Defina $f(x) = 1 + 1/x$ e prove que se α é a fração continuada, $f(\alpha) = \alpha$.
(b) $\sqrt{2} = \langle 1, 2, 2, 2, \ldots, \rangle$; (c) $\sqrt{3} = \langle 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots, \rangle$.
Obs1: Obtemos a sequência de dígitos da fração continuada de $a > 0$ através do algoritmo:

0. Inicialize a com o número que queremos expandir em frações continuadas;
1. Prove $\lfloor a \rfloor$ (parte inteira do número a);
2. Se $a \in \mathbb{Z}$ então vá para o passo 3. Senão $a := 1/(a - \lfloor a \rfloor)$ e vá para o passo 1;
3. Prove a e pare. Neste caso a fração NÃO é continuada, e sim finita, pois $a \in \mathbb{Q}$.

Fazendo isto obtemos que $\pi = \langle 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, \ldots, \rangle$
$\gamma = \langle 0, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 13, 5, 1, 1, \ldots, \rangle$ $e = \langle 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, \rangle$.
Observe que destes, somente e possui um padrão.

Obs2: Truncamentos da fração continuadas fornecem a melhor aproximação racional com o menor denominador possível. Assim, como $\pi = \langle 3, 7, 15, 1, \ldots, \rangle$, obtemos que $\pi \approx 3 + 1/7 = 22/7$ ou $3 + 1/(7 + 1/15) = 333/106$ ou $3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/1)) = 355/113$ (erro de 10^{-6}!).

Obs3: A fração obtida satisfaz $|\alpha - p/q| < 1/q^2$, isto é, o erro cometido pela aproximação é menor que $1/q^2$. Assim, com erro menor que 10^{-2}, $\sqrt{2} \approx 17/12$, $\sqrt{3} \approx 19/11$, $e \approx 19/7$, $\gamma \approx 4/7$.

Obs4: A expansão em frações continuadas é periódica se, e somente se, o número é raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros.

⋆ **42.** (extra) (Frações continuadas Parte II) Seja $b_k = \langle a_0, \ldots, a_k \rangle$ (fração continuada) com $a_i \geq 1$ para $i > 0$ (a_0 pode ser zero). Nosso objetivo nesta sequência de exercícios é provar que a sequência b_k é convergente. Para isto é conveniente definir b_k e α_m^k de forma indutiva por: $b_k = \alpha_0^k$ e
$$\begin{cases} \alpha_m^k &= a_m + \dfrac{1}{\alpha_{m+1}^k}; \quad m < k \\ \alpha_k^k &= a_k. \end{cases}$$

Prove que:

(a) Para todo $k, j > m$, $\alpha_m^j - \alpha_m^k = \dfrac{\alpha_{m+1}^k - \alpha_{m+1}^j}{\alpha_{m+1}^j \alpha_{m+1}^k}$;

(b) $b_{k+2} - b_k = (-1)^k \dfrac{\alpha_k^{k+2} - \alpha_k^k}{\alpha_1^{k+2}\alpha_1^k \alpha_2^{k+2}\alpha_2^k \cdots \alpha_k^{k+2}\alpha_k^k}$;

(c) $|b_{k+1} - b_k| = \dfrac{(a_{k+1})^{-1}}{\alpha_1^{k+2}\alpha_1^k \alpha_2^{k+2}\alpha_2^k \cdots \alpha_k^{k+1}\alpha_k^k}$;

Dica: Para (a) utilize a definição de α_m^k. Para (b) e (c) utilize o item (a).
(d) $0 < b_k < a_0 + 1$, isto é, (b_k) é limitada;
(e) A sequência b_{2k} é crescente e b_{2k+1} é decrescente;

(f) Quando k vai para infinito, $b_{k+1} - b_k \to 0$;

Dica: Considere o conjunto $A = \{m \in \mathbb{N}; \quad a_m > 2\}$. Este conjunto pode ser finito ou infinito.

(g) Conclua que b_k é convergente.

Obs: Para provar a convergência não é necessário supor que $a_i \in \mathbb{N}$, embora isto ocorra na expansão em frações continuadas.

4.8.2 Séries

$\Longrightarrow$ **43.** Uma série pode ser:

(a) convergente; (b) absolutamente convergente. (c) condicionalmente convergente.

Faça um diagrama que mostre as implicações (tipo (a) $\Longrightarrow$ (b)). Caso não implique forneça exemplos.

$\Longrightarrow$ **44.** Determine se converge ou diverge cada uma das séries abaixo:

(a) $\sum \frac{1}{n^n}$; (b) $\sum \frac{n!}{n^n}$; (c) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (d) $\sum \frac{1}{1+n^2}$;

(e) $\sum \frac{n}{2^n}$; (f) $\sum \frac{n+2}{n(n+1)}$; (g) $\sum \frac{1}{(\log(n))^\alpha}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$;

(h) $\sum \frac{1}{\log n}$; (i) $\sum \frac{1}{n^2 \log n}$; (j) $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$;

(k) $\sum \operatorname{sen}^2(\pi(1 + 1/n))$; (l) $\sum \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$; (m) $\sum \frac{\log n}{n}$.

Dica: (b) $\leq 2/n^2$; (g) diverge; (k) use teorema do valor médio; (l) $(\log n)^{\log n} = n^{\log(\log n)}$ que é maior que 2 para n grande.

45. (representação decimal) Seja a_n sequência de inteiros entre 0 e 9. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ existe (e está entre 0 e 1) ([Sp] p.407 no.4(a)).

$\sharp$ **46.** (difícil) Determine se converge ou diverge cada uma das séries abaixo ([Sp] p.406 no.2):

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$.

Dica: (c) converge se $a < e$, diverge se $a > e$.

47. Determine, segundo o valor do parâmetro $a > 0$, a natureza da série

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} a^n.$$

$\Longrightarrow$ **48.** Seja $\sum x_n$ uma série convergente de termos positivos. Prove que

$\Longrightarrow$(a) $\sum x_n^2$ é convergente; (b) se $\liminf_{n\to+\infty} y_n > 0$, então $\sum \frac{x_n}{y_n}$ é convergente.

49. Suponha $x_n > 0$. Prove que se $\sum x_n$ converge (ou diverge) então $\sum \frac{x_n}{1+x_n}$ converge (ou diverge) ([Fi1] p.40, no.17).

$\rightarrow$ **50.** Use o resultado do exercício 3(f), p.27 para provar que a série harmônica diverge.

$\rightarrow$ **51.** Prove que o teste da razão e o teste da raiz não servem para decidir a convergência ou divergência da série $\sum \frac{1}{n^p}$ para qualquer p.

$\rightarrow$ **52.** Suponha que $x_n = \dfrac{p(n)n^r}{q(n)}$ com p e q polinômios e $r \in \mathbb{R}$.

(a) Prove que o critério da razão e da raiz não decidem convergência de $\sum x_n$;

(b) Enuncie e prove um teorema que garanta a convergência ou divergência de $\sum x_n$ em função dos graus dos polinômios e de r.

Dica: use critério da comparação.

$\rightarrow$ **53.** Prove que se $\sum x_n$ é absolutamente convergente e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\sum(x_n \cdot y_n)$ é absolutamente convergente.

54. Prove que se $\sum a_n$ é absolutamente convergente ([Sp] p.409 no.10 e 11):

(a) e b_n é subsequência de a_n então $\sum b_n$ é absolutamente convergente;

(b) $|\sum a_n| \le \sum |a_n|$.

$\Longrightarrow$ **55.** Prove que $\sum \dfrac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ é convergente. Você consegue generalizar este resultado para séries do tipo $\sum \dfrac{f(n)}{n^2}$, sob que hipótese sobre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

$\Longrightarrow$ **56.** Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências positivas tais que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Prove que $\sum x_n$ converge se, e somente se, $\sum y_n$ converge.

$\Longrightarrow$ **57.** O objetivo deste exercício é provar o **Critério de Leibniz**[1] que diz: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de números positivos convergente para 0, então a série $\sum(-1)^{n+1}x_n$ é convergente. Considere a sequência de somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ da série $\sum(-1)^{n+1}x_n$. Prove que

(a) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada;

(b) $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ são monótonas. Conclua que estas sequências são convergentes para o mesmo limite s;

(c) $\sum(-1)^{n+1}x_n$ é convergente.

$\Longrightarrow$ **58.** Use o Critério de Leibniz para dar um exemplo de uma série que é convergente mas não é absolutamente convergente.

59. Considere a série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$. Prove que:

(a) é convergente; (b) converge para $\ln 2$.

Dica: Expanda $\ln(x+1)$ utilizando série de Taylor.

$\Longrightarrow$ **60.** Considere a série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots$. Prove que:

(a) é convergente; (b) converge para $\frac{\pi}{4}$.

[1] Gottfried Wilhelm von Leibniz: $\star$ 01/07/1646, Leipzig, Alemanha - † 14/11/1716, Hannover, Alemanha.

Dica: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ e integre termo a termo a série $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$.

⋆ **61.** (extra) Podemos definir π como a área do círculo unitário (veja [C]). Podemos calcular seu valor através de um limite, utilizando o método da exaustão de Arquimedes da Seção 9.1. Seja a_m a área do polígono regular de m lados inscrito no círculo unitário.

(a) Prove que $a_{2m} = \frac{2}{m}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{2a_m}{m}\right)^2}}$;

(b) Prove que esta sequência é limitada e monótona (e portanto convergente);

(c) Utilize-a para aproximar π (comece com $m = 4$);

(d) Prove que os lados do polígono regular de 2^n lados circunscrito ao círculo unitário é relacionado aos lados do inscrito pelo fator $\cos(\pi/2^{n-1})$. Conclua que vale a estimativa: $a_{2^n} < \pi < a_{2^n}/\left(\cos(\pi/2^{n-1})\right)^2$.

→ **62.** Prove o Teorema 4.38, p.70: Seja $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente. Prove que existem reordenações (b_n) e (c_n) dos termos desta série tais que:

(a) $\sum b_n = +\infty$; (b) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer, $\sum c_n = \alpha$.

Dica: Divida a série em termos positivos e negativos. O somatório dos termos positivos (negativos) converge para $+\infty$ $(-\infty)$ e estes termos convergem para zero. No item (a) coloque termos positivos o suficiente para ultrapassar N e depois negativos que não deixem a soma menor que $N - 1$. Para o (b) faça a série alternar em torno de α.

♯ **63.** (difícil) Seja $\sum x_n$ uma série absolutamente convergente e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção. Seja $y_n = x_{f(n)}$ uma reordenação de x_n. Então $\sum y_n$ converge para o mesmo valor que $\sum x_n$.

→ **64.** Seja x_n uma sequência positiva não-crescente tal que $\sum x_n$ converge. Prove que $nx_n \to 0$ quando $n \to \infty$ ([Fi1] p.39, no.6. e [Sp] p.411 no.20).

Dica: $x_{2n} + \cdots + x_{n+1} \geq nx_{2n} = 1/2(2nx_{2n})$.

♯ **65.** (difícil) Suponha que $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergem. Prove que ([Sp] p.411 no.19 e [C] p.383):

(a) $\sum a_n b_n$ converge; (b) $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

66. Prove que se $\sum x_n$ converge com $x_n > 0$ então $\sum \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ converge ([Fi1] p.39, no.9).

Dica: $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz).

⋆ **67.** (extra) (generalize o teste da razão) Suponha que $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = r < 1$. Prove que $\sum x_n$ é convergente.

Obs: Pode-se provar que se $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ então $\sum x_n$ diverge. Existem critério semelhantes para o teste da raiz.

⋆ **68.** (extra) Suponha $x_n > 0$. Prove que se $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ existe então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ existe.

Obs: A recíproca é falsa. Isto mostra que o teste da raiz é melhor que o teste da razão.

$\rightarrow$ **69.** Vamos ver que para séries divergentes não vale a associatividade.

(a) Considere a série $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$. Associe os termos dois a dois de forma distinta para "provar" que $S = 0$ e $S = 1$ ao mesmo tempo. Por outro lado verifique que (S-1) + S=0. Conclua que $S = 1/2$. Explique.

(b) Determine (como em (a)) $L = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots +$.

Dica: Calcule $(L-1) + L$ e use o exercício anterior para concluir que $L = 1/4$.

$\sharp$ **70.** (difícil) Uma sequência (a_n) é dita de **variação limitada** se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$. Prove que se (a_n) for de variação limitada então (a_n) converge ([Fi1] p.214, no.1).

Dica: Prove que (a_n) é Cauchy usando que o rabo da série é menor que ε.

$\sharp$ **71.** (difícil) **(Teorema da condensação de Cauchy)** Seja x_n uma sequência positiva decrescente. Então $\sum x_n$ converge se, e somente se, $\sum 2^n x_{2n}$ converge. Aplique-o para provar que ([Sp] p.410 no.18 e [Fi1] p.36, teorema 1.11):

(a) $\sum n^{-p}$ converge; (b) a série harmônica diverge.

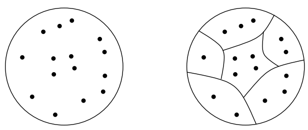
Capítulo 5

Construção dos conjuntos numéricos

5.1 Relação de equivalência.

Antes da definição formal vamos explorar o conceito de forma intuitiva. A metáfora que utilizaremos será a de uma prato, representando um conjunto, onde seus elementos são os átomos que o constituem. Joguemos este prato no chão para quebrá-lo! Ele se partirá e teremos cacos de diversos tamanhos no chão.

Pensemos agora neste novo conjunto, onde cada elemento é um caco (ao invés de um átomo). Denotaremos por C este conjunto dos cacos do prato, e por P o conjunto de átomos do prato. A ideia importante é ver que o conjunto P foi partido, formando um novo conjunto C, onde os elementos são cacos.



P $\qquad$ C

Agora temos que para quaisquer átomos a, b e c pertencentes ao prato P:

i. Cada átomo pertence a um caco.

ii. Se a pertence a um mesmo caco que b então b pertence ao mesmo caco que a.

iii. Se a pertence ao mesmo caco que b, b pertence ao mesmo caco que c, então a pertence ao mesmo caco que c.

Agora começaremos a definir os termos técnicos associados a estas ideias intuitivas. Uma relação é uma propriedade que dois elementos de um conjunto podem ter entre si. No caso em estudo a propriedade é pertencer ao mesmo caco. Denotaremos $a \sim b$ para dizer que o átomo a pertence ao mesmo caco que o átomo b.

DEFINIÇÃO 5.1. *Uma* **relação** *(binária) num conjunto A é um subconjunto $\mathcal{R} \subset A \times A$. Dados $a, b \in A$, dizemos que a e b estão relacionados se $(a, b) \in \mathcal{R}$, denotado por $a \sim b$.*

Exemplo 5.1. *Alguns exemplos de relações (verifique!). Defina $(a, b) \in \mathcal{R}$ se:*

- $a \leq b$ *para* $a, b \in \mathbb{R}$;

[0]Retirado de ÁLGEBRA: Um Guia de Estudo. Marco Cabral, 1991. Versão completa na internet.

- $b = f(a)$ *para* $a, b \in \mathbb{R}$ *e alguma* f*;*
- a *divide* b *para* $a, b \in \mathbb{N}$.

DEFINIÇÃO 5.2. *Uma relação "$\sim$" num conjunto A será dita* **relação de equivalência** *quando respeitar as seguintes propriedades para todo $a, b, c \in A$:*
i. $a \sim a$ (reflexiva);
ii. $a \sim b$ implica que $b \sim a$ (simétrica);
iii. $a \sim b$ e $b \sim c$ implica que $a \sim c$ (transitiva).

Leia novamente os itens (i), (ii) e (iii) relativos a átomo e caco dados acima e compare com a definição de relação de equivalência.

Exemplo 5.2. *A relação definida no conjunto das retas em $\mathbb{R}^2$, $r \sim s$ se, e somente se r e s são retas paralelas, é relação de equivalência (verifique!).*

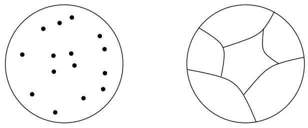
Vamos denotar para cada átomo $a \in P$, o caco a que o átomo pertence por $\bar{a} \in C$. Este caco será chamado **classe de equivalência** de a.

DEFINIÇÃO 5.3. *Seja $a \in A$, $\bar{a} = \{b \in A; \quad a \sim b\} \subset A$ será a* **classe de equivalência** *de $a \in A$.*

DEFINIÇÃO 5.4. *O* **conjunto quociente** *é o conjunto das classes de equivalência de um conjunto, denotado por $A/\!\sim = \{\bar{a}; \quad a \in A\}$ (lê-se A dividido pela relação de equivalência).*

Na nossa analogia, cada **classe de equivalência** de P (o prato) é um caco e o **conjunto quociente** é o conjunto dos cacos C, ou seja, $P/\sim = C$. Note a mudança de ponto de vista: cada elemento de P é um átomo e cada elemento de C é um caco. Embora cada caco seja composto de átomos, os elementos de P e de C são distintos. Assim não é verdade que $C \subset P$ ou $P \subset C$.

Deste modo, o conjunto A e $A/\!\sim$ não está contido um no outro, nem vice-versa pois seus elementos são distintos, conforme indicado na figura abaixo.



Exemplo 5.3. *(frações e $\mathbb{Q}$) Seja $F = \{a/b; \; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, o conjunto das frações. Aqui em F a barra (/) serve para separar os inteiros, NÃO é a divisão em $\mathbb{Q}$. São elementos distintos de F: $2/3, \; -8/-12, \; 7/4, \; 10/5, \; 3/2, \; \ldots$ Elementos distintos de F podem representar o mesmo elemento de $\mathbb{Q}$: $10/5 \neq 2/1$ (em F) mas ambos representam $2 \in \mathbb{Q}$.*

Existe uma $\varphi : F \to \mathbb{Q}$ que associa a cada fração um elemento de $\mathbb{Q}$. Mas não é injetiva pois $\varphi(1/2) = \varphi(2/4) = \varphi(-3/-6) = 0,5 \in \mathbb{Q}$. Queremos que $1/2, \; 2/4, \; -3/-6, \; \ldots$ sejam considerados equivalentes.

Definimos a seguinte relação de equivalência (verifique!) em F: $a/b \sim c/d$ se, e somente se $ad = bc$ (em $\mathbb{Z}$). Desta forma definimos $\mathbb{Q}$ por $F/\sim$. Ver detalhes na Seção 5.2.3. Exemplos de elementos de $F/\!\sim$: $\{7/3, \; 14/6, \; 21/9, \; \ldots\}, \{2/3, \; 4/6, \; 6/9, \; \ldots\}$.

5.2 Construção dos conjuntos numéricos.

5.2.1 Construção de $\mathbb{N}$.

Não procederemos a esta construção básica, que consiste em axiomatizar os inteiros $\mathbb{N}$ com os axiomas de Peano. Para detalhes veja exercício 5, p.27. Destes decorrem todas as propriedades de $\mathbb{N}$. Para isto consulte [Ha] p.. 46.

O mais importante na construção de Peano é a função sucessor, que a cada elemento de $\mathbb{N}$ associa o próximo. Seria como somar "mais um". Define-se a soma por indução com a função sucessor, e o produto através da soma. Define-se também uma relação de ordem.

5.2.2 Construção de $\mathbb{Z}$.

Dada a existência de $\mathbb{N}$ podemos construir $\mathbb{Z}$ do seguinte modo:

1. Defina o conjunto $Z' = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2. Defina em Z' a relação $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se $a + d = b + c$. Prove que é relação de equivalência.

3. Defina $\mathbb{Z} = Z'/\!\sim$.

4. Defina soma e produto em $\mathbb{Z}$ utilizando soma e produto em $\mathbb{N}$: $(a, b) +' (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) *' (c, d) = (a * c + b * d, b * c + a * d)$ Verifique que as operações estão bem definidas e que o elemento neutro da soma é $(0, 0)$.

5. Verifique que, ao contrário de $\mathbb{N}$, todo elemento terá inverso aditivo: dado (a, b) o inverso aditivo é (b, a).

6. Verifique, utilizando propriedades correspondentes em $\mathbb{N}$, que valem as propriedades: Comutatividade, associatividade, distributividade etc.

5.2.3 Construção de $\mathbb{Q}$.

Dada a existência de $\mathbb{Z}$ podemos construir $\mathbb{Q}$ do seguinte modo:

1. Defina o conjunto $Q' = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Q' é formado por pares ordenados (a, b) que serão denotados por a/b.

2. Defina em Q' a relação $(a/b) \sim (c/d)$ se, e somente se $a * d = b * c$ Prove que é relação de equivalência.

3. Defina $\mathbb{Q} = Q'/\!\sim$.

4. Defina soma e produto em $\mathbb{Q}$ utilizando soma e produto em $\mathbb{Z}$: $a/b *' c/d = (a * c)/(b * d)$ e $a/b +' c/d = (a * d + b * c)/(b * d)$.

5. Verifique se as operações estão bem definidas, isto é, tomando $x_1, x_2, y_1, y_2 \in Q'$, com $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ e $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$, verificar se $\bar{x}_1 +' \bar{y}_1 = \bar{x}_2 +' \bar{y}_2$ (mesmo para o produto). Não procederemos com esta verificação, mas o leitor poderá recorrer a [Ga], p.38.

Observação 5.1 *Quando falamos que $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ queremos dizer que tomamos dois representantes da mesma classe de equivalência, ou seja, $x_1 = a/b, x_2 = c/d$, com $a * d = b * c$. Por exemplo $x_1 = 9/6$ e $x_2 = 18/12$.*

6. Verifique que, ao contrário de $\mathbb{Z}$, todo elemento não nulo terá inverso multiplicativo: dado $a/b \in Q'$, $a \neq 0$, o inverso multiplicativo é b/a.

7. Verifique, utilizando propriedades correspondentes em $\mathbb{Z}$, que $(\mathbb{Q}, +', *')$ é um corpo.

5.2.4 Construção de $\mathbb{R}$.

1. Defina o conjunto R' das sequências de Cauchy de números racionais. Vamos denotar seus elementos por $(a_n), a_n \in \mathbb{Q}$. Note que $R' \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}; \mathbb{Q})$.

2. Defina em R' a relação $(a_n) \sim (b_n)$ se, e somente se $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Prove que é relação de equivalência.

3. Defina $\mathbb{R} = R'/\sim$.

4. Defina soma e produto em $\mathbb{R}$ utilizando soma e produto em $\mathbb{Q}$: $(a_n) +' (b_n) = (a_n + b_n)$ e $(a_n) *' (b_n) = (a_n * b_n)$.

5. Podemos definir uma relação de ordem em $\mathbb{R}$ à partir da relação de ordem em $\mathbb{Q}$, que por sua vez é definida à partir da relação de ordem de $\mathbb{N}$.

6. Resta verificar que estas operações estão bem definidas e que $\mathbb{R}$ é um corpo completo.

Observação 5.2 *A única razão para uma sequência de Cauchy não convergir é a existência de um "buraco" no espaço. Esta mesma construção é feita para se completar um espaço métrico qualquer.*

Podemos resumir o que fizemos com a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 5.5. *O conjunto $\mathbb{R}$ é formado por classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. Para se fazer operações (soma, produto, potenciação, raiz, etc) deve-se fazer operações correspondentes nas sequências de racionais para se obter nova sequência.*

Existem outras duas maneiras de construir $\mathbb{R}$:

(a) através de cortes de Dedekind, feito na Seção 3.2, p.36;

(b) como decimais infinitas, como costuma ser ensinado no ensino fundamental e médio, apresentado no exercício 17, p.89.

5.2.5 Construção de $\mathbb{C}$.

Definir em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ as operações de soma e produto destes pares de forma apropriada. Depois introduzir a notação $a + bi$.

Para outra construção ver exercício 15, p.88.

5.2.6 Outros corpos (quatérnios e octônios).

Seguindo o caminho de obter $\mathbb{C}$ a partir de $\mathbb{R}$, um corpo de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$, podemos ser tentados a obter corpos que contenham $\mathbb{R}$, porém de dimensão maior que 2. Podemos provar que isto é impossível para dimensão 3 (ver [Fel] p.3).

Hamilton conseguiu, em 1843, uma generalização dos números complexos: Os Quatérnios. Eles são um corpo (na verdade são somente anéis de divisão, pois num corpo o produto deve ser comutativo – vamos no entanto utilizar o termo corpo para os quatérnios e os octônios) de dimensão 4 sobre os reais onde a multiplicação não é comutativa. Para detalhes faça o exercício 16, p.88.

Logo após Hamilton, Cayley obteve, não exigindo comutatividade nem associatividade, os octônios (ou Bi-Quatérnios), corpo de dimensão 8 sobre os Reais.

Ainda houve muitas tentativas frustradas de se obter corpos com outras dimensões sobre os reais. Em 1877 Frobenius provou que exigindo-se associatividade os únicos corpos são: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e Quatérnios. Restou o problema para as não associativas, resolvidas em 1957 por Bott e Milnor e Kervaire : $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, Quatérnios e octônios. Mais detalhes em [Fel].

5.3 Exercícios.

$\rightarrow$ **1.** Para um conjunto A com dez elementos, defina uma relação de equivalência tal que:
(a) $A/\!\sim$ seja um conjunto unitário; (b) $A/\!\sim$ tenha a mesma cardinalidade que A;
(c) $A/\!\sim$ tenha 3 elementos.

$\Longrightarrow$ **2.** Seja $f : A \to B$ qualquer. Prove que a relação em A $x \sim y$ se $f(x) = f(y)$ é de equivalência.

$\Longrightarrow$ **3.** Cada uma das $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ abaixo define uma relação (de equivalência pelo exercício anterior) $(a, b) \sim (x, y)$ se $f(a, b) = f(x, y)$. Identifique (geometricamente) as classes de equivalência de cada item. Em todos os itens as classes possuem a mesma cardinalidade?
(a) $f(x, y) = y + 2x$; (b) $f(x, y) = x$; (c) $f(x, y) = y - x^2$; (d) $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.

4. Dados dois S, T triângulos defina a relação $S \sim T$ se S é congruente a T. Prove que esta relação é de equivalência.

5. A relação em $\mathbb{R}^2$, x e y retas , $x \sim y$ se, e somente se, $x \parallel y$ (x e y são retas paralelas) é relação de equivalência (verifique !).

6. Considere uma função $f : A \longrightarrow B$ sobrejetiva, e a seguinte relação de equivalência em A, $x \sim y$ se, e somente se, $f(x) = f(y)$. Defina uma nova $g : A/\!\sim \longrightarrow B$ da seguinte forma: $g(\bar{a}) = f(a)$. Verifique que por construção g é injetiva, e portanto bijetiva.

7. Defina em $\mathbb{R}^2$ a seguinte relação de equivalência: $(x, y) \sim (a, b)$ se, e somente se, $x = \pm a$.
(a) Prove que "$\sim$" é uma relação de equivalência;
(b) Calcule a classe de equivalência de $(1, 0)$;
(c) Descreva o espaço quociente $\mathbb{R}^2/\!\sim$.

8. Considere a relação em $\mathbb{Z}$: $a \sim b$ se, e somente se, $|a| = |b|$.
(a) Prove que é de equivalência; (b) Determine as classes; (c) Descreva $\mathbb{Z}/\!\sim$.

$\Longrightarrow$ **9.** Dados $x, y \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, defina a relação $x \sim y$ se $x - y$ é múltiplo de n. Prove que esta relação é de equivalência.

Obs: Quando $x \sim y$ denotamos por $x \overset{n}{\equiv} y$ (x é côngruo módulo n a y). O conjunto $\mathbb{Z}/\!\sim$ é denotado por $\mathbb{Z}_n$. Este é o chamado conjunto dos inteiros módulo n.

$\rightarrow$ **10.** Considere a relação em $\mathbb{R}$: $a \sim b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Z}$. Prove que:
(a) é de equivalência; (b) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ (círculo).

$\rightarrow$ **11.** Considere a relação em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, $(a - c, b - d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Prove que:
(a) é de equivalência; (b) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = T^1 = S^1 \times S^1$ (toro).

$\Longrightarrow$ **12.** Explique como efetuar as seguintes operações envolvendo números reais:
(a) 2^π. Mais precisamente, devemos multiplicar 2 por si mesmo quantas vezes e tirar quantas raízes depois?
(b) $\pi + \sqrt{2}$. Como efetuar a soma? qual o algoritmo? Alinhe os números pela casa decimal e ...

13. Seja $K \subset \mathbb{R}$. Considere a relação em $\mathbb{R}$: $a \sim b$ se, e somente se, $a - b \in K$.
(a) Prove que se K é um conjunto limitado superiormente ou inferiormente então a relação NÃO é de equivalência;
(b) Prove que se a relação é de equivalência então: $0 \in K$ e se $k \in K$ então $-k \in K$.

$\star$ **14.** (extra) Considere a relação em $\mathbb{R}$: $a \sim b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$.
(a) Prove que é de equivalência.
(b) Defina $\mathcal{V}$ (**conjunto de Vitali**[1] definido em 1905) como o conjunto formado por um elemento de cada classe de $[0, 1]/\mathbb{Q}$. Seja $\mathcal{V}_q = q + \mathcal{V}$. Prove que se $q \neq q'$ (com $q, q' \in \mathbb{Q}$) então $\mathcal{V}_q \cap \mathcal{V}_q' = \varnothing$.
(c) Prove que $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \mathcal{V}_q$. (d) Prove que $\mathcal{V}$ é não-enumerável.
(e) Prove que $[0, 1] \subset \bigcup_{q \in [-1,1] \cup \mathbb{Q}} \mathcal{V}_q \subset [-1, 2]$.
(f) Prove que $\mathcal{V}$ não pode ser medido (dizemos que não é mensurável).
Dica: Como $\mathcal{V}_q$ é translação de $\mathcal{V}$, ambos possuem mesma medida. Como por (b) os $\mathcal{V}_q$ são disjuntos, a medida da união é igual a soma das medidas. Por (e) a medida da união dos conjuntos de Vitali estaria entre 1 e 3. A medida de $\mathcal{V}$ não pode ser zero nem positiva! Contradição. Ver Wikipedia, Vitali set.

$\star$ **15.** (extra) Seja $\mathcal{P}[x]$ o espaço dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$. Prove que dados $p, q \in \mathcal{P}[x]$, a relação $p \sim q$ se $p - q$ é divisível pelo polinômio $x^2 + 1$ é de equivalência. Exemplo: $x^3 + 3x^2 + 5$ e $x^3 + x^2 + 3$. O quociente $\mathcal{P}[x]/\!\sim$ pode ser identificado com os números complexos! (vide livro de álgebra).

$\star$ **16.** (extra) **(corpo dos quatérnios)** Considere os "números" (quatérnios, generalização dos complexos feita por Hamilton[2] em 1843) da forma $a + bi + cj + dk$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Definimos a soma de dois quatérnios através da soma dos coeficientes reais. O produto, que não é comutativo, é definido através da propriedade distributiva e das regras: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.
(a) Prove que $ij = k$, $jk = i$ e $ki = j$.
Dica: Multiplique $ijk = -1$ nos dois lados por k com cuidado (produto não é comutativo).

[1] Giuseppe Vitali: $\star$ 26/08/1875, Ravenna, Itália – † 29/02/1932, Bologna, Itália.
[2] Sir William Rowan Hamilton: $\star$ 04/08/1805, Dublin, Irlanda – † 02/09/1865, Dublin, Irlanda.

(b) Prove que se associarmos o vetor $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ com o quatérnio $bi + cj + dk$ então o produto de dois quatérnios desta forma vai ter como parte real menos o produto escalar e como parte não-real o produto vetorial.

(c) Prove que $x^2 = -1$ possui infinitas soluções nos quatérnios.

(d) Dado um quatérnio não-nulo determine a fórmula do seu inverso multiplicativo.

Dica: Números complexos e conjugado.

$\sharp$ **17.** (difícil) **(construção dos números reais do ensino médio)** Defina um número real como o par $(a, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b_n \in \{0, \dots 9\}$ mas não existe M tal que $b_n = 9$ para todo $m > M$ (a sequência NÃO é constante igual a 9 para índices grandes). Intuitivamente o par representa o número $a + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n 10^{-n}$.

(a) Podemos definir uma relação de ordem no conjunto dos pares do seguinte modo. Dizemos que $(a, (b_n)) < (c, (d_n))$ se $a < c$ ou, se $a = c$ e para algum n $b_n < d_n$ mas $b_j = d_j$ para $1 \leq j < n$. Com esta definição prove que todo conjunto limitado possui supremum.

(b) Através do supremum definimos as operações (ver [Sp] p.505 no.2.).

Capítulo 6

Topologia de $\mathbb{R}$

6.1 Introdução.

A seguinte frase é facilmente aceita pela nossa intuição: "se x é um número próximo de 2, então x^2 é um número próximo de 4". Outra, "x^2 estará cada vez mais próximo de 4 quanto mais próximo x estiver de 2". Por esta razão dizemos que a função $f(x) = x^2$ (para todo $x \in \mathbb{R}$) é **contínua** no ponto 2. Muitas das funções que encontramos na Análise são funções contínuas. Queremos precisar o conceito de continuidade. Observe que para isto é necessário estabelecer o que queremos dizer com "x é um número próximo de 2".

Inicialmente, observe que a noção de "estar próximo" usada cotidianamente é uma noção subjetiva. Por exemplo, um aluno, morador de Niterói-RJ, que está no Pão-de-açúcar, perguntado onde é a Praia de Ipanema, possivelmente responderá: "fica longe, você tem que pegar um ônibus". Por outro lado, se o mesmo aluno viaja para Ribeirão Preto e lá o perguntarem em qual cidade ele mora, então, temendo que os ribeirenses não conheçam Niterói, ele resolve precisar sua resposta dizendo: "fica perto da cidade do Rio de Janeiro". Finalmente, o mesmo aluno numa viagem espacial, perguntado onde mora, responderá: "no planeta Terra, perto da Estrela Sol". Na primeira frase, o longe significa uns 4 km, na segunda frase o perto significa uns 15 km e, na terceira, o perto significa uns 10^5 km.

Em Matemática, como em qualquer outra ciência, as ideias intuitivas e subjetivas são muito bem vindas para ajudar a tornar conceitos abstratos em objetos mais "palpáveis". Tais ideias facilitam a compreensão e o desenvolvimento do conhecimento. Entretanto, em definições e demonstrações, devemos lidar apenas com conceitos e fatos rigorosos e objetivos. Ideias que dependam de interpretação do leitor, de acordo com sua opinião, não fazem parte de nenhuma teoria matemática. É claro que, mesmo em Matemática, opiniões e divergências de opiniões existem. Porém, uma demonstração (ou contraexemplo) acaba com qualquer polêmica sobre a veracidade de uma afirmação.

Para evitar esta subjetividade no conceito de proximidade, podemos refrasear o exemplo dizendo que "a medida que x se aproxima de 2, x^2 se aproxima de 4", ou "se x tende a 2, então x^2 tende a 4". O verbo *tender* nos faz pensar imediatamente no conceito de limite que já foi explorado no capítulo anterior. Resumindo: os conceitos de proximidade e limite estão intimamente relacionados.

A **Topologia** é o ramo da Matemática que trata destas questões de limite (e/ou proximidade). A Topologia da Reta, isto é, a Topologia de $\mathbb{R}$, é bem simples, para não dizer pobre. Nela, os abstratos conceitos da Topologia Geral ganham formas mais concretas e compreensíveis. Poderíamos usar estas formas simplificadas em nossa exposição porém, preferimos argumentos mais gerais para facilitar a (futura) passagem do leitor ao estudo da Topologia em contextos mais gerais. Mesmo que o leitor não venha a se especializar em Topologia, para se aprofundar em Análise ou Geometria serão necessários outros conhecimentos que ultrapassam os da Topologia da Reta.

6.2 Conjuntos abertos e conexos.

Intuitivamente, x é um ponto no interior de um conjunto A se os pontos *vizinhos* a x (tanto à esquerda quanto à direita) também estão em A. Mais precisamente temos:

DEFINIÇÃO 6.1. *Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é* **ponto interior** *de $A \subset \mathbb{R}$ (ou que A é* **vizinhança** *de x) se A contém um intervalo aberto do qual x é elemento. Neste caso, escrevemos $x \in A^\circ$, ou seja, A° é o conjunto dos pontos interiores de A, denominado* **interior** *de A.*

Observação 6.1 *É fácil ver que na definição anterior podemos substituir, sem perda de generalidade, o intervalo aberto arbitrário por um intervalo da forma $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$. Ou, em outros termos, $x \in A^\circ$ se, e somente se,*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad |y - x| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad y \in A.$$

Temos sempre $A^\circ \subset A$. Porém a inclusão inversa não é necessariamente verdadeira. Tomemos, por exemplo, $A = [0, 1]$. Temos que $1 \notin A^\circ$ pois todo intervalo aberto que contém 1 tem elementos maiores que 1 e portanto não está contido em A.

É trivial que todo ponto de um intervalo aberto pertence ao interior do intervalo. Ou seja, se A é um intervalo aberto e não vazio, então $A^\circ = A$. De maneira geral temos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 6.2. *Um conjunto A é* **aberto** *se todos os seus pontos são interiores, ou seja, se $A \subset A^\circ$ (neste caso, $A^\circ = A$).*

Como na Observação 6.1, p.92 temos que A é aberto se, e somente se,

$$\forall x \in A, \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad |y - x| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad y \in A.$$

Vamos introduzir aqui a notação de conjuntos para denotar intervalos. Ela é importante pois é mais compacta e generaliza os conceitos topológicos para o $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO 6.3. *Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ qualquer, denotamos por $B_\varepsilon(x_0)$ o conjunto (um intervalo aberto) $\{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \varepsilon\}$. Assim $B_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.*

Desta forma, $B_\varepsilon(x_0)$ é um intervalo centrado em x_0 de raio ε. Em $\mathbb{R}^n$, $B_\varepsilon(x_0)$ é uma bola centrada em x_0 de raio ε. Com esta notação podemos redefinir conjunto aberto de tal forma que a mesma definição seja válida em $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIÇÃO 6.4. *Um conjunto A é* **aberto** *se, e somente se,*

$$\forall x \in A, \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad B_\varepsilon(x) \subset A.$$

Demonstração. Deixo para o leitor. ∎

Exemplo 6.1. *O conjunto vazio é aberto! De fato, negar esta afirmação significa admitir que $\varnothing^\circ \subsetneq \varnothing$ e, em particular, admitir que existe $x \in \varnothing$.*

Exemplo 6.2. *O conjunto $[0,1]$ não é aberto pois, como já vimos, $1 \notin [0,1]^\circ$. Da mesma maneira, $0 \notin [0,1]^\circ$. Por outro lado, qualquer $x \in (0,1)$ é interior de $[0,1]$ ou seja $[0,1]^\circ = (0,1)$.*

As propriedades mais importantes dos conjuntos abertos são dadas no teorema abaixo.

TEOREMA 6.5. (propriedades de abertos) *Temos:*
i. os conjuntos $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ são abertos;
ii. toda união de abertos é aberta;
iii. toda interseção finita de abertos é aberta.

Demonstração. (i) Já foi provado.

(ii) Sejam $(A_i)_{i\in I}$ uma família de abertos e $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Se $x \in A$, então existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Como A_i é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A_i \subset A$. Segue que A é aberto.

(iii) Basta mostrar que se A_1 e A_2 são dois conjuntos abertos então $A = A_1 \cap A_2$ também é aberto (o caso geral segue por indução). Se $A = \varnothing$, então não há nada mais a ser demonstrado. Suponhamos $A \neq \varnothing$ e seja $x \in A$. Temos que $x \in A_1$ e $x \in A_2$, logo, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $B_{\varepsilon_i}(x) \subset A_i$ $(i = 1, 2)$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ obtemos que $B_\varepsilon(x) \subset A$, ou seja, A é aberto. ∎

DEFINIÇÃO 6.6. *Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$ é um* **conjunto conexo** *se A é um dos intervalos da Definição 3.29, p.47.*

Em Topologia mais geral (em $\mathbb{R}^n$ por exemplo), definimos **conjunto conexo** utilizando apenas conjuntos abertos. Para detalhes ver exercício 22, p.100.

6.3 Conjuntos fechados e discretos.

DEFINIÇÃO 6.7. *Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é* **ponto de aderência** *de $F \subset \mathbb{R}$ se existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ tal que $x_n \to x$. Neste caso, escrevemos $x \in \overline{F}$, ou seja, $\overline{F}$ é o conjunto dos pontos de aderência de F e também é chamado de* **fecho** *de F.*

É fácil ver que x é ponto de aderência de F se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x)$ tem pontos de F.

Temos sempre $F \subset \overline{F}$. Porém a inclusão inversa não é necessariamente verdadeira. Tomemos, por exemplo, $F = [0, 1)$. Temos $1 \in \overline{F}$ pois a sequência $x_n = 1 - 1/n$ é convergente para 1 e além disto $x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para x. Sabemos que se $x_n \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \geq a$. Do mesmo modo, se $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \leq b$. Conclui-se que uma sequência convergente de pontos em um intervalo fechado tem o seu limite no intervalo. Ou seja, se F é um intervalo fechado e não vazio, então $\overline{F} = F$.

DEFINIÇÃO 6.8. *Um conjunto F é* **fechado** *se todos os seus pontos de aderência pertencem a F, ou seja, se $\overline{F} \subset F$ (que neste caso implica $F = \overline{F}$).*

Exemplo 6.3. *O conjunto vazio é fechado por vacuidade! De fato, negar esta afirmação significa admitir que existe ponto de aderência que não pertence a $\varnothing$. Mas o vazio não possui pontos para violar esta condição. Logo a afirmação é satisfeita por vacuidade.*

Exemplo 6.4. *O conjunto $(0, 1)$ não é fechado pois, como já vimos, $1 \in \overline{(0, 1)}$. Da mesma maneira $0 \in \overline{(0, 1)}$. Por outro lado, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, 1)$ é convergente para x então $x \in [0, 1]$. Segue que $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$.*

O conjunto vazio (e também $\mathbb{R}$) são exemplos de conjuntos que são abertos e fechados simultaneamente. Isto nos mostra, que ao contrário do que podem sugerir as palavras "aberto" e "fechado", estes dois conceitos não são excludentes. Além disso um conjunto pode não ser aberto nem fechado. Refraseando Observação 3.4, p.48, conjuntos **não são portas** $\left(\ddot{\smile}\right)$. Porém, existe uma relação estreita entre conjuntos abertos e conjuntos fechados.

PROPOSIÇÃO 6.9. (aberto é complementar de fechado) *Um conjunto é aberto se, e somente se, seu complementar é fechado.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $F = A^{\complement}$.

Suponhamos que A seja aberto e mostremos que F é fechado. Para isto, devemos mostrar que $\overline{F} \subset F$. Se, por absurdo, existir uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ convergente para $x \notin F$ (*i.e.*, $x \in A$), então, como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Desta maneira, para n suficientemente grande, temos que $x_n \in B_\varepsilon(x) \subset A$. Isto é absurdo pois $x_n \in F = A^{\complement}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos agora que F seja fechado e mostremos que A é aberto. Se A não for aberto, então existirá $x \in A$ tal que $x \notin A^\circ$. Assim, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x)$ não estará contido em A. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon = 1/n$ concluímos que existe

$x_n \in B_{1/n}(x)$ tal que $x_n \notin A$, ou seja, $x_n \in F$. Vemos facilmente que $x_n \to x$ e, portanto, $x \in \overline{F}$. Como F é fechado, temos $x \in F$, o que é absurdo pois $x \in A = F^{\complement}$. ■

Observação 6.2 *Tomando complementares, o Teorema 6.5 nos diz que*
i. os conjuntos $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ são fechados;
ii. toda união finita de fechados é fechada;
iii. toda interseção de fechados é fechada.

Um conceito relacionado ao de ponto de aderência e de muita importância é dado na definição seguinte.

DEFINIÇÃO 6.10. *Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é* **ponto de acumulação** *de $F \subset \mathbb{R}$ se existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F \setminus \{x\}$ tal que $x_n \to x$, ou, em outros termos, se $x \in \overline{F \setminus \{x\}}$.*

A ideia desta definição é que se x é ponto de acumulação de F então x pode ser "aproximado" por elementos de F, diferentes de x.

Segue imediatamente da definição que todo ponto de acumulação é também ponto de aderência. Porém, a recíproca não é verdadeira. Por isto, consideramos também a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 6.11. *Se x é ponto de aderência de F e não é ponto de acumulação, então x é dito* **ponto isolado** *de F.*

DEFINIÇÃO 6.12. *Um conjunto é* **discreto** *se todos os seus pontos são isolados.*

Tente entender o porquê desta nomenclatura.

6.4 Conjuntos compactos.

A próxima definição é apenas uma entre várias maneiras de se definir conjuntos compactos em $\mathbb{R}$. Estas várias definições, dependendo do contexto (*i.e.*, do espaço topológico), podem não ser equivalentes (neste caso, a definição dada neste texto é a da chamada compacidade sequencial). Porém, como já dissemos anteriormente, a topologia da reta é bastante simples e neste contexto tais definições são equivalentes.

Dependendo dos objetivos de cada um, pode-se usar uma ou outra forma de compacidade. A escolha pela definição seguinte é, de certa maneira, uma escolha pessoal do autor baseada em sua própria experiência em Matemática. É provável que outro autor, mais interessado em Geometria do que em Equações a Derivadas Parciais, prefira outra definição.

DEFINIÇÃO 6.13. *Um conjunto não-vazio $K \subset \mathbb{R}$ é* **compacto** *se toda sequência de pontos de K tem uma subsequência convergente para um ponto de K.*

Vejamos uma caracterização bem simples e de uso prático para conjuntos compactos.

[1]Heinrich Eduard Heine: ⋆ 16/03/1821, Berlim, Alemanha - † 21/10/1881, Halle, Alemanha.
[2]Félix Edouard Justin Emile Borel: ⋆ 07/01/1871, Saint Affrique, França - † 03/02/1956, Paris, França.

TEOREMA 6.14. (Heine[1]-Borel[2]) *Um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, ele é fechado e limitado.*

Demonstração. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, toda sequência num conjunto limitado tem subsequência convergente. Se além de limitado o conjunto é fechado, então o limite desta subsequência será um elemento do conjunto. Isto mostra que todo fechado e limitado é compacto.

Suponhamos agora que $K \subset \mathbb{R}$ seja compacto e mostremos que ele é limitado e fechado. Sejam $x \in \overline{K}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ convergente para x. Como qualquer subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a x (Proposição 4.5), graças à compacidade, temos $x \in K$. Segue que K é fechado. Suponhamos, por absurdo, que K não seja limitado, digamos, superiormente. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{K}$ tal que $x_n > n$. Temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ e $x_n \to +\infty$. Portanto, todas as suas subsequências tendem a $+\infty$ (veja a Observação 4.1, p.59) e, portanto, não são convergentes. Isto contradiz a compacidade de K. ■

A última demonstração (sobretudo a primeira parte) é digna de um livro de Topologia Geral. Em vários destes livros as demonstrações usam muito texto e poucos símbolos (algarismos, em particular). Na opinião do autor, além da importância incontestável da Topologia Geral, estes livros também são referências perfeitas para mostrar aos leigos em Matemática que, ao contrário do que eles pensam, nós não somos pessoas que trabalham fazendo contas com algarismos (números, como eles dizem)! $\left(\ddot{\smile}\right)$

Terminamos esta seção com outra caracterização de compactos. Mesmo não sendo útil neste curso, tal caracterização é importantíssima. Em Topologia Geral, esta caracterização é a definição de compacidade. Antes, definiremos cobertura aberta.

DEFINIÇÃO 6.15. *Uma* **cobertura aberta** *para K é uma coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos abertos tais que*

$$K \subset \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$$

TEOREMA 6.16. (caracterização de compactos por cobertura) *Um conjunto K é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta $\mathcal{C}$ para K tem subcobertura finita, ou seja, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finita que é cobertura para K.*

Antes de demonstrar este teorema, em toda sua generalidade, mostraremos um caso particular.

TEOREMA 6.17. (Borel-Lebesgue[3]) *Se $\mathcal{C}$ é um cobertura aberta para $[a, b]$, então ela tem subcobertura finita.*

Demonstração. Note a semelhança desta prova com a apresentada no exercício 27, p.74.

Procedemos por absurdo, supondo que $\mathcal{C}$ não tenha subcobertura finita.

Dividindo o intervalo $[a, b]$ no seu ponto médio obtemos dois intervalos de comprimento $(b-a)/2$. Para pelo menos um destes intervalos, que denotaremos $[a_1, b_1]$, não existe subcobertura de $\mathcal{C}$ finita. De fato, se existissem $\mathcal{C}', \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$ finitas que fossem coberturas para o

[1]Henri Léon Lebesgue: ⋆ 28/05/1875, Beauvais, France - † 26/07/1941, Paris, França.

primeiro e para o segundo intervalo, respectivamente, então $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$ seria uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$ para $[a, b]$. Aplicamos o procedimento anterior ao intervalo $[a_1, b_1]$. Continuando indefinidamente este processo construímos uma sequência $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos encaixantes. Além disto, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = (a - b)/2^n$ e não existe subcobertura finita de $\mathcal{C}$ para $[a_n, b_n]$.

Graças ao Teorema dos Intervalos Encaixantes, temos que $\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$. Mais precisamente, esta interseção só tem um elemento x. De fato, suponhamos que exista $y \neq x$ tal que $y \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue $0 < |x - y| \leq b_n - a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é absurdo já que $b_n - a_n \to 0$.

Ora, $x \in [a, b]$, logo, existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Tomando $N \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de modo que $b_N - a_N < \varepsilon$ temos $[a_N, b_N] \subset B_\varepsilon(x) \subset A$. Portanto, tomando $\mathcal{C}' = \{A\}$, temos que $\mathcal{C}'$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$ para $[a_N, b_N]$. Absurdo! ■

Demonstração. (do Teorema 6.16) Suponhamos que K seja compacto (portanto limitado e fechado). Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de K. Como K é limitado podemos tomar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $K \subset [a, b]$. Como K é fechado, o conjunto $K^\complement$ é aberto. Temos claramente que $\mathcal{C} \cup \{K^\complement\}$ é uma cobertura aberta de $[a, b]$. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finita tal que $K \subset [a, b] \subset \bigcup\limits_{A\in\mathcal{C}'} A \cup \{K^\complement\}$. Daí, concluímos que $K \subset \bigcup\limits_{A\in\mathcal{C}'} A$.

Suponhamos agora que toda cobertura aberta de K possua subcobertura finita. Para todo $x \in K$ definimos $A_x = B_1(x)$. A coleção $\{A_x \ ; \ x \in K\}$ é uma cobertura aberta de K. Por hipótese, existem $x_1 < \cdots < x_n \in K$ tais que $K \subset A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n}$. Logo, $K \subset (x_1 - 1, x_n + 1)$ e, portanto, K é limitado.

Vamos mostrar que $K^\complement$ é aberto para concluir que K é fechado e, portanto, compacto (pois já sabemos que ele é limitado). Seja $y \in K^\complement$. Para todo $x \in K$ definimos

$$A_x = \left(x - \frac{|x-y|}{2}, x + \frac{|x-y|}{2}\right).$$

Temos que $(A_x)_{x\in K}$ é uma cobertura aberta de K tal que $y \notin A_x$ qualquer que seja $x \in K$. Por hipótese, existem $x_1, \ldots, x_n \in K$ tais que $K \subset A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n}$. Tomando

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|x_1 - y|, \ldots, |x_n - y|\},$$

é fácil ver que $B_\varepsilon(y) \subset K^\complement$. Mostramos que $y \in (K^\complement)^\circ$ e, portanto, $K^\complement$ é aberto. ■

6.5 Conjuntos densos.

DEFINIÇÃO 6.18. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ com $A \subset B$. Dizemos que A é* **denso** *em B se $B \subset \overline{A}$.*

Em outros termos, se $A \subset B$, então A é denso em B se, e somente se, para todo $x \in B$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$. A próxima proposição nos fornece uma condição necessária e suficiente para a densidade.

PROPOSIÇÃO 6.19. (densos e abertos) *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Temos que A é denso em B se, e somente se, todo aberto que contém algum ponto de B também contém algum ponto de A.*

Demonstração. Suponhamos que A seja denso em B. Sejam $x \in B$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente para x. Se I um aberto contendo x, então para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos $x_n \in I$. Portanto $I \cap A \neq \varnothing$.

Por outro lado, suponhamos que todo aberto que intercepta B também intercepte A. Seja $x \in B$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o intervalo aberto $(x - 1/n, x + 1/n)$ contém $x \in B$ e, portanto, contém algum ponto $x_n \in A$. Definimos desta maneira uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$. Segue que $x \in \overline{A}$. Logo, $B \subset \overline{A}$. ■

Vejamos um dos exemplos mais importantes de conjuntos densos em $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.5. *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. De fato, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostremos que $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$. Se $0 \in (a, b)$, então não há mais nada a ser demonstrado. Se $0 \notin (a, b)$, então $0 \leq a$ ou $b \leq 0$. Consideremos o caso $a \geq 0$ (o caso $b \leq 0$ é análogo). Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/(b - a)$. Seja $m \in \mathbb{N}$ o menor natural tal que $m > na$, ou seja, $m \in \mathbb{N}$ satisfaz*

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m}{n}.$$

Para concluir que $m/n \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$ basta mostrar que $m/n < b$. Suponhamos, por absurdo, que $m/n > b$. Neste caso,

$$\frac{m-1}{n} < a < b < \frac{m}{n} \quad \Longrightarrow \quad b - a < \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} \quad \Longrightarrow \quad b - a < \frac{1}{n}.$$

Contradizendo $n > 1/(b - a)$.

Todos os conceitos básicos de topologia podem ser definidos utilizando somente o conceito de conjunto aberto. De fato, um conjunto é:

(a) **fechado**, pelo Teorema 6.9, se seu complementar é aberto;

(b) **compacto**, pelo Teorema 6.16, se toda cobertura aberta possui subcobertura finita;

(c) **denso** em B, pela Proposição 6.19, se todo aberto que intercepta B também intercepta o conjunto;

(b) **conexo**, pelo exercício 22, p.100, se não é união disjunta de abertos não-vazios.

Este é um ponto de vista mais avançado: introduzir conjuntos abertos e definir fechado, compacto, denso e conexo diretamente, sem usar, por exemplo, sequências.

6.6 Exercícios.

6.6.1 Conjuntos abertos, conexos, fechados e discretos

$\Longrightarrow$ **1.** Seja $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$. Determine: (a) $\overline{A}$; (b) A°; (c) $\overline{A^\complement}$; (d) $(A^\complement)^\circ$.

$\Longrightarrow$ **2.** Determine: (a) $\overline{\mathbb{Q}}$; (b) $(\mathbb{Q} \cap [0,1])^\circ$; (c) $\mathbb{N}^\circ$; (d) $\mathcal{A}^\circ$ (algébricos); (e) $\overline{\mathcal{A}}$.

$\Longrightarrow$ **3.** Calcule o fecho de $\left\{\dfrac{m}{n};\ m,n \in \mathbb{N},\ m \le n\right\}$.

$\Longrightarrow$ **4.** Para cada um dos conjuntos abaixo, determine se é: fechado? aberto? discreto?
(a) $A = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots\right\}$; (b) $B = A \cup \{0\}$; (c) C um conjunto finito;
(d) $\mathbb{N}^\complement$; (e) $\mathbb{Z}$; (f) $\mathbb{Q}^\complement$.

5. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e A a união de todos os subconjuntos abertos de X. Prove que $A = X^\circ$.

$\rightarrow$ **6.** Prove que X° é o maior subconjunto aberto de X, ou seja, prove que:
(a) X° é aberto; (b) para todo aberto A tal que $A \subset X$, temos $A \subset X^\circ$.

7. Prove que $\overline{X}$ é o menor subconjunto fechado de X, ou seja, prove que:
(a) $\overline{X}$ é fechado; (b) para todo fechado F tal que $X \subset F$, temos $\overline{X} \subset F$.

$\Longrightarrow$ **8.** Prove que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto (ver Definição 6.2, p.92) se, e somente se:
(a) $\forall x \in A, \quad \exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$;
(b) A é união enumerável de intervalos abertos;
$\Longrightarrow$(c) $\forall a \in A$ e toda sequência $x_n \to a$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n > N$.
Obs: Desta forma podemos definir conjunto aberto através de sequências.

$\rightarrow$ **9.** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Prove que $(X^\circ)^\complement = \overline{X^\complement}$.

$\Longrightarrow$ **10.** Defina a distância de $a \in \mathbb{R}$ até um conjunto não-vazio X por $d(a, X) = \inf\{|x-a|;\quad x \in X\}$. Prove que ([L] p.149 no.29):
(a) $d(a, X) = 0$ <u>sse</u> $a \in \overline{X}$;
(b) Se X é fechado então para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $d(a, X) = |a - x|$.

11. Prove que se A é limitado então $\overline{A}$ é limitado e $\sup(A) = \sup(\overline{A})$.

12. Prove os itens (ii) e (iii) da Observação 6.2, p.95 a partir das definições de conjunto fechado e ponto de aderência.

13. Prove que A é discreto <u>sse</u> $\forall x \in A$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_{\varepsilon_x}(x) \cap A = \{x\}$.

$\star$ **14.** (extra) Prove que se A é discreto, então A é enumerável.
Dica: Para todo $x \in A$ tomemos ε_x como no exercício anterior. Sejam $x, y \in A$ com $x \ne y$ e mostremos que $B_{\varepsilon_x/3}(x) \cap B_{\varepsilon_y/3}(y) = \varnothing$. Complete com exercício 31, p.29.

15. Supondo que A é discreto, prove que se A é:
(a) fechado, então A é finito; (a) aberto, então A é vazio.

$\Longrightarrow$ **16.** Dê um exemplo de família de abertos cuja interseção não é aberta. Dê um exemplo de família de fechados cuja união não é fechada.

$\rightarrow$ **17.** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Prove que são equivalentes:
(a) para todo conjunto aberto A tal que $x \in A$, temos que $X \cap A \ne \varnothing$;
(b) para todo intervalo aberto I tal que $x \in I$, temos $X \cap I \ne \varnothing$;
(c) para todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $|x - y| < \varepsilon$;
(d) $x \in \overline{X}$.

18. Investigue (prove ou dê um contraexemplo) se:
(a) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$; (b) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

$\Longrightarrow$ **19.** Prove que se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto então:
(a) $A - \mathbb{Z}$ é aberto; (b) $A - F$ é aberto se F é fechado.

$\star$ **20.** (extra) Em topologia definimos a **fronteira** de um conjunto A por $\partial A = \overline{A} - A^\circ$. Calcule:
(a) $\partial\mathbb{Z}$; (b) $\partial\mathbb{Q}$; (c) $\partial(\mathbb{R} - \mathbb{Z})$.

$\star$ **21.** (extra) Prove que:
(a) A é aberto <u>sse</u> $\partial A \cap A = \varnothing$; (b) A é fechado <u>sse</u> $\partial A \subset A$;
(c) ∂A é um conjunto fechado; (d) $\overline{A} = A \cup \partial A$; (e) $A^\circ = A - \partial A$;
(f) $x \in \partial A$ <u>sse</u> toda bola B contendo x, $B \cap A \neq \varnothing$ e $B \cap A^\complement \neq \varnothing$.

$\star$ **22.** (extra) (definição de conexo) A definição mais geral de **conjunto conexo** é a seguinte. Dizemos que A, B é uma **cisão** de J se:
(i) A, B são abertos; (ii) $J \subset A \cup B$; (iii) $A \cap B = \varnothing$.
Dizemos que a cisão A, B é **trivial** se $J \cap A = \varnothing$ ou $J \cap B = \varnothing$. Dizemos que J é **conexo** se toda cisão de J é trivial. Prove que:
(a) são desconexos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$; (b) se J é conexo então J é um intervalo;
(c) se J e K são conexos então $J \cap K$ é conexo; (d) se J é conexo então $\overline{J}$ é conexo;
(e) Dê exemplo em que $\overline{A}$ é conexo mas A não é conexo.
Dica: (a) obtenha cisões não-triviais; (b) $a = \inf J$ e $b = \sup J$.

6.6.2 Conjuntos compactos

$\Longrightarrow$ **23.** Sejam $K_i \subset \mathbb{R}$ compactos para $i \in \mathbb{N}$ e F fechado. Prove que:
(a) $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ é compacto; (b) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ é compacto; (c) $F \cap K_1$ é compacto.

24. Sejam $F_n \subset \mathbb{R}$ uma sequência de conjuntos não-vazios satisfazendo $F_n \subset F_{n-1}$. Dê exemplos mostrando que $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i$ pode ser vazia se ([L] p.148 no.22):
(a) os F_i's são apenas fechados; (b) os F_i's são apenas limitados.

$\Longrightarrow$ **25.** Para cada um dos conjuntos abaixo, dê um exemplo de uma cobertura aberta que não possua subcobertura finita:
(a) $(0, 1]$; (b) $[0, +\infty)$; (c) $\mathbb{Z}$; (d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

$\rightarrow$ **26.** Seja q_i enumeração de $\mathbb{Q}$. Prove que as bolas $B_{\frac{1}{2^i}}(q_i)$ cobrem $\mathbb{Q}$ mas não cobrem $\mathbb{R}$.

27. Seja q_i enumeração de $\mathbb{Q}$. Determine se as bolas $B_{\frac{1}{i}}(q_i)$ cobrem $\mathbb{R}$.
Dica: depende da enumeração. Use exercício anterior.

$\rightarrow$ **28.** Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de abertos de $\mathbb{R}$ disjuntos dois a dois, i.e., se $A, B \in \mathcal{C}$ então A e B são abertos e $A \cap B = \varnothing$. Prove que $\mathcal{C}$ é enumerável.
Dica: Para cada $A \in \mathcal{C}$ existe um racional $q \in A$. Veja exercício 31, p.29.

29. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é **localmente limitada em** x se existe $\varepsilon > 0$ tal que f restrita a $B_\varepsilon(x) \cap A$ é limitada.

(a) para $A = (0, 1)$ dê exemplo de f localmente limitada que não seja limitada em A;

(b) prove que se A é aberto, o conjunto dos pontos $x \in A$ tais que f é localmente limitada em x é aberto;

(c) prove que se A é compacto e f localmente limitada para todo $x \in A$ então f é limitada em A

$\to$ **30.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $f(p/q) = q$ se p/q é fração irredutível com $p > 0$ e $f(0) = 0$. Prove que f é ilimitada em qualquer intervalo não-degenerado ([L] p.172 no.17).

Dica: Veja exercício 17(f), p.117.

$\sharp$ **31.** (difícil) Seja $A \subset \mathbb{R}$ qualquer. Prove que toda cobertura de A por abertos possui uma subcobertura enumerável **(Teorema de Lindelöf[1])** ([L] p.150 no.44).

Dica: Considere $\mathcal{C}$ a coleção de bolas com centro em $q_i \in \mathbb{Q}$ e raio racional contida em algum elemento da cobertura. Prove que se $x \in A \cap \mathbb{Q}^\complement$, $x \in B \in \mathcal{C}$ e portanto existe δ (podemos assumir $\delta \in \mathbb{Q}$) tal que $B_\delta(x) \subset B$. Por densidade, $x \in B_{\delta/2}(q_i)$ para algum q_i.

$\sharp$ **32.** (difícil) Consulte na internet (ou em algum livro) a definição do **conjunto de Cantor**. Prove que:

(a) é não-enumerável; (b) tem interior vazio; (c) é compacto;

(d) na base 3 os pontos não possuem o dígito 1 exceto quando ele se repete infinitamente ao final, pois por exemplo $0,202022222\ldots = 0,20210000\ldots$

6.6.3 Conjuntos densos

$\Longrightarrow$ **33.** Prove que se $A \subset \mathbb{R}$ é enumerável, então $A^\complement$ é denso em $\mathbb{R}$. Conclua que irracionais e transcendentes são densos em $\mathbb{R}$.

$\to$ **34.** Prove que $A = \left\{\dfrac{m}{2^n};\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

35. Prove que A é denso <u>sse</u> $A^\complement$ tem interior vazio ([L] p.149 no.25).

$\sharp$ **36.** (difícil) Prove que se $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ então $A = \{m + n\alpha;\quad m, n \in \mathbb{Z}\}$ (em Álgebra denotamos A por $\mathbb{Z}[\alpha]$) é denso em $\mathbb{R}$ ([L] p.76 no.58).

Dica: Ver exercício 32, p.75.

[1]Ernst Leonard Lindelöf: $\star$ 07/03/1870, Helsingfors, Império Russo (agora Helsinki, Finlândia) – † 04/06/1946, Helsinki, Finlândia.

Capítulo 7

Limite e continuidade

7.1 Limite de funções.

Dada uma função real f estamos interessados em saber o que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto x_0 sem, entretanto, assumir este valor. Este é o assunto desta seção. Muitas vezes $f(x)$ se aproximará de $f(x_0)$, porém, isto só ocorre para uma classe de funções, ditas **contínuas**. Trataremos desta questão posteriormente.

Iniciamos nossa discussão precisando o que quisemos dizer, no parágrafo anterior, com "x se aproxima de um ponto x_0 sem, entretanto, assumir este valor". Ora, se estamos interessados no valor de $f(x)$ é preciso que x esteja no domínio de f mas, como x não assume o valor x_0, não é necessário que $f(x_0)$ esteja definido. Ou seja, não é necessário que x_0 pertença ao domínio de f. Porém, é preciso que seja possível "se aproximar de x_0" por pontos do domínio de f. Rigorosamente falando, se A é o domínio de f, então a noção de **limite** de funções terá sentido se, e somente, x_0 é ponto de acumulação de A. Lembramos que esta condição significa que $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$, *i.e.*, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0.

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A. Como expressar de maneira rigorosa que $f(x)$ se aproxima de $k \in \mathbb{R}$ quando x se aproxima de x_0? A experiência com limite de sequências nos indica que deve ser errado pensar que a distância de $f(x)$ a k decresce junto com a distância de x a x_0. A armadilha explicada na Figura 4.1, p.54 também se apresenta neste contexto. Para armadilhas semelhantes usamos escapatórias semelhantes. A ideia intuitiva correta é dizer que $f(x)$ é tão próximo de k quanto quisermos, bastando para isto tomar x suficientemente próximo de x_0. Vejamos a definição rigorosa.

DEFINIÇÃO 7.1. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A. Dizemos que existe o* **limite** *de $f(x)$ quando x tende a $x_0 \in \mathbb{R}$ e ele vale $k \in \mathbb{R}$ se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que para todo } x \in A, \ \textit{se } 0 < |x - x_0| < \delta \textit{ então } |f(x) - k| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$.

Neste momento, o leitor já pode apreciar a capa do livro.

Comentário análogo ao que fizemos sobre a notação de limite de sequências (em particular sobre o sinal de igual nela presente) e a unicidade do limite também se aplica aqui. Querendo, o leitor poderá demonstrar a unicidade do limite. Nós não a faremos aqui pois ela será uma consequência da Proposição 7.2.

Só faz sentido considerar o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 quando x_0 é ponto de acumulação do domínio de f. Daqui por diante, esta condição ficará subentendida quando estivermos considerando limites.

Atenção: a negação de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k$ diz que o limite, se existir, é diferente de k mas não diz que ele existe. Portanto, para negar esta condição, se não tivermos de antemão a existência do limite, então não podemos supor que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq k$. Neste caso, devemos tomar a negação lógica da condição que define que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k$. Isto será feito, por exemplo, na demonstração da Proposição 7.2.

Exemplo 7.1. *Seja $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, dada por* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$
É fácil ver que 0 é ponto de acumulação de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Suponhamos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = k$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, obtemos a existência de $\delta > 0$ tal que $|f(x) - k| < 1$ quando $0 < |x| < \delta$. Portanto,

$$2 = |1 - (-1)| = |f(\delta/2) - f(-\delta/2)| \leq |f(\delta/2) - k| + |f(-\delta/2) - k| < 1 + 1 = 2.$$

Absurdo!

Exemplo 7.2. *Seja $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in (0, 1]$. Observe que 0 não está no domínio de f mas é ponto de acumulação deste. Logo, faz sentido perguntar se existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 0 e, no caso afirmativo, determinar o valor do limite. Mostraremos que ele existe e vale 1. Seja $\varepsilon > 0$. Para todo $x \in (0, 1]$ temos $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Portanto, tomando qualquer $\delta > 0$, temos*

$$x \in A,\ 0 < |x - 0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

Concluímos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Da mesma maneira mostra-se que se $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é constante igual a c e $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$, então $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = c$.

O exemplo anterior é atípico. Se x_0, ε e δ são como na Definição 7.1, então, geralmente, δ depende de ε e de x_0. Muitas vezes esta dependência é indicada na notação $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Os exemplos a seguir ilustram esta dependência. No primeiro deles δ depende apenas de ε e, no segundo, δ depende tanto de ε quanto de x_0.

Exemplo 7.3. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostremos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, obtemos*

$$x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

QED[1].

Exemplo 7.4. *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = x^2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, e* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Mostremos que* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^2$*. Fixado* $\varepsilon > 0$*, tomamos* $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|x_0| + 1)\}$*. Desta forma, se* $0 < |x - x_0| < \delta$*, então* $|x| < |x_0| + \delta \leq |x_0| + 1$*. Além disto,*

$$|f(x) - x_0^2| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \delta(|x| + |x_0|) < \delta(2|x_0| + 1) \leq \varepsilon.$$

O exemplo anterior pode induzir o leitor a pensar que achar δ em função de ε e de x_0 é uma tarefa sobrenatural. Normalmente, rascunha-se a demonstração de trás para frente: sabendo que devemos obter $|f(x) - k| < \varepsilon$, procuramos saber quão grande pode ser $|x - x_0|$ (*i.e.*, qual deve ser o valor de δ) para que cheguemos a esta conclusão. Em seguida, passamos a limpo a demonstração e, já sabendo qual é o valor de δ, simplesmente dizemos: "seja $\delta =$*Abracadabra*..." Porém, dependendo da função, mesmo que achar o valor de δ não seja mágica, tal tarefa pode ser bastante enfadonha. Uma alternativa é fazer uso das proposições a seguir. Elas facilitam as demonstrações de existência e os cálculos dos limites, sem necessidade de manipular ε's e δ's.

PROPOSIÇÃO 7.2. (limites por sequências) *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$*. Então,* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = k$ *para toda sequência* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ *convergente para* x_0*.*

Demonstração. Suponhamos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$ e mostremos que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ e $x_n \to x_0$, então $f(x_n) \to k$. Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - k| < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Ora, $x_n \to x_0$, logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|x_n - x_0| < \delta$. Assim, para $n \geq N$, ao tomar $x = x_n$ em (7.1) obtemos $|f(x_n) - k| < \varepsilon$. Concluímos que $f(x_n) \to k$.

Reciprocamente, suponhamos que seja falso que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0, \quad \exists x \in A \quad \text{tal que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - k| \geq \varepsilon. \tag{7.2}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, ao tomar $\delta = 1/n$ em (7.2) obtemos $x_n \in A$ tal que

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - k| \geq \varepsilon.$$

Constrói-se desta maneira uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0 sem que $f(x_n) \to k$. Absurdo! ■

Vejamos como esta proposição facilita o cálculo de limites. Retomemos o Exemplo 7.4, mostrando o mesmo resultado sem manipular ε's e δ's.

[1] *QED*, abreviação de "*quod erat demonstrandum*" que, em latim, significa "como queríamos demonstrar".

Exemplo 7.5. *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = x^2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ *e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ *convergente para* a. *Temos então que* $f(x_n) = x_n^2 \to a^2$. *Como a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é arbitrária, concluímos que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a^2$.

Aplicando a Proposição 7.2 e a Proposição 4.14, p.60 bem como o resultado do exercício 5, p.71 demonstra-se facilmente a próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 7.3. (propriedades do limite) *Sejam* $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \in \mathbb{R}$ *e* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$, *então:*

i. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = k + m$; *ii.* $\lim\limits_{x\to x_0} \big(cf(x)\big) = ck$;

iii. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = k - m$; *iv.* $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = km$;

v. se $m \neq 0$, *então* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = k/m$.

Demonstração. Deixamos para o leitor. ∎

Terminamos esta seção com uma propriedade útil sobre limites.

PROPOSIÇÃO 7.4. (permanência do sinal) *Seja* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k < m$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < m$ *para todo* $x \in A$ *tal que* $0 < |x - a| < \delta$. *Uma conclusão análoga vale quando* $k > m$.

Demonstração. Tomando $\varepsilon = m - k > 0$ na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que $|f(x) - k| < m - k$ se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta$. Ora

$$f(x) - k \leq |f(x) - k| < m - k \quad \Longrightarrow \quad f(x) < m.$$

∎

Já vimos um tipo de limite (a saber, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k$). Veremos os outros quatorze. Todos eles estão presentes na Tabela 7.1 (onde x_0 e k denotam números reais e f é uma função real de domínio $A \subset \mathbb{R}$).

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = k$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = k$	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = k$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = k$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Tabela 7.1: Os quinze tipos de limite.

O limite que aparece na primeira linha e primeira coluna já foi definido. Os outros são definidos com pequenas adaptações. O importante é entender o que significam limites iguais a k, $+\infty$ ou $-\infty$ (cada um destes corresponde a um coluna da tabela), bem como o que representam os símbolos $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$ e $x \to +\infty$ (que correspondem às linhas). Façamos alguns comentários a este respeito.

$\lim f(x) = k$ — Como já vimos, isto significa que, por menor que seja $\varepsilon > 0$, podemos concluir que $|f(x) - l| < \varepsilon$ desde que x que verifique certa condição.

$\lim f(x) = +\infty$ — Significa que, por maior que seja $M > 0$, podemos concluir que $f(x) > M$ desde que x que verifique certa condição.

$\lim f(x) = -\infty$ — Significa que, por maior que seja $M > 0$, podemos concluir que $f(x) < -M$ desde que x que verifique certa condição.

$x \to x_0$ — Como já vimos, isto significa que a condição sobre x é $0 < |x - x_0| < \delta$ para δ suficientemente pequeno. É necessário que $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$.

$x \to x_0^+$ — Lê-se x tende a x_0 pela direita. Significa que que a condição sobre x é $0 < x - x_0 < \delta$ para δ suficientemente pequeno. É necessário que $x_0 \in \overline{A \cap (x_0, +\infty)}$.

$x \to x_0^-$ — Lê-se x tende a x_0 pela esquerda. Significa que que a condição sobre x é $0 < x_0 - x < \delta$ para δ suficientemente pequeno. É necessário que $x_0 \in \overline{A \cap (-\infty, x_0)}$.

$x \to +\infty$	Lê-se x tende a mais infinito. Significa que que a condição sobre x é $x > N$ para N suficientemente grande. É necessário que A seja ilimitado superiormente.
$x \to -\infty$	Lê-se x tende a menos infinito. Significa que que a condição sobre x é $x < -N$ para N suficientemente grande. É necessário que A seja ilimitado inferiormente.

Por exemplo, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ deixa subentendido que $x_0 \in \overline{A \cap (-\infty, x_0)}$ e significa:

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad x \in A,\ 0 < x_0 - x < \delta \implies f(x) > M.$$

Para cada um dos quinze tipos de limite existem versões das proposições 7.2 e 7.4. A Proposição 7.3 tem uma versão quase idêntica para limites da primeira coluna da Tabela 7.1. Entretanto, para os outros tipos devemos tomar cuidado pois $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais, e por isto, não podem ser operados como se fossem: $(+\infty) + (+\infty) = 2 \cdot (+\infty)$, ou ainda, $(+\infty) + (-\infty) = 0$. Isto não faz sentido! Uma comparação entre as proposições 4.14, p.60 e 4.15, p.61 pode ajudar ao leitor a entender estas diferenças.

7.2 Funções contínuas.

Como já antecipamos, intuitivamente, uma função f é contínua em um ponto x_0 do seu domínio se $f(x)$ está próximo de $f(x_0)$ quando x está próximo de x_0. Induzidos pela discussão que precedeu a definição de limite de funções, somos tentados a dizer que $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0 quando

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{7.3}$$

É quase isto, mas não exatamente. O problema é um "detalhe técnico". A definição de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ exige que x_0 seja ponto de acumulação de A. Por outro lado, para que $f(x_0)$ tenha sentido devemos ter $x_0 \in A$. Estas duas condições podem ser incompatíveis (veremos no exemplo 7.7). Entretanto, quando x_0 verificar ambas as condições a definição que faremos será equivalente a (7.3).

Exemplo 7.6. *Seja $A = [0,1) \cup \{2\}$. Temos que $2 \in A$ mas $2 \notin \overline{A \setminus \{2\}} = [0,1]$. Dada $f : A \to \mathbb{R}$, $f(2)$ tem sentido ao contrário de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Por outro lado, $1 \notin A$ e $1 \in \overline{A \setminus \{1\}} = [0,1]$. Logo, não existe $f(1)$, porém, pode existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.*

DEFINIÇÃO 7.5. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Dizemos que f é* **contínua em $\mathbf{x_0}$** *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad x \in A,\ |x - x_0| < \delta \quad \textit{implica que} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

DEFINIÇÃO 7.6. *Dizemos que f é* **contínua em $\mathbf{A}$** *se f é contínua em todo ponto de A e escrevemos $f \in C(A)$. Mais precisamente, $f \in C(A)$ se*

$$\forall y \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad x \in A, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{7.4}$$

Alguns autores costumam denotar por $C^0(A)$, em vez de $C(A)$, ao conjunto das funções contínuas em A.

Vamos introduzir a definição de função contínua na linguagem de conjuntos do Capítulo 1, utilizando a notação da Definição 6.3, p.92. A demonstração da equivalência com a definição anterior é o exercício 16, p.117.

DEFINIÇÃO 7.7. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Dizemos f é* **contínua em $\mathbf{x_0}$** *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Observe que a definição de continuidade tem (como esperávamos) uma relação muito grande com a definição de limite. Por esta razão, podemos facilmente adaptar os argumentos dos exemplos 7.2, 7.3 e 7.4 para mostrar que são contínuas as funções $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = c,\ g(x) = x$ e $h(x) = x^2$ para todo $x \in A$.

Exemplo 7.7. *Este exemplo pretende acabar com o mito, geralmente apresentado nos cursos de Cálculo I, que diz que funções contínuas são aquelas cujos gráficos são traçados sem tirar o lápis do papel. Considere a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $g(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Faça um esboço do gráfico de g e convença-se que não é possível desenhá-lo sem tirar o lápis do papel. Ora, a função g é a mesma do parágrafo anterior (com $A = \mathbb{N}$) que, como já sabemos, é contínua! Você está duvidando? Vejamos com mais detalhes. Sejam $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $x \in \mathbb{N}$ e $|x - n| < 1/2$, então $x = n$ e, portanto, $|g(x) - g(n)| = 0 < \varepsilon$. Concluímos que g é contínua em n e, como n é arbitrário, que g é contínua!*

Observe que tomamos $\delta = 1/2$ independente de ε e de n. Mais que isto, nem a definição de g foi necessária na demonstração. Moral da história: funções definidas em $\mathbb{N}$ são sempre contínuas.

Passemos imediatamente às proposições que nos poupam, em muitos casos, o trabalho com ε's e δ's. Todas elas têm demonstrações análogas àquelas encontradas na Seção 7.1. Por esta razão omitiremos suas provas.

PROPOSIÇÃO 7.8. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. A função f é contínua em x_0 se, e somente se, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$ para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente para x_0.*

A proposição anterior, essencialmente, nos diz que funções contínuas são aquelas que comutam com o símbolo de limite, ou seja, f é contínua se, e somente se,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right),$$

desde que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esteja contida no domínio de f e seja convergente para um ponto deste conjunto.

Exemplo 7.8. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \textit{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário, tomando sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^\complement$ convergentes para x_0, obtemos que $f(x_n) \to 1$ e $f(y_n) \to 0$. Concluímos que f é descontínua em qualquer ponto.*

PROPOSIÇÃO 7.9. (conjunto de funções contínuas forma espaço vetorial e álgebra) *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas e $c \in \mathbb{R}$, então cf, $f+g$, $f-g$ e fg são contínuas. Além disto, a função f/g está definida e é contínua nos pontos de A onde g não se anula.*

PROPOSIÇÃO 7.10. (compostas de funções contínuas) *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to A$ tais que $f(A) \subset B$. Se f é contínua em x_0 e g é contínua em $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0. Segue que se f e g são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente para x_0. Como f é contínua temos que $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$, e como g é contínua em y_0 temos que $g(f(x_n)) \to g(y_0) = g\big(f(x_0)\big)$. Segue que $g \circ f$ é contínua em x_0. ■

PROPOSIÇÃO 7.11. (permanência de sinal) *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in A$. Se $f(x_0) < k \in \mathbb{R}$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo $x \in A$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Temos uma conclusão análoga se $f(x_0) > k$.*

Vamos ver o conceito de continuidade utilizando a ideia de oscilação de uma função.

DEFINIÇÃO 7.12. *Dado um conjunto limitado X definimos seu* **diâmetro**

$$\text{diam}(X) = \sup\{|x-y|,\ x, y \in X\}.$$

Note que este conceito está bem definido em $\mathbb{R}^n$, bastando trocar $|x-y|$ por $\|x-y\|$. De forma ainda mais geral, se tivermos uma distância $d(x,y)$ bem definida, podemos trocar $|x-y|$ por $d(x,y)$.

DEFINIÇÃO 7.13. *Considere f uma função limitada. Definimos a* **oscilação** *de $f : A \to \mathbb{R}$ em $x \in A$ por*

$$w(f;x) = \inf\{\text{diam}\,(f(B_\delta(x) \cap A))\,;\ \delta > 0\}.$$

LEMA 7.14. (função contínua e oscilação) *Considere $f : A \to \mathbb{R}$. A função f é contínua em A se, e somente se, $w(f;x) = 0$ para todo $x \in A$.*

Demonstração. Ver exercício 20, p.117. ■

Vamos apresentar o primeiro de três Teoremas que fazem a conexão entre topologia e funções contínuas. Essencialmente diz que a imagem inversa de aberto é um aberto se a função é contínua.

TEOREMA 7.15. (imagem inversa de aberto é aberto) *Seja $A \subset \mathbb{R}$ aberto. Então $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo aberto B, $f^{-1}(B)$ é aberto.*

Demonstração. Nesta demonstração vamos utilizar a Definição 7.7 de continuidade.

Suponha f contínua. Se $f^{-1}(B) = \varnothing$ então é aberto. Caso contrário temos que provar que $f^{-1}(B)$ é aberto. Considere $x_0 \in f^{-1}(B)$, que implica que $f(x_0) \in B$, com B aberto por hipótese. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset B$. Pela continuidade da f em A, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \subset B$. Isto implica, aplicando f^{-1} dos dois lados, que $x_0 \in B_\delta(x_0) \cap A \subset f^{-1}(B)$. Como A é aberto, $B_\delta(x_0) \cap A$ é aberto (interseção de abertos) que contém x_0. Logo $f^{-1}(B)$ é aberto.

Suponha agora que $f^{-1}(B)$ é aberto para todo aberto B. Tome $x_0 \in A$ (se A for vazio não há nada para ser provado) e $y_0 = f(x_0)$. Isto implica que para todo $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ é aberto. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$. Aplicando f dos dois lados, $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0)$. Logo $f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0)$, isto é, f é contínua em x_0. ■

Este resultado é utilizado em cursos de Topologia para definir função contínua utilizando somente abertos, sem utilizar épsilons e deltas!

7.3 Funções contínuas em conexos.

Conforme vimos na Definição 6.6, p.93, $A \subset \mathbb{R}$ é um **conjunto conexo** se A é um dos intervalos da Definição 3.29, p.47. Vamos apresentar o segundo Teorema que faz a conexão entre topologia e funções contínuas: função contínua leva conexo em conexo. Precisamos antes de famoso resultado do Cálculo.

TEOREMA 7.16. (do valor intermediário) *Se $f \in C\big([a,b]\big)$ e $f(a) < k < f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = k$. A mesma conclusão vale quando $f(a) > k > f(b)$.*

Demonstração. Seja $S = \{x \in [a,b] \ ; \ f(x) \leq k\}$. É imediato que S é não vazio ($a \in S$) e limitado superiormente (b é cota superior de S). Sejam $c = \sup S$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tal que $x \to c$. Temos que $f(x_n) \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como f é contínua em c temos

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(c).$$

Portanto, $f(c) \leq k$ e, logo, $c < b$.

Suponhamos que $f(c) < k$. Graças à Proposição 7.11 existe $\delta > 0$ tal que se $x \in [a,b]$ e $|x - c| < \delta$, então $f(x) < k$. Como $c < b$ podemos tomar $x \in [a,b]$ com $c < x < c + \delta$ para obter que $f(x) < k$. Isto implica que $x \in S$ e $x > c = \sup S$, o que é absurdo. ■

TEOREMA 7.17. (imagem de conexo é conexo) *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um conexo e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua. Então $f(I)$ é um conexo.*

Demonstração. Seja $J = f(I)$. Para mostrar que J é um intervalo basta (ver exercício 23, p.51) mostrar que dados $y_1, y_2 \in J$, com $y_1 < y_2$, $[y_1, y_2] \subset J$. Para isto tome $y \in (y_1, y_2)$ qualquer. Como $J = f(I)$, existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, obtemos que $x_1 \neq x_2$. Suponhamos, por simplicidade, que $x_1 < x_2$. Aplicando o Teorema 7.16 (do Valor Intermediário) à função f no intervalo $[x_1, x_2]$ concluímos que existe $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x) = y$. Segue que $y \in J$. ■

O próximo Teorema é leitura opcional.

⋆ **TEOREMA 7.18.** *Seja I um intervalo não degenerado e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua. Temos:*

i. Se f é injetiva, então f é monótona;

ii. Se f é injetiva, então a função $f^{-1} : J \to I$ é contínua.

Demonstração. (i) Suponhamos, por absurdo, que f não seja monótona. Então existem $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ tais que $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ ou $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Consideremos o primeiro caso (o segundo é análogo). Seja $k \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \cap \big(f(x_3), f(x_2)\big)$. Pelo Teorema 7.16 (do Valor Intermediário) existem $s \in (x_1, x_2)$ e $t \in (x_2, x_3)$ tais que $f(s) = f(t) = k$, contrariando a injetividade de f.

(ii) Já sabemos que f é monótona. Para fixar as ideias, suponhamos que f é crescente.

Seja $y \in J$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ tal que $y_n \to y$. Vamos mostrar que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$. Dado $\varepsilon > 0$, se $r, t \in I$ são tais que $f^{-1}(y) - \varepsilon < s < f^{-1}(y) < t < f^{-1}(y) + \varepsilon$, então $f(s) < y < f(t)$. Como $y_n \to y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(s) < y_n < f(t)$ se $n \geq n_0$. Neste caso, $f^{-1}(y) - \varepsilon < s < f^{-1}(y_n) < t < f^{-1}(y) + \varepsilon$. Portanto $\big|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)\big| < \varepsilon$ se $n \geq n_0$. ■

7.4 Funções contínuas em compactos.

Vamos apresentar o terceiro Teorema que faz a conexão entre topologia e funções contínuas: função contínua leva compacto (compactos em $\mathbb{R}$ são limitados e fechados, conforme Teorema 6.14, p.96) em compacto. É um exemplo de como a compacidade pode ser bem explorada. A sua demonstração é bastante simples, porém, as ideias nela presentes são usuais (e poderosas) no Cálculo de Variações e em Equações Diferenciais Parciais.

TEOREMA 7.19. (imagem de compacto é compacto) *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Então $f(K)$ é um compacto.*

Demonstração. Seja $y_n \in f(K)$ qualquer. Queremos provar que existe subsequência convergente para algum elemento de $f(K)$.

Por definição, $y_n \in f(K)$ implica que existe $x_n \in K$ com $y_n = f(x_n)$. Como K é compacto, existe subsequência, $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Definindo $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, pela continuidade da f, $y_{n_k} \to f(x_0) \in f(K)$. ■

Vamos apresentar um corolário muito utilizado (em Cálculo por exemplo) mas precisamos antes algumas definições.

DEFINIÇÃO 7.20. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $B \subset A$. Se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in B$, então dizemos que x_0 é um* **ponto de máximo** *de f em B. Neste caso, $f(x_0)$ é o* **valor máximo** *de f em B. Se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in B$, então x_0 é dito* **ponto de mínimo** *de f em B e $f(x_0)$ é o* **valor mínimo** *de f em B. Se x_0 é ponto de máximo ou de mínimo em B, então x_0 é chamado de* **extremo** *em B. Em particular, quando $B = A$ trata-se de* **máximo global** *ou* **mínimo global** *ou* **extremo global** *de f.*

COROLÁRIO 7.21. (Weierstrass) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f tem pontos de máximo e de mínimo em $[a, b]$.*

Demonstração. O conjunto $[a, b]$ é conexo e compacto. Como f é contínua, pelos Teoremas 7.17 e 7.19, $f([a, b])$ é conexo e compacto, ou seja, é um intervalo fechado e limitado. Logo (veja as opções para intervalos na Definição 3.29, p.47) $f([a, b]) = [c, d]$. Logo o mínimo de f é c e o máximo é d. ■

DEFINIÇÃO 7.22. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é* **uniformemente contínua** *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad x, y \in A,\ |x - y| < \delta \quad \textit{implica que} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Observe bem a diferença entre as definições de continuidade (veja (7.4)) e continuidade uniforme. Apenas trocamos a expressão "$y \in A$" de lugar. Isto é realmente uma grande diferença. A definição de continuidade diz que, dado $\varepsilon > 0$ e $y \in A$, existe $\delta > 0$, dependente de ε e de y tal que se $x \in A$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. A definição de continuidade uniforme nos diz mais que isto: é possível encontrar δ, independente de y. Vejamos um exemplo de função contínua que não é uniformemente contínua.

Exemplo 7.9. *Já vimos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua. Mostremos que ela não é uniformemente contínua. Tome $x = n$ e $y = n - \delta$. Então, como $|f(x) - f(y)| = 2n\delta + \delta^2$, por menor que seja δ, podemos fazer o lado direito ser tão grande quanto quisermos tomando n grande. Isto mostra que f não é uniformemente contínua.*

TEOREMA 7.23. (função contínua em compacto é uniformemente contínua) *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é uniformemente contínua em K.*

Demonstração. Vamos apresentar duas provas.

$\boxed{\text{Prova 1: direta por coberturas}}$ Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in K$, como f é contínua, existe $\delta_x > 0$ tal que $|x - y| < \delta_x$, $y \in K$, implica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Tome cobertura aberta $B_{\delta_x/2}(x)$ de K. Como K é compacto, existe subcobertura finita $B_{\delta_{x_i}/2}(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Defina $\delta = \min\{\delta_{x_i}/2;\ i = 1, \dots, n\}$. Dado $x \in K$, $x \in B_{\delta_{x_i}/2}(x_i)$, para algum i e, pela continuidade,

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/2. \qquad (\star)$$

Dado $y \in K$ com $|x - y| < \delta$, $|y - x_i| \le |y - x| + |x - x_i| < \delta + \delta_{x_i}/2 \le \delta_{x_i}/2 + \delta_{x_i}/2 = \delta_{x_i}$. Logo $y \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ e, pela continuidade,

$$|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2. \qquad (\star\star)$$

Juntado $(\star)$ e $(\star\star)$ e utilizando desigualdade triangular concluímos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Prova 2: por absurdo com sequências}}$ Suponhamos, por absurdo, que f não é uniformemente contínua. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0, \quad \exists x, y \in K \quad \text{tais que} \quad |x - y| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| \ge \varepsilon.$$

Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\delta = 1/n$ construímos duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tais que $|x_n - y_n| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos extrair uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ainda denotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) convergente para $x \in K$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, obtemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para x. Como f é contínua, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x)$. Concluímos que $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$, contrariando $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

DEFINIÇÃO 7.24. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita* **Lipschitz**[1]**contínua** *se existe $K > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$ para todo $x, y \in A$.*

A classe das funções Lipschitz contínuas é basicamente uma generalização da classe das funções com derivada limitada (ver exercício 6, p.136). A classe das funções Lipschitz contínuas é importante em aplicações de análise como por exemplo equações diferenciais. É generalizada pela classe de funções Hölder contínua pelo exercício 49, p.120.

LEMA 7.25. (Lipschitz e uniformemente contínua) *Se f é Lipschitz contínua em A, então f é uniformemente contínua em A.*

Demonstração. Veja exercício 44, p.120. ■

7.5 ⋆ Pontos fixos para funções contínuas.

Façamos a seguinte definição para, em seguida, explicar sua importância.

DEFINIÇÃO 7.26. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que x é* **ponto fixo** *de f se $f(x) = x$.*

O leitor já deve ter percebido que em Matemática é importante resolver equações, ou pelo menos, mostrar a existência de soluções. Por exemplo, o exercício 40, p.76 tratava de mostrar que a equação (em x)

$$x^m = a \tag{7.5}$$

tem única solução positiva se $m \in \mathbb{N}$ e $a \ge 0$. De fato, o que se demonstra é que a função $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por

$$F(x) = x - \frac{x^m - a}{mx^{m-1}}$$

tem ponto fixo e que este é a solução procurada para a equação (7.5). Como neste exemplo, frequentemente é conveniente transformar um problema de resolver uma equação num problema de encontrar um ponto fixo para alguma função. Por esta razão, teoremas sobre existência ou unicidade de pontos fixos podem ser interessantes.

O próximo teorema é uma consequência simples do Teorema do Valor Intermediário. Ele se generaliza para dimensões maiores e, de fato, são estas generalizações que têm importância. Mas não custa nada demonstrá-lo aqui.

TEOREMA 7.27. (do ponto fixo de Brouwer[2]) *Se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ é contínua, então f tem ponto fixo.*

[1] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz: ⋆ 14/05/1832, Kaliningrado, Rússia - † 07/10/1903, Bonn, Alemanha.
[2] Luitzen Egbertus Jan Brouwer: ⋆ 27/02/1881, Rotterdam, Holanda - † 02/12/1966, Blaricum, Holanda.

Demonstração. Seja $g : [0,1] \to [0,1]$ dada por $g(x) = f(x) - x$ para todo $x \in [0,1]$. Observamos que x é ponto fixo de f se, e somente se, x é raiz de g. Vamos então mostrar que g tem raiz.

Ora, $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ e $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Se $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$, então não há nada mais a ser demonstrado. Suponhamos agora que $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$. Neste caso, como g é contínua, o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de uma raiz de g no intervalo $(0,1)$. ■

Vejamos outro teorema de ponto fixo que é útil mesmo nesta sua versão mais simples. Como preliminar, definimos contração.

DEFINIÇÃO 7.28. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma* **contração** *se existe $\alpha \in (0,1)$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| \qquad \forall x, y \in A.$$

É fácil ver que se f é uma contração, então f é uniformemente contínua (veja Lema 7.25).

TEOREMA 7.29. (Do Ponto Fixo de Banach[1]) *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contração e $X \subset A$ fechado, não vazio e tal que $f(X) \subset X$. Então existe um único $a \in X$ que é ponto fixo de f. Mais precisamente, dado $x_0 \in X$ a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por*

$$x_n = f(x_{n-1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.6}$$

converge para a.

Demonstração. Vamos mostrar que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$.

Por definição de contração, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| \qquad \forall x, y \in A.$$

Como $\alpha \in (0,1)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \frac{|x_1 - x_0|\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon.$$

Por indução, mostra-se facilmente que $|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha^n|x_1 - x_0|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando este fato, obtemos que se $m > n \geq N$, então

$$|x_m - x_n| = \left|\sum_{i=n}^{m-1}(x_{i+1} - x_i)\right| \leq \sum_{i=n}^{m-1}|x_{i+1} - x_i| \leq \sum_{i=n}^{m-1}\alpha^i|x_1 - x_0|$$
$$\leq |x_1 - x_0|\sum_{i=n}^{+\infty}\alpha^i = \frac{|x_1 - x_0|\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon.$$

Concluímos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e, portanto, convergente para algum $a \in \mathbb{R}$. Como X é fechado obtemos que $a \in X$. Tomando o limite quando $n \to +\infty$ em (7.6), da continuidade de f segue que $a = f(a)$, ou seja, que a é ponto fixo de f.

[1] Stefan Banach: ⋆ 30/03/1892, Kraków, Polônia - † 31/08/1945, Lvov, Ucrânia.

Mostremos agora a unicidade. Suponhamos por absurdo, que existe $b \in X$ ponto fixo de f diferente de a. Temos

$$|b - a| = |f(b) - f(a)| \leq \alpha|b - a| < |b - a|.$$

Absurdo. ■

Observação 7.1 *O Teorema 7.29 do Ponto fixo de Banach também é conhecido como* **Método das Aproximações Sucessivas** *de Picard*[1] *ou* **Lema da Contração**.

7.6 Exercícios.

7.6.1 Limite de funções

1. Prove (por contradição) que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ não existe.

→ **2.** Para $f : A \to \mathbb{R}$, dê as definições rigorosas de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

⟹ **3.** **(Teorema do Sanduíche)** Sejam $f, g, h : A \to \mathbb{R}$. Prove que se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in A$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = k$, então $\lim_{x\to x_0} g(x) = k$.

→ **4.** Nos exercícios abaixo, $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$ (veja a Definição 4.6). Determine:
(a) $\lim_{x\to+\infty} x\lfloor 1/x \rfloor$; (b) $\lim_{x\to 0} x\lfloor 1/x \rfloor$.

7.6.2 Funções contínuas

⟹ **5.** Seja f contínua definida em $[a, b]$. Prove que existe h contínua com domínio igual a $\mathbb{R}$ que seja uma extensão de f (caso particular do **(Teorema de extensão de Tietze)**. Dê um exemplo que prove que isto é falso se substituirmos $[a, b]$ por (a, b).

⟹ **6.** Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que $Z = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = 0\}$ (zeros de f) é fechado. Conclua que $C = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = g(x)\}$ é fechado.

⟹ **7.** Sejam $\mathcal{T}^-$ os transcendentes negativos e $\mathcal{A}^+$ os algébricos positivos.
Defina $f : \mathcal{T}^- \cup \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty)$ por $f(x) = x^2$.
(a) Prove que f é uma bijeção contínua cuja a inversa é descontínua em todos os pontos menos no zero ([L] p.195 no.21).
(b) Determine a oscilação $w(f^{-1}; \pi^2)$.
(c) Determine a oscilação $w(f^{-1}; y_0)$ para cada $y_0 \in [0, +\infty)$.

→ **8.** Seja $f : [0, 1) \cup [2, 3] \to [0, 2]$ dada por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1)$ ou $f(x) = x - 1$ se $x \in [2, 3]$. Prove que f é uma bijeção contínua com inversa dada por $f^{-1}(y) = y$ se $y \in [0, 1)$ ou $f^{-1}(y) = y + 1$ se $y \in [1, 2]$. Conclua que f^{-1} é descontínua em 1.

[1] Charles Emile Picard: ⋆ 24/07/1856, Paris, França - † 11/12/1941, Paris, França.

$\rightarrow$ **9.** Prove que se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $|f|$ é contínua. A recíproca é verdadeira? Ou seja, podemos afirmar que se $|f|$ é contínua, então f é contínua?

$\star$ **10.** (extra) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$. Considere a seguinte definição: f é contínua em A se f é contínua em todos os elementos de A.
(a) Prove que se f é contínua em A, então $f|_A$ é contínua.
(b) Encontre um exemplo onde $f|_A$ é contínua mas f é não é contínua em A.
Dica: $A = \mathbb{Q}$, $f = I_{\mathbb{Q}}$.

$\Longrightarrow$ **11.** Prove que se f e g são contínuas então:
(a) $h = \max(f, g)$ é contínua; (b) $l = \max(f_1, \ldots, f_n)$ é contínua.
Dica: $\max(a, b) = (a + b + |a - b|)/2$.

$\rightarrow$ **12.** (colando funções contínuas) Suponha que f é contínua em $[a, b]$ e g é continua em $[b, c]$ com $f(b) = g(b)$. Defina h em $[a, c]$ por $h(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$ e $h(x) = g(x)$ para $x \in (b, c]$. Prove que h é contínua em $[a, c]$ ([Sp] p.98 no.14).

$\Longrightarrow$ **13.** Seja A um conjunto discreto (i.e., todos seus pontos são isolados). Prove que $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}) = C(A; \mathbb{R})$, i.e., que toda função de A em $\mathbb{R}$ é contínua.

14. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e A um conjunto aberto. Dê um exemplo onde $f(A)$ não é um conjunto aberto. Conclua que função contínua não leva, necessariamente, aberto em aberto.

15. Encontre uma função f que seja descontínua nos seguintes pontos, mas contínua em todos os outros ([Sp] p.98 no.6):
(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$; (b) $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$\Longrightarrow$ **16.** Prove que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua <u>sse</u> $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

$\Longrightarrow$ **17.** Determine $w(f; x)$ (oscilação de f) e os pontos de descontinuidade, de:
(a) $f(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$; (b) $f = I_{\mathbb{Q}}$;
(c) $f(x) = xI_{\mathbb{Q}}(x)$; (d) $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$;
(e) $f(x) = \operatorname{sen}(x)/|\operatorname{sen}(x)|$ para $\operatorname{sen}(x) \neq 0$, $f(x) = 0$ caso contrário;
(f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $f(p/q) = 1/q$ se p/q é fração irredutível com $q > 0$ e $f(0) = 0$;
Dica: esboce o gráfico para $q = 2, 3, \ldots$
(g) $f(x)$ igual ao primeiro algarismo da expansão decimal de x ([Sp] p.70 no.17);
(h) $f(x) = 0$ se 1 não aparece na expansão decimal de x e $f(x) = n$ se 1 aparece na n-ésima posição([Sp] p.70 no.17).

18. Esboce o gráfico e determine os pontos de descontinuidade de ([Sp] p.70 no.17):
(a) $f(x)$ igual ao segundo algarismo da expansão decimal de x;
(b) $f(x)$ igual ao número de 7's da expansão decimal de x se este número é finito e zero caso contrário.

19. Prove que:
(a) se $X \subset Y$ então diam$(X) \leq$ diam(Y); (b) diam$(X) = \sup(X) - \inf(X)$;
(c) diam$(X) =$ diam$(\overline{X})$; (d) diam$(|X|) \leq$ diam(X) onde $|X| = \{|x|; x \in X\}$.
(e) Determine diam$(\mathbb{Q}^{\complement} \cap [0, 1])$ e diam$(B_\varepsilon(x))$.

$\rightarrow$ **20.** Prove que:

(a) se f é contínua em A então $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que diam $(f(B_\delta(x_0) \cap A)) \leq \varepsilon$;

(b) $w(f; x) = 0$ para todo $x \in A$ se, e somente se, f é contínua em A;

(c) pode-se trocar $\inf$ por $\lim\limits_{\delta \to 0^+}$ na definição de oscilação.

21. (Teorema da mudança de variáveis no limite)

(a) Prove que $\lim\limits_{x \to 0} f(a + x) = \lim\limits_{h \to a} f(h)$;

(b) Generalize (a): Seja g uma função contínua em a. Então $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = \lim\limits_{h \to g(a)} f(h)$ caso os limites existam.

$\star$ **22.** (extra) Suponha que a é ponto interior de A. Suponha que os limites laterais em a existem para uma função f. Prove que $w(f; a)$ é a maior diferença entre os números: $f(a)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$. Prove que de forma geral (sem assumir existência de limites) é a maior diferença entre os números: $f(a)$, $\limsup\limits_{x \to a} f(x)$, $\liminf\limits_{x \to a} f(x)$.

$\sharp$ **23.** (difícil) Seja $D_m = \{x \in [a, b]; w(f; x) \geq 1/m\}$. Prove que:

(a) D_m é fechado (e limitado, e portanto, compacto);

(b) o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função é a união enumerável de fechados;

(c) uma função real não pode ser descontínua somente nos irracionais (mas pode ser descontínua somente nos racionais: vide exercício 17(f), p.117).

$\sharp$ **24.** (difícil) Dizemos que f tem uma **descontinuidade removível** em a se o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe mas é diferente de $f(a)$. Neste caso basta redefinir a f em a para que ela seja contínua neste ponto. O objetivo deste exercício é investigar se existe uma função que é descontínua em todos os pontos mas que possui somente descontinuidades removíveis ([Sp] p.99 no.16(e) e p.387 no.24). Seja f definida em $[0, 1]$ tal que o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe para todo $a \in [0, 1]$. Prove que:

(a) Dado $\varepsilon > 0$ existe um número finito de pontos $a \in [0, 1]$ com $|\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a)| > \varepsilon$.

Dica: Veja exercício 39, p.119. Se fosse infinito, existiria um ponto limite $k \in [0, 1]$ tal que $\lim\limits_{x \to k} f(x)$ não existiria.

(b) o conjunto dos pontos onde f é descontínua é enumerável.

$\rightarrow$ **25.** Prove que se f e g são funções continuas tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ então $f \equiv g$. Conclua que basta conhecer uma função contínua nos racionais para determinar seu valor em todos os pontos.

$\sharp$ **26.** (difícil) Use o exercício anterior para provar que a cardinalidade do conjunto das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é igual a cardinalidade de $\mathbb{R}$ (e portanto estritamente menor que a cardinalidade do conjunto das funções).

$\star$ **27.** (extra) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se, para todo $A \subset \mathbb{R}$, $f(A)$ for aberto então f é injetiva e portanto monótona ([L] p.196 no.25).

28. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua em zero se, e somente se, f é contínua em $\mathbb{R}$ ([Sp] p.98 no.7).

$\star$ **29.** (extra) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ ([Fi1] p. 73 no.1).

Dica: Quanto vale $f(0)$ e $f(1)$? Prove para $x \in \mathbb{Q}$ e utilize a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

$\sharp$ **30.** (difícil) Prove que se f é contínua e $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, então $f \equiv 0$ ou $f(x) = a^x$ (com $a > 0$) para todo $x \in \mathbb{R}$ ([Sp] p.300 no.27).

Dica: Quanto vale $f(0)$ e $f(1)$? Prove para $x \in \mathbb{Q}$ e utilize a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

$\sharp$ **31.** (difícil) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Prove que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ ([Fi1] p.73 no.2).

$\star$ **32.** (extra) (versão abstrata do exercício 17(f), p.117) Seja $A_n \subset [0,1]$ conjunto finito para cada $n \in \mathbb{N}$ com $A_n \cap A_m = \varnothing$ para $n \neq m$. Defina $f(x) = 1/n$ para $x \in A_n$ e $f(x) = 0$ caso contrário. Prove que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ para todo $a \in [0,1]$. ([Sp] p.91 no.22)

$\to$ **33.** Uma função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é linear por partes se existe subdivisão finita do intervalo $[a,b]$ tal que φ é linear em cada subdivisão. Prove que se $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então dado $\varepsilon > 0$ existe φ linear por partes tal que $|g(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$ ([L] p.197 no.44). Dizemos que as funções lineares por partes são densas no conjunto das funções contínuas.

34. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, suponha que para cada $\varepsilon > 0$ se possa obter $g : X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Prove que f é contínua ([L] p.197 no.46).

$\sharp$ **35.** (difícil) Prove que não existe função contínua em $\mathbb{R}$ que assuma cada valor ([Sp] p.110 no.20):

(a) exatamente duas vezes; (b) zero ou duas vezes; (c) n vezes, com n é par.

(d) Encontre uma função contínua que assuma cada valor exatamente três vezes. De forma geral, encontre uma que assuma exatamente n vezes, com n ímpar;

7.6.3 Funções contínuas em conexos

$\Longrightarrow$ **36.** Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com n par. Prove que:

(a) existe $x_0 \in \mathbb{R}$ que é ponto de mínimo global de p.

(b) se $p(x_0) < 0$, então p tem pelo menos duas raízes.

Dica: a_0 é maior ou igual ao mínimo global. (ver [Sp] p.105).

Se $M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|)$, $|x| \geq M$ implica que $x^n/2 \leq p(x)$.

$\to$ **37.** Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com n ímpar. Prove que:

(a) $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$; (b) $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$; (c) existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$.

$\Longrightarrow$ **38.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ contínua. Prove que f é constante.

$\to$ **39.** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ crescente. Prove que ([Sp] p.119 no.8 e p.370 no.7 e 8):

(a) os limites laterais existem em todos os pontos;

(b) se f satisfaz a conclusão do Teorema do valor intermediário (TVI) então f é contínua;

Obs: Note que $f(x) = \operatorname{sen}(1/x) I_{x \neq 0}(x)$ satisfaz a conclusão do TVI mas não é contínua.

(c) $A_\varepsilon = \{a \in [0,1];\ \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) > \varepsilon\}$, para $\varepsilon > 0$, é finito;

(d) o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável (ou finito);

(e) se f é monótona então (a), (b) e (d) são verdadeiros.

Dica: Veja exercício 24, p.118. (c) $\#A_\varepsilon \leq (f(1) - f(0))/\varepsilon$; (d) Este conjunto pode ser escrito como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{1/n}$.

$\sharp$ **40.** (difícil) Prove que se f satisfaz a conclusão do TVI, e assume cada valor uma única vez, então f é contínua. Generalize para o caso em que f assume cada valor um número finito de vezes ([Sp] p.109 no.13). Dica: Por contradição: suponha f descontínua.

$\star$ **41.** (extra) O objetivo deste exercício é mais ambicioso do que o do Exercício 40 do Capítulo 4. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^m$ para todo $x \geq 0$. Prove que

(a) f é contínua e injetiva; (b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

(c) existe e é contínua a função $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. A função f^{-1} é chamada de **raiz m-ésima** e é denotada por $f^{-1}(y) = \sqrt[m]{y}$ para todo $y \in [0, +\infty)$ (ou, simplesmente, $\sqrt{y}$ quando $m = 2$).

7.6.4 Funções contínuas em compactos

$\Longrightarrow$ **42.** Seja p uma função polinomial qualquer.
Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|p(x_0)| \leq |p(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ([Sp] p.109 no.16).
Dê exemplo de uma função p (não-polinomial) que não satisfação esta propriedade.

$\Longrightarrow$ **43.** Suponha que f é contínua com $f(x) > 0$ para todo x e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.
Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ([Sp] p.109 no.17).

$\rightarrow$ **44.** Prove que:

(a) se f é Lipschitz contínua, então f é uniformemente contínua.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ não é Lipschitz contínua mas é uniformemente contínua em $[0, 1]$.

45. Prove que $f(x) = x^n$ é Lipschitz contínua num intervalo limitado mas não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$ ([L] p.197 no.37).

$\Longrightarrow$ **46.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e suponha que $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existem e são finitos.
Prove que

(a) f é limitada; (b) f é uniformemente contínua.

47. Prove o Teorema 7.23, p.113 por absurdo pelo princípio dos intervalos encaixantes. Dica: Construa intervalos I_n encaixantes onde f não é uniformemente contínua.

$\star$ **48.** (extra) Prove que se $f(X)$ é limitado para toda f contínua então X é compacto ([L] p.196 no.27).

$\star$ **49.** (extra) Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é α-**Hölder**[1] **contínua** se existem $\alpha, M > 0$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ para todo $x, y \in X$. Isto generaliza o conceito de Lipschitz contínua ($\alpha = 1$). Veja no exercício 30, p.139 porque supomos que $\alpha \leq 1$. Prove que:

(a) se f é α-Hölder contínua então f é uniformemente contínua;

(b) $f(x) = \sqrt{|x|}$ é $\frac{1}{2}$-Hölder contínua mas não é Lipschitz contínua (perto do zero).

[1] Otto Ludwig Hölder: $\star$ 22/12/1859, Stuttgart, Alemanha – † 29/08/1937, Leipzig, Alemanha.

Capítulo 8

Derivada

8.1 Derivada e propriedades.

O autor gostaria muito de ver a discussão que segue nos livros de Cálculo I. Como não a encontrou, ele a fará aqui[1].

Partimos da seguinte observação. As **funções afins** (funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $g(x) = ax + b$, sendo a e b constantes, *i.e.*, funções cujos gráficos são retas) são mais simples de serem manipuladas do que outras funções (cujos gráficos são curvas). Por isto, pode ser útil saber se é possível (e em caso afirmativo, de que modo) aproximar uma função qualquer por outra que seja afim. Intuitivamente, dada a função f, queremos encontrar uma função afim g que mais se pareça com f. Vejamos um exemplo que foge um pouco do contexto mas que é suficientemente familiar para auxiliar nossa intuição.

Consideremos a Terra. Durante muitos milhares de anos, pensou-se que a superfície terrestre era plana. A razão é que o planeta era visto de muito perto. Só quando nos afastamos dele, vemos que na realidade a sua superfície é mais parecida com uma esfera do que com um plano. Diz-se que que Aristóteles[2] reparou isto vendo a sombra da Terra sobre a Lua durante um eclipse. De certa forma, Aristóteles precisou recorrer à imagem da Terra vista da Lua para poder perceber que a Terra não era plana. Ora, se a Terra parece (ou parecia) plana significa que existe um plano que se parece muito com a Terra, certo? Na verdade, sabemos que não é um plano, mas sim vários planos. Para um habitante de Tóquio, o plano que mais parece com a Terra não é o mesmo que para nós. Isto nos indica que esta noção de aproximação é local, isto é, dependendo do ponto onde nos colocamos percebemos de modo diferente o objeto simples (reta, plano, etc) que mais parece com o objeto original (curva, esfera, etc).

Voltando ao caso de uma função real. Dada a função f definida numa vizinhança de x_0 queremos determinar a função afim g, dada por $g(x) = ax + b$, que mais se pareça com f na vizinhança de x_0 (lembre-se que esta semelhança é local, *i.e.*, perto de x_0). Determinar g significa determinar as constantes a e b. Será mais conveniente, modificando a constante b,

[1]Agradeço ao colega Prof. Victor Giraldo pelas proveitosas discussões sobre o assunto e indico ao leitor interessado a referência [Gi].
Victor Giraldo: ⋆ 05/01/1969, Rio de Janeiro, Brasil.

[2]Aristóteles: ⋆ 384 A.C., Stagirus, Grécia - † 322 A.C., Chalcis, Grécia.

escrever a função g na forma $g(x) = a(x - x_0) + b$ (convença-se que toda função afim pode ser escrita desta forma).

Como proceder? A resposta depende, é claro, do que se entende por “aproximar uma função”. Devemos precisar o que significa g ser a função afim que mais se parece com f na vizinhança de um ponto. É natural exigir que a função g satisfaça as seguintes condições:

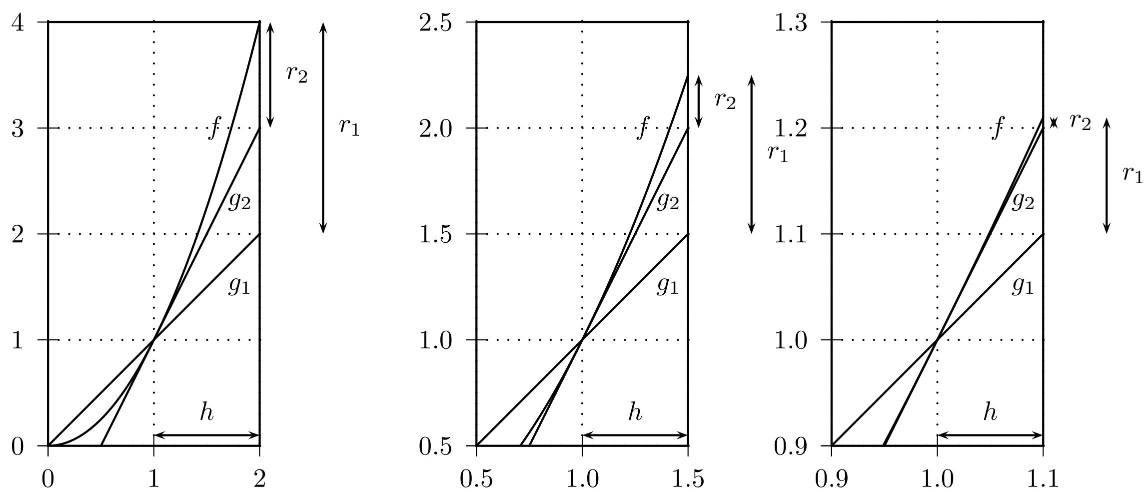
i. $g(x_0) = f(x_0)$; ii. $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$.

É fácil ver que a condição (i) é equivalente a $b = f(x_0)$. A condição (ii) significa que o erro $r(x) = f(x) - g(x)$ cometido ao aproximar f por g no ponto x fica tão pequeno quanto quisermos bastando para isto tomar x suficientemente próximo de x_0. Substituindo g por sua expressão em (ii) obtemos

$$\lim_{x \to x_0} \big[f(x) - \big(a(x - x_0) + f(x_0)\big)\big] = 0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \big(f(x_0) + a(x - x_0)\big) = f(x_0).$$

Ou seja, (ii) é equivalente à continuidade de f em x_0. Veja que este resultado (in)felizmente não implica nada sobre a constante a. Será que existe algum valor para a que dê a melhor aproximação?

Consideremos um exemplo que será esclarecedor. Veja a figura 8.1(a). Ela mostra duas aproximações afins para a função $f(x) = x^2$ em três vizinhanças de $x_0 = 1$, cada vez menores.



(a) $h = 1$. (b) $h = 0,5$. (c) $h = 0,1$.

Figura 8.1: Aproximações afins para $f(x) = x^2$ no intervalo $[1 - h, 1 + h]$.

Observe que o gráfico da função f é mais parecido com o gráfico de $g_2(x) = 2(x-1)+1$, do que com o de $g_1(x) = (x - 1) + 1$. Fazendo um *zoom* (tomando valores menores de h), percebemos que quanto mais perto do ponto $(1, 1)$ olharmos, maior será a semelhança entre os gráficos de f e g_2. Podemos ter uma ideia dos valores dos erros $r_2(x) = f(x) - g_2(x)$ e

$r_1(x) = f(x) - g_1(x)$ olhando para o extremo direito de cada um dos intervalos, *i.e.*, tomando $x = 1 + h$. Percebemos que $r_1(1+h)$ se aproxima de zero, mas comparado com h não é tão pequeno. De fato, $r_1(1+h)/h$ tende a 1 quando $h \to 0$. Por outro lado, $r_2(1+h)$ é pequeno mesmo quando comparado com h já que $r_2(1+h)/h$ tende a zero quando $h \to 0$. É esta propriedade que formaliza o fato de g_2 ser a melhor aproximação afim de f numa vizinhança de 1. É ela também que nos indica qual deve ser o coeficiente angular da melhor aproximação. Fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 8.1. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A. Dizemos que f é* **derivável** *em $x_0 \in A$ se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \big(f(x_0) + a(x - x_0)\big)}{x - x_0} = 0, \tag{8.1}$$

ou, de forma equivalente (troque $x - x_0$ por h),

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - \big(f(x_0) + ah\big)}{h} = 0.$$

A discussão anterior mostra que se f é derivável em x_0 então f é contínua neste ponto.

O leitor que já estudou Cálculo I, pode estranhar esta definição, pois ela difere daquela clássica presente na maioria (senão todos) os livros. A proposição seguinte resolve esta confusão mostrando que as duas definições são equivalentes. A escolha pela Definição 8.1 se deve ao fato que ela pode ser facilmente generalizada para funções de mais variáveis (inclusive infinitas!). O autor espera, com isto, suavizar as dificuldades que o leitor possa ter com definição de derivabilidade para funções de duas ou mais variáveis. Reflita bastante sobre a Definição 8.1 e a proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO 8.2. *Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é derivável em x_0, ponto de acumulação de A, se, e somente se, o limite abaixo existe e é finito.*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Neste caso, a constante a em (8.1) é única e igual ao limite acima.

Demonstração. Observamos que

$$\frac{f(x) - \big(f(x_0) + a(x - x_0)\big)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a.$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \big(f(x_0) + a(x - x_0)\big)}{x - x_0} = 0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a.$ ■

DEFINIÇÃO 8.3. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$. Se f é derivável em $x_0 \in A$, então a* **derivada** *de f em x_0 é denotada por $f'(x_0)$ e definida por*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se f é derivável em todo ponto do seu domínio, então dizemos simplesmente que f é **derivável**. *A função f', definida no conjunto dos pontos onde f é derivável, que a cada x associa $f'(x)$ é chamada de* **derivada** *de f.*

Se f é derivável em x_0, então a reta de equação $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é a reta que melhor aproxima o gráfico de f numa vizinhança de x_0. Tal reta é chamada de **tangente** ao gráfico de f no ponto x_0.

Exemplo 8.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ com a e b constantes. Perguntamos se f é derivável num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ e, no caso afirmativo, quanto vale $f'(x_0)$? Determinar se f é derivável em x_0 corresponde a determinar se f pode ser bem aproximada por uma função afim numa vizinhança de x_0. Neste exemplo, f já é afim e portanto pode ser muito bem aproximada por ela mesma. Além disto, sendo a derivada igual ao coeficiente do termo em x da aproximação, temos imediatamente que $f'(x_0) = a$ qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Vamos verificar isto rigorosamente a partir da definição. Temos*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = a.$$

Segue que f é derivável em todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ com $f'(x_0) = a$. Em particular, se f é constante ($a = 0$), obtemos que $f'(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 8.2. *Vamos verificar que a função dada por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) é derivável em qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ com $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$. Temos*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

Outros exemplos podem ser vistos em qualquer livro de Cálculo I. Vamos admitir conhecidas várias funções e suas derivadas. Em qualquer curso de Análise o enfoque não deve estar no cálculo de derivadas mas sim no estudo rigoroso de suas principais propriedades.

As propriedades operatórias das derivadas são, em sua maioria, consequências imediatas das propriedades análogas sobre limites.

PROPOSIÇÃO 8.4. (propriedades da derivada) *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváveis em $x_0 \in A$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Temos:*

i. $f + g$ é derivável em x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
ii. cf é derivável em x_0 e $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$;
iii. $f - g$ é derivável em x_0 e $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;
iv. fg é derivável em x_0 e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
v. se $g(x_0) \neq 0$, então f/g é derivável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Demonstração. Deixamos como exercício (i), (ii) e (iii). Da Proposição 7.3, p.106 e das identidades

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x_0)+\ f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\qquad \text{e}$$

$$\frac{(f/g)(x)-(f/g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,g(x_0)-f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right),$$

obtemos (iv) e (v). ■

PROPOSIÇÃO 8.5. (regra da cadeia) *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(A) \subset B$ (segue que $g \circ f$ está bem definida). Se f é derivável em $x_0 \in A$ e g é derivável em $f(x_0) \in B$, então $g \circ f$ é derivável em x_0 e, além disto,*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0).$$

Demonstração. Seja $r : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$r(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g\big(f(x_0)\big)}{y-f(x_0)}-g'\big(f(x_0)\big) & \text{se } y\neq f(x_0),\\[2ex] 0 & \text{se } y=f(x_0).\end{cases}$$

É imediato que $\lim\limits_{y\to f(x_0)} r(y) = 0 = r\big(f(x_0)\big)$. Se $y \in B$ e $y \neq f(x_0)$, então

$$g(y)-g\big(f(x_0)\big)=g'\big(f(x_0)\big)\big(y-f(x_0)\big)+r(y)\big(y-f(x_0)\big).$$

Como a equação acima é, trivialmente, verdadeira para $y = f(x_0)$ temos que ela é válida para todo $y \in B$. Fazendo $y = f(x)$ com $x \in A,\ x \neq x_0$, na equação acima e dividindo-a por $x - x_0$, obtemos

$$\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{x-x_0}=g'\big(f(x_0)\big)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+r\big(f(x)\big)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Como f é contínua em x_0 e r é contínua em $f(x_0)$, da Proposição 7.10, p.110 obtemos que $\lim\limits_{x\to x_0} r\big(f(x)\big) = 0$. Concluímos a demonstração, fazendo $x \to x_0$ na equação acima e usando a Proposição 7.3, p.106. ■

PROPOSIÇÃO 8.6. (derivada da inversa) *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ invertível. Se f é derivável em $x_0 \in A$ com $f'(x_0) \neq 0$ e f^{-1} é contínua em $f(x_0)$, então f^{-1} é derivável em $f(x_0)$ e, além disto, $\big(f^{-1}\big)'\big(f(x_0)\big) = \big(f'(x_0)\big)^{-1}$.*

Demonstração. Tomando $y_0 = f(x_0)$, pela definição de função inversa,

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(x_0)\big)=\big(f^{-1}\big)'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to f(x_0)}\frac{f^{-1}(y)-x_0}{f(f^{-1}(y))-f(x_0)}.$$

Como f^{-1} é contínua, podemos mudar variável no limite utilizando o exercício 21, p.118 com $x = f^{-1}(y)$ e obtemos que

$$\lim_{y\to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left[\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]^{-1} = \big(f'(x_0)\big)^{-1}.$$

■

Exemplo 8.3. *No exercício 41, p.120 vimos que a função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \geq 0$ tem inversa contínua. Como a derivada de f só se anula em 0, a Proposição 8.6 implica que f^{-1} é derivável em $f(x)$ se $x > 0$, ou seja, f^{-1} é derivável em $(0, +\infty)$. Além disto, em $y = f(x) > 0$, a derivada de f^{-1} é dada por*

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

A hipótese de continuidade de f^{-1} é essencial como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 8.4. *Seja $f : [0, 1] \cup (2, 3] \to [0, 2]$ definida por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1]$ e $f(x) = x - 1$, se $x \in (2, 3]$. Temos que f é derivável com $f'(x) = 1$ para todo x no domínio de f. Vimos no exercício 8, p.116 que f é uma bijeção com inversa descontínua em 1. Portanto, f^{-1} não é derivável em 1.*

8.2 Extremos locais e o Teorema do Valor Médio.

Em paralelo ao conceito de extremo (máximo ou mínimo) global (veja Definição 7.20, p.112) existe o conceito de extremo local.

DEFINIÇÃO 8.7. *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que $x_0 \in A$ é um* **ponto de máximo local** *de f se x_0 é ponto de máximo de f na interseção de A com uma vizinhança de x_0.* Mutatis mutandis[1] *define-se* **ponto de mínimo local** *e ponto de* **extremo local***.*

É imediato que todo extremo global é extremo local.

Veremos a seguir como a derivada pode ser útil na determinação de extremos locais (e *a posteriori* de extremos globais). O resultado importante neste sentido é o Teorema dos Extremos Locais. Além de ser um resultado de uso bastante prático ele também tem importância teórica. Por exemplo, usaremos o Teorema dos Extremos Locais para demonstrar o Teorema do Valor Médio. Este último é um dos teoremas mais fundamentais da Análise Real.

TEOREMA 8.8. (dos extremos locais ou Fermat) *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in A$ é um extremo local de f tal que $x_0 \in A^\circ$ e f é derivável em x_0, então $f'(x_0) = 0$.*

[1] Expressão latina que significa "modificando onde tiver que ser modificado"

Demonstração. Suponhamos que x_0 é um ponto de máximo local de f (a demonstração é análoga para ponto de mínimo local). Como x_0 é ponto de máximo local no interior de A, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$, então $x \in A$ e $f(x) \leq f(x_0)$. Portanto para $x_0 < x < x_0 + \delta$ temos $\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0) \leq 0$. Segue que

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Por outro lado, para $x_0 - \delta < x < x_0$ temos $\big(f(x) - f(x_0)\big)/(x - x_0) \geq 0$. Portanto

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

■

Como dissemos anteriormente, o Teorema dos Extremos Locais é útil na determinação dos extremos globais de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De fato, temos as seguintes implicações:

$$\left.\begin{array}{r} x_0 \text{ é extremo global} \quad \Longrightarrow \quad x_0 \text{ é extremo local} \\ \\ x_0 \in A^\circ \text{ e } f \text{ é derivável em } x_0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0.$$

Observação 8.1 *Concluímos que se x_0 é extremo global, então x_0 pertence a algum dos três conjuntos abaixo:*

$\{x \in A^\circ; f$ *é derivável em* x *e* $f'(x) = 0\}$, $A \setminus A^\circ$ *ou* $\{x \in A^\circ;\ f$ *não é derivável em* $x\}$.

Exemplo 8.5. *Seja $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - 1|(5 - x)$ para todo $x \in [0, 4]$. Como f é contínua e $A = [0, 4]$ é compacto, f tem extremos globais. Vamos determiná-los. É imediato que*

$$f(x) = \begin{cases} (1 - x)(5 - x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \\ (x - 1)(5 - x) & \text{se } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Segue facilmente (verifique) que f é derivável em todo ponto $x \in A \setminus \{1\}$. Além disto,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \\ 6 - 2x & \text{se } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Assim, todo extremo global pertence a algum dos três conjuntos abaixo:

$$\{x \in A^\circ \ ;\ f \text{ é derivável em } x \text{ e } f'(x) = 0\} = \{3\},$$

$$A \setminus A^\circ = \{0, 4\},$$

$$\{x \in A^\circ \ ;\ f \text{ não é derivável em } x\} = \{1\}.$$

Uma simples verificação nos dá $f(0) = 5$, $f(1) = 0$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 3$. Portanto, 0 é o ponto de máximo global e 1 é o ponto de mínimo global de f.

TEOREMA 8.9. (de Rolle[1]) *Se $f \in C\big([a,b]\big)$ (com $a < b$) é derivável em (a,b) com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Se f for constante, então não há mais nada a ser demonstrado. Suponhamos que f não seja constante. Graças ao Corolário 7.21, p.112 (Weierstrass), f tem extremos globais em $[a,b]$. Como f não é constante, um destes extremos, denotado c, é tal que $f(c) \neq f(a) = f(b)$ e portanto $c \in (a,b)$. Do Teorema 8.8 (Extremos Locais) segue que $f'(c) = 0$. ■

COROLÁRIO 8.10. (Teorema do Valor Médio) *Se $f \in C\big([a,b]\big)$ (com $a < b$) é derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$.*

Demonstração. Considere a função g definida sobre $[a,b]$ dada por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Temos que $g \in C\big([a,b]\big)$ e g é derivável em (a,b) com

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para terminar a demonstração, basta mostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g(a) = g(b) = 0$, podemos aplicar o Teorema 8.9 (Rolle) para concluir a demonstração. ■

Em particular temos o seguinte corolário.

COROLÁRIO 8.11. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $f, g \in C(I)$, deriváveis em I°. Se, para todo $x \in I^\circ$:*

i. $f'(x) \geq 0$, então f é crescente em I;
ii. $f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente em I;
iii. $f'(x) \leq 0$, então f é decrescente em I;
iv. $f'(x) < 0$, então f é estritamente decrescente em I;
v. $f'(x) = 0$, então f é constante em I;
vi. $f'(x) = g'(x)$, então $f - g$ é constante em I.

Demonstração. (i) Sejam $a, b \in I$ com $a < b$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a $f|_{|[a,b]}$, obtemos que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0.$$

Segue que $f(b) \geq f(a)$. Logo f é crescente. Deixamos os outros itens para os leitores. ■

Observação 8.2 *A hipótese da derivada ser positiva num* **intervalo** *é fundamental para se concluir que a função é crescente neste intervalo. A derivada ser positiva em* **um ponto** *a não implica que ela é crescente numa vizinhança de a (ver exercício 2, p.135).*

Terminamos a seção com uma aparente generalização do Teorema do Valor Médio, o Teorema de Cauchy. Na realidade (prove!) são equivalentes os Teoremas de Rolle, do valor médio e de Cauchy (ver exercício 27, p.139).

[1] Michel Rolle: ⋆ 21/04/1652, Ambert, França - † 08/11/1719, Paris, França.

⋆ **TEOREMA 8.12. (de Cauchy)** *Se $f, g \in C\big([a,b]\big)$ (com $a < b$) são deriváveis em (a,b) e g' não se anula em (a,b), então $g(a) \neq g(b)$ e existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Observamos inicialmente que $g(a) \neq g(b)$, pois senão, pelo Teorema de Rolle, g' se anularia em algum ponto de (a,b). Considere a função h, definida sobre $[a,b]$, dada por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big).$$

É fácil ver que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, logo existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$, ou seja,

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0.$$

Daí segue imediatamente o resultado. ■

8.3 Fórmulas de Taylor.

A ideia que motivou a definição da derivada foi a de aproximar uma função arbitrária por uma função afim, isto é, por uma função polinomial de grau menor ou igual a 1. Veremos nesta seção, que podemos fazer aproximações melhores se tomarmos polinômios de graus maiores que 1. Para isto será necessário exigir mais de f.

DEFINIÇÃO 8.13. *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ derivável. Dizemos que f é* **duas vezes derivável** *em $x_0 \in I$ se f' é derivável em x_0. A* **segunda derivada** *de f em x_0 é definida por $(f')'(x_0)$ e denotada por $f''(x_0)$.*

Analogamente, definimos a terceira derivada, quarta derivada, etc. De modo geral, a n-**ésima derivada** de f em x_0 é denotada por $f^{(n)}(x_0)$. Convencionamos ainda que $f^{(0)} = f$.

DEFINIÇÃO 8.14. *Se f é n vezes derivável e $f^{(n)} \in C(I)$, então dizemos que f é de* **classe $\mathbf{C^n}$** *em I, e escrevemos $f \in C^n(I)$. Finalmente, se $f \in C^n(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então dizemos que f é de* **classe $\mathbf{C^\infty}$** *em I e escrevemos $f \in C^\infty(I)$.*

DEFINIÇÃO 8.15. *Seja f uma função n vezes derivável em x_0. Definimos o* **polinômio de Taylor**[1] *de f de ordem n em torno de x_0 por*

$$p_n(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

[1]Brook Taylor: ⋆ 18/08/1685, Edmonton, Inglaterra - † 29/12/1731, Londres, Inglaterra.

Tomando $h = x - x_0$, o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de x_0 pode ser escrito como

$$p_n(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n.$$

Observe ainda que no ponto x_0 as derivadas até a ordem n de f e de p coincidem.

⋆ **TEOREMA 8.16. (fórmula de Taylor com resto de Peano[1])** *Seja f uma função $n-1$ vezes derivável no intervalo I (se $n = 1$ esta hipótese é eliminada), e n vezes derivável em $x_0 \in I$. Se $x_0 + h \in I$, então escrevendo*

$$f(x_0+h) = p_n(x_0+h) + r(h),$$

sendo p_n o polinômio de Taylor de grau n de f em torno de x_0, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Demonstração. Observamos inicialmente que a relação $f(x_0+h) = p_n(x_0+h) - r(h)$ deve ser vista como a definição de $r(h)$, *i.e.*, $r(h) = f(x_0+h) - p_n(x_0+h)$.

Procedemos por indução em n. Para $n = 1$ temos $p_1(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h$. Segue que

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h}.$$

O resultado segue imediatamente da Definição 8.1 e da Proposição 8.2.

Suponhamos $n > 1$. Observamos que f' é $n-2$ vezes derivável em I e $n-1$ vezes derivável em x_0. Um cálculo simples mostra que o polinômio de Taylor de grau $n-1$ de f' em torno de x_0 é dado por p_n'. Daí e da hipótese de indução, obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - p_n'(x_0+h)}{h^{n-1}} = 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Da igualdade acima, concluímos que existe $\delta > 0$ tal que

$$x_0 + h \in I,\ 0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{f'(x_0+h) - p_n'(x_0+h)}{h^{n-1}} \right| < \varepsilon.$$

Seja $h \in (0, \delta)$ tal que $x_0 + h \in I$ (o caso $h \in (-\delta, 0)$ é análogo). As funções dadas por $r(t) = f(x_0+t) - p_n(x_0+t)$ e $g(t) = t^n$ são deriváveis em $[0, h]$ e se anulam em 0. Além disto, g' não se anula em $(0, h)$. Pelo Teorema de Cauchy (Teorema 8.12), obtemos que existe $t \in (0, h)$ tal que

$$\left|\frac{r(h)}{h^n}\right| = \left|\frac{r(h) - r(0)}{g(h) - g(0)}\right| = \left|\frac{r'(t)}{g'(t)}\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{f'(x_0+t) - p'(x_0+t)}{t^{n-1}}\right| < \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon.$$

■

[1] Giuseppe Peano: ⋆ 27/08/1858, Piemonte, Itália - † 20/04/1932, Turim, Itália.

O teorema anterior diz que, numa vizinhança de x_0, podemos aproximar uma função f pelo seu Polinômio de Taylor de grau n. Ao fazê-lo, no ponto $x_0 + h$, cometemos um erro $r(h) = f(x_0 + h) - p_n(x_0 + h)$ que é um **infinitésimo de ordem** n, *i.e.*, que tende a zero mais rápido que h^n quando h tende a 0. Este fato é, muitas vezes expresso, com a seguinte frase: "r é $o(h^n)$ quando $h \to 0$". Ou ainda, é usado o abuso de notação "$r = o(h^n)$".

O teorema seguinte fornece uma forma mais explicita para o erro da aproximação. Ele também pode ser visto como uma generalização do Teorema do Valor Médio.

TEOREMA 8.17. (fórmula de Taylor com resto de Lagrange[1]) *Se $f \in C^n\big([a, b]\big)$ (com $a < b$, o caso $b < a$ é análogo) e f é $n + 1$ vezes derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*
$$f(b) = p_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$
sendo p_n o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a.

Demonstração. Seja g definida sobre $[a, b]$ dada por
$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}, \end{aligned}$$
sendo A uma constante escolhida de modo que $g(a) = f(b)$ e, portanto,
$$f(b) = p_n(b) + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}.$$

Devemos mostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f^{(n+1)}(c) = A$. Temos que $g \in C\big([a, b]\big)$ e é derivável em (a, b). Além disto, $g(b) = f(b) = g(a)$. Graças ao Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Por outro lado,
$$g'(c) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i+1)}(c)}{i!}(b-c)^i - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{(i-1)!}(b-c)^{i-1} - \frac{A}{n!}(b-c)^n = \frac{\big(f^{(n+1)}(c) - A\big)}{n!}(b-c)^n.$$
Segue que $f^{(n+1)}(c) = A$. ■

Observação 8.3 *Tomando $a = x_0$ e $b = x_0 + h$ no Teorema 8.17 (para compará-lo com o Teorema 8.16) obtemos de forma explícita o erro:*
$$f(x_0 + h) = p_n(x_0 + h) + r(h) \text{ com } r(h) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1},$$
onde $c \in B_h(x_0)$. Desta forma, c depende de h mas se $f^{(n+1)}$ for limitada nesta bola por C então $\dfrac{|r(h)|}{|h|^n} \leq \dfrac{C}{(n+1)!}|h|$, e portanto, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$.

[1]Joseph-Louis Lagrange: ⋆ 25/01/1736, Turim, Itália - † 10/04/1813, Paris, França.

Observação 8.4 *Veja o exercício 26, p.139 para uma fórmula explícita do erro como uma integral.*

Como exemplo de aplicação da Fórmula de Taylor temos a seguinte proposição sobre extremos locais.

PROPOSIÇÃO 8.18. *Seja f uma função definida num intervalo I e n vezes derivável em $x_0 \in I$ com $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Temos:*

i. se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é mínimo local de f;

ii. se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é máximo local de f;

iii. se n é ímpar, então x_0 não é extremo local de f.

Demonstração. Seja $x \in I$. Como as derivadas de f se anulam até a ordem $n-1$, tomando $h = x - x_0$ na Fórmula de Taylor com resto de Peano obtemos

$$f(x) - f(x_0) = p_n(x) - f(x_0) + r(h) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + r(h) \qquad \text{com} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0. \tag{8.2}$$

Deste modo, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in I$ com $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|r(h)| < \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n\right|. \tag{8.3}$$

De (8.2) e (8.3), obtemos que o sinal de $f(x) - f(x_0)$ é o mesmo de

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Daí seguem imediatamente as três afirmações da proposição. ■

8.4 ⋆ Método de Newton.

No exercício 40, p.76 mostramos que, dados $m \in \mathbb{N}$ e $a \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que $x^m = a$, ou de modo equivalente, que existe raiz para a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^m - a$ para todo $x \geq 0$. Nosso método consistiu em definir recursivamente uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que era convergente para a raiz da função f acima.

O método empregado é um caso particular do chamado **Método de Newton**[1], muito usado para calcular aproximações (tão boa quanto quisermos) de raízes de funções. A Figura 8.2 dá uma ideia geométrica do método. O próximo teorema garante o seu funcionamento.

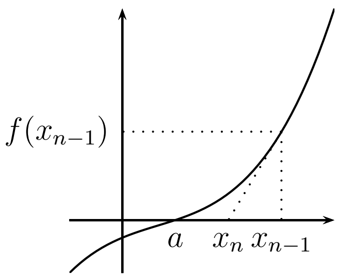
TEOREMA 8.19. (método de Newton) *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in A$ com $f(a) = 0$. Suponhamos que exista $\varepsilon > 0$ tal que*

i. f é duas vezes diferenciável em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e f'' é contínua em a;

ii. f' não se anula em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Então, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $x_0 \in [a - \delta, a + \delta]$, a sequência definida recursivamente por $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$. é convergente para a.

[1] Sir Isaac Newton: ⋆ 04/05/1643, Woolsthorpe, Inglaterra - † 31/03/1727, Londres, Inglaterra.



$$f'(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Figura 8.2: Iteração do Método de Newton.

Demonstração. Segue imediatamente das hipóteses que, no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, a função dada por $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ está bem definida e é derivável. Derivando g obtemos,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Segue que g' é contínua em a e que $g'(a) = 0$. Portanto, existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $|g'(x)| \leq 1/2$ para todo $x \in X = [a - \delta, a + \delta]$.

Vamos mostrar que $g|_X$ é uma contração. Sejam $x, y \in X$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y) \subset X$ tal que

$$|g(x) - g(y)| = |g'(z)| \cdot |x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Temos ainda que $g(X) \subset X$. De fato, se $x \in X$ então,

$$|g(x) - g(a)| \leq \frac{1}{2}|x - a| < |x - a| \leq \delta.$$

Como $g(a) = a$ temos $|g(x) - a| < \delta$ e, portanto, $g(x) \in X$. Em particular, se $x_0 \in X$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 7.29, p.115), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o único ponto fixo de g em X. Ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a. ■

8.5 ⋆ Regras de l'Hospital.

PROPOSIÇÃO 8.20. (regra de l'Hospital[1] "0/0") *Sejam f e g funções deriváveis em (a, b). Se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, g' não se anula em (a, b) e existe $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$ (finito ou não), então existe $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)/g(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

[1] Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital: ⋆ 1661, Paris, França - † 02/02/1704, Paris, França.

Demonstração. Como $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, modificando ou estendendo f, se necessário, podemos supor que $f(a) = 0$. Analogamente, $g(a) = 0$. Desta forma f e g são contínuas em $[a, b)$.

Seja $x \in (a, b)$. Aplicando o Teorema 8.12 às funções f e g sobre o intervalo $[a, x]$, encontramos $y \in (a, x)$ tal que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(y)}{g'(y)}$. O resultado segue da igualdade acima observando que $y \to a^+$ quando $x \to a^+$. ■

Pequenas adaptações na demonstração anterior mostram que a proposição também é valida quando no seu enunciado substituímos $x \to a^+$ por $x \to b^-$. Da mesma forma, a Regra de l'Hospital vale para limites do tipo $x \to a$. O próximo corolário trata do caso $x \to +\infty$ (o caso $x \to -\infty$ é análogo).

COROLÁRIO 8.21. *Sejam f e g funções deriváveis em $(a, +\infty)$. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g' não se anula em $(a, +\infty)$ e existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x)/g'(x)$ (finito ou não), então existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Demonstração. Considere a função F definida sobre um intervalo $(0, b)$ por $F(y) = f(1/y)$. Analogamente definimos $G(y) = g(1/y)$. Os seguintes fatos são de verificação imediata:

i. F e G são deriváveis com $F'(y) = -f'(1/y)/y^2$ e $G'(y) = -g'(1/y)/y^2$ (segue que G' não se anula);

ii. $\lim_{y\to0^+} F(y) = \lim_{y\to0^+} f(1/y) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

iii. $\lim_{y\to0^+} G(y) = \lim_{y\to0^+} g(1/y) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

iv. $\lim_{y\to0^+} F'(y)/G'(y) = \lim_{y\to0^+} f'(1/y)/g'(1/y) = \lim_{x\to+\infty} f'(x)/g'(x)$.

Pela Proposição anterior, $\lim_{y\to0^+} F(y)/G(y) = \lim_{x\to+\infty} f'(x)/g'(x)$. Então,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to0^+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x\to+\infty} f'(x)/g'(x).$$

■

PROPOSIÇÃO 8.22. (regra de l'Hospital "∞/∞") *Sejam f e g funções deriváveis em (a, b). Se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$, g' não se anula em (a, b) e existe $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$ (finito ou não), então existe $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x)$ e $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Suponhamos que $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$ seja finito e igual a k (no caso infinito, a demonstração é análoga). Sabemos que existe $y > a$ tal que

$$z \in (a, y) \quad \Longrightarrow \quad k - \varepsilon < \frac{f'(z)}{g'(z)} < k + \varepsilon. \tag{8.4}$$

Como $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$, existe $\delta > 0$ (que podemos supor menor que $y - a$) tal que

$$a < x < a + \delta \quad \Longrightarrow \quad 1 - \varepsilon < \frac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)} < 1 + \varepsilon. \tag{8.5}$$

Seja $x \in (a, a+\delta) \subset (a, y)$. Graças ao Teorema 8.12, existe $z \in (x, y) \subset (a, y)$ tal que

$$\frac{f(x)\big(1 - f(y)/f(x)\big)}{g(x)\big(1 - g(y)/g(x)\big)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Daí segue que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(z)}{g'(z)} \cdot \dfrac{1 - g(y)/g(x)}{1 - f(y)/f(x)}$. Daí e das relações (8.4) e (8.5) obtemos

$$(k - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (k + \varepsilon)(1 + \varepsilon),$$

se $f'(z)/g'(z) \geq 0$ (caso contrário, basta inverter as desigualdades acima). A conclusão segue imediatamente. ■

Pequenas adaptações na demonstração anterior mostram que a proposição também é válida nos casos $x \to b^-$ e $x \to a$. O próximo corolário trata do caso $x \to +\infty$ (analogamente, trata-se o caso $x \to -\infty$). A demonstração é uma adaptação da ideia usada na demonstração do Corolário 8.21 que, por esta razão, é deixada a cargo do leitor.

COROLÁRIO 8.23. *Sejam f e g funções deriváveis em $(a, +\infty)$. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, g' não se anula em $(a, +\infty)$ e existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x)/g'(x)$, então existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Demonstração. Deixada para o leitor. ■

8.6 Exercícios.

8.6.1 Derivada e propriedades

$\Longrightarrow$ **1.** Determine $f'(x)$ para:

(a) $f(x) = \lceil x \rceil$; (b) $f(x) = 1/\lceil 1/x \rceil$; (c) $f(x) = x^2 I_{\mathbb{Q}}(x)$.

$\Longrightarrow$ **2.** Considere $f(x) = x/2 + x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ (veja [Sp] p.188 no.47 e [L] p.209).

(a) Prove que $f'(0) > 0$ mas que f **não** é crescente numa vizinhança de 0. Confronte com o exercício 23, p.139.

Dica: se $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, existem números próximos 0 com $g'(x) = 1$ e $g'(x) = -1$.

(b) Visualize a função f com auxílio de um software.

$\star$ (c) Considere $h(x) = \beta x + x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ (generalização de (a)), com $\beta > 0$. Prove que $h'(0) > 0$ mas que h **não** é crescente numa vizinhança de 0.

Dica: para $\beta < 1$ é fácil, para $\beta \geq 1$ ver [Sp] p.188 no.48.

$\Longrightarrow$ **3.** Dizemos que f é **estritamente crescente** em a se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(a) < f(y)$ para todo $x, y \in B_\delta(a)$ com $x < a < y$. Suponha que f é estritamente crescente em a ([Sp] p.189 no.49).

(a) Isto implica que f é crescente em $B_\delta(a)$?

Dica: veja exercício anterior.

(b) Prove que se f é diferenciável em a então $f'(a) \geq 0$.

(c) Suponha $g'(a) > 0$. Prove que g é estritamente crescente em a.

$\sharp$ **4.** (difícil) Suponha que f é estritamente crescente em a para todo $a \in [0, 1]$ ([Sp] p.189 no.49).

(a) Supondo que f é contínua, prove que f é estritamente crescente em $[0, 1]$.

Dica: para $0 < b < 1$, prove que o mínimo de f em $[b, 1]$ tem que estar em b.

(b) Prove (sem supor que f é contínua) que f é estritamente crescente em $[0, 1]$.

Dica: considere, para cada $b \in [0, 1]$ o conjunto $S_b = \{x;\ f(y) \geq f(b)$ para todo $y \in [b, x]\}$. Prove que $S_b = [b, 1]$ tomando o $\sup S_b$.

(c) Prove, sem usar o teorema do valor médio, que se a derivada é estritamente positiva em todos os pontos de um intervalo a função é estritamente crescente neste intervalo.

Dica: item (a) deste exercício e item (a) do exercício anterior.

(c) Prove, sem usar o teorema do valor médio, que se a derivada é zero em todos os pontos de um intervalo a função é constante neste intervalo.

Dica: ver [Sp] p.190.

$\Longrightarrow$ **5.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em $x_0 \in \mathbb{R}$. Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que seja contínua em $\mathbb{R}$ a função $F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{se } x \neq x_0, \\ a & \text{se } x = x_0. \end{cases}$

$\Longrightarrow$ **6.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em I°, sendo I um intervalo. Prove que f é Lipschitz contínua em I se, e somente se, f' é limitada em I°.

$\Longrightarrow$ **7.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Prove que $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$. Este é método da diferença centrada utilizado em análise numérica.

$\Longrightarrow$ **8.** Prove que o limite do exercício anterior existe para $f(x) = |x|$ embora f não seja derivável.

$\to$ **9.** Seja $f : A \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável no ponto $a \in A^\circ$.

Prove que $f''(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2}$. Dê um exemplo em que o limite acima existe mas f não é derivável em a.

10. Seja $f \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f'(x) \to \beta$ quando $x \to +\infty$. Prove que:

(b) se $f(x) \to \alpha$ quando $x \to +\infty$, então $\beta = 0$ ([Fi1] p.89 no.14);

(a) $f(x)/x \to \beta$ ([Fi1] p.89 no.15).

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, com derivada limitada. Prove que existe $c > 0$ tal que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x + cf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma bijeção com inversa derivável.

12. Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Prove que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma bijeção com inversa contínua se, e somente se, $a^2 \leq 3b$ ([L] p.231 no.6).

$\star$ **13.** (extra) Vamos deduzir a derivada de $\log$ e $\exp$ utilizando somente propriedades básicas destas funções e supondo que elas são diferenciáveis.

(a) Partindo da propriedade $\log(bx) = \log(x) + \log(b)$ e derivando obtemos $\log'(bx) = b\log'(bx) = \log'(x)$. Tome $x = 1$ e conclua que $\log'(b) = \log'(1)/b$.

(b) Partindo da propriedade $\exp(x+b) = \exp(x)\exp(b)$ e derivando obtemos $\exp'(x+b) = \exp'(x)\exp(b)$. Tome $x = 0$ e conclua que $\exp'(b) = \exp'(0)\exp(b)$.

Obs: Para provar que $\log'(1) = \exp'(0) = 1$ precisamos do limite fundamental. Note que para provar (a) e (b) não utilizamos a base e, cuja definição é motivada por simplificar o cálculo de derivada.

$\star$ **14.** (extra) Sejam $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ tais que $f' = f$, $g' = g$ e $f(0) = g(0) = 1$. Prove que:

(a) $f(x)f(-x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$; (b) $g(x)f(-x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(c) $f = g$.

$\rightarrow$ **15.** Dizemos que f é **convexa** em (a, b) se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall \lambda \in [0,1],\ \forall x, y \in (a,b).$$

Suponha que f é convexa. Prove que:

(a) **(desigualdade de Jensen[1])** se $\lambda_i > 0$ com $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ então $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

(b) se $a < b < c$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$. Qual interpretação geométrica?

(c) se f é crescente em (x, y) então é crescente em $(y, +\infty)$. Vale formulação análoga se f for decrescente em (x, y). Qual?

(d) f é contínua.

Dica: Dado $\alpha < c < x < \beta$, aplique (b) em torno de c e de x. Depois passe ao limite com $x \to c^+$ para provar que $f(c) - f(x)$ e $f(x) - f(c)$ vão para zero.

(e) se f é derivável em (a, b) então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Dica: Prove que f' é monótona não-decrescente.

(f) e^x é convexa. Conclua que dados $\alpha, \beta, a, b \geq 0$, com $\alpha + \beta = 1$, $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$.

$\star$ **16.** (extra) O objetivo deste exercício é demonstrar a versão real do **(Teorema Fundamental da Álgebra)**: todo polinômio de grau n tem no máximo n raízes.

[1] Johan Ludwig William Valdemar Jensen: $\star$ 08/05/1859, Nakskov, Dinamarca – † 05/03/1925, Copenhagen, Dinamarca.

(a) Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável e tem n raízes, então f' tem pelo menos $n-1$ raízes.

(b) Prove a versão real do Teorema Fundamental da Álgebra.

Sugestão: Em 16(b) proceda por indução e use 16(a).

$\star$ **17.** (extra) (Princípio do Máximo em $\mathbb{R}$) Suponha que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave que satisfaz $u''(x) + g(x)u'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que o máximo de u ocorre em a ou b, isto é, na fronteira de $[a,b]$.

Dica: Prove por contradição, supondo que máximo está no interior. Comece com desigualdade estrita. Depois tome $v(x) = u(x) + \varepsilon x^2$, use desigualdade estrita e faça $\varepsilon \to 0$.

$\sharp$ **18.** (difícil) **(Teorema de Darboux)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e diferenciável (com derivada não necessariamente contínua). Prove que $g = f'$ satisfaz o TVI em qualquer intervalo $[a,b]$: Dado c entre $g(a)$ e $g(b)$ existe um $x \in [a,b]$ tal que $g(x) = f'(x) = c$.

Dica: Ver wikipedia.

$\sharp$ **19.** (difícil) Seja $f_t : (0,1) \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = 1/q^t$ se $x = p/q \in \mathbb{Q}$ fração irredutível não nula e $f(x) = 0$ caso contrário. Prove que:

(a) se $t \leq 2$ então f_t não é diferenciável em ponto algum;

(b) se $t > 2$ então f_t é diferenciável nos irracionais.

8.6.2 Extremos locais, TVM e Taylor

20. Seja $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x$. Determine os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in [-1,2]\ ; x \text{ é mínimo global de f}\}, \\ B &= \{x \in [-1,2]\ ; x \text{ é máximo global de f}\}, \\ C &= \{x \in [-1,2]\ ; x \text{ é mínimo local de f}\}, \\ D &= \{x \in [-1,2]\ ; x \text{ é máximo local de f}\}. \end{aligned}$$

21. Se $a_1 < \cdots < a_n$, encontre o mínimo global de ([Sp] p.181 no.3):

(a) $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$; $\quad\star$ (b) $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$.

Dica para (b): como a função é linear entre os intervalos, o mínimo ocorre em um dos a_i's. Considere como $g(x)$ se modifica quando se passa de um intervalo a outro.

22. Determine todos os máximos e mínimos locais e globais de ([Sp] p.181 no.4):

(a) $f(x) = 1/x^2$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$; (b) $f(x) = xI_{\mathbb{Q}}(x)$;

(c) $f = I_A$, onde $A = \{1/n;\quad n \in \mathbb{N}\}$; (d) $f = I_{[0,+\infty)}$;

(e) $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}^\complement$, $f(p/q) = 1/q$ se p/q é fração irredutível com $q > 0$ e $f(0) = 0$;

(f) $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}^\complement$, $f(p/q) = (-1)^p q$ se p/q é fração irredutível com $q > 0$ e $f(0) = 0$;

(g) $f(x) = 1$ se 5 aparece na expansão decimal de x e $f(x) = 0$ caso contrário.

Dica: Para (e) e (f), veja exercício 17(f), p.117.

23. Suponha que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $f'(a) > 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que f é estritamente crescente em $I = B_\delta(a)$. A hipótese da continuidade da derivada é fundamental. Confronte com exercício 2, p.135.

$\Longrightarrow$ **24.** Suponha que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Prove que o conjunto dos pontos críticos de f:

(a) é fechado; (b) não-degenerados ($f'' \neq 0$) é isolado; (c) não-degenerados é enumerável.

Dica: Use a enumerabilidade dos racionais e defina uma função sobrejetiva de $\mathbb{Q}$ nos pontos críticos não-degenerados.

$\Longrightarrow$ **25.** (modificações do Teorema de Rolle) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$ se:

(a) $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; (b) f é um polinômio de grau par;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pi$.

26. (fórmula de Taylor com resto dado por integral) Se $f \in C^{n+1}\big([a,b]\big)$, então

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt.$$

Dica: Prove por indução integrando por partes.

27. Nós provamos que o Teorema 8.9 (Teorema de Rolle) implica no Corolário 8.10 (Teorema do Valor Médio). Prove a recíproca e a equivalência com o Teorema 8.12 (Teorema de Cauchy).

$\Longrightarrow$ **28.** Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é **analítica** num intervalo aberto I se para cada $a \in I$ existe $\varepsilon > 0$ tal que a série de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n = f(a+h)$ para todo $|h| < \varepsilon$. Prove que se f e g são analíticas num intervalo aberto I e coincidem, juntamente com todas as suas derivadas no ponto a então:

(a) $f(x) = g(x)$ para todo x numa vizinhança de a;

(b) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$ ([L] p.236 no.45).

29. Calcule a série de Taylor de $f(x) = e^{-1/x^2}$ em $x = 0$. Observe que a série **não** converge para a função em vizinhança alguma do zero, isto é, a função **não** é analítica em zero.

$\star$ **30.** (extra) Suponha que f é α-Hölder contínua (ver exercício 49, p.120) com $\alpha > 1$. Prove que:

(a)f é derivável; (b) f é constante.

$\sharp$ **31.** (difícil) Prove que se f pode ser diferenciada duas vezes em $[0,1]$ com $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f'(0) = f'(1) = 0$ então $|f''(x)| \geq 4$ para algum $x \in [0,1]$. Em linguagem mais pitoresca: Se uma partícula percorre uma unidade em um instante de tempo e começa e termina com velocidade zero então em algum instante ela possui aceleração $\geq$ 4 ([Sp] p.184 no.25).

Dica: Prove que a aceleração é maior que 4 em algum instante na primeira metade do tempo ou que é menor que -4 em algum instante na segunda metade do tempo.

$\sharp$ **32.** (difícil) Suponha que todo ponto de $[a, b]$ é um ponto de máximo local de f.

(a) Prove que o conjunto $f([a, b])$ é enumerável ([Sp] p.371 no.8).

Dica: Para cada x escolha números racionais a_x e b_x tais que x é máximo no intervalo (a_x, b_x).

(b) Prove que se f é contínua em $[a, b]$ e todo ponto de $[a, b]$ é um ponto de máximo local então f é constante ([Sp] p.190 no.50).

(c) Refaça (a) e (b) supondo que todo ponto é de máximo ou mínimo local.

Dica: para (b) use (a) ou se o mínimo ocorre em x_0 considere o conjunto $\{x \in [x_0, b];\ f(y) = f(x_0)$ para todo $y \in [x_0, x]\}$.

8.6.3 $\star$ Newton e l'Hospital

$\star$ **33.** (extra) Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $a \geq 0$. Escreva a definição da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de aproximações dada pelo Método de Newton para a raiz da função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^m - a$ para todo $x \geq 0$ (compare com a sequência do Exercício 40 do Capítulo 4).

$\star$ **34.** (extra) Prove que para a convergência do Método de Newton (Teorema 8.19) a hipótese de continuidade de f'' em a pode ser substituída pela limitação de f'' em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

$\star$ **35.** (extra) Suponha que f é suave e que $|f'(c)| < 1$.

(a) Prove que existe $\varepsilon > 0$ tal que o método $x_{n+1} = f(x_n)$ converge para todo $x_0 \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$;

Dica: $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1})$

(b) Seja $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Prove que $f(a) = a$;

(c) Prove que $|x_{n+1} - a| < \rho^n$ para algum $\rho \in (0, 1)$.

$\to$ **36.** Seja p um polinômio não constante. Prove que

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{|p(x)|} = +\infty$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{|p(x)|} = 0$.

$\to$ **37.** Prove que $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots + x^n/n! \leq e^x$ para $x \geq 0$. Utilize isto para provar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ([Sp] p.298 no.21).

Dica: Use indução e compare derivadas.

$\star$ **38.** (extra) Indeterminações: Porque $\infty^0 \neq 1$? (Ver [Ap] p.209–210) De forma geral os problemas envolvendo limites do tipo ∞^0 dão 1.

(a) Prove que $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x} = e$; (b) Determine $\lim\limits_{x\to0} x^{\alpha/\log x}$;

Suponha que $f(x)$ satisfaz $f(0) = 0$ e possui derivada numa vizinhança da origem.

(c) Prove que se o limite $\lim\limits_{x\to0} f(x)/f'(x)$ existe então vale 0;

(d) Conclua que neste caso $\lim\limits_{x\to0} x^{f(x)} = 1$;

(e) Porque (a) e (b) não satisfazem (d)?

$\star$ **39.** (extra) Defina $f(y) = \displaystyle\int_a^b t^y\, dt.$ para $0 < a < b$ fixos. Prove que f é contínua em -1.

Dica: Use l'Hospital para determinar $\lim\limits_{y\to-1} f(y) = \ln(b) - \ln(a)$ ([Ap] p.309).

Capítulo 9

Integral de Riemann

9.1 Somas superiores e inferiores.

O conceito de integral tem suas origens no **Método da Exaustão** devido, provavelmente, a Eudoxo e que teve Arquimedes[1] como um dos seus grandes desenvolvedores. A motivação deste método foi o cálculo de áreas e volumes de figuras com fronteiras curvas.

Apresentaremos aqui a integral de Riemann[2] usando a definição devida a Darboux[3] [Da]. Para o autor, a importância da integral de Riemann é, sobretudo, histórica. A integral de Lebesgue generaliza este conceito com muitas vantagens analíticas. Porém, a sua definição exige ferramental muito mais complicado e abstrato. Portanto, a integral de Riemann também tem importância didática. Ela serve de aquecimento à intuição para o estudo posterior da integral de Lebesgue. O leitor interessado no assunto poderá consultar [Ru1].

DEFINIÇÃO 9.1. *Chamamos* **partição** *de* $[a,b]$ *qualquer* $P \subset [a,b]$ *finito tal que* $a, b \in P$. *O conjunto das partições de* $[a,b]$ *é denotado* $\mathcal{P}[a,b]$.

A definição anterior não exclui a possibilidade $a = b$. Neste caso, a única partição do intervalo (degenerado) $\{a\}$ é $P = \{a\}$. É imediato que se $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$, então $P \cup Q \in \mathcal{P}[a,b]$. Se $P \in \mathcal{P}[a,b]$, então ao escrever $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, deixaremos subentendido que $a = x_0 \leq \cdots \leq x_n = b$.

DEFINIÇÃO 9.2. *Seja* f *uma função limitada em* $[a,b]$ *e* $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ *uma partição de* $[a,b]$. *Para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$, *definimos*

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad m_i = \inf\left(f(I_i)\right) \quad \text{e} \quad M_i = \sup(f(I_i)).$$

Note que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$.

[1]Arquimedes: ⋆ 287 A.C., Siracusa, Itália - † 212 A.C., Siracusa, Itália.

[2]Georg Friedrich Bernhard Riemann: ⋆ 17/09/1826, Breselenz, Alemanha - † 20/07/1866, Selasca, Itália.

[3]Jean Gaston Darboux: ⋆ 14/08/1842, Nimes, França - † 23/02/1917, Paris, França.

DEFINIÇÃO 9.3. *Definimos a* **soma inferior** *e a* **soma superior** *de f com relação a P, respectivamente, por*

$$I(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \inf(f(I_i))\Delta x_i \quad \text{e} \quad S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \sup(f(I_i))\Delta x_i.$$

A interpretação geométrica de $I(f;P)$ e $S(f;P)$ para uma função f contínua e positiva é dada na Figura 9.1. A área pintada de cinza (riscada ou não) corresponde a $S(f;P)$ enquanto que a área riscada corresponde a $I(f;P)$. Vemos então que $S(f;P)$ e $I(f;P)$ são aproximações por excesso e por falta, respectivamente, para a área[1] da região delimitada pelo gráfico de f, o eixo x, a reta $x = a$ e a reta $x = b$. Observamos ainda que a área riscada está contida na área cinza, refletindo o fato que $I(f;P) \leq S(f;P)$.

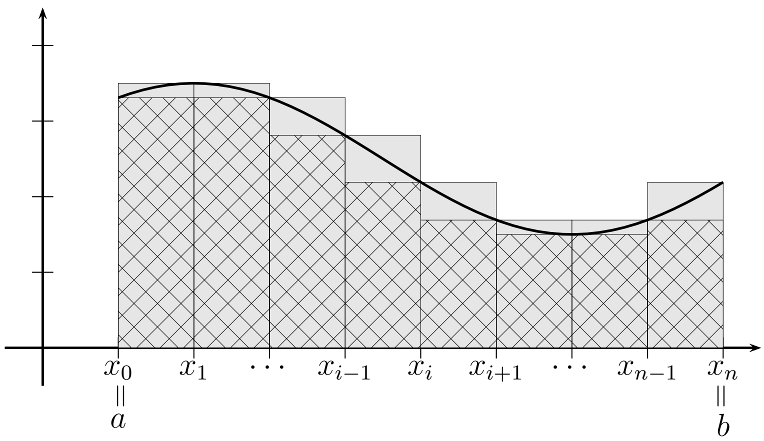


Figura 9.1: Interpretação geométrica soma superior e inferior para uma função contínua e positiva.

Exemplo 9.1. *Se a é um elemento do domínio de f, então f é limitada em $\{a\}$ e $I\big(f;\{a\}\big) = S\big(f;\{a\}\big) = 0$.*

Exemplo 9.2. *Consideremos uma função f constante, igual a c, em um intervalo $[a,b]$. Seja $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Temos $m_i = \inf(f(I_i)) = c$. Portanto, $I(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a)$. Analogamente obtemos $S(f;P) = c(b-a)$.*

É fácil ver que $I(f;P) \leq S(f;P)$. A proposição a seguir é uma generalização deste resultado.

[1] O que é área de uma região delimitada por linhas tortas?

PROPOSIÇÃO 9.4. (união de partições) *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Temos:*

$$I(f;P) \le I\big(f;P\cup Q\big) \le S\big(f;P\cup Q\big) \le S(f;Q) \qquad \forall P, Q \in \mathcal{P}[a,b].$$

Demonstração. Sejam $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ e $y \in Q \setminus P$ (está na partição Q mas não em P). Então existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_{j-1} < y < x_j$. Segue que

$$\begin{aligned} I(f;P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(x_j - y) + m_j(y - x_{j-1}). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Tomando $p = \inf(f([y, x_j])$ e $q = \inf(f([x_{j-1}, y])$, temos

$$I\big(f;P\cup\{y\}\big) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + p(x_j - y) + q(y - x_{j-1}). \tag{9.2}$$

Ora, $[x_{j-1}, y] \cup [y, x_j] = [x_{j-1}, x_j]$, logo, $m_j \le p$ e $m_j \le q$. De (9.1) e de (9.2), obtemos

$$I(f;P) \le I\big(f;P\cup\{y\}\big). \tag{9.3}$$

Aplicando este resultado um número finito de vezes obtemos que $I(f;P) \le I\big(f;P\cup Q\big)$. A desigualdade do meio segue da definição de soma superior e inferior.

Analogamente, mostra-se que para $z \in P \setminus Q$

$$S\big(f;Q\cup\{z\}\big) \le S(f;Q). \tag{9.4}$$

Aplicando este resultado um número finito de vezes obtemos que $S\big(f;P\cup Q\big) \le S(f;Q)$. ■

COROLÁRIO 9.5. *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Então $\big\{I(f;P)\ ;\ P \in \mathcal{P}[a,b]\big\}$ é limitado superiormente e $\big\{S(f;P)\ ;\ P \in \mathcal{P}[a,b]\big\}$ é limitado inferiormente. Além disto,*

$$\sup\big\{I(f;P)\ ;\ P \in \mathcal{P}[a,b]\big\} \le \inf\big\{S(f;P)\ ;\ P \in \mathcal{P}[a,b]\big\}.$$

Demonstração. Graças à proposição anterior temos

$$I(f;P) \le S(f;Q) \quad \forall P, Q \in \mathcal{P}[a,b].$$

Ou seja, $I(f;P)$ é cota inferior para $\big\{S(f;Q)\ ;\ Q \in \mathcal{P}[a,b]\big\}$. Como o ínfimo é a maior cota inferior, temos

$$I(f;P) \le \inf\big\{S(f;Q)\ ;\ Q \in \mathcal{P}[a,b]\big\} \quad \forall P \in \mathcal{P}[a,b].$$

Portanto, $\inf\big\{S(f;Q)\ ;\ Q \in \mathcal{P}[a,b]\big\}$ é cota superior de $\big\{I(f;P)\ ;\ P \in \mathcal{P}[a,b]\big\}$. Finalmente, usando que o supremo e a menor cota inferior obtemos o resultado. ■

9.2 Integral e propriedades.

DEFINIÇÃO 9.6. *Dizemos que f é (Riemann)* **integrável** *em $[a,b]$ se é limitada em $[a,b]$ e*

$$\sup\big\{I(f;P)\ ;\ P\in\mathcal{P}[a,b]\big\}=\inf\big\{S(f;P)\ ;\ P\in\mathcal{P}[a,b]\big\}.$$

Neste caso, a **integral** *de f em $[a,b]$ é definida por*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\inf\big\{S(f;P)\ ;\ P\in\mathcal{P}[a,b]\big\}.$$

Neste texto, ao dizer que uma função é integrável ficará subentendido que ela é limitada.

Exemplo 9.3. *Sejam f e a como no Exemplo 9.1. Temos f é integrável em $\{a\}$ e*

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

Exemplo 9.4. *Considere uma função f constante, igual a c, em $[a,b]$. Vimos no Exemplo 9.2 que $I(f;P)=S(f;P)=c(b-a)$ para toda $P\in\mathcal{P}[a,b]$. Segue daí que f é integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=c(b-a).$$

Exemplo 9.5. *Considere a função f dada por $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Vamos mostrar que f é integrável em $[0,1]$ e que sua integral, neste intervalo, vale $1/2$. Para isto, tomemos $n\in\mathbb{N}$ e consideremos a partição $P_n=\{x_0,\dots,x_n\}$, sendo*

$$x_i=\frac{i}{n}\qquad\forall i\in\{0,\dots,n\}.$$

Para cada $i\in\{0,\dots,n\}$ temos

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}\qquad\text{e}\qquad M_i=\sup(f(I_i))=\sup(I_i)=x_i=\frac{i}{n}.$$

Portanto, $S(f;P_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^n\frac{i}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$.

Analogamente obtemos $I(f;P_n)=(n-1)/2n$. Concluímos que

$$\frac{n-1}{2n}\le\sup\{I(f;P)\ ;\ P\in\mathcal{P}[0,1]\}\le\inf\{S(f;P)\ ;\ P\in\mathcal{P}[0,1]\}\le\frac{n+1}{2n}\qquad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Tomando o limite quando $n\to+\infty$ obtemos o resultado desejado.

Exemplo 9.6. *Considere a função f dada por $f(x)=1$, se $x\in\mathbb{Q}$, e $f(x)=-1$, se $x\notin\mathbb{Q}$. Vejamos que f não é integrável em nenhum intervalo $[a,b]$ não degenerado. Como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^\complement$ são* *densos em $\mathbb{R}$, qualquer intervalo aberto intercepta estes conjuntos. Portanto, para qualquer $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ partição de $[a, b]$ com $x_0 < \cdots < x_n$, temos*

$$\inf(f(I_i)) = -1 \quad e \quad \sup(f(I_i)) = 1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Logo, $I(f; P) = a - b$ e $S(f; P) = b - a$ para toda $P \in \mathcal{P}[a, b]$. Segue que

$$\sup\{I(f; P) \ ; \ P \in \mathcal{P}[a, b]\} = a - b < 0 < b - a = \inf\{S(f; P) \ ; \ P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Concluímos que f não é integrável em $[a, b]$.

No contexto da Integral de Lebesgue, a função do exemplo anterior é integrável e sua integral em $[a, b]$ é a mesma da função constante igual a -1. Isto ocorre porque o conjunto onde f difere da função constante -1 (no caso, $\mathbb{Q}$) é, em certo sentido, "pequeno". Em outras palavras, estas duas funções são iguais "em quase todo ponto", logo, é razoável que tenham a mesma integral.

Observação 9.1 *O sentido de "pequeno" e "quase todo ponto" não é o de cardinalidade mas estes estão relacionados, conforme Lema 9.27, p.157.*

Vejamos algumas propriedades importantes das funções integráveis. Começamos por um lema útil que será usado muitas vezes sem ser explicitamente mencionado. Portanto, é muito importante que o leitor memorize-o.

LEMA 9.7. (caracterizacao de funções integráveis) *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Então, f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \in \mathcal{P}[a, b] \quad \textit{tal que} \quad S(f; P) - I(f; P) \leq \varepsilon. \tag{9.5}$$

Demonstração. Suponhamos que f seja integrável e seja s a sua integral, *i.e.*,

$$\sup\big\{I(f; P) \ ; \ P \in \mathcal{P}[a, b]\big\} = s = \inf\big\{S(f; P) \ ; \ P \in \mathcal{P}[a, b]\big\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, da definição de s segue que existem $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$ tais que

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < I(f; P_1) \leq s \leq S(f; P_2) < s + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $P = P_1 \cup P_2$, pela Proposição 9.4, temos

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < I(f; P_1) \leq I(f; P) \leq S(f; P) \leq S(f; P_2) < s + \frac{\varepsilon}{2}.$$

e, portanto, $S(f; P) - I(f; P) < \varepsilon$.

Reciprocamente, suponhamos que f não seja integrável. Para toda $P \in \mathcal{P}[a, b]$ temos

$$I(f; P) \leq \sup\big\{I(f; Q) \ ; \ Q \in \mathcal{P}[a, b]\big\} < \inf\big\{S(f; Q) \ ; \ Q \in \mathcal{P}[a, b]\big\} \leq S(f; P)$$

Portanto, tomando

$$\varepsilon = \frac{\inf\big\{S(f; Q) \ ; \ Q \in \mathcal{P}[a, b]\big\} - \sup\big\{I(f; Q) \ ; \ Q \in \mathcal{P}[a, b]\big\}}{2} > 0,$$

obtemos que $S(f;P) - I(f;P) > \varepsilon$, contrariando (9.5). ■

Reportamo-nos mais uma vez à Figura 9.1. Veja que a quantidade $S(f;P) - I(f;P)$ corresponde à área pintada de cinza e que não está riscada. O lema anterior nos diz que esta quantidade será arbitrariamente pequena (bastando tomar uma partição adequada) se, e somente se, f for integrável.

TEOREMA 9.8. (funções contínuas são integráveis) *Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Sabemos que f é limitada em $[a, b]$, graças ao Teorema de Weierstrass (Corolário 7.21, p.112). Mostremos que f é integrável.

Dado $\varepsilon > 0$, usando que f é uniformemente contínua em $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [a, b] \quad \text{e} \quad |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{9.6}$$

Seja $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \delta$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definindo,

$$m_i = \inf(f(I_i)) \quad \text{e} \quad M_i = \sup(f(I_i)),$$

de (9.6), obtemos $M_i - m_i \leq \varepsilon$. Portanto,

$$S(f;P) - I(f;P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon(b - a).$$

■

O Teorema 9.8 e o Exemplo 9.6 são duas faces da mesma moeda (perceba que a função vista naquele exemplo é descontínua em todo ponto). De fato, existe uma relação estreita entre a integrabilidade e continuidade dada pelo Teorema de Lebesgue (a seguir) do qual o Teorema 9.8 é um simples corolário. Outros resultados sobre integrabilidade a serem vistos nesta seção também o são. Preferimos, no entanto, dar demonstrações particulares para cada um deles como forma de aquecimento à intuição.

PROPOSIÇÃO 9.9. (funções integráveis formam espaço vetorial) *Seja $c \in \mathbb{R}$. Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então $f + g$, cf e $f - g$ são integráveis em $[a, b]$ e*

i. $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$

ii. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$

iii. $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Demonstração. Deixo a cargo do leitor a prova (se ele ainda não a fez) de que $f + g$, cf e $f - g$ são limitadas em $[a, b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, como f e g são integráveis, existe $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partição de $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon < I(f; P) \leq S(f; P) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon. \tag{9.7}$$

e

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \varepsilon < I(g; P) \leq S(g; P) < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x + \varepsilon. \tag{9.8}$$

Mostremos que $f + g$ é integrável sobre $[a, b]$ e que vale (i). Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$\sup((f + g)(I_i)) \leq \sup(f(I_i)) + \sup(g(I_i)).$$

Multiplicando por Δx_i e somando de $i = 1$ até $i = n$ obtemos

$$S(f + g; P) \leq S(f; P) + S(g; P).$$

Desta desigualdade, de (9.7) e de (9.8) segue que

$$S(f + g; P) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Analogamente, mostra-se que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - 2\varepsilon < I(f + g; P).$$

Das duas últimas desigualdades concluímos que $S(f+g; P) - I(f+g; P) < 4\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue do Lema 9.7 que $f + g$ é integrável. Além disto,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Finalmente, fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos (i).

Mostremos agora que cf é integrável sobre $[a, b]$ e que vale (ii). Suponhamos $c \geq 0$ (o caso $c < 0$ é tratado de modo análogo). Multiplicando (9.7) por c e usando o resultado do exercício 1, p.160, obtemos

$$c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - c\varepsilon \leq I(cf; P) \leq \int_a^b cf(x)\mathrm{d}x \leq S(cf; P) \leq c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + c\varepsilon.$$

Segue que $S(cf; P) - I(cf; P) \leq 2c\varepsilon$. Novamente, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, do Lema 9.7, obtemos que cf é integrável. Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$ concluímos (ii).

Obtemos que $f - g$ é integrável em $[a, b]$ e que vale (iii) como consequência imediata dos resultados já demonstrados. ■

No espírito da proposição anterior, o leitor pode perguntar sobre o produto e o quociente de funções integráveis. Observamos, desde já, que o quociente de funções limitadas pode não ser limitado (quando o denominador tende a zero em algum ponto). Sobre o produto, será preferível adiar um pouco esta questão. Antes disto demonstraremos duas proposições.

PROPOSIÇÃO 9.10. (monotonia da integral) *Se f é integrável em $[a,b]$ com $0 \le f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então*

$$0 \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Como $0 \le f$, $0 \le \sup(f(I_i))$. Multiplicando por Δx_i e somando de $i = 1$ até $i = n$ obtemos

$$0 \le S(f;P) \quad \forall P \in \mathcal{P}[a,b].$$

Tomando $\inf$ dos dois lados, obtemos

$$0 \le \inf\big\{S(f;P)\ ;\ P \in \mathcal{P}[a,b]\big\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Que é a conclusão desejada. ■

COROLÁRIO 9.11. *Sejam f e g integráveis em $[a,b]$. Se $f \le g$ em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Aplique a Proposição 9.10 a função $g - f$ e use a Proposição 9.9. ■

PROPOSIÇÃO 9.12. (integral do módulo) *Se f é integrável em $[a,b]$, então $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Como f é integrável, é limitada em $[a,b]$. Mais uma tarefa para o leitor: mostrar que isto implica que $|f|$ é limitada em $[a,b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - I(f;P) \le \varepsilon$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, denotamos:

$$m_i = \inf(f(I_i)), \quad M_i = \sup(f(I_i)), \quad \overline{m}_i = \inf(|f|(I_i)), \quad \overline{M}_i = \sup(|f|(I_i)).$$

Com esta notação, $S(f;P) - I(f;P) = \displaystyle\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i \le \varepsilon$. Resta provar que $\overline{M}_i - \overline{m}_i \le M_i - m_i$, pois isto implicará que

$$S(|f|;P) - I(|f|;P) = \sum_{i=1}^n (\overline{M}_i - \overline{m}_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i \le \varepsilon.$$

Do Lema 9.7 concluímos que $|f|$ é integrável. Como $f \le |f|$ e $-f \le |f|$, temos que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x;$$
$$-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big(-f(x)\big)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Daí obtemos a conclusão final.

Para provar que $\overline{M}_i - \overline{m}_i \leq M_i - m_i$, dividimos em três casos:

(a) se $f \geq 0$ em I_i, então $m_i = \overline{m}_i$ e $M_i = \overline{M}_i$ e, portanto, $\overline{M}_i - \overline{m}_i = M_i - m_i$;

(b) se $f \leq 0$ em I_i, $0 \geq M_i \geq m_i$, e portanto, $\overline{M}_i = -m_i$ e $\overline{m}_i = -M_i$ e, portanto, $\overline{M}_i - \overline{m}_i = -m_i - (-M_i) = M_i - m_i$;

(c) caso contrário, $M_i \geq 0 \geq m_i$. É claro que (porque?) $\overline{M}_i = \max(M_i, -m_i) \leq M_i - m_i$ (como os dois termos são positivos, a soma deles é maior que o máximo entre os dois). Por outro lado, $\overline{m}_i \geq 0$. Logo, $\overline{M}_i - \overline{m}_i \leq \overline{M}_i = \max(M_i, -m_i) \leq M_i - m_i$. ∎

A recíproca da proposição anterior é falsa. Ou seja, $|f|$ pode ser limitada e integrável em $[a, b]$, sem que f seja integrável neste intervalo. Por exemplo, considere a função f dada por $f(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$, e $f(x) = -1$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Já vimos que f não é integrável em $[0, 1]$. Porém, a função $|f|$ é constante (igual a 1) e, portanto, integrável neste intervalo. Este é um exemplo de desvantagem da integral de Riemann em relação a de Lebesgue: f é integrável a Lebesgue se, e somente se, $|f|$ também é.

PROPOSIÇÃO 9.13. (funções integráveis formam uma álgebra) *Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então fg é integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Aqui também fica a cargo do leitor a demonstração de que fg é limitada em $[a, b]$.

Inicialmente, vamos considerar o caso particular em que $f = g$, limitada pela cota superior $M > 0$. Pela proposição anterior $|f|$ é integrável. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(|f|; P) - I(|f|; P) \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, denotamos

$m_i = \inf(|f|(I_i)), \quad M_i = \sup(|f|(I_i)) \quad q_i = \inf(f^2(I_i)), \quad Q_i = \sup(f^2(I_i)).$

Desta forma, para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$, temos $m_i^2 \leq f(x)^2 \leq M_i^2$. Portanto,

$$m_i^2 \leq q_i \leq f(x)^2 \leq Q_i \leq M_i^2.$$

Concluímos daí que

$$\begin{aligned} S(f^2; P) - I(f^2; P) &= \sum_{i=1}^{n} (Q_i - q_i)\Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i^2 - m_i^2)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i + m_i)(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = 2M\big[S(|f|; P) - I(|f|; P)\big] \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Pelo Lema 9.7 obtemos que f^2 é integrável.

O caso geral segue imediatamente do caso particular já demonstrado, da Proposição 9.9 e da igualdade
$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}.$$
■

O leitor deve perceber que é errado afirmar que a integral do produto é o produto das integrais (procure um contraexemplo).

PROPOSIÇÃO 9.14. *Seja $c \in (a,b)$. Uma função f é integrável em $[a,b]$ se, e somente se, ela é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$. Neste caso,*
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{9.9}$$

Demonstração. Fica (mais uma vez) para o leitor a tarefa de provar que f é limitada em $[a,b]$ se, e somente se, f é limitada em $[a,c]$ e em $[c,b]$.

Sejam $P \in \mathcal{P}[a,b]$, $P_1 \in \mathcal{P}[a,c]$ e $P_2 \in \mathcal{P}[c,b]$ tais que $P = P_1 \cup P_2$. Mais precisamente, podemos escrever
$$P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}, \quad P_2 = \{x_n, \dots, x_m\} \quad \text{e} \quad P = \{x_0, \dots, x_n, \dots, x_m\}.$$
Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ temos que
$$\begin{aligned} S(f;P) &= \sum_{i=1}^{m} \sup(f(I_i))\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sup(f(I_i))\Delta x_i + \sum_{i=n+1}^{m} \sup(f(I_i))\Delta x_i \\ &= S(f;P_1) + S(f;P_2). \end{aligned}$$
Do mesmo modo, mostra-se que $I(f;P) = I(f;P_1) + I(f;P_2)$.

Se f é integrável em $[a,b]$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $S(f;P) - I(f;P) \le \varepsilon$. Graças à Proposição 9.4 podemos supor que $c \in P$. Tomando P_1 e P_2 como antes, obtemos
$$\big[S(f;P_1) - I(f;P_1)\big] + \big[S(f;P_2) - I(f;P_2)\big] = S(f;P) - I(f;P) \le \varepsilon.$$
As quantidades entre colchetes são positivas e têm soma inferior ou igual a ε, logo, cada uma delas é inferior ou igual a ε. Portanto, f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$.

Reciprocamente, se f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então, dado $\varepsilon > 0$, existem $P_1 \in \mathcal{P}[a,c]$ e $P_2 \in \mathcal{P}[c,b]$ tais que
$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon \le I(f;P_1) \le S(f;P_1) \le \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon$$
e
$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon \le I(f;P_2) \le S(f;P_2) \le \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Somando, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x - 2\varepsilon \le I(f;P_1) + I(f;P_2) &\le S(f;P_1) + S(f;P_2)\\ &\le \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto, para $P = P_1 \cup P_2$, temos

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x - 2\varepsilon \le I(f;P) \le S(f;P) \le \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Segue daí que $S(f;P) - I(f;P) \le 4\varepsilon$. Concluímos que f é integrável em $[a,b]$. Além disto, da relação acima obtemos,

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x - 2\varepsilon \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Terminamos a demonstração tomando o limite $\varepsilon \to 0$. ■

Seja f uma função limitada e integrável em $[0,b]$. Se $0 < a < b$, então, pela proposição anterior,

$$\int_0^b f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{9.10}$$

Do resultado obtido no Exemplo 9.3 obtemos que (9.10) também vale para $a = 0$ ou $a = b$. Suponhamos agora que $0 < b < a$. Neste caso, (9.10) perde o sentido pois o segundo termo do lado direito não está definido. Entretanto, se f é limitada e integrável em $[0,a]$, então, novamente pela proposição anterior, podemos dizer que

$$\int_0^b f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x - \int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Comparando a igualdade acima com (9.10) concluímos que só existe uma forma de definir a integral de a até b, com $b < a$, para que (9.10) faça sentido. Esta é a motivação para a próxima definição.

DEFINIÇÃO 9.15. *Seja f integrável em $[a,b]$. A* **integral** *de f de b até a é definida por*

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Feita esta definição, temos a seguinte generalização para (9.9).

PROPOSIÇÃO 9.16. *Seja f integrável em $[A,B]$. Então*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

quaisquer que sejam $a, b, c \in [A,B]$.

Demonstração. É consequência da Proposição 9.14 e da Definição 9.15 (verifique). ■

9.3 Teoremas Fundamentais do Cálculo.

TEOREMA 9.17. (TFC: integral da derivada) *Se F é derivável em $[a, b]$, e $f = F'$ é integrável em $[a, b]$, então*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Seja $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, partição de $[a, b]$, qualquer. Temos

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \big[F(x_i) - F(x_{i-1})\big].$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, aplicando o Teorema do Valor Médio a F em $[x_{i-1}, x_i]$, obtemos a existência de $y_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(y_i)(x_i - x_{i-1})$. Substituindo na relação acima obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(y_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x_i.$$

Como $y_i \in (x_{i-1}, x_i)$, temos $\inf(f(I_i)) \leq f(y_i) \leq \sup(f(I_i))$. Portanto,

$$I(f; P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f; P).$$

Tomando $\sup$ do lado esquerdo e $\inf$ do lado direito,

$$\sup I(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq \inf S(f, P).$$

Como f é integrável, os extremos valem a mesma coisa: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Concluímos o resultado pois

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

■

Cuidado! O teorema anterior <u>não</u> diz que se F é derivável, então $f = F'$ é integrável. De fato, Volterra[1] [Vo] encontrou um exemplo de função derivável com derivada limitada, porém, não integrável.

TEOREMA 9.18. (TFC: derivada da integral) *Se f é integrável em $[a, b]$, então $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\mathrm{d}s \qquad \forall x \in [a, b].$$

é Lipschitz contínua. Além disto, se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

[1]Vito Volterra: ⋆ 03/05/1860, Ancona, Itália - † 11/10/1940, Roma, Itália.

Demonstração. Sejam $x, y \in [a,b]$ com $y < x$. Seja ainda $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(s)| \leq M$ para todo $s \in [a,b]$. Temos

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| &= \left|\int_a^x f(s)\mathrm{d}s - \int_a^y f(s)\mathrm{d}s\right| = \left|\int_a^x f(s)\mathrm{d}s + \int_y^a f(s)\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\int_y^x f(s)\mathrm{d}s\right| \leq \int_y^x |f(s)|\mathrm{d}s \leq \int_y^x M\mathrm{d}s = M|x-y|.\end{aligned}$$

Isto demonstra a primeira parte do teorema.

Suponhamos que f seja contínua em x_0. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que

$$s \in [a,b] \quad \text{e} \quad |s - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(s) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Assim, para todo $x \in [a,b]$, com $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^x f(s)\mathrm{d}s - \int_a^{x_0} f(s)\mathrm{d}s\right] = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(s)\mathrm{d}s.$$

Subtraindo $f(x_0)$ na equação anterior e observando que

$$f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\mathrm{d}s,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \big(f(s) - f(x_0)\big)\mathrm{d}s\right| \leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x |f(s) - f(x_0)|\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon\mathrm{d}s = \varepsilon.\end{aligned}$$

Daí segue o resultado. ∎

COROLÁRIO 9.19. *Sejam $f \in C\big([a,b]\big)$, $c \in \mathbb{R}$ e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = c + \int_a^x f(s)\mathrm{d}s \qquad \forall x \in [a,b].$$

Então $F' = f$.

Demonstração. Trivial. ∎

DEFINIÇÃO 9.20. *Se F é derivável em $[a,b]$ com $F' = f$, então dizemos que F é uma* **primitiva**, **antiderivada** *ou* **integral indefinida** *de f em $[a,b]$.*

O Corolário 9.19 diz que se $f \in C\big([a, b]\big)$, então F é uma primitiva de f em $[a, b]$.

Observação 9.2 *Embora a integral de função contínua sempre exista,* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \exp(-s^2)ds$ *não pode ser expresso por meio de funções elementares* ($\operatorname{sen}, \cos$, *etc.).*
Existe uma teoria análoga (Abel) à teoria de Galois para integrais que determina quando uma função possui primitiva expressa por meio de funções elementares.
A teoria de Galois determina quando a raiz de um polinômio pode ser expressa por meio de operações elementares (soma, multiplicação, divisão, raízes, etc.).

9.4 ⋆ A constante π.

Nesta seção mostraremos que a constante π é irracional. Para cumprir esta tarefa é, obviamente, necessário definir π. Ora, todos sabem que π é a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Porém, estes são conceitos geométricos e necessitamos de uma definição analítica. Da mesma forma, precisamos de definições analíticas para as principais funções trigonométricas: seno e cosseno.

Na Seção 10.6, p.178 apresentaremos as definições analíticas das funções seno e cosseno (Definição 10.22) e da constante π (Definição 10.26). Por hora, apenas citamos algumas destas propriedades que serão utilizadas na prova da irracionalidade de π. São elas.

i. As funções sen e $\cos$ são deriváveis com $\operatorname{sen}' = \cos$ e $\cos' = -\operatorname{sen}$;

ii. $\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$ e $\cos(0) = -\cos(\pi) = 1$.

iii. $0 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, \pi]$;

A demonstração é devida, essencialmente, a Charles Hermite.[1] Ela é tão surpreendente que começa por um lema que, aparentemente, não tem relação com o problema!

LEMA 9.21. *Dado* $n \in \mathbb{N}$, *seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$; *Temos:*
i. $0 < f(x) < 1/n!$ *para todo* $x \in [0, 1]$;
ii. existem $c_n, c_{n+1}, \dots, c_{2n} \in \mathbb{Z}$ *tais que*
$$f(x) = \frac{1}{n!}\left(c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + \cdots + c_{2n}x^{2n}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$
iii. dado $k \in \mathbb{N}$ *temos* $f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. (i) Trivial.

(ii) Basta observar que $x^n(1-x)^n$ é um polinômio em x, de coeficientes inteiros, grau $2n$ e múltiplo de x^n.

(iii) As derivadas até a ordem $n-1$ são polinômios múltiplos de x, logo, se anulam em $x = 0$. As derivadas de ordem superior a $2n$ são identicamente nulas. Logo, $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ para $k < n$ ou $k > 2n$. Para $n \leq k \leq 2n$, temos que $f^{(k)}(0) = k!c_k/n! \in \mathbb{Z}$. Finalmente, como $f(x) = f(1-x)$ temos $f^{(k)}(x) = (-1)^{(k)}f(1-x)$, logo, $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. ■

[1]Charles Hermite: ⋆ 24/12/1822, Dieuze, França - † 14/01/1901, Paris, França.

TEOREMA 9.22. *O número π^2 é irracional e, portanto, π também é.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $\pi^2 = p/q$.

No Exemplo 4.18, p.67, vimos que $p^n/n! \to 0$ quando $n \to +\infty$. Assim, podemos escolher $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, para que $p^n/n! < 1/\pi$.

Seja f o polinômio de grau $2n$ do lema anterior e considere as funções F e G definidas, para cada $x \in \mathbb{R}$, por

$$
\begin{aligned}
F(x) &= q^n \left(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^4 f^{(2n-2)}(x) + (-1)^n \pi^2 f^{(2n)}(x)\right)\\
G(x) &= F'(x)\operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x).
\end{aligned}
$$

Para $k \in \{1, \dots, n\}$, temos que $q^n \pi^{2k} = q^{n-k} p^n \in \mathbb{N}$. Disto e do lema anterior, concluímos que $F(0), F(1) \in \mathbb{Z}$. Também temos $G(0) = -\pi F(0)$ e $G(1) = \pi F(1)$.

Derivando G uma vez e F duas vezes, obtemos

$$
\begin{aligned}
G'(x) &= F''(x)\operatorname{sen}(\pi x) + \pi F'(x)\cos(\pi x) - \pi F'(x)\cos(\pi x) + \pi F(x)\operatorname{sen}(\pi x),\\
&= \left(F''(x) + \pi^2 F(x)\right)\operatorname{sen}(\pi x),\\
F''(x) &= q^n \left(\pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^4 f^{(2n)}(x)\right)\\
&= -\pi^2 q^n \left(-\pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n \pi^2 f^{(2n)}(x)\right)\\
&= -\pi^2 \left(F(x) - q^n \pi^{2n} f(x)\right) = -\pi^2 F(x) + \pi^2 p^n f(x).
\end{aligned}
$$

Portanto, $G'(x) = \pi^2 p^n f(x)\operatorname{sen}(\pi x)$. Segue do Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\pi \int_0^1 p^n f(x)\operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x = \frac{G(1) - G(0)}{\pi} = F(1) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado,

$$0 < \pi \int_0^1 p^n f(x)\operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x \leq \frac{\pi p^n}{n!} < 1.$$

Ou seja, $F(0) + F(1) \in \mathbb{Z} \cap (0, 1) = \varnothing$. Absurdo! ■

9.5 Mudança de variáveis e integração por partes.

PROPOSIÇÃO 9.23. (mudança de variável) *Seja g derivável em $[a, b]$ com g' integrável neste intervalo. Se f é contínua em $g\big([a, b]\big)$, então*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstração. A função f é contínua e, portanto, integrável. Também é integrável o produto das funções integráveis $f \circ g$ e g' (observe que $f \circ g$ é contínua).

Pelos Teoremas de Weierstrass (Corolário 7.21, p.112) e do Valor Intermediário (Teorema 7.16, p.111), temos que $g\big([a, b]\big)$ é o intervalo fechado $[c, d]$, sendo c e d, respectivamente, os valores mínimo e máximo de g em $[a, b]$. Assim, a função contínua f tem primitiva

F em $[c,d]$. Pela Regra da Cadeia, para todo $x \in [a,b]$, temos $(F\circ g)'(x) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

e

$$F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = (F\circ g)(b) - (F\circ g)(a) = \int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Daí segue o resultado. ∎

PROPOSIÇÃO 9.24. (integração por partes) *Sejam f e g funções deriváveis em $[a,b]$ com f' e g' integráveis. Então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\mathrm{d}x.$$

O resultado segue daí, observando que $f'g$ e fg' são integráveis (Proposição 9.13) e usando a Proposição 9.9 (i). ∎

9.6 Medida nula e Teorema de Lebesgue.

Já vimos que funções contínuas são integráveis e comentamos que a integrabilidade está relacionada com a continuidade, ou melhor, com a descontinuidade. De fato, o Teorema de Lebesgue, que veremos nesta seção, nos diz que uma função f limitada em $[a,b]$ é integrável neste intervalo se, e somente se, ela não é "muito" descontínua aí, ou, em outros termos, se o conjunto dos pontos de $[a,b]$ onde f é descontínua é "pequeno".

Começamos por precisar o que queremos dizer por "pequeno" no parágrafo anterior.

DEFINIÇÃO 9.25. *Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$ tem* **medida** *(de Lebesgue)* **nula** *se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos e limitados tal que*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| \le \varepsilon, \tag{9.11}$$

sendo que $|I|$ representa o comprimento do intervalo I, ou seja, $|I| = b - a$ se $I = (a,b)$.

Conjuntos finitos ou, mais geralmente, enumeráveis tem medida nula como veremos nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 9.7. *Seja $A = \{x_1, \dots, x_m\}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos*

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2m}, x_n + \frac{\varepsilon}{2m} \right),$$

se $n \leq m$, ou $I_n = \varnothing$, se $n > m$. É imediato que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Além disto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{m} |I_n| = \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Portanto, A tem medida nula.

O argumento do próximo exemplo é uma pequena sofisticação do anterior.

Exemplo 9.8. *Seja $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos*

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right).$$

É imediato que $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Além disto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Portanto, A tem medida nula.

Podemos adaptar este argumento para provar que na definição de medida nula podemos utilizar intervalos fechados.

LEMA 9.26. (medida nula e intervalos fechados) *O conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos fechados e limitados tal que (9.11) é válido com $|I| = b - a$ se $I = [a, b]$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, podemos substituir cada intervalo fechado $I_n = [a_n, b_n]$ pelo intervalo aberto $J_n = (a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$. É claro que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |J_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| + \varepsilon.$$

Deixamos o leitor completar o resultado. ■

É fácil perceber que o intervalo $[a, b]$, com $a < b$, não tem medida nula (pense nisto). A demonstração mais natural deste fato, na opinião do autor, é tediosa, ou então, repleta de afirmações, sem prova, do tipo "é fácil ver que". Outra demonstração menos natural, porém mais elegante, é indicada no exercício 25, p.164.

LEMA 9.27. (união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula) *Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos de medida nula, então $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ tem medida nula.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que A_n tem medida nula. Logo, existe uma sequência $\big(I_m^{(n)}\big)_{m\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos e limitados tal que

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} I_m^{(n)} \qquad \text{e} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} |I_m^{(n)}| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Como $\mathbb{N}^2$ é enumerável, os intervalos $I_m^{(n)}$ podem ser substituídos por $J_i's$ com índice $i \in \mathbb{N}$. Logo

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} I_m^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} J_i$$

com (a série é absolutamente convergente pois todos os termos são positivos; portanto não interessa a ordem da soma)

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |J_i| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} |I_m^{(n)}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

∎

Para a demonstração do Teorema de Lebesgue vamos utilizar o conceito de diâmetro de um conjunto limitado (veja Definição 7.12, p.110). Do exercício 19(c), p.117, diam$(X) = \sup(X) - \inf(X)$. Logo, diam$(f(X)) = \sup(f(X)) - \inf(f(X))$. Tomando $X = I_i$, e utilizando a notação $|I_i| = \Delta x_i$, concluímos que

$$S(f,P) - I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \text{diam}(f(I_i))|I_i|.$$

Pode-se definir a **oscilação** de f em X por diam$(f(X))$.

⋆ **TEOREMA 9.28. (Lebesgue)** *Seja f limitada em $[a,b]$. Então, f é integrável em $[a,b]$ se, e somente se, o conjunto $D = \{x \in [a,b]\ ;\ f \text{ é descontínua em } x\}$ tem medida nula.*

Demonstração. Suponha que $\boxed{D \text{ tem medida nula}}$.

Como f é limitada em $[a,b]$, existe $M > 0$ tal que

$$\text{diam}(f(J)) \leq 2M \qquad \text{para todo} \qquad J \subset [a,b]. \tag{9.12}$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Como D tem medida nula, existe uma sequência $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos e limitados tal que

$$D \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i \quad \text{e} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} |I_i| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\overline{I_i}| \leq \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{9.13}$$

Como, por definição de D, f é contínua em $y \in [a,b] \setminus D$, fixado $\widetilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$, existe $\delta_y > 0$ (depende de y pois não temos continuidade uniforme) tal que

$$f(B_{2\delta_y}(y) \cap [a,b]) \subset B_{\widetilde{\varepsilon}}(f(y)).$$

Como diam$(B_{\widetilde{\varepsilon}}(f(y))) = 2\widetilde{\varepsilon}$,

$$\text{diam}\left(f(B_{2\delta_y}(y) \cap [a,b])\right) \le 2\widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{9.14}$$

Pelas definições é claro que a união das coleções de abertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que cobrem D) e $\{B_{\delta_y}(y)\}_{y\in[a,b]\setminus D}$ (que cobrem o complementar de D em $[a,b]$) cobrem o compacto $[a,b]$. Pelo Teorema 6.17, p.96 (Borel-Lebesgue), existe subcobertura finita:

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{k=1}^{q} I_{n_k}\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{p} B_{\delta_{y_k}}(y_k)\right).$$

O extremos destes intervalos que estiverem contidos em $[a,b]$ junto com $\{a,b\}$ formam uma partição de $[a,b]$ $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$. Defina $J_i = [x_{i-1}, x_i]$. Queremos escrever $\{1,\ldots,n\} = U \cup V$ (pode ser que $U \cap V \neq \varnothing$) com U e V apropriados para fazer estimativas distintas em J_i. Como cada ponto extremo de J_i é ponto extremo de I_{n_k} ou $B_{\delta_{y_k}}(y_k)$ para algum k (faça uma figura), cada intervalo fechado J_i está contido em:

(a) $\overline{I_{n_k}}$, para algum $k \in \{1,\ldots,p\}$, ou,

(b) $\overline{B_{\delta_{y_k}}(y_k)}$, para algum $k \in \{1,\ldots,q\}$. Portanto, definimos

$$U = \{i;\ J_i \subset \overline{I_{n_k}} \text{ para algum } k\} \quad \text{e} \quad V = \{i;\ J_i \subset \overline{B_k} \text{ para algum } k\}.$$

Como, por construção, $U \cup V = \{1,\ldots,n\}$,

$$\begin{aligned} S(f,P) - I(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \text{diam}(f(J_i))|J_i| \\ &\le \sum_{i\in U} \text{diam}(f(J_i))|J_i| + \sum_{i\in V} \text{diam}(f(J_i))|J_i|. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Para $i \in U$, como $J_i \subset \overline{I_{n_k}}$, por (9.12) e (9.13),

$$\text{diam}(f(J_i)) \le 2M \quad \text{e} \quad \sum_{i\in U} |J_i| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} |\overline{I_{n_k}}| \le \frac{\varepsilon}{4M},$$

e portanto,

$$\sum_{i\in U} \text{diam}(f(J_i))|J_i| \le \frac{2M\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.16}$$

Para $i \in V$, como $J_i \subset \overline{B_{\delta_{y_k}}(y_k)} \subset B_{2\delta_{y_k}}(y_k)$ e $J_i \subset [a,b]$, por (9.14),

$$\text{diam}(f(J_i)) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{e} \quad \sum_{i\in V} |J_i| \le \sum_{i=1}^{n} |J_i| \le b-a,$$

e portanto,

$$\sum_{i\in V} \text{diam}(f(J_i))|J_i| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.17}$$

Aplicando (9.16) e (9.17) em (9.15), obtemos que $S(f,P) - I(f,P) \leq \varepsilon$, concluindo a primeira parte.

Suponha agora que $\boxed{f \text{ é integrável}}$.

Seja $A = [a,b]$ e $w(f;a)$ a oscilação da função f em a, definida por

$$w(f;a) = \inf\{\text{diam}\,(f(B_\delta(a) \cap A))\,;\ \delta > 0\}.$$

Defina

$$D_m = \{x \in [a,b];\ w(f;x) > 1/m\}.$$

Pelo Lema 7.14, p.110, se f é descontínua em x então $w(f;x) > 0$. Logo $D = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} D_m$. Pelo Lema 9.27, é suficiente mostrar que D_m tem medida nula para cada m.

Fixado m, como f é integrável, dado $\varepsilon > 0$, existe $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tal que

$$S(f;P) - I(f;P) < \frac{\varepsilon}{m}. \tag{9.18}$$

Defina $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e

$$J = \{k \in \{1,\ldots,n\};\ \text{diam}(f(I_k)) > 1/m\}. \tag{9.19}$$

Vamos verificar que $D_m \subset \bigcup_{i\in J} I_i$ (estes intervalos fechados cobrem D_m). De fato seja $x \in D_m$. Por definição $w(f,x) > 1/m$ e, como $x \in [a,b]$, cujo intervalo foi particionado, $x \in I_i$ para algum i. Vamos mostrar que $x \in I_i$ com $i \in J$.

(a) se $x \in I_i^\circ$ (interior do intervalo), é claro que $\text{diam}(f(I_i)) \geq w(f,x) > 1/m$ pois $w(f,x)$ é o ínfimo dos diâmetros de f aplicado em intervalos contendo x. Logo $x \in I_i$ com $i \in J$.

(b) se $x = x_i$ (extremo do intervalo) então das duas uma: $\text{diam}(f(I_i)) \geq w(f,x) > 1/m$ ou $\text{diam}(f(I_{i+1})) \geq w(f,x) > 1/m$ pela mesma razão. Logo $x \in I_i$ com $i \in J$ ou $x \in I_{i+1}$ com $i+1 \in J$.

Finalmente, usando (9.18) e (9.19),

$$\frac{1}{m}\sum_{i\in J}|I_i| < \sum_{i\in J}\text{diam}(f(I_i))|I_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\text{diam}(f(I_i))|I_i| = S(f,P) - I(f,P) < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Concluímos que $D_m \subset \bigcup_{i\in J} I_i$ (intervalos fechados) e $\sum_{i\in J}|I_i| < \varepsilon$. Segue do Lema 9.26 que D_m tem medida nula. ■

9.7 Exercícios.

9.7.1 Integral e propriedades

$\Longrightarrow$ **1.** Sejam $c \in \mathbb{R}$, $P \in \mathcal{P}[a,b]$ e f uma função limitada em $[a,b]$. Prove que

(a) se $c \geq 0$, então $S(cf;P) = cS(f;P)$ e $I(cf;P) = cI(f;P)$;
(b) se $c \leq 0$, então $S(cf;P) = cI(f;P)$ e $I(cf;P) = cS(f;P)$.

$\Longrightarrow$ **2.** Sejam $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$ e f uma função limitada em $[a,b]$. Prove que se $P \subset Q$, então $I(f;P) \leq I(f;Q) \leq S(f;Q) \leq S(f;P)$.

$\Longrightarrow$ **3.** Este exercício mostra que podemos alterar uma função integrável em um ponto sem perder a integrabilidade nem alterar a integral. Sejam $c \in [a,b]$ e f uma função limitada e integrável em $[a,b]$. Suponhamos que g é uma função definida em $[a,b]$ e tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b] \setminus \{c\}$. Prove que g é limitada e integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Sugestão: Para simplificar a demonstração, considere inicialmente os casos $c = a$ e $c = b$. Depois use a Proposição 9.14 para concluir o caso geral.

$\rightarrow$ **4.** O objetivo deste exercício é generalizar o resultado do exercício anterior. Sejam $c_1, \ldots, c_n \in [a,b]$ e f uma função limitada e integrável em $[a,b]$. Suponhamos que g é uma função definida em $[a,b]$ e tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b] \setminus \{c_1, \ldots, c_n\}$. Prove que g é limitada e integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Sugestão: Proceda por indução e use o resultado do exercício anterior.

$\Longrightarrow$ **5.** Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c \leq a \leq b \leq d$. Prove que $I_{(a,b)}$ (função indicadora ou característica), e $I_{[a,b]}$ são integráveis em $[c,d]$ e

$$\int_c^d I_{(a,b)}(x)\mathrm{d}x = \int_c^d I_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x = b - a.$$

$\star$ **6.** (extra) Determine, utilizando a definição:
(a) $\displaystyle\int_0^a x^n \,\mathrm{d}x$ para $n = 1$ e 2; (b) $\displaystyle\int_0^a e^x \,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_0^a \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$.
Dica: Para o item (c) ver [C].

$\Longrightarrow$ **7.** Determine a integrabilidade a Riemann, utilizando $S(f,P)$ e $I(f,P)$, de:
(a) $f(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$; (b) $f = I_{\mathbb{Q}}$;
(c) $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$;
(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $f(p/q) = 1/q$ se p/q é fração irredutível com $q > 0$ e $f(0) = 0$.
Dica: Para (d), veja exercício 17(f), p.117.

$\Longrightarrow$ **8.** Prove que se modificarmos uma função integrável f num conjunto enumerável a integral pode deixar de existir.
Dica: $I_{\mathbb{Q}}$.

$\Longrightarrow$ **9.** Sejam $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Prove que $f \equiv 0$ em $[a,b]$ se:

$\Longrightarrow$(a) $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$;

$\Longrightarrow$(b) (Lema de du Bois-Reymond[1]) $\displaystyle\int_x^y f(s)\,\mathrm{d}s = 0$ para todo $x, y \in [a, b]$;

(c) $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ para toda g;

(d) $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ para toda g que satisfaz $g(a) = g(b) = 0$. ([Sp] p.237 no.23)

Obs: resultado importante para o cálculo das variações.

Dica (para todos itens): suponha por contradição que $f(x_0) \neq 0$ para $x_0 \in [a, b]$ e use permanência de sinal de função contínua.

$\rightarrow$ **10.** Uma função h é chamada de escada se existe uma partição tal que h é constante em cada intervalo da partição, i.e., $h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i I_{[x_{i-1}, x_i]}$ ([Sp] p.235 no.17).

(a) Prove que se f é integrável em $[a, b]$ então para todo $\varepsilon > 0$ existe uma função escada $h \leq f$ tal que $\int_a^b (f - h) < \varepsilon$. De forma análoga existe uma função escada $m \geq f$ tal que $\int_a^b (m - f) < \varepsilon$;

Dizemos que as funções escada são densas no espaço das funções integráveis.

(b) Suponha que para todo $\varepsilon > 0$ existam k_1 e k_2 funções escadas com $k_1 \leq f \leq k_2$ tais que $\int_a^b (k_2 - k_1) < \varepsilon$. Prove que f é integrável.

$\star$ **11.** (extra) Prove que se f é integrável em $[a, b]$ então dado $\varepsilon > 0$ qualquer existe uma função contínua $g \leq f$ com $\int_a^b |f - g| < \varepsilon$ ([Sp] p.236 no.18).

Dica: Primeiro determine uma função escada com esta propriedade depois ligue com retas para ficar contínua. Dizemos que as funções escada e contínuas são densas no espaço das funções integráveis.

$\sharp$ **12.** (difícil) (**desigualdade de Jensen**, utilizada em probabilidade) Prove que se φ é convexa e g é integrável então $\varphi\left(\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq \displaystyle\int_0^1 \varphi(g(x))\,\mathrm{d}x$.

Dica: Prove para funções escada usando exercício 15, p.137 e use densidade das funções escada nas integráveis (exercício 10, p.162).

13. Suponha que f é contínua e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. Prove que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = a$ ([Sp] p.239 no.34).

14. Seja f contínua e periódica de período $T > 0$, isto é, $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $a \in \mathbb{R}$ ([Fi1] p.179 no.3).

$\Longrightarrow$ **15.** Prove que se f é contínua e limitada em $[a, b]$ então $F(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$ é Lipschitz contínua.

$\star$ **16.** (extra) Prove que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$.

[1] Paul David Gustav du Bois-Reymond: $\star$ 02/12/1831, Berlim, Alemanha – † 07/04/1889, Freiburg, Alemanha.

Dica: Ver livro de cálculo III. Distribuição normal em probabilidade.

$\to$ **17.** (teste da integral para séries) Seja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função positiva e decrescente. Prove que $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty$ ([Fi1] p.199 no.3).

18. Definimos em $C([a,b])$ a **norma $\mathbf{L^p}$** de f por $\|f\|_p := \left(\displaystyle\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ para $p \geq 1$. Prove que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ (o lado direito serve de definição para norma L^∞).

9.7.2 Teoremas Fundamentais do Cálculo

$\Longrightarrow$ **19.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f' = f$. Prove que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = C\exp(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

Dica: Considere $h(x) = f(x)/\exp(x)$.

$\to$ **20.** Defina $F(x,\lambda) = \displaystyle\int_a^x f(s,\lambda)\,\mathrm{d}s$. Suponha que f é derivável com relação a λ. Prove que F é derivável com relação a λ e que $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \displaystyle\int_a^x \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s,\lambda)\,\mathrm{d}s$

21. Seja f contínua tal que $f(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$. Prove que $f \equiv 0$ ([Fi1] p.179 no.2).

Dica: derivada.

$\star$ **22.** (extra) (Lema de Riemann-Lebesgue) Prove que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x = 0$ se f é integrável.

Dica: Prove para funções escada e e use densidade das funções escada nas integráveis (exercício 10, p.162). É válido um resultado análogo para $\cos$. Este é um resultado fundamental na teoria da série de Fourier, pois prova que os coeficientes da série de Fourier de uma função integrável convergem para zero.

$\star$ **23.** (extra) Defina $a_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{d}x$. Prove que se $f \in C^1([0,2\pi])$ então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Prove, por indução, que se $f \in C^k([0,2\pi])$ então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0$.

Dica: Integração por partes e exercício anterior. Este resultado caracteriza o decaimento dos coeficientes da série de Fourier para funções suaves. Mostra, em particular, que se f for C^∞ os coeficientes vão para zero mais rápido que qualquer polinômio. Existe, ampliando C^k para os espaços de Sobolev[1] H^k, uma recíproca deste resultado: se os coeficientes decaem "rapidamente" então a função está em H^k.

$\to$ **24.** (**Função Gama de Euler**[2], generalização de fatorial para não-inteiros e complexos) Defina $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$. Prove que:

[1]Sergei Lvovich Sobolev: $\star$ 06/10/1908, São Petesburgo, Rússia – † 03/01/1989, Leningrado, Rússia.
[2]Leonhard Euler: $\star$ 15/04/1707, Basel, Suíça – † 18/09/1783, São Petesburgo, Rússia.

(a) a integral converge para $z > 0$; (b) $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$.

Dica: Para (b) integre por partes e prove que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Obs: Este exercício mostra que podemos estender a função fatorial para números não-inteiros: $x! = \Gamma(x+1)$. Pode-se considerar inclusive números complexos se Re$(z) > 0$ (parte real). Podemos, utilizando a propriedade (b) acima, ampliá-la para $z \in \mathbb{C}$ qualquer contanto que Re$(z) \notin \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ (inteiros negativos ou zero).

Obs: $\Gamma'(1) = -\gamma$ (constante gama de Euler, vide exercício 24, p.73). Pode-se provar também que $\Gamma(3/2) = (1/2)! = \sqrt{\pi}/2$. ([Sp] p.327 no.25)

9.7.3 Medida nula e Teorema de Lebesgue

25. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$, e $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos abertos e limitados tais que $[a,b] \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$.

(a) Prove que existem $n_1, \ldots, n_j \in \mathbb{N}$ tais que $[a,b] \subset I_{n_1} \cup \cdots \cup I_{n_j}$.

(b) Prove que $b - a < \sum_{i=1}^{j} |I_{n_i}|$.

(c) Conclua que se $a < b$, então $[a,b]$ não tem medida nula.

Sugestão: Em 25(b) considere as funções indicadoras (ou características) dos intervalos $[a,b], I_{n_1}, \ldots, I_{n_j}$ e use o exercício 5, p.161 e o exercício 11, p.11.

$\Longrightarrow$ **26.** Prove que se A tem medida nula então interior de A é vazio.

$\Longrightarrow$ **27.** Considere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $X \subset [a,b]$ com medida nula. Prove que $f(X)$ tem medida nula se f é Lipschitz contínua.

Dica: estime diam$(f(I))$ para I um intervalo qualquer.

$\sharp$ **28.** (difícil) Se f for Hölder contínua não necessariamente X com medida nula implica $f(X)$ com medida nula (veja exercício anterior). Segue um exemplo. Considere f a função de Cantor.

(a) Prove que f é Holder-contínua com parâmetro $\alpha = \log 2/\log 3$.

(b) Se X é o conjunto de Cantor, que possui medida nula, mostre que $f(X) = [0,1]$, que não possui medida nula.

$\Longrightarrow$ **29.** Sejam f, g funções integráveis. Se o conjunto $\{x;\ f(x) \neq g(x)\}$ tem medida nula dizemos que $f = g$ **qtp (quase todo ponto)**.

(a) dê um exemplo de $f \neq g$ com $f = g$ qtp;

(b) prove que a relação $f = g$ qtp no conjunto das funções integráveis é de equivalência;

(c) prove que se $f = g$ qtp então $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

Dica: prove que se $h = 0$ qtp então $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Para isto suponha que $\int h \neq 0$ e portanto existe I tal que $\inf I > 0$ (spdg= sem perda de generalidade).

(d) se $g = 0$ qtp então $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ para toda f integrável;

(e) se $g \geq 0$ e $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ então $g = 0$ qtp em $[a,b]$.

30. Prove que o conjunto de Cantor (que é não-enumerável) possui medida nula.

Capítulo 10

Sequências de funções

10.1 Convergência simples e uniforme.

Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma função $f_n : A \to \mathbb{R}$. Neste capítulo estudaremos em que sentido a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma função $f : A \to \mathbb{R}$. Existem muitos modos de se definir convergência de funções: simples ou pontual, uniforme, em L^p, etc.

DEFINIÇÃO 10.1. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de A em $\mathbb{R}$. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge simplesmente** *ou* **converge pontualmente** *para $f : A \to \mathbb{R}$ se*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in A.$$

Em outras palavras, para todo $x \in A$, a sequência (numérica) $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x)$. Segundo a definição de sequência convergente, temos

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{10.1}$$

Exemplo 10.1. *Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x/n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Dados $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > |x|/\varepsilon$. Assim, se $n \geq N$, então*

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{N} < \varepsilon.$$

Portanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplesmente para a função nula.

Exemplo 10.2. *Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1]$. Se $x \in [0,1)$, então $x^n \to 0$ e se $x = 1$, então $x^n \to 1$. Portanto, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é simplesmente convergente para $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Salientamos que, na Definição 10.1, o valor de N depende de x e ε. Quando N não depende de x, mas apenas de ε, temos outro sentido de convergência, assunto da próxima definição.

DEFINIÇÃO 10.2. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de A em $\mathbb{R}$. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge uniformemente** *para $f : A \to \mathbb{R}$ se*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A. \tag{10.2}$$

É imediato que a convergência uniforme implica na convergência simples. A recíproca, entretanto, é falsa como veremos no Exemplo 10.5.

Exemplo 10.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x/n$ para todo $x \in [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 1/\varepsilon$. Assim, se $n \geq N$ e $x \in [0,1]$, então*

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Portanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função nula.

Salientamos novamente a diferença entre convergência simples e uniforme através da comparação dos exemplos 10.1 e 10.3. No primeiro exemplo o valor de N depende de x e de ε ($N > |x|/\varepsilon$), enquanto que no segundo ele só depende de ε ($N > 1/\varepsilon$).

Terminamos esta Seção com duas definições de convergência muito utilizadas em Probabilidade.

DEFINIÇÃO 10.3. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de A em $\mathbb{R}$. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge quase todo ponto (qtp)** *para $f : A \to \mathbb{R}$ se*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in A \setminus K, \quad \text{onde} \quad K \quad \text{têm medida nula.}$$

Exemplo 10.4. *A sequência $f_n(x) = I_{[0,1]}x^n$ não converge simplesmente para $h \equiv 0$ mas converge qtp para h (veja Exemplo 10.2).*

DEFINIÇÃO 10.4. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis de A em $\mathbb{R}$. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge na norma** $L^p(A)$ *($p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$) para $f : A \to \mathbb{R}$ se*

$$\int_A |f_n(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{10.3}$$

A relação entre convergência em norma e quase todo ponto é delicada. Deixamos para um curso de Teoria da Medida.

10.2 Continuidade, integral e derivada de sequências de funções.

No Exemplo 10.2 apresentamos uma sequência de funções contínuas que converge simplesmente para uma função descontínua. A próxima proposição diz que este inconveniente não ocorre se a convergência for uniforme.

PROPOSIÇÃO 10.5. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ convergente uniformemente para $f : A \to \mathbb{R}$. Se f_n é contínua em $x_0 \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Seja $x_0 \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in A \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Como f_n é contínua em x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \qquad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Destas duas relações obtemos que se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Segue que f é contínua em x_0. ■

Exemplo 10.5. *Da proposição anterior podemos concluir que a convergência do Exemplo 10.2 não é uniforme, pois, senão, o limite seria contínuo em $x_0 = 1$. Entretanto, se $a \in (0,1)$, então a sequência $(f_n|_{[0,a]})_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente. Isto pode ser verificado diretamente ou usando o próximo teorema (ver exercício 4, p.181).*

TEOREMA 10.6. (Dini[1]) *Sejam $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e convergente simplesmente para $f \in C(K)$, então a convergência é uniforme.*

Demonstração. Suponhamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja decrescente (se for crescente, procedemos de modo análogo), ou seja, $f \leq f_{n+1} \leq f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f \in C(K)$ e, como K é compacto, existe $x_n \in K$ tal que $M_n = f_n(x_n) - f(x_n)$ é o valor máximo de $f_n - f$. É fácil ver que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e positiva e, portanto, convergente para $c \geq 0$. Mostremos que $c = 0$.

Da compacidade de K, obtemos subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para $x_0 \in K$. Para $k, m \in \mathbb{N}$ com $n_k \geq m$, temos $M_{n_k} = f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) \leq f_m(x_{n_k}) - f(x_{n_k})$. Fazendo $k \to +\infty$, obtemos $c \leq f_m(x_0) - f(x_0)$. Tomando o limite quando $m \to +\infty$, concluímos que $c \leq 0$ e, portanto, $c = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_N < \varepsilon$. Assim, se $n \geq N$ e $x \in K$, então

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f_N(x) - f(x) \leq M_N < \varepsilon.$$

[1]Ulisse Dini: ⋆ 14/11/1845, Pisa, Itália - † 28/10/1918, Pisa, Itália

Segue que $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ para $x \in K$ e $n \geq N$, ou seja, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f. ■

A convergência simples não se comporta muito bem com respeito a integral, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 10.6. *Como $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ é enumerável, podemos escrever $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{x_1, x_2, \dots\}$. Considere a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{x_1,\dots,x_n\}, \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f_n é finito e, portanto, de medida nula. Logo, f_n é integrável (e sua integral é nula). É fácil perceber que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função que vale um nos racionais e zero no irracionais que, como sabemos, não é integrável.

Novamente, este é um problema da convergência simples, inexistente para a convergência uniforme.

TEOREMA 10.7. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis no intervalo $[a,b]$ convergente uniformemente para f. Então f é integrável e*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $D_n = \{x \in [a,b]\ ;\ f_n \text{ é descontínua em } x\}$. Como f_n é integrável, D_n tem medida nula. Portanto, também tem medida nula o conjunto $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [a,b]\setminus D$ temos que f_n é contínua em x. Logo, graças à convergência uniforme, f é contínua em x. Concluímos que D contém todos os pontos de descontinuidade de f e que, portanto, f é integrável.

Seja $\varepsilon > 0$ e tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $x \in A$ e $n \geq N$. Temos então

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b \varepsilon \mathrm{d}x = (b-a)\varepsilon.$$

De onde segue o resultado. ■

Como uma sequência de funções contínuas pode convergir simplesmente para uma função descontínua, não é de se esperar que este tipo de convergência se comporte bem com derivadas. Neste caso, mesmo a convergência uniforme não é muito satisfatória, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 10.7. *Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \mathrm{sen}(nx)/n$. Dado $\varepsilon > 0$, se $N > 1/\varepsilon$, então, para $n \geq N$ e $x \in \mathbb{R}$, temos*

$$\frac{|\mathrm{sen}(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Portanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente $f = 0$. Por outro lado, a sequência $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $f' = 0$, pois, por exemplo,

$$f'_n(0) = \cos(n \cdot 0) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIÇÃO 10.8. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1\big([a,b]\big)$. Se existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge e se $({f'}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma primitiva de g.*

Demonstração. Dado $x \in [a,b]$, pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s)\mathrm{d}s.$$

Como $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para, digamos, c e como $({f'}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente para g, obtemos que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s.$$

Mas g é contínua (pois é limite uniforme de uma sequência de funções contínuas), logo, do Corolário 9.19, p.153, segue que f é uma primitiva de g.

Para concluir que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, tome $\varepsilon > 0$ e escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ tenhamos

$$|f_n(x_0) - c| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |f'_n(s) - g(s)| < \varepsilon, \quad \forall s \in [a,b].$$

Obtemos então que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x_0)| &\leq |f_n(x_0) - c| + \left| \int_{x_0}^{x} \big(f'(s) - g(s)\big)\mathrm{d}s \right| \\ &< \varepsilon + \left| \int_{x_0}^{x} \varepsilon \mathrm{d}s \right| = (1 + |x - x_0|)\varepsilon \leq (1 + b - a)\varepsilon. \end{aligned}$$

■

10.3 Espaço $C(K)$ e equicontinuidade.

Nesta seção K representará um subconjunto compacto não vazio de $\mathbb{R}$. Lembramos que

$$C(K) = \{ f : K \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ é contínua } \}.$$

A Proposição 7.9, p.110 nos dá que se $f, g \in C(K)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $f + g \in C(K)$ e $cf \in C(K)$. Por esta razão, $C(K)$ é um **espaço vetorial**. Como em outros espaços vetoriais (R^n, por exemplo), em $C(K)$ definimos o conceito de norma.

DEFINIÇÃO 10.9. *Seja $f \in C(K)$. Definimos a* **norma** *de f por*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \; ; \; x \in K\}.$$

Pelo Teorema de Weierstrass (Corolário 7.21, p.112), toda $f \in C(K)$ é limitada e, portanto, o supremo que define $\|f\|$ é finito.

As principais propriedades da norma são dadas na proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO 10.10. (norma) *Sejam $f, g \in C(K)$ e $c \in \mathbb{R}$. Temos que*

i. $\|f\| \geq 0$; ii. se $\|f\| = 0$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in K$;

iii. $\|cf\| = |c|\|f\|$; iv. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Demonstração. As propriedades (i) e (ii) são óbvias. O item (iii) segue de

$$\|cf\| = \sup\{|c||f(x)| \; ; \; x \in K\} = |c| \sup\{|f(x)| \; ; \; x \in K\} = |c|\|f\|.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= \sup\{|f(x) + g(x)| \; ; \; x \in K\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| \; ; \; x \in K\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|; \; x \in K\} + \sup\{|g(x)|; \; x \in K\} = \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

demonstra (iv). ■

Repare na semelhança entre a propriedade (iv) e a desigualdade triangular. Não por acaso, ela também é chamada de **Desigualdade triangular**.

Quando se deseja distinguir entre os vários tipos de norma, vários nomes são usados para a norma aqui definida: **norma do sup**, **norma C^0**, **norma infinito**, **norma L^∞**, etc. As razões para os dois primeiros nomes são óbvias (lembre-se que $C(K)$ também é denotado $C^0(K)$). As duas últimas nomenclaturas são explicadas no exercício 18, p.163. Outro nome bastante usado é **norma da convergência uniforme**. A razão será explicada pela Proposição 10.12.

DEFINIÇÃO 10.11. *Uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ é dita* **convergente** *em $C(K)$ se existe $f \in C(K)$ de modo que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $f_n \to f$ e dizemos que f é o **limite** *da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou que f_n* **converge para** *(ou* **tende a***) f em $C(K)$ quando n tende a mais infinito ($n \to +\infty$).*

Repare na grande semelhança entre esta definição e a Definição 4.3, p.55. Excluindo as diferenças de notação (x_n ou f_n) e a natureza dos elementos das sequências (em $\mathbb{R}$ ou $C(K)$), a diferença notável é que, aqui, aparece a norma (em $\|f_n - f\|$) e lá aparece o valor absoluto (em $|x_n - x|$).

Apesar desta diferença, como a norma tem propriedades semelhantes a do valor absoluto (notadamente, vale a desigualdade triangular), muitos dos resultados sobre sequências em $\mathbb{R}$ têm correspondentes para sequências em $C(K)$. Como exercício, baseie-se na demonstração da Proposição 4.14, p.60 para mostrar que se $f_n \to f$ e $g_n \to g$, então $f_n + g_n \to f + g$.

A próxima proposição esclarece a razão do nome norma da convergência uniforme.

PROPOSIÇÃO 10.12. *Sejam $f \in C(K)$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$. Então $f_n \to f$ se, e somente se, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f.*

Demonstração. Suponhamos que $f_n \to f$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $\|f_n - f\| < \varepsilon$. Ora, para todo $x \in K$, temos $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \varepsilon$. Portanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f.

Suponhamos agora que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uniformemente convergente para f. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Por definição de supremo, $\|f_n - f\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \ ; \ x \in K\} \leq \varepsilon$. Portanto, $f_n \to f$. ■

Procuramos um resultado sobre sequência de funções que tenha papel semelhante ao do Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 4.9, p.57) para as sequências numéricas. Algo que diga que sequências limitadas em $C(K)$ tem subsequências convergentes em $C(K)$. A rigor, antes de poder enunciar tal teorema, será necessário definir:

i. sequência limitada em $C(K)$;

ii. subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$.

O item (ii) é imediato: na Definição 4.2, p.53, a condição que define subsequência de uma sequência de números reais, não considera a natureza dos elementos da sequência. Ou seja, ela ignora que são números reais e considera apenas os índices. Portanto, a mesma definição tem sentido para sequências em $C(K)$.

Para a limitação, lembremos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é limitada quando existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Inspirados no que já fizemos, trocamos valor absoluto por norma.

DEFINIÇÃO 10.13. *Uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ é limitada se existe $M > 0$ tal que $\|f_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Cabe agora perguntar se toda sequência limitada em $C(K)$ tem subsequência convergente em $C(K)$. Infelizmente a resposta é não. Consideremos novamente a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do Exemplo 10.2. É imediato que $|f(x)| = |x^n| \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\|f_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Se ela tivesse subsequência convergente para f em $C(K)$, então esta seria uniformemente convergente para f e, portanto, simplesmente convergente para f. Concluiríamos que $f(x) = 0$, se $x \in [0, 1)$, e $f(x) = 1$, se $x = 1$. Contrariando a continuidade de f.

Precisamos de uma hipótese adicional para obter o resultado requerido.

TEOREMA 10.14. **(Arzelà[1]-Ascoli[2])** *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ é limitada e* **equicontínua**, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad x, y \in K, \ |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente em $C(K)$.

[1]Cesare Arzelà: ⋆ 06/03/1847, La Spezia, Itália - † 15/03/1912, La Spezia, Itália.
[2]Guido Ascoli: ⋆ 12/12/1887, Livorno, Itália - † 10/05/1957, Torino, Itália.

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$, da equicontinuidade de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obtemos $\delta_m > 0$ tal que se $x, y \in K$ e $|x - y| < \delta_m$, então $|f_n(x) - f_n(y)| < 1/m$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como K é compacto e $K \subset \bigcup_{z\in K}(z - \delta_m, z + \delta_m)$, existe $D_m \subset K$, finito, tal que

$$K \subset \bigcup_{z\in D_m} (z - \delta_m, z + \delta_m). \tag{10.4}$$

O conjunto $D = \bigcup_{m=1}^{+\infty} D_m$ é enumerável (pois é união enumerável de conjuntos finitos) e, portanto, podemos escrever $D = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Seja $M > 0$ tal que $\|f_n\| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $|f_n(x)| \leq \|f_n\| < M$ de modo que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Em particular, $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 4.9, p.57), ela tem subsequência $(g_{1,k}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Agora, usando que $(g_{1,n}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada obtemos subsequência $(g_{2,n}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Pela limitação de $(g_{2,n}(x_3))_{n\in\mathbb{N}}$ existe subsequência $(g_{3,n}(x_3))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Repetindo o processo, construímos uma sequência $\big((g_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ de sequências tais que, se $i \geq j$, então $(g_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(g_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_{j,n}(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Definimos $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ por $f_{n_k} = g_{k,k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que, se $y \in D$, então $(f_{n_k}(y))_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente. De fato, seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $y = x_j$. Se $k \geq j$, então $f_{n_k} = g_{k,k}$ é um termo de $(g_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Como $(g_{j,n}(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, concluímos a afirmação.

Mostremos que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplesmente. Sejam $x \in K$, $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 3/\varepsilon$. De (10.4), obtemos que existe $y \in D_m$ tal que $|x - y| < \delta_m$ e, portanto,

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $k, l \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)| + |f_{n_k}(y) - f_{n_l}(y)| + |f_{n_l}(y) - f_{n_l}(x)| \\ &\leq |f_{n_k}(y) - f_{n_l}(y)| + \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Mas $y \in D$, logo, $(f_{n_k}(y))_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e, portanto, de Cauchy. Segue de (10.5) que $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ também é de Cauchy e, portanto, convergente. Seja $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k}(x)$.

Falta mostrar que a convergência é uniforme. Seja $\varepsilon > 0$ e $m > 3/\varepsilon$. Escrevemos $D_m = \{y_1, \dots, y_p\}$. Como D_m é finito, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, então

$$k \geq k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_{n_k}(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall y \in D_m.$$

Qualquer que seja $x \in K$, já vimos que existe $y \in D_m$ para o qual vale (10.5). Fazendo $l \to +\infty$, obtemos

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq |f_{n_k}(y) - f(y)| + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

O que conclui a demonstração. ∎

Há um pequeno erro na demonstração acima: não é possível demonstrar que a sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente e, portanto, que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como exemplo, considere que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja constante. Neste caso, qualquer $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaz as condições da demonstração! Este erro pode ser corrigido sem muito esforço (exercício 17, p.182).

10.4 ⋆ Equações diferenciais.

Muitas situações físicas, econômicas, biológicas, ... são modeladas por **equações diferenciais ordinárias** (comumente abreviadas pela sigla EDO). Neste tipo de equação a incógnita é uma função (não um número). O termo "diferenciais" vem do fato que na equação aparece a derivada (de alguma ordem) da função incógnita. Nesta seção abordaremos apenas algumas questões referentes às equações diferenciais. Como aplicação do Teorema de Arzelá-Ascoli mostraremos a existência de solução de uma classe de EDO's. O leitor interessado em se aprofundar no assunto poderá consultar algum dos vários livros disponíveis como, por exemplo, [Ros].

Exemplo 10.8. *Seja $g \in C\big([a,b]\big)$. Procuramos $f \in C^1\big([a,b]\big)$ tal que*

$$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b]. \tag{10.6}$$

Este é um exemplo muito simples de EDO. A existência de solução é consequência imediata do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo. Observe que se f satisfaz (10.6)*, então isto também ocorre com $f + c$, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$. Desta forma, existem infinitas soluções. Porém, se impusermos que f assuma um dado valor no ponto a, então o Corolário 8.11, p.128 (vi) garante a unicidade. Resumindo, dados $g \in C\big([a,b]\big)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única $f \in C^1\big([a,b]\big)$ tal que*

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b], \\ \\ f(a) = y_0. \end{cases}$$

Uma situação pouco mais complicada que a do exemplo anterior ocorre quando do lado direito da equação aparece a própria incógnita. Vejamos um exemplo.

Exemplo 10.9. *Procuramos $f \in C^1\big(\mathbb{R}\big)$ tal que*

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \\ f(0) = 1. \end{cases} \tag{10.7}$$

Já vimos (exercício 14(c), p.137) que existe no máximo uma solução de (10.7)*. Mostrar que existe alguma solução é tarefa mais elaborada que será deixada para depois. Por hora, diremos apenas que existe tal f, a chamada* **função exponencial**, *denotada por $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = \mathrm{e}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Agora vamos abordar outra questão relevante no estudo de soluções de equações diferenciais: a regularidade. De acordo com o enunciado, procuramos solução f na classe $C^1(\mathbb{R})$. Poderíamos ter sido menos exigentes, procurando f no conjunto das funções deriváveis (com derivadas não necessariamente contínuas). Nada ganhamos ou* *perdemos fazendo isto. De fato, se f é derivável e $f' = f$, então f' é contínua pois f é contínua. Concluímos que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ora, como $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f' = f$ temos que $f' \in C^1(\mathbb{R})$, isto é, $f \in C^2(\mathbb{R})$. Continuando o argumento (chamado de* **boot strap***) concluímos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Nas aplicações de EDO's em áreas externas à Matemática saber que determinado problema tem solução, única e regular (C^1 ou C^∞, por exemplo) é quase sempre inútil. O que se espera, de fato, é encontrar tal solução. Não existem métodos gerais para encontrar expressões de soluções de EDO's. Há apenas uma quantidade pequena de "receitas" cada uma delas aplicável a um tipo particular de equação. O problema é mais sério do que o leitor, talvez, possa imaginar. Na maioria dos casos, as soluções de EDO's não podem ser escritas em termos das funções elementares comumente usadas! (O exemplo clássico é a função f tal que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.) Neste caso, devemos usar esquemas numéricos para a resolução de EDO's.

De maneira geral estamos interessados no seguinte problema. Dada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, queremos encontrar $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável e tal que

$$\begin{cases} f'(x) = g\big(f(x)\big) \quad \forall x \in [a, b], \\ \\ f(a) = y_0. \end{cases} \tag{10.8}$$

Frequentemente, a variável x é substituída por t e interpretada como tempo e a é considerado o tempo inicial. Por essa razão (10.8) é chamado de **Problema de Valor Inicial** (PVI) ou de **Problema de Cauchy**.

Para encontrar uma solução, ou melhor, uma aproximação para a solução de (10.8) o método numérico mais simples é o **Método de Euler**. A ideia deste método é a seguinte. Sejam f solução do PVI e $x_0 = a$. Se $x_1 > x_0$ é próximo de x_0, então

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Longrightarrow f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = y_0 + g(y_0)(x_1 - x_0).$$

Assim, $y_1 = y_0 + g(y_0)(x_1 - x_0)$ é uma aproximação para $f(x_1)$ que será usada para obter uma aproximação para $f(x_2)$, sendo $x_2 > x_1$ próximo de x_1. Temos

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Longrightarrow f(x_2) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \approx y_1 + g(y_1)(x_1 - x_2).$$

Ou seja $y_2 = y_1 + g(y_1)(x_2 - x_1)$ é uma aproximação para $f(x_2)$. Continuamos o processo da seguinte maneira. Dada uma partição (ou **malha**, como é chamada no contexto da Análise Numérica) $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, definimos $y_1, \ldots, y_n$, indutivamente, por

$$y_i = y_{i-1} + g(y_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{10.9}$$

É razoável esperar que y_i seja uma boa aproximação para $f(x_i)$ tanto melhor quanto menor for $\max\big\{|x_i - x_{i-1}| \; ; \; i \in \{1, \ldots, n\}\big\}$. Nos outros pontos de $[a, b] \setminus P$ o valor da função f é aproximado pela função ϕ que é afim em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, e que vale y_{i-1} e y_i em x_{i-1} e x_i, respectivamente. Mais precisamente, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} y_0 & \text{se } x = a, \\ \left(\dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) \cdot (x - x_{i-1}) + y_{i-1} & \text{se } x_{i-1} < x \leq x_i. \end{cases} \tag{10.10}$$

O Método de Euler está na base da demonstração do Teorema de Peano.

TEOREMA 10.15. (Peano) *Seja $g \in C(\mathbb{R})$ limitada. Então, para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, existe $f \in C^1\big([a,b]\big)$ satisfazendo* (10.8).

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|g| \leq M$. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere a partição uniforme $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$. Ou seja,

$$|x_i - x_{i-1}| = \frac{b-a}{n}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definimos $y_1, \ldots, y_n$ por (10.9) e $f_n = \phi$ dada em (10.10). Segue que se $x \in (x_{i-1}, x_i)$, então f_n é derivável em x e $f_n'(x) = g\big(y_{i-1}\big) = g\big(f_n(x_{i-1})\big)$. Logo, $|f_n'(x)| \leq M$.

Usando o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 9.17, p.152) temos

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(s)\mathrm{d}s = y_0 + \int_a^x f_n'(s)\mathrm{d}s \quad \forall x \in [a,b]. \tag{10.11}$$

Da Proposição 9.12, p.148, obtemos

$$|f_n(x)| \leq |y_0| + \int_a^x |f_n'(s)|\mathrm{d}s \leq |y_0| + M(b-a) = L \quad \forall x \in [a,b]. \tag{10.12}$$

Logo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Com argumento análogo mostra-se que para $a \leq y \leq x \leq b$ temos

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \int_y^x |f_n'(s)|\mathrm{d}s \leq M(x-y). \tag{10.13}$$

Segue, imediatamente, que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua. Graças ao Teorema de Arzelà-Ascoli, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência (também denotada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) convergente para f em $C\big([a,b]\big)$. Vamos mostrar que f é solução de (10.8). De acordo com o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 9.18, p.152), basta mostrar que $f = \tilde{f}$, sendo $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = y_0 + \int_a^x g\big(f(s)\big)\mathrm{d}s \quad \forall x \in [a,b].$$

Faremos isto mostrando que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\tilde{f}$. Seja $\varepsilon > 0$. De (10.12) obtemos que $|f| \leq L$. Como g é uniformemente contínua no compacto $[-L, L]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$y, z \in [-L, L], \ |y - z| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |g(y) - g(z)| < \varepsilon.$$

Usando esta relação, (10.13) e supondo que $n \in \mathbb{N}$ seja suficientemente grande de modo que $M(b-a)/n < \delta$ e $\|f_n - f\| < \delta$, obtemos

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - \tilde{f}(x)| &\leq \int_a^x \left|f_n'(s) - g\big(f(s)\big)\right|\mathrm{d}s \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left|f_n'(s) - g\big(f(s)\big)\right|\mathrm{d}s \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left|g\big(f_n(x_{i-1})\big) - g\big(f(s)\big)\right|\mathrm{d}s \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big[\left|g\big(f_n(x_{i-1})\big) - g\big(f_n(s)\big)\right| + \left|g\big(f_n(s)\big) - g\big(f(s)\big)\right|\Big]\mathrm{d}s \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} 2\varepsilon \mathrm{d}s = 2(b-a)\varepsilon.
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ■

O Teorema de Peano não garante a unicidade da solução. Considere, por exemplo, $[a,b] = [0,1]$, $y_0 = 0$ e $g(y) = \sqrt{|y|}$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Verifica-se facilmente que, dado qualquer $c \in (0,1)$, a função $f_c : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_c(x) = 0$, se $x \leq, c$ e $f_c(x) = (x-c)^2/4$, se $x > c$, é solução do PVI correspondente. Sob hipóteses adicionais sobre g (pertencer a $C^1(\mathbb{R})$, por exemplo) é possível demonstrar a unicidade de solução (ver [He]).

É possível retirar a hipótese sobre a limitação de g mas paga-se um preço por isto. Neste caso, a solução f estará definida numa vizinhança de a que, possivelmente, não contém b. Considere, por exemplo, $[a,b] = [0,2]$, $y_0 = 1$ e $g(y) = \sqrt{|y|^3}$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Neste caso, a única solução é dada por $f(x) = 4/(2-x)^2$ que não está definida em $b = 2$

Perceba que na demonstração do Teorema de Peano usamos o Método de Euler de um modo muito particular supondo que as partições eram uniformes. Além disto, da sequência de aproximações dada pelo Método de Euler, mostramos apenas que uma subsequência converge para a solução. Isto inviabiliza o Cálculo Numérico aproximado da solução pois não sabemos qual é a sequência dos índices que deve ser usada. Felizmente, sob condições suplementares sobre g é possível mostrar que a sequência converge (ver [He]). Este fato está intimamente ligado a questão da unicidade da solução. Reflita a respeito.

Um último comentário: apresentamos o chamado método explícito. Há também o Método de Euler Implícito que tem vantagens sobre o explícito. Na verdade existem outros métodos numéricos mais vantajosos que o de Euler. O leitor interessado poderá consultar [He].

10.5 ⋆ Logaritmo e exponencial.

No prólogo de [Ru2] Rudin[1] afirma que "a função exponencial é a mais importante da Matemática". Há várias maneiras de definir esta função. A mais popular, nos livros de Cálculo I e Análise Real, define a exponencial como inversa da função logaritmo. Apresentaremos outra abordagem e provaremos este fato.

[1]Walter Rudin: ⋆ 02/05/1921, Viena, Áustria.

DEFINIÇÃO 10.16. *A* **função logaritmo** $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{s}\mathrm{d}s \qquad \forall x \in (0, +\infty).$$

Vejamos algumas propriedades fundamentais da função logaritmo. No exercício 13, p.137 deduzimos propriedades das funções logarítmica e exponencial de outro modo.

PROPOSIÇÃO 10.17. (propriedades do log) *Temos:*
i. $\log(1) = 0$; *ii.* $\log'(x) = 1/x$ *para todo* $x \in (0, +\infty)$;
iii. $\log(x^n) = n\log(x)$ *para* $x \in (0, +\infty)$ *e* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (i) Trivial.
(ii) Segue do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo.
(iii) Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo e considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \log(x^n) - n\log(x) \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Basta mostrar que f é identicamente nula. Derivando obtemos

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^n} - \frac{n}{x} = 0 \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Portanto f é constante, isto é, $f(x) = f(1) = 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$. ■

DEFINIÇÃO 10.18. *A* **função exponencial** $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

A série acima é (absolutamente) convergente graças ao Teste da Razão (veja Exemplo 4.18, p.67).

Dentre as propriedades da função exponencial, a proposição seguinte tem importância especial para a Análise.

PROPOSIÇÃO 10.19. (propriedades da exponencial) *Temos:*
i. $\exp(0) = 1$; *ii.* $\exp'(x) = \exp(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

Demonstração. (i) Trivial.

(ii) Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos $F_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Por definição, $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplesmente para $\exp$. Fixado $M > 0$, mostraremos que a convergência é uniforme em $[-M, M]$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $(F_N(M))_{N\in\mathbb{N}}$ converge para $\exp(M)$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N \geq N_0 \quad \Longrightarrow \quad |F_N(M) - \exp(M)| < \varepsilon.$$

Então, para $x \in [-M, M]$ e $N \geq N_0$, temos

$$|F_N(x) - \exp(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} = |F_N(M) - \exp(M)| < \varepsilon.$$

Verifica-se facilmente que $F'_{N+1} = F_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Logo, $(F'_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\exp$ em $[-M, M]$.

Graças à Proposição 10.8, p.169, $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge para uma primitiva da função $\exp$ em $[-M, M]$, ou seja, $\exp'(x) = \exp(x)$ para todo $x \in [-M, M]$. Como M é arbitrário, segue que $\exp'(x) = \exp(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Vejamos agora a relação entre as funções logaritmo e exponencial.

PROPOSIÇÃO 10.20. (relação log e exponencial) *Temos:*
i. $\exp\big(\log(x)\big) = x \quad \forall x \in (0, +\infty)$. *ii.* $\log\big(\exp(x)\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

Demonstração. (i) Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{\exp\big(\log(x)\big)}{x}$ $\forall x \in (0, +\infty)$. Basta mostrar que $f(x) = 1$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Derivando obtemos

$$f'(x) = \frac{x \exp\big(\log(x)\big)/x - \exp\big(\log(x)\big)}{x^2} = 0 \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Portanto f é constante, isto é, $f(x) = f(1) = 1$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

(ii) Como no item anterior, mostra-se que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \log\big(\exp(x)\big) - x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é identicamente nula. ■

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Graças às propriedades da exponencial e do logaritmo, temos:

$$\exp\big(n \log(a)\big) = \exp\big(\log(a^n)\big) = a^n = \underbrace{a \cdots a}_{\text{n vezes}}.$$

A quantidade acima à direita tem sentido apenas para $n \in \mathbb{N}$ enquanto que aquela à esquerda faz sentido para $n \in \mathbb{R}$. Motivados por este fato, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 10.21. *Dado $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, definimos $a^x = \exp\big(x \log(a)\big)$.*

Consideremos expoentes racionais. Dados $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, graças ao exercício 21(e), p.183, temos $\big(a^{\frac{m}{n}}\big)^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m$. Portanto, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Como $\mathrm{e} = \exp(1)$ (veja Definição 4.31, p.67, $\log(\mathrm{e}) = \log\big(\exp(1)\big) = 1$. Assim, para $x \in \mathbb{R}$ temos $\mathrm{e}^x = \exp\big(x \log(\mathrm{e})\big) = \exp(x)$.

10.6 ⋆ Seno e cosseno.

DEFINIÇÃO 10.22. *As funções* $\mathrm{sen}, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são definidas por*

$$\mathrm{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad e \quad \cos(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Estas funções estão bem definidas (i.e., as séries convergem) pelo Teste da Razão (confira).

TEOREMA 10.23. (propriedades de seno e cosseno) *Temos*

i. As funções sen *e* $\cos$ *são deriváveis com* $\operatorname{sen}' = \cos$ *e* $\cos' = -\operatorname{sen}$*;*

ii. $\operatorname{sen}(0) = 0$ *e* $\cos(0) = 1$*;*

iii. $\big(\operatorname{sen}(x)\big)^2 + \big(\cos(x)\big)^2 = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Em particular,* $\operatorname{sen}(x), \cos(x) \in [-1, 1]$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. (i) Dado $N \in \mathbb{N}$, definimos $S_n, C_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para cada $x \in \mathbb{R}$, por

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad C_N(x) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Temos que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ e $(C_N)_{N\in\mathbb{N}}$ convergem simplesmente para sen e $\cos$, respectivamente. Fixado $M > 0$, mostraremos que a convergência de $(C_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é uniforme em $[-M, M]$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\sum M^n/n!$ converge (veja Exemplo 4.18, p.67), existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N \geq N_0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2N+2}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} < \varepsilon.$$

Então, para $x \in [-M, M]$ e $N \geq N_0$, temos

$$|C_N(x) - \cos(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=2N+2}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} < \varepsilon.$$

Verifica-se facilmente que $S'_N = C_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Logo, $(S'{}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\cos$ em $[-M, M]$.

Graças à Proposição 10.8, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge para uma primitiva da função $\cos$ em $[-M, M]$, ou seja, $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ para todo $x \in [-M, M]$. Como M é arbitrário, segue que $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Analogamente, mostra-se que $\cos' = -\operatorname{sen}$.

(ii) Trivial.

(iii) Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \big(\operatorname{sen}(x)\big)^2 + \big(\cos(x)\big)^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos

$$F'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}'(x) + 2\cos(x)\cos'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) = 0.$$

Portanto, F é constante. Como $F(0) = 1$, concluímos a prova. ∎

Da segunda propriedade do teorema anterior obtemos $\operatorname{sen}, \cos \in C^\infty\big(\mathbb{R}\big)$. As propriedades (i) e (ii) caracterizam sen e $\cos$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 10.24. (caracterização do seno e cosseno) *Sejam* $s, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deriváveis tais que* $s' = c$*,* $c' = -s$*,* $s(0) = 0$ *e* $c(0) = 1$*. Então* $s = \operatorname{sen}$ *e* $c = \cos$*.*

Demonstração. Procedemos como na prova do item (iii) do teorema anterior. Definimos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \big(\operatorname{sen}(x) - s(x)\big)^2 + \big(\cos(x) - c(x)\big)^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e mostramos que $F' = 0$. Portanto, F é constante. De $F(0) = 0$, concluímos. ∎

TEOREMA 10.25. (definição de π) *Existe uma constante $c > 0$ tal que* sen *é crescente e* $\cos$ *é decrescente em* $[0, c]$ *com* $\operatorname{sen}(c) = 1$ *e* $\cos(c) = 0$. *Além disto, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *temos,* $\operatorname{sen}(c + x) = \cos(x)$ *e* $\cos(c + x) = -\operatorname{sen}(x)$.

Demonstração. Como $\cos$ é contínuo e $\cos(0) = 1$, existe $a > 0$ tal que $\cos(x) > 1/2$ para todo $x \in [0, a]$. Logo, neste intervalo, sen é estritamente crescente. Em particular, $\operatorname{sen}(x) > \operatorname{sen}(0) = 0$ para todo $x \in [0, a]$.

Vejamos que existe $x > a$ tal que $\cos(x) < 0$. Suponhamos que não. Neste caso, sen é crescente em $[0, +\infty)$.

Seja $x > a$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\overline{x} \in (a, x)$ tal que $\cos(x) - \cos(a) = -\operatorname{sen}(\overline{x})(x - a) \leq -\operatorname{sen}(a)(x - a)$. Segue que $\cos(x) \to -\infty$ quando $x \to +\infty$, que é absurdo.

Pelo que foi demonstrado, o conjunto $\{b \in (0, +\infty) \ ; \ \cos(x) \geq 0 \ \forall x \in [0, b]\}$ é não vazio (contém a) e limitado superiormente. Seja $c > 0$ o seu supremo.

A função $\cos$ é positiva em $[0, c]$ e, portanto, sen é crescente neste intervalo. Mas $\operatorname{sen}(0) = 0$, logo, a função sen é positiva em $[0, c]$ e, como $\cos' = -\operatorname{sen}$, temos que $\cos$ é decrescente neste intervalo.

Da definição de c e da continuidade da função sen obtemos $\cos(c) = 0$. Do item (iii) do Teorema 10.23, obtemos $|\operatorname{sen}(c)| = 1$. Porém, $\operatorname{sen}(c) \geq \operatorname{sen}(0) = 0$, logo, $\operatorname{sen}(c) = 1$.

Considere as funções $s, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $s(x) = -\cos(c + x)$ e $c(x) = \operatorname{sen}(c + x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Vemos facilmente que $s' = c$, $c' - s$, $s(0) = 0$, e $c(0) = 1$. Pela Proposição 10.24, obtemos que $s = \operatorname{sen}$ e $c = \cos$, completando a demonstração. ■

DEFINIÇÃO 10.26. $\pi = 2c$, *sendo c a constante dada pelo teorema anterior.*

Podemos definir π também através do exercício 61, p.80 ou da Definição 4.37, p.69.

COROLÁRIO 10.27. *As funções* sen *e* $\cos$ *são periódicas de período* 2π.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Pelo teorema temos

$$\operatorname{sen}(\pi/2 + x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad \cos(\pi/2 + x) = -\operatorname{sen}(x).$$

Trocando x por $\pi/2 + x$, obtemos

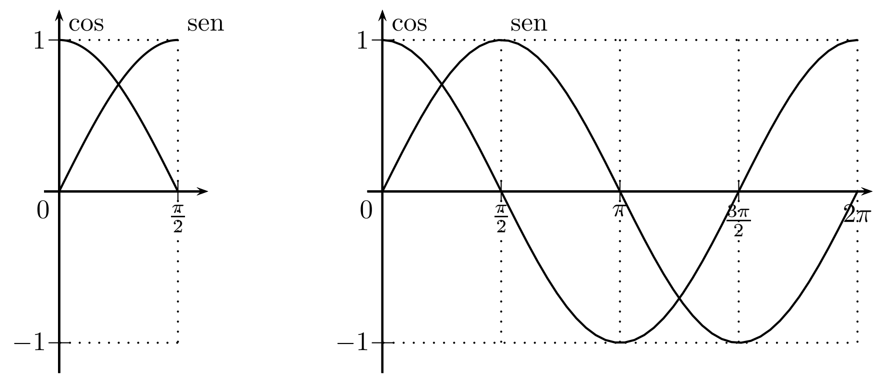
$$\operatorname{sen}(\pi + x) = \cos(\pi/2 + x) = -\operatorname{sen}(x).$$

Agora, trocando x por $\pi + x$, concluímos

$$\operatorname{sen}(2\pi + x) = -\operatorname{sen}(\pi + x) = \operatorname{sen}(x).$$

Finalmente, $\cos(2\pi + x) = \operatorname{sen}(\pi/2 + 2\pi + x) = \operatorname{sen}(\pi/2 + x) = \cos(x)$. ■

De acordo com o Teorema 10.25, no intervalo $[0, \pi/2]$ as funções sen e $\cos$ têm gráficos semelhantes ao esboçados na Figura 10.1(a). Usando iteradamente as relações $\operatorname{sen}(\pi/2+x) = \cos(x)$ e $\cos(\pi/2 + x) = -\operatorname{sen}(x)$, como na demonstração do Corolário 10.27, estendemos o gráfico até o intervalo $[0, 2\pi]$ obtendo a Figura 10.1(b).



(a) Em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Em $[0, 2\pi]$.

Figura 10.1: Gráficos das funções seno e cosseno.

10.7 Exercícios

10.7.1 Convergência simples e uniforme

$\Longrightarrow$ **1.** Prove que f_n converge uniformemente para g em $[0,1]$ se:
(a) $f_n(x) = \operatorname{sen}(x/n)$ e $g \equiv 0$; (b) $f_n(x) = nx^2/(1+nx)$ e $g(x) = x$;
(c) $f_n(x) = \operatorname{sen}(x)/n$ e $g \equiv 0$.

$\Longrightarrow$ **2.** Prove que f_n converge simplesmente, mas não uniformemente, para $g \equiv 0$ em $[0,1]$ se:
(a) $f_n(x) = nxe^{-nx}$; (b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$.
Dica: Faça os gráficos no computador.

$\Longrightarrow$ **3.** Seja $f_n = \frac{n}{2} I_{[-1/n,1/n]}$. Prove que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int f_n(s)\,ds\right) \neq \int \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(s)\right) ds.$

$\to$ **4.** Seja $a \in (0,1)$. Considere $f_n : [0,a] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,a]$. Prove que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função nula usando:
(a) diretamente a definição de convergência uniforme; (b) o Teorema de Dini;

$\to$ **5.** **(teste M de Weierstrass)** Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas em $[a,b]$ e suponha que exista uma sequência numérica (M_n) tal que:

(a) $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in [a,b]$ e $n \in \mathbb{N}$ e (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

Prove que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em $[a,b]$.

$\to$ **6.** Prove que uma sequência monótona de funções é uniformemente convergente caso possua uma subsequência com esta propriedade ([L] p.335 no.22).

7. Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = c$ então a sequência de polinômios $p_n(x) =$

$a_n x^2 + b_n x + c_n$ converge para o polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ uniformemente em cada intervalo $[a, b]$ ([L] p.333 no.4).

8. Seja $f_n(x) = x^n$ para $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = 1$ se $x > 1$ e $f_n(x) = 0$ se $x < 0$. Seja $h = I_{\{x>1\}}$.

(a) Prove que $\int |f_n - h|$ converge para zero quando $n \to +\infty$;

(b) Considere y_n a solução de $dy_n/dx = f_n(x)$. Determine o limite de y_n quando $n \to +\infty$. Defina esta função limite y como a **solução fraca** de $dy/dx = h$. Note que y não é diferenciável e portanto a equação diferencial não faz sentido.

9. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina a sequência (f_n) por $f_0 = f$ e $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(s)\, ds$ para $n \in \mathbb{N}$. Prove que (f_n) converge para $g \equiv 0$ uniformemente ([Fi1] p.205 no.9).

10. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em todos os pontos de I menos um. Prove que existe sequência de funções contínuas em I convergindo para f simplesmente ([L] p.334 no.12).

11. Suponha que $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente em X ([L] p.333 no.7).

(a) Prove que $f_n + g_n$ converge uniformemente em X para $f + g$;

(b) Suponha mais ainda que exista $c > 0$ tal que $|f_n(x)| + |g_n(x)| \leq c$ para todo n e $x \in X$. Prove que $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente em X.

10.7.2 Equicontinuidade

12. Prove que a sequência $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$ não é equicontínua em $[0, 1]$.

13. Prove que se f_n converge uniformemente para f então (f_n) é equicontínua e limitada.

14. Prove que se f_n é Lipschitz contínua com a mesma constante K independente de n então (f_n) é equicontínua.

15. O exercício anterior implica uma condição suficiente (muito utilizada) para a equicontinuidade: $|f_n'(x)| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É verdade que se f_n é suave então (f_n) é equicontínua se, e somente se, $|f_n'(x)| \leq c$?

16. Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de A em $\mathbb{R}$ e $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prove que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uniformemente convergente para f se, e somente se, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

17. Prove que, na demonstração do Teorema de Arzelá-Ascoli, podemos supor, sem perda de generalidade, que

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem subsequência constante;

(b) se $m \neq n$, então $f_n \neq f_m$.

Conclua que isto conserta a demonstração.

18. Prove que se f_n é α-Hölder contínua para todo $n \in \mathbb{N}$ e converge uniformemente para f então f é α-Hölder contínua. Isto significa que este espaço é completo.

19. Suponha que $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uniformemente α-Hölder contínua com mesma constante K e $f_n(0) = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que (f_n) tem subsequência uniformemente convergente em $[0,1]$.

Dica: Aplique Arzelá-Ascoli.

10.7.3 Outros

$\star$ **20.** (extra) Prove que a função seno ([Sp] p.274 no.29):

(a) não é uma função racional (quociente de dois polinômios);

Dica: seno possui uma propriedade que função racional não possui.

(b) não pode ser definida implicitamente por uma equação algébrica, i.e., não existem funções racionais $f_0, \ldots, f_{n-1}$ tais que

$$(\operatorname{sen}(x))^n + f_{n-1}(x)(\operatorname{sen}(x))^{n-1} + \cdots + f_0(x) = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Dica: Prove que $f_0 = 0$ e fatore $\operatorname{sen}(x)$. O outro fator deve ser zero em múltiplos de 2π e portanto identicamente nulo. Complete por indução o argumento.

$\star$ **21.** (extra) Prove que

(a) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ para $x, y > 0$;

(b) $\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)$ para $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}$;

(d) $a^{x+y} = a^x a^y$ para $a > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$;

(e) $(a^x)^y = a^{xy}$ para $a > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$.

$\star$ **22.** (extra) Dado $a > 0$ definimos $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log a} \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Prove que

(a) $\log_a(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(b) $a^{\log_a(x)} = x$ para todo $x \in (0, +\infty)$;

(c) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ para $x, y \in (0, +\infty)$;

(d) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$ para $x \in (0, +\infty)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\sharp$ **23.** (difícil) Defina $\psi(x)$ como a distância de x até o inteiro mais próximo. De forma precisa, $\psi(x) = \min(\lceil x \rceil - x, x - \lfloor x \rfloor)$. Agora defina $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\psi(10^n x)$. Prove que:

(a) f é contínua; (b) f não possui derivada em ponto algum.

Dica: O item (a) é fácil. O item (b) é bastante difícil, vide o teorema em [Sp] p.422.

Obs: A existência de função contínua sem derivada em ponto algum é atribuída a Weierstrass, que provou isto para $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x)$ para certos $a, b \in \mathbb{R}$. A função ψ acima é uma "caricatura" de $\cos$.

$\sharp$ **24.** (difícil) Defina $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!x)}{(n!)^n}$ ([J] p.69, no.4). Prove que:

(a) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e tem período 2π; (b) f não é analítica em $x = 0$;

(c) f não é analítica para qualquer x.

Dica: $f(x + 2\pi n/m) - f(x)$ é analítica para inteiros n, m com $m \neq 0$.

Referências Bibliográficas

[Ap] Apostol, T. M.; Chrestenson, H. E.; Ogilvy, C. S.; Richmond, D. E. and Schoonmaker, N. J. (eds); *Selected papers on calculus.* Reprinted from the American Mathematical Monthly (Volumes 1–75) and from the Mathematics Magazine (Volumes 1–40). The Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y. 1969.

[Bo] Boyer, C. B., *História da Matemática*, Editora Edigard Blücher ltda, 9ª ed. 1991.

[C] Courant, R. ; *Differential and Integral Calculus Vol. I;* Interscience; 1934.

[Da] Darboux, J.-G., *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Ann. l'École Normale, Ser. 2 **4** (1875) 57–112.

[Co] Cohen, P.J., *The Independence of the Continuum Hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **50** (1963), 1143–1148.

[De] Dedekind, R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872).

[Di] Dixmier, J., *General Topology*, Springer-Verlag Inc., New York, 1984.

[Er] Erdös, P., *Über die Reihe* $\sum 1/p$, Mathematica, Zutphen B **7** (1938), 1–2.

[Eu] Euler, L., *Introductio in Analysin Infinitorum*, Tomus Primis, Lausanne, 1748; Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 8.

[Fe] Felicio, J. R. ; *Fórmula de Stirling em tempos de Maple;* Revista de Matemática Universitária, **17**, (1994).

[Fel] Felzenszwalb, B.; *Álgebras de Dimensão Finitas*; IMPA; 12° Colóquio; 1979.

[Fi1] Figueiredo, D.; *Análise I;* Editora de UNB; 1975.

[Fi2] Figueiredo, D.; *Números Irracionais e Transcendentes;* SBM; 1980.

[Ga] Garcia, A.; *Álgebra: um curso de introdução*; IMPA; 1998.

[Gi] Giraldo, V., *Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada*, Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, 2004.

[Go] Gödel, J., *The Consistency of the Continuum-Hypothesis*, Princeton University Press - Princeton, N.J, 1940.

[Ha] HALMOS, P.R., *Naive set theory*, D. Van Nostrand Co., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, 1960.

[Hd] HARDY, G. H. ; *A Course of Pure Mathematics;* Cambridge University Press; 1967.

[He] HENRICI, P., *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1962.

[Ho] HOCKING, J.G. and YOUNG, G.S., *Topology*, Dover Publications Inc., New York, 1988.

[J] JOHN, F.; *Partial Differential Equations;* Springer-Verlag; 1991.

[Ke] KELLEY, J.L., *General topology*, Springer-Verlag Inc., New York, 1985.

[L] LIMA, E.L., *Curso de análise, Vol. 1*, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[L2] LIMA, E.L., *Análise real, Vol. 1*, IMPA, Rio de Janeiro, 1989.

[M] *The MacTutor History of Mathematics archive*, `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/`

[O] ORE, O.; *Number Theory and its History;* McGraw-Hill Co; 1948.

[R] ROBINSON, A.; *On generalized limits and linear functionals*; Pacific J. Math. **14** (1964), 269–283; MR 0164235.

[Ros] ROSA, R. M. S., *Equações Diferenciais*, a ser publicado.

[Ru1] RUDIN, W., *Princípios de análise matemática*, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1971. Tradução de *Principles of mathematical analysis.*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[Ru2] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York-Toronto-London, 1974.

[Sp] SPIVAK, M.; *Calculus;* W. A. Benjamin; 1967 (first edition).

[St] STARK, H. M.; *An Introduction to Number Theory;* MIT Press 1978.

[T] TORCHINSKY, A.; *Real Variables;* Adisson-Wesley Pub Co; 1988.

[Vo] VOLTERRA, V., *Sui principii del calcolo integrale*. Giornale di Matematiche **19** (1881), 333-372.

Índice Remissivo