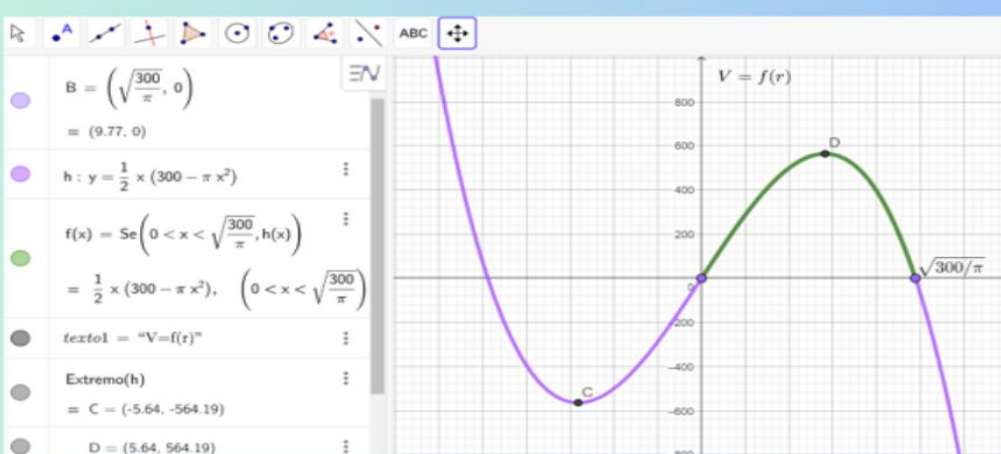
Projeto Fundão
UFRJ

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Transição do Ensino Médio para o Superior:
Pré-cálculo com Resolução de Problemas e Geogebra



Lilian Nasser & Angela Biazutti (Orgs.)

Transição do Ensino Médio para o Superior: Pré-Cálculo com Resolução de Problemas e GeoGebra

Organização:
Lilian Nasser e Angela Cássia Biazutti

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Projeto Fundão
UFRJ

N267t

Lilian Nasser & Angela Cássia Biazutti (orgs), 2025 -

Transição do Ensino Médio para o Superior: Pré-Cálculo com Resolução de Problemas e Geogebra [recurso eletrônico]/ Lilian Nasser & Angela Cássia Biazutti (orgs); Lilian Nasser, Angela Cássia Biazutti; Geneci Alves de Sousa; Luciano Roberto Padilha de Andrade; Marcelo André Abrantes Torraca; Rafael Filipe Novôa Vaz; Jeanne Denise Bezerra de Barros; Alexandre Oliveira Silva.- 1.ed.-Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2025.

263 p.
Recurso digital

Formato: PDF
Requisitos do sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de Acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia e índice remissivo
ISBN 978-65-86502-12-1

1.Matemática-Estudo e Ensino. 2.Pré-Cálculo. 3. Resolução de Problemas. 4. GeoGebra. 5. Ensino Médio e Superior. 6. Funções. I. Nasser, Lilian. II. Biazutti, Angela Cássia. III. Sousa, Geneci Alves de. IV. Andrade, Luciano Roberto Padilha de. V. Torraca, Marcelo André Abrantes. VI. Vaz, Rafael Filipe Novôa. VII. Barros, Jeanne Denise Bezerra de. VIII. Silva, Alexandre Oliveira.

CDD: 510.373

Autores e Autoras

Lilian Nasser

Angela Cássia Biazutti

Geneci Alves de Sousa

Luciano Roberto Padilha de Andrade

Marcelo André Abrantes Torraca

Rafael Filipe Novôa Vaz

Jeanne Denise Bezerra de Barros

Alexandre Oliveira Silva

Estagiários

Luiz Felipe Garcia Barbosa

Gustavo Lima da Silva

Coleção de Livros do Projeto Fundão-Matemática-UFRJ

Álgebra: Pensar, Calcular, Comunicar, ...
Área e Perímetro: práticas acessíveis a alunos surdos e alunos com deficiência visual
Argumentação e Provas no Ensino da Matemática
Atividades de contagem com adaptações para alunos surdos e alunos com deficiência visual
Atividades Matemáticas para deficientes visuais
Avaliação de Aprendizagem e Raciocínio em Matemática: Métodos Alternativos
Construindo o Conceito de Função
Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático – Módulo I – Formação de Conceitos Geométricos
Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático – Módulo II -Visão Dinâmica da Congruência de Figuras
Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático – Módulo III – Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras
Equações: Ler, Resolver, utilizar…
Fazer Matemática em sala de aula usando diversos recursos
Geometria Euclidiana por Meio da Resolução de Problemas
Geometria Euclidiana: Resolução dos Problemas
Geometria na Era da Imagem e do Movimento
Geometria segundo a Teoria de Van Hiele
Grafos: jogos e desafios
Histórias para Introduzir Noções de Combinatória e Probabilidade
Matemática Financeira para a Escola Básica: Uma abordagem prática e visual
Números: Linguagem Universal
Projeto Fundão 30 anos
Razões e Proporções
Tratamento da Informação – Atividades para o Ensino Básico
Tratamento da Informação – Explorando dados Estatísticos e Noções de Probabilidade a Partir das Séries Iniciais
Visualizando Figuras Espaciais

Informações sobre os livros: www.matematica.projetofundao.ufrj.br

Projeto Fundão
UFRJ

Sumário

Prefácio

Pesquisas do grupo Transição (do Ensino Médio para o Superior) do Projeto Fundão-UFRJ sobre lacunas na aprendizagem indicam dificuldades dos alunos no trato com Funções, que causam resultados acadêmicos ruins e abandono no Ensino Superior em cursos da área de Exatas.

Testes diagnósticos diversos (discutidos com mais detalhes no Capítulo 1) levaram o grupo a destacar vários problemas principais: dificuldade dos alunos em relação à leitura e interpretação de problemas, à modelagem matemática e ao tratamento algébrico.

Os membros do grupo Transição discutiram estes problemas e concluíram que um possível caminho seria revisitar o estudo de Funções, no início de um Curso Superior, antes da primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), ou seja numa disciplina de Pré-Cálculo, ou ainda em uma disciplina específica no final do Ensino Médio, nas escolas em que isto fosse possível. Para ajudar os professores destas disciplinas o grupo resolveu produzir este livro, que contém sugestões de atividades práticas, que podem motivar os alunos e amenizar as dificuldades apresentadas.

O Capítulo 1 descreve a abordagem pedagógica utilizada nos capítulos 2 e 3, combinando Resolução de Problemas, a maioria contextualizados, que envolvam diferentes tipos de Representação de Funções e contando com o auxílio do *software* GeoGebra quando necessário, para facilitar a conversão entre a representação Algébrica e a Geométrica de uma Função. Tal metodologia recebeu a denominação MERP (Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas).

O Capítulo 1 inclui também um breve resumo da evolução histórica do conceito de Função e de suas formas de Representação e uma descrição das principais etapas e estratégias utilizadas na Resolução de um problema, que poderão ser úteis aos professores para enriquecer suas aulas e ajudar os alunos na hora de explorar problemas.

Os problemas contextualizados, envolvendo diversos tipos de funções, escolhidos para os Capítulos 2 e 3 tiveram os seguintes objetivos: melhorar a capacidade de leitura e interpretação de enunciados; melhorar o raciocínio lógico e aprimorar a redação matemática dos alunos; desenvolver o trabalho com diferentes tipos de representação de funções e a conversão entre elas; aprimorar a compreensão de diferentes conjuntos, discretos ou contínuos, associados a domínios de função; identificar o tipo de curva associado ao gráfico das principais funções, de preferência usando ferramentas computacionais, como o GeoGebra; estudar problemas contextualizados envolvendo funções definidas por várias sentenças que, em geral, não são abordadas no Ensino Médio; explorar problemas contextualizados envolvendo máximos ou mínimos de diversos tipos de função.

Para o Capítulo 2 foram selecionados problemas para atuarem como disparadores de revisão de conteúdos como os conceitos de Função, Domínio, Imagem e Gráfico, Funções Crescentes e Decrescentes, Inversa de uma Função, Função Composta, Funções Contínuas e Descontínuas. São explorados os gráficos de diferentes tipos de Função.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de Máximos e Mínimos de Função e envolve diferentes Funções, não apenas a Função Quadrática, como em geral ocorre no Ensino Médio. Os problemas selecionados são resolvidos ou geometricamente, principalmente com apoio do GeoGebra ou utilizando a Desigualdade das Médias, que faz parte do conteúdo de Estatística incluído na BNCC.

Além disso, já motivando os alunos para uma futura disciplina de CDI, alguns aspectos teóricos são discutidos, como a relação entre máximo/mínimo e reta tangente horizontal ao gráfico de função, conceito de máximo/mínimo local e global e ponto de inflexão.

Os Capítulos 2 e 3 incluem também uma seleção de problemas propostos no final de cada um deles, todos com respostas.

O Apêndice 1, para os professores que não estiverem familiarizados com o GeoGebra, fornece mais detalhes sobre os comandos que foram utilizados na Resolução de Problemas deste livro.

O Apêndice 2 contém um breve resumo da evolução histórica dos vetores e uma aplicação de vetores que utiliza também o MERP.

O livro ainda conta com um Índice Remissivo, para que os professores interessados em uma função específica possam localizar os problemas em que ela aparece.

As referências de cada capítulo estão incluídas no final do livro, para aqueles que desejem conhecer mais sobre as pesquisas do grupo Transição e outros livros e artigos interessantes.

Os autores também criaram *applets,* para diversos problemas e exemplos, cujos *links* estão disponíveis no final do livro.

Esperamos que este livro sirva como fonte de referência adicional para os professores, além do livro-texto adotado, e os auxilie a preencher as lacunas no ensino-aprendizagem de Funções, além de motivar os estudantes para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), minimizando os índices de evasão e reprovação.

Gostaríamos de agradecer os professores Rolci Cipolatti, Ricardo Rosa e Cláudia Segadas, da editora do IM-UFRJ, pela revisão cuidadosa deste texto.

Rio de Janeiro, julho de 2025
Lilian Nasser e Angela Cássia Biazutti

Capítulo 1 – Abordagem Pedagógica no Ensino de Funções

A abordagem escolhida aqui visa a aprendizagem de Matemática por meio da resolução de problemas interessantes, utilizando o *software* GeoGebra como apoio. A compreensão, por parte dos alunos, de conceitos abstratos ligados, por exemplo, a funções ou vetores, passa por distinguir os objetos matemáticos de suas diferentes representações. Estas representações não surgiram todas num mesmo momento histórico. Foram surgindo e se sofisticando, assim como o que se entende como função também foi se ampliando ao longo dos séculos.

O método de ensino por meio de resolução de problemas (MERP), que é utilizado neste livro, foi apresentado por Biazutti, Vaz e Andrade (2020) e consiste na utilização de Resolução de Problemas como ponto de partida para o ensino de determinados conceitos, com apoio de diferentes Representações Semióticas e do *software* GeoGebra. Também contribui no preenchimento de lacunas e consolidação da aprendizagem. O MERP pode ser utilizado de forma bastante produtiva no ensino de funções, vetores e geometria analítica.

De acordo com a teoria de representações semióticas de Duval (2003, 2009), para que a aprendizagem ocorra de forma completa, devem ser explorados pelo menos dois registros distintos de representação e os alunos precisam ser capazes de efetuar a conversão entre eles, além de trabalhar com diferentes tratamentos, dentro de um mesmo registro. O *software* educativo GeoGebra foi escolhido para fazer parte do MERP pelo fato de trabalhar com dois registros de representação distintos, o algébrico e o geométrico (figura, gráfico) e de transitar facilmente entre eles.

Vamos iniciar este capítulo com um resumo da teoria de Duval, incluindo testes realizados com alunos que comprovam as dificuldades relacionadas aos objetos matemáticos e suas representações.

Como o objetivo principal deste livro é consolidar a aprendizagem de função, de uma forma menos superficial, de modo a tornar mais fácil a transição dos alunos entre o Ensino Médio e o Superior, em áreas de Ciências Exatas, apresentaremos em seguida uma breve retrospectiva da evolução histórica do conceito de função e das formas de representação de uma função.

Para serem eficientes na aprendizagem de conceitos ou no preenchimento de lacunas, os problemas selecionados para este livro, em geral, não são de resolução imediata utilizando algoritmos repetitivos. Por conseguinte, na seção 3 serão exploradas algumas técnicas que podem ser utilizadas pelos estudantes na resolução de problemas de Matemática, evitando procedimentos caóticos.

Na última seção será apresentado o MERP, incluindo também exemplos de sua utilização no ensino-aprendizagem de conceitos relacionados a função considerados muito abstratos pelos alunos, como o de limite de uma função. Assim, esta abordagem pedagógica pode ser utilizada desde o Ensino Médio até o Ensino Superior, em disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

1.1 Teoria de Representações Semióticas de Duval

Um dos aspectos em que a Matemática difere de outras ciências é o tipo de objetos com os quais trabalhamos. Se, por um lado, podemos, em zoologia, apontar um quadrúpede, ou em física, mostrar e estudar a queda de uma bola ou o movimento de um pêndulo, em Matemática os objetos de estudo não existem no plano material. Por isso,

> a única coisa que podemos fazer com os objetos matemáticos é descrevê-los, defini-los, denotá-los, denominá-los, desenhá-los, ..., isto é, fornecer representações semióticas. Podemos indicar a aresta que se forma entre duas paredes de um quarto e dizer que representa ou que faz alusão a uma reta; podemos apontar o vértice de uma caixa e dizer que representa um ponto; levantar três dedos da mão direita e dizer que representam o número 3; escrever na lousa 3 = 2 + 1 e dizer que representa uma igualdade ; escrever $2x + 3 = 1$ e dizer que representa uma equação... Mas não podemos colocar nas mãos dos nossos estudantes uma reta-coisa, um número-coisa, uma equação, uma igualdade,... (D'Amore, Pinilla e Iori, 2015, p. 131-132)

A falta de acesso sensível, como visão, olfato etc., aos objetos em Matemática nos impõe trabalhar com representações em diversos registros, que passamos a descrever adiante, segundo a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, educador matemático e filósofo francês.

Semiótica nos remete à palavra signo (*semeion* em grego, geralmente traduzida por signo), definida por Peirce (2005, p. 46) como "aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém". Sua teoria dos signos (semiótica) "fundamenta-se na ideia de que a cognição, o pensamento e até mesmo o ser humano possuem uma natureza essencialmente semiótica" (D'Amore, Pinilla e Iori, 2015, p. 59). Podemos pensar a representação semiótica de um objeto matemático como a representação em forma de signo.

Um enunciado em língua materna ou verbal, uma fórmula algébrica, um gráfico de uma função ou uma figura geométrica, um conjunto de números, por exemplo, são representações semióticas que revelam sistemas semióticos diferentes, com diferentes signos (Henriques; Almouloud, 2016). De acordo com Duval (2012), para termos uma compreensão completa de um objeto matemático ou "construir cognitivamente" este objeto é necessário ter domínio de suas várias formas de representação ou registros de representação semiótica (figuras, gráficos, tabelas, escrituras simbólicas, língua natural etc.), conforme mostra a Figura 1. 1 a seguir.

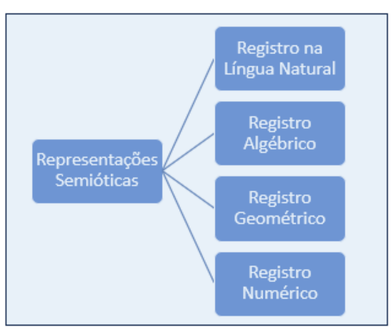


Figura 1. 1 - Registros de Representação Semiótica frequentes na Matemática segundo Duval (2012)

De acordo com Duval, uma das causas das dificuldades na compreensão de um objeto matemático é a falta de percepção da relação entre ele e as diversas formas de registro de sua representação. Duval (2009) afirma que

> não pode haver compreensão matemática sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais deve-se confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos de figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois, em Matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática. (Duval, 2009, p. 15)

Duval (2009) distingue dois tipos de transformação nas representações semióticas: o tratamento e a conversão. O tratamento é definido como uma transformação da representação no próprio registro onde ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna. Por outro lado, a conversão envolve uma transformação de uma representação em outro tipo de registro. De acordo com Duval (2003), "há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em Matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato" (p. 31).

A Figura 1. 2 a seguir mostra diversas representações de uma reta. Uma representação no registro algébrico desta reta, por meio da sua equação cartesiana na forma padrão, por exemplo, está sendo submetida a um tratamento, ao ser transformada em equação reduzida. Já a passagem dessa equação para uma representação num registro gráfico caracteriza uma conversão. A Figura 1. 2 também mostra uma representação em língua natural, submetida a um tratamento, assim como uma representação no registro numérico, sob a forma de uma tabela e como conjunto de pares ordenados.

Estudos mostram que os alunos apresentam dificuldades na articulação entre a leitura e a interpretação das representações gráficas cartesianas (Nasser, 2009). No ensino das retas no plano, em geral, não se associa o conceito de coeficiente angular ou inclinação com a direção da reta no plano. Há muita dificuldade em encontrar a equação de uma reta partindo de sua representação gráfica, até para os casos mais elementares. A articulação entre a representação nos registros gráfico e algébrico parece não se estabelecer mesmo para alunos que já tinham estudado função afim anteriormente.

De acordo com Duval (1988, p. 235), "a razão profunda dessas dificuldades não se deve procurar nos conceitos matemáticos ligados à função afim, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica."

Uma das causas dessas dificuldades deve-se à passagem da representação do registro algébrico para a sua representação no registro gráfico com a construção ponto a ponto, o que acarreta problemas na passagem inversa. Para efetuar tal passagem, a abordagem ponto a ponto não é somente inadequada, como constitui um obstáculo.

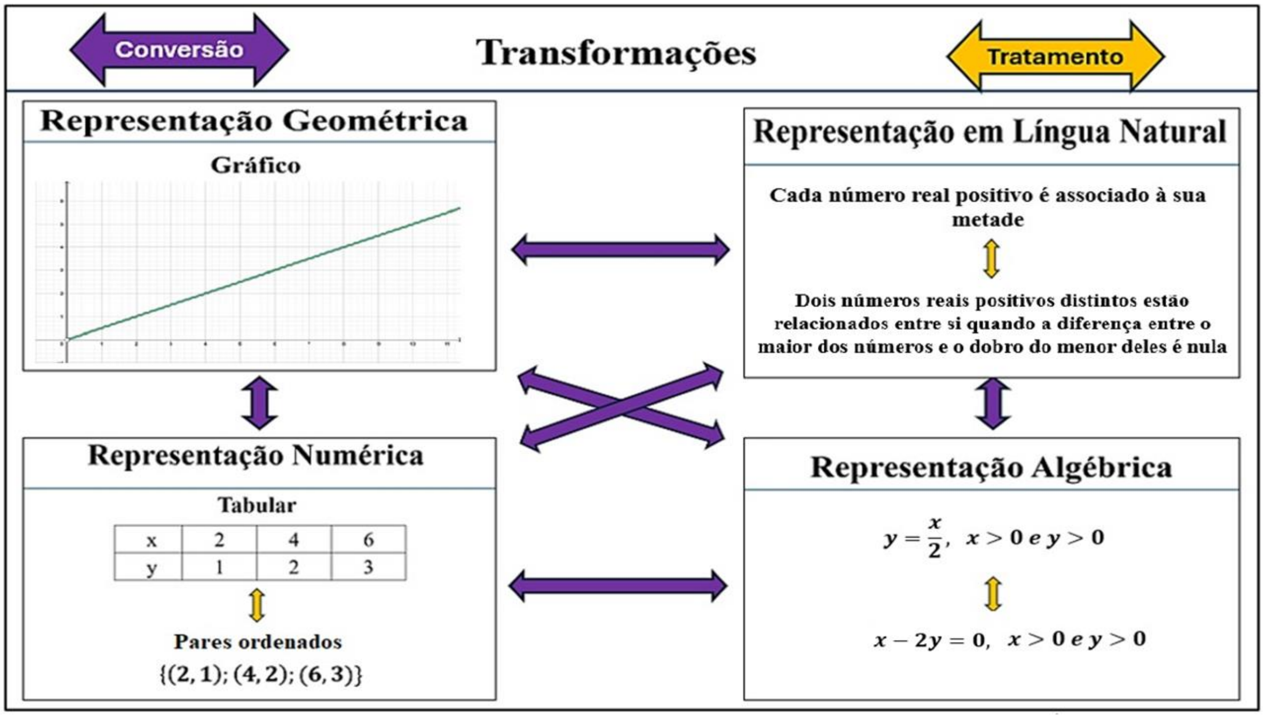


Figura 1. 2 - Quatro representações semióticas para um exemplo de função

Duval (1988) estabelece três abordagens possíveis para as representações gráficas: a abordagem ponto a ponto, uma abordagem de extensão do traçado efetuado e uma abordagem de interpretação global de propriedades das figuras. Nesta última, o gráfico representa um objeto descrito por uma expressão algébrica, e há uma congruência entre esses dois registros, associando uma variável visual de representação a uma unidade significativa da expressão algébrica.

Quando se trata de partir da representação gráfica para encontrar, por exemplo, a representação algébrica por meio de uma equação ou para utilizar o conceito de inclinação ou de direção, é esta abordagem de interpretação global que se torna necessária. A prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global, que é em geral deixada de lado no ensino, uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. Isso ajuda a compreender por que a maioria dos alunos apresenta dificuldades na utilização correta das representações gráficas, mesmo no Ensino Superior.

Estas dificuldades foram comprovadas por pesquisa realizada por Duval (1988, 2011), por meio de teste diagnóstico, respondido por alunos do Ensino Médio na França. Essa pesquisa foi replicada com alunos brasileiros, do Ensino Médio e Superior, e descrita no trabalho de Biazutti, Nasser, Torraca, Barros e Oliveira (2018).

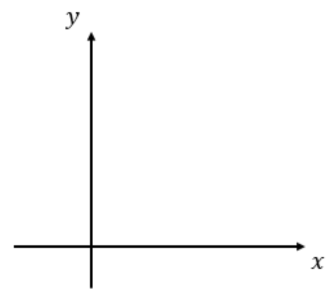
O teste diagnóstico, para os 252 alunos brasileiros do Ensino Médio (sendo 198 de duas escolas particulares e 54 de duas escolas públicas do estado do Rio de Janeiro, uma Estadual e uma Federal), envolveu 3 atividades, com cinco itens cada.

A **primeira atividade** testava a conversão da representação do registro gráfico de retas para o algébrico. Foram apresentados os gráficos de cinco retas distintas, com um ponto de cada reta assinalado, e, ao lado, as equações cartesianas de 7 retas e de 3 inequações lineares, para que os alunos escolhessem a expressão algébrica correspondente a cada gráfico de reta.

A **segunda atividade** pedia a conversão da representação de um registro verbal para o gráfico, envolvendo desigualdades, correspondendo a regiões no plano cartesiano limitadas por retas, conforme apresentado na Figura 1. 3. Pode-se observar que os itens d e e são similares, entretanto no item e já é apresentada a reta $y = x$, que limita a região procurada.

Represente no plano cartesiano, o conjunto de pontos $M(x, y)$, de abcissa x e ordenada y,

a) que têm abscissa positiva
b) que têm ordenada negativa
c) cuja abscissa e ordenada têm o mesmo sinal
d) cuja ordenada é maior do que a abscissa



e) cuja ordenada é menor do que a abscissa

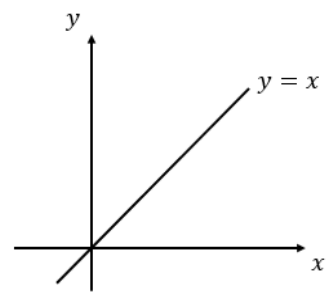


Figura 1. 3 - Atividade 2 aplicada para alunos do Ensino Médio
Fonte: Duval (1988, 2011)

A **terceira atividade**, adaptada de Duval (1988, 2011) mostrada na Figura 1. 4, foi aplicada após o término da atividade 2, pois envolvia a conversão da representação do registro gráfico para o algébrico de regiões do plano comuns à atividade 3, isto é, as regiões pintadas A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, da Figura 1. 4, são as soluções dos itens a, b, c, d, e da atividade 2, apresentada na Figura 1. 3.

O desempenho dos alunos do Ensino Médio nas conversões da representação do registro verbal para o gráfico, e deste para o algébrico, foi muito bom nos dois primeiros itens das atividades 2 e 3, que envolviam, respectivamente, o conjunto de pontos que têm abscissa positiva (item a) e o conjunto de pontos que têm ordenada negativa (item b), na atividade 2 e A_1 correspondendo a E_5 e A_2 correspondendo a E_4, na atividade 3.

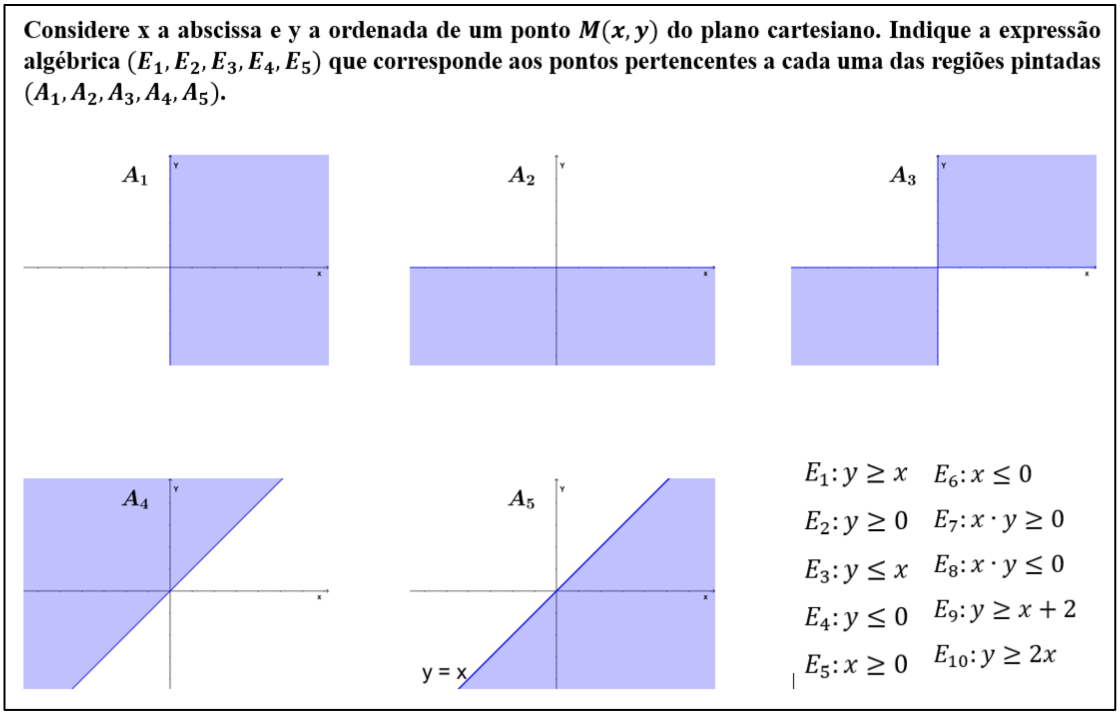
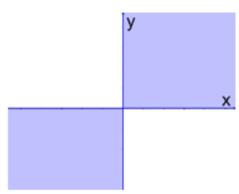
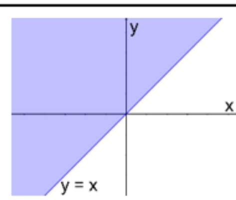
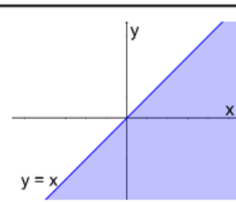


Figura 1. 4 -Atividade 3 aplicada para alunos do Ensino Médio
Fonte: Adaptada de Duval (1988, 2011)

O Quadro 1. 1 a seguir mostra as conversões pedidas nos três últimos itens das atividades 2 e 3, com os percentuais de acertos.

Quadro 1. 1 - Três últimos itens das atividades 2 e 3, com os resultados gerais

Representação verbal	Acertos	Representação gráfica	Acertos	Representação analítica ou algébrica
Conjunto de pontos $M(x,y)$de abscissa x e ordenada y, cuja abscissa e ordenada têm o mesmo sinal	77%		59%	$x \cdot y \geq 0$
Conjunto de pontos $M(x,y)$, de abscissa x e ordenada y, cuja ordenada é maior ou igual a abscissa	13%		50%	$y \geq x$
Conjunto de pontos $M(x,y)$, de abscissa x e ordenada y, cuja ordenada é menor ou igual a abscissa	25%		53%	$y \leq x$

Fonte: Biazutti, Nasser, Torraca, Barros e Oliveira (2018)

A tentativa de associar o conjunto de pontos cujas abscissa e ordenada têm o mesmo sinal (item c) teve um índice de acertos menor que os anteriores: 77% dos alunos associaram esse conjunto aos quadrantes ímpares do plano cartesiano. No entanto, apenas 59% dos alunos conseguiram associar esse gráfico à expressão $x.y \geq 0$. A dificuldade neste item, de acordo com Duval (1988), se deve ao fato de que

> para reconhecer a equivalência da apresentação algébrica com as duas outras representações, é preciso recodificar a base de código da expressão: é necessário passar para a equivalência "eixos de mesmo sinal ⇔ o produto das coordenadas é positivo". Ao passar da primeira para a segunda tarefa, a taxa de acerto cai em mais da metade. (Duval, 1988, p. 249)

Os dois últimos itens, tanto da segunda, como da terceira atividade, pressupõem a identificação da reta $y = x$ para hachurar o conjunto dos pontos cuja ordenada é maior ou igual ou menor ou igual à abscissa. A diferença é que, no último item, esta reta já aparecia no gráfico apresentado. O índice de acertos da conversão da representação verbal para a gráfica foi baixo, de apenas 13%, principalmente nas escolas particulares.

Vale observar que o índice de acertos da amostra quase que dobrou quando a reta $y = x$ era apresentada no gráfico. A diferença não foi muito significativa na conversão do registro gráfico para o algébrico nesses dois casos, com a presença da reta $y = x$.

A investigação no Ensino Superior, apresentada em Biazutti, Nasser, Torraca, Barros e Oliveira (2018) contou com 190 alunos e consistiu na análise de 3 questões de um teste diagnóstico, que investigavam a conversão da representação do registro algébrico para o gráfico (**questão 1**, envolvendo reta ou região do plano cartesiano limitada por reta), a análise dos elementos de uma representação gráfica (**questão 2**, apresentou um gráfico de função não identificada) e a conversão da representação do registro verbal para o algébrico (**questão 3**, envolvendo área de figuras geométricas e função quadrática).

Questão 1: *Represente geometricamente os pontos do plano que satisfazem às relações:*

$a)\ x + 2y = 4$ $\qquad\qquad$ $b)\ x + 2y \leq 4$

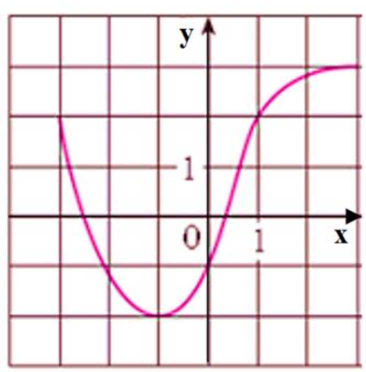


Figura 1. 5 - Gráfico da função f

Questão 2: *Considere o gráfico da função f, na Figura 1. 5 e responda*:

a) Qual o valor de $f(-1)$?

b) Qual o valor de $f(3)$?

c) Para que valores de x *temos* $f(x) = 2$?

d) Estime os valores de x tais que $f(x) = 0$?
e) Obtenha o domínio e a imagem da função f.

Questão 3: *Uma corda de tamanho L é cortada em dois pedaços. Com o primeiro pedaço faz-se um quadrado e com o segundo um círculo. Seja x o tamanho do primeiro pedaço. Construa a função que representa a área total (quadrado + círculo) e expresse o domínio desta função.*

A primeira questão foi escolhida para fazer uma comparação com os resultados dos alunos do Ensino Médio. Apenas 47 alunos conseguiram fazer a conversão da representação do registro algébrico, por meio de uma equação, para o gráfico da reta, o que corresponde a cerca de um quarto da amostra. No entanto, o desempenho foi bem mais baixo no item b, que pedia a representação dos pontos do plano que satisfaziam à desigualdade $x + 2y \leq 4$, isto é, a região do plano abaixo dessa reta, com apenas 6,3% de respostas corretas. As respostas incorretas consistiram principalmente da ausência de tentativas de resolução. Poucos alunos cometeram erros no traçado do gráfico da reta e a grande maioria estranhou o pedido de conversão da representação do registro algébrico para o gráfico de uma desigualdade, não sabendo como agir para identificar a região correspondente do plano.

O gráfico apresentado na segunda questão (Figura 1. 5) causou estranheza a muitos alunos, que tentaram identificá-lo como correspondente a uma função quadrática, ou do 3º grau. Parece que estes não tinham conhecimento de como identificar pontos do domínio ou da imagem de uma função a partir do seu gráfico, sem conhecer, necessariamente, a expressão algébrica que a define. Esse comportamento pode ser confirmado pelos baixos índices de acertos dos itens desta questão. Apenas no item b houve maioria de respostas corretas, com 61,5% de alunos identificando que $f(3) = 3$. O item a, por sua vez, alcançou 46,3% de acertos, que consistiam no reconhecimento de que $f(-1) = -2$. No item c apenas 68 alunos (35,8%) perceberam que havia dois valores de x que correspondiam a $f(x) = 2$, enquanto outros 29 alunos (15,2%) identificaram apenas um desses valores. Apenas 46 alunos (24,2%) conseguiram dar valores aproximados para as duas raízes da função no item d, enquanto outros 19 (10%) só encontraram um desses valores. Finalmente, apenas 18,4% dos alunos identificaram corretamente o domínio e a imagem da função.

A terceira questão tinha o objetivo de avaliar a habilidade de modelar um problema, envolvendo uma função, convertendo a sua representação no registro verbal para o registro algébrico correspondente. A grande maioria dos alunos deixou este item em branco. Dentre aqueles que tentaram escrever um registro algébrico, a maioria se limitou a reproduzir as fórmulas das áreas do quadrado e do círculo, sem conseguir adaptá-las ao problema em questão. Apenas 18 alunos fizeram corretamente a conversão para o registro algébrico, o que corresponde a 9,5% da amostra. O resultado foi ainda pior, no que se refere à segunda parte da pergunta: ou não souberam, ou nem perceberam que deveriam também informar o domínio da função que representava a área total das regiões obtidas no problema. Somente 3 dos alunos que acertaram a função informaram corretamente o seu domínio.

Tendo em vista a ênfase dada aos registros de representação na BNCC, Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (Brasil, 2018), este trabalho aponta para a necessidade de abordar, de forma mais profunda e eficaz, a conversão de representação dos diversos registros nas aulas da Educação Básica, já que apenas 10 alunos (4%) da amostra acertaram os 15 itens propostos nesta investigação.

As dificuldades persistem na transição para o Ensino Superior, uma vez que apenas 6,3% dos calouros foram capazes de identificar o registro gráfico que é representado algebricamente por uma inequação. Portanto, uma abordagem que ajude os alunos a contornarem as lacunas de aprendizagem, no início de um curso superior, é essencial. Para que tal abordagem obtenha sucesso, fica claro que ela deve explorar, de forma mais profunda, as conversões entre as representações nos diversos registros. A utilização do GeoGebra também pode auxiliar os alunos a trabalharem estes tópicos, o que pode ser observado mais adiante neste livro.

Como veremos na próxima seção, o conceito de função e suas formas de representação evoluiu bastante ao longo da história da Matemática.

1.2 Evolução Histórica do Conceito e das Formas de Representação

As diversas realidades encontradas nas escolas públicas de Educação Básica contribuem, em muitos casos, para que os alunos apresentem dificuldades na sua aprendizagem pré-universidade. De fato, essa constatação se confirma em testes diagnósticos aplicados a alunos ingressantes na primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), nos quais foram observadas dificuldades relacionadas ao conteúdo de funções e suas representações. Tais dificuldades envolvem principalmente leitura e interpretação de enunciados de problemas e posteriormente modelagem desses problemas; conversão da representação verbal para a algébrica em termos de funções polinomiais de grau 1 (ou do tipo afim), grau 2, etc e de várias sentenças; dificuldades com o trato algébrico (Costa; Bittencourt; Fernandes, 2016).

Como discutido na seção anterior, é de fundamental importância que o ensino de Matemática leve em conta vários registros de representação de um mesmo conceito e que isso seja parte do trabalho do estudante na sua aprendizagem. Por outro lado, ao compreendermos o processo de construção de um conceito essencial na Matemática como o de função – central para a compreensão da Matemática como um todo – torna-se evidente a necessidade de articular os saberes da Matemática da Escola Básica com os aportes da História da Matemática. É importante destacar que o próprio desenvolvimento do conceito de função ocorreu por meio da mobilização de diferentes registros de representação semiótica.

Dessa forma, esta seção apresenta uma análise histórico-epistemológica da construção do conceito de função, com base na teoria dos registros de representação de Duval (2012), com objetivo de subsidiar propostas pedagógicas que contribuam para superar lacunas identificadas no ensino-aprendizagem desse conceito.

A pesquisa aqui apresentada foi construída a partir de um levantamento bibliográfico em obras de diversos autores, como Roque (2017), Eves (2004), Ifrah (1997), Boyer (1996), Rüthing (1984), Youschkevitch (1976) e Smith (1953).

Matemática e História

De acordo com a BNCC, a competência específica 1 de Matemática para o Ensino Fundamental é:

> reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (Brasil, 2017, p. 269)

Em nossa experiência docente, temos observado maior interesse dos estudantes quando relacionamos conteúdos trabalhados em aula a eventos históricos. Em 2020, por exemplo, durante o período de ensino remoto, um dos autores apresentou um filme sobre a história do Cálculo abordando cientistas como René Descartes (1596-1650), Isaac Newton (1643-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1673-1694) e Johann Bernoulli (1667-1748). Após a exibição foi promovido um fórum de discussão entre os alunos, e esses demonstraram surpresa ao perceber que os conteúdos da disciplina CDI estavam profundamente conectados à trajetória histórica da Ciência, indo além de uma mera exigência curricular do curso deles de Administração.

Essa preocupação de associar História e Matemática vem sendo desenvolvida com sucesso pelo grupo francês IREM (*Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*). Esses pesquisadores acreditam que "os professores das disciplinas de exatas estão mais conscientes da dimensão cultural da matéria que ensinam face a uma apresentação da ciência como 'produto terminado'", como se apresenta hoje, seja na Escola Básica ou no Ensino Superior (Verley, Brin, Grégoire, Hallez, Jozeau, Lacombe, Michel-Pajus, Serfati, 1991, tradução nossa). E acrescentam que "o confronto com os textos dos matemáticos muda a representação que todos, professor ou aluno, têm da Matemática. Estes ganham vida, não são mais um objeto congelado. Eles são objeto de pesquisa, controvérsia, erros e tentativas ao acaso"[1] (Verley, Brin, Grégoire, Hallez, Jozeau, Lacombe, Michel-Pajus, Serfati, 1991, p. 43 - tradução nossa).

Integrar a história da Matemática ao ensino de seus conceitos pode transformar a percepção dos estudantes, reduzindo o desinteresse frequentemente observado nas aulas. No ensino tradicional, por exemplo, o conceito de função costuma ser abordado de forma restrita, centrado apenas na resolução de problemas utilizando os registros algébrico e numérico, para resolução de problemas com posterior interpretação gráfica. Essa abordagem, no entanto, ignora a riqueza do processo histórico que deu origem a esse conceito, o qual pode ser apresentado como resultado de um desenvolvimento coletivo,

[1] La confrontation avec les textes des mathématiciens change la représentation que chacun, enseignant ou élève, a des mathématiques. Celles-si prennent vie, eles ne sont plus um objet figé. Elles sont objets de recherches, de controverses, d´erreurs et de tâtonnements.

construído ao longo dos séculos. É importante evidenciar aos estudantes que, como afirma Caraça (1951), a necessidade é que cria o instrumento.

> É natural, portanto, esperar que, de coisa tão importante para o entendimento e explicação da realidade como é a *lei quantitativa*, surja também o conceito matemático próprio para o seu estudo; esperar aqui, ainda, que a necessidade crie o instrumento. Assim acontece de facto. (Caraça, 1951, p. 125)

O estudo do surgimento do conceito de função, conforme revelado pela História da Matemática, mostra que esse desenvolvimento está intimamente relacionado à consolidação do pensamento abstrato, oferecendo ao aprendiz a possibilidade de reconstruir esse caminho em sua trajetória de aprendizagem.

A próxima subseção apresenta um breve percurso histórico do conceito de função. Optamos por uma abordagem concisa, deixando de lado aspectos importantes para um estudo mais aprofundado da História da Matemática, a fim de concentrar nossa análise na importância de o ensino-aprendizagem do conceito de função ser realizado em etapas. Como ressalta novamente Caraça (1951),

> o leitor [...] não esperará, decerto, que esse instrumento [conceito de função] tenha saído dum jacto, pronto e acabado; que aos cientistas se tenha apresentado a questão assim: - temos aqui uma multidão de leis quantitativas, vamos criar um instrumento próprio de estudo. Muito longe disso! Deu-se uma gestão lenta em que necessidade e instrumento inter-actuaram, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente. (Caraça, 1951, p. 125-126)

A análise histórico-epistemológica permite que, embora a ideia de função tenha estado presente nas práticas matemáticas desde a Antiguidade, sua formalização foi motivada pela necessidade de organizar e sistematizar conhecimentos diversos. Estudar essas necessidades históricas que levaram à definição do conceito também auxilia na compreensão das dificuldades enfrentadas atualmente por estudantes ao se depararem com esse objeto matemático. Como orienta a BNCC (2018, p. 299), “para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática”.

A partir do resgate histórico do conceito de função, em subseção posterior propomos atividades didáticas que favoreçam uma compreensão intuitiva e gradativa do conceito, ainda no Ensino Fundamental. Estas atividades incluem a resolução de problemas contextualizados, como o “problema do táxi”, que permitem ao estudante perceber a função como um objeto matemático autônomo, passível de generalizações e abstrações.

Uma Revisão Epistemológica

Segundo registrado pela humanidade, a etapa inicial da construção desse conceito ocorreu na Idade Antiga, que foi o período da história que se desdobrou desde a invenção da escrita (4000 a.C. a 3500 a.C.) até a queda do Império Romano do Ocidente (476 d.C.) e início da Idade Média (século V). Youschkevitch (1976, p. 39) aponta que, nessa etapa primeira, havia apenas o estudo de casos particulares de dependência entre duas quantidades. Não tinham ainda despertado para a relação entre variáveis.

De acordo com que se sabe da História da Matemática, os povos, como babilônicos e egípcios, já pressupunham de maneira intuitiva a ideia de função pois se utilizavam de tabelas para anotar operações. Enquanto os Mesopotâmicos empregavam tabelas de produtos, de inversos e de raízes, os egípcios usavam sequências de duplicações, ou divisões por 2, e inversões. Em ambos os povos as tabelas estavam presentes, não apenas para facilitar e memorizar os cálculos, mas sobretudo por causa da dificuldade dos cálculos (Roque, 2017, p. 89). A Figura 1. 6 mostra um tablete pertencente à coleção Frau, Professor Hilprecht de Antiguidades Babilônicas, e se encontra na Universidade Friedrich Schiller de Jena na Alemanha. Nela podemos ver uma tabela em que foram cunhados os múltiplos ou inversos de números naturais.

Vemos despontar novos gérmens do conceito de função nos Pitagóricos, Grécia, ainda na Idade Antiga. Novamente se utilizam de tabelas quando mostram a relação de interdependência qualitativa de quantidades físicas variadas, por exemplo, os comprimentos e as notas emitidas por uma corda fixa nas extremidades (Youschkevitch, 1976, p. 39).

Figura 1. 6 - Tablete babilônico HS 201
Fonte: Gonçalves (2013).

Função como expressão algébrica não era concebida pelos matemáticos em tempos idos. Mas, se ela for pensada como uma relação que associa cada elemento de um conjunto de números a elementos de outro conjunto, então abundam funções por todo tratado astronômico Almagesto, de Ptolomeu de Alexandria (c. 100 - c. 170). Por exemplo, nesse tratado, encontramos as tabelas de “cordas”, que são equivalentes às nossas tabelas de seno e cosseno (Silva, 2013, p. 27).

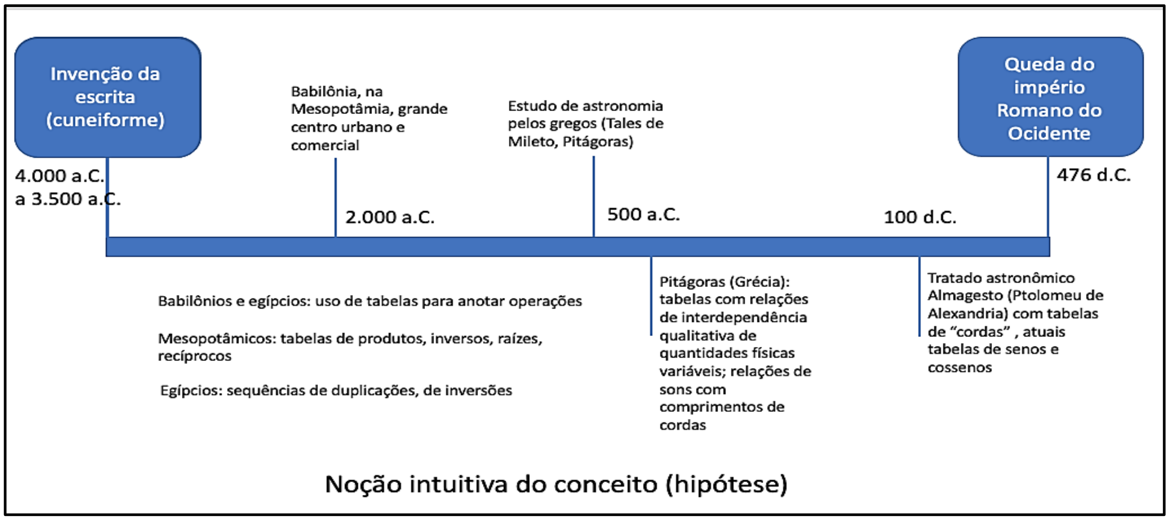


Figura 1. 7 - Linha do tempo: Antiguidade (etapa inicial da construção do conceito de função)
Fonte: Barros; Silva e Silva (2021), segundo Youschkevitch (1976).

Na figura acima pontuamos algumas conquistas da humanidade, na Idade Antiga, e fatos inerentes ao desenvolvimento do conceito de função, sem se aprofundar nessa relação, por não caber aqui uma análise aprofundada.

Passemos agora para a Idade Média, que é o nome do período da história localizado entre os anos 476 e 1453. Ele se inicia com a queda do Império Romano do Ocidente e termina durante a transição para a Idade Moderna. Youschkevitch (1976, p. 39) considera que, nessa época, a Matemática entrou no segundo estágio do desenvolvimento do conceito de função. Segundo ele, foi

> na ciência europeia do século 14 que as noções gerais de quantidades variáveis foram definitivamente expressas tanto em formas geométricas quanto mecânicas, porém nas quais, como também na antiguidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era definido por uma descrição verbal, ou por um gráfico, ao invés de fazer uso de uma fórmula. (Youschkevitch, 1976, p. 39)

Realmente, no início da Idade Média, vemos que a ciência nos países de cultura árabe floresce. Contribuíram os árabes com a introdução de cada uma das principais funções trigonométricas para as quais os métodos de tabulá-las foram aperfeiçoados, também com o estudo das raízes positivas de polinômios cúbicos. Igualmente, eles foram responsáveis pelos avanços em ótica e em astronomia (Youschkevitch, 1976, p. 45). Entretanto, não foram observados novos desenvolvimentos em relação ao conceito de função, ainda que o número de funções em uso tenha aumentado e seus métodos de estudo aprimorados.

Embora, na Idade Média, os matemáticos não tenham definido função, ainda que trabalhando o tempo todo com elas, vários contribuíram para uma compreensão do movimento, procurando por suas leis. Al-Biruni (973- c. 1052, séc. XI) foi um deles. Notável matemático da idade de ouro islâmica, em um dos seus tratados encontramos uma análise do movimento acelerado (Ragab; Metzger, 2015, p. 1). Contudo, "sua análise e suas ideias não exerceram influência nos seus sucessores" (Youschkevitch, 1976, p. 45). Somente no século XIII uma noção de função mais geral aparece em trabalhos de Robert Grosseteste (1175-1253) e Roger Bacon (1220-1292), que pensavam a Matemática como principal instrumento para o estudo da natureza (Youschkevitch, 1976, p. 45).

Um pouco depois dessa época, Nicolau de Oresme (1323–1382), matemático francês, apresenta sua teoria de amplitude das formas (‘*latitutes of formes*’, Youschkevitch, 1976, p. 46). Esta consistia na representação de todas as quantidades e relações entre elas mediante formas geométricas; portanto, a relação entre variáveis, em uma função, ainda não tinha surgido. Para entendermos como, na época, eles relacionavam domínio com imagem, sem considerar a forma atual de representação desses conjuntos, a literatura nos aponta Oresme. Ele representou geometricamente a velocidade variando com o tempo, ao estudar o movimento com aceleração constante (Rezende; Botelho, 2007, p. 2).

Um resumo é apresentado na Figura 1. 8 a respeito dos avanços no entendimento do conceito de função. Vale ressaltar que, nessa época, a Matemática era composta por: aritmética, música, geometria e astronomia.

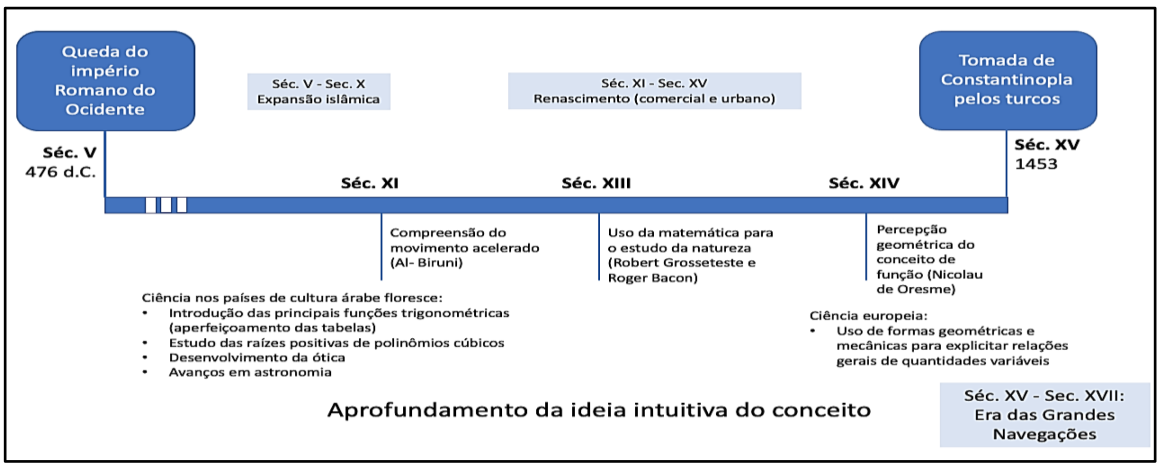


Figura 1. 8 - Linha do tempo: Período Medieval (segundo estágio do desenvolvimento do conceito)
Fonte: Barros; Silva e Silva (2021), segundo Youschkevitch (1976).

Até o momento, constatamos que sequer a dependência entre variáveis, atualmente ensinada quando o professor da Escola Básica apresenta uma função, tinha sido construída. Ingressemos, então, na Idade Moderna, período da história ocidental compreendido entre os anos de 1453, com a tomada de Constantinopla pelo Império Otomano, e 1789, início da Revolução Francesa. Nessa época, observamos a importância do surgimento de uma nova Álgebra que termina por conduzir à relação entre variáveis.

De fato, segundo Youschkevitch (1976), foi o progresso dos gregos em aumentar o número de dependências funcionais usadas e em descobrir novos métodos para estudá-las que alavancou o surgimento de uma nova Álgebra, a Geometria Analítica e o Cálculo Infinitesimal (séculos XVI e XVII). Ao estudarmos a História da Matemática, constatamos que essas três áreas são exatamente os degraus que a humanidade necessitava para chegar ao conceito de função, à sua formalização. A Álgebra nos trouxe a notação das variáveis, a Geometria Analítica veio mostrar claramente a ideia de correspondência entre dois conjuntos, o que faltava para a compreensão dos dois primeiros conceitos essenciais, variável e dependência.

Podemos destacar dois matemáticos responsáveis por esse progresso na compreensão do conceito de função: François Viète (1540-1603) e John Napier (1550-1617). Viète introduziu inúmeros sinais/signos, uma notação particular para incógnitas (vogais) e parâmetros (consoantes), e Napier sua tabela de logaritmos. Contudo, Napier não usou sua notação para chegar a um conceito de função, e seu simbolismo foi aperfeiçoado por outros que chegaram muito próximo, ainda na Idade Moderna, do conceito de função: Descartes, Newton e Leibniz.

Fermat (1607-1665) e Descartes, aplicando a nova Álgebra à Geometria apresentaram o método analítico de introduzir funções que revolucionou a Matemática e assegurou um lugar central para a posterior noção/conceito de função em todas as ciências exatas. Leibniz (1646-1716) "usa relações nas quais a ordenada de uma curva corresponde à sua abscissa. Não coloca ainda a palavra função no sentido mais amplo e o nomeou com a palavra relação" (Youschkevitch, 1976, p. 59). A palavra função ('funktion') surge na época com o significado de tarefa, posição ou modo de operação.

Seguindo a construção do conceito, ainda na Idade Moderna, despontam os matemáticos Johann Bernoulli (1667-1748) e Leonhard Euler (1707-1783), considerando uma função como uma expressão analítica arbitrária. A análise mediante séries infinitas levou Isaac Newton (1643-1727) a definir função por meio delas. O método de fluxões foi aplicado a variáveis (fluentes) para o cálculo das taxas de variação (fluxos). Em 1797, Joseph-Louis Lagrange (1736- 1813) descreve uma função usando um registro verbal. Na passagem do séc. XVIII para o séc. XIX, temos Augustin-Louis Cauchy (1789- 1857) dando um exemplo de uma função de duas sentenças.

De forma bastante resumida, apresentamos, na Figura 1. 9, um esquema do desenvolvimento do conceito de função, na Idade Moderna. Essa terceira etapa foi certamente facilitada pela introdução (por Viète) da notação matemática.

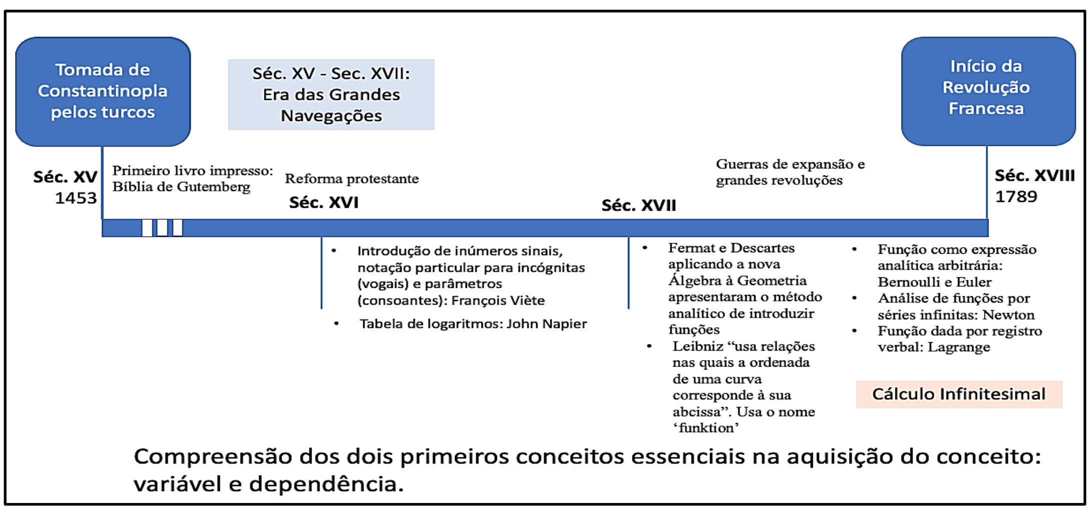


Figura 1. 9 - Linha do tempo: Idade Moderna (a busca pela definição de função)
Fonte: Barros; Silva e Silva (2021), segundo Youschkevitch (1976).

Na passagem para a Idade Contemporânea, encontramos Johann Peter Gustave Lejeune Dirichlet (1789- 1857), o primeiro a estabelecer o conceito de função como uma relação arbitrária entre as variáveis, independente de fórmulas algébricas. Exemplo dado por ele: $f(x) = c,$ se x é racional, e $f(x) = d,$ se x é irracional, c e d constantes. Nicolai Ivanovich Lobatchevsky (1792- 1856) apresentou uma definição de função semelhante à definição de Dirichlet. Contudo incluiu a possibilidade de a função ter pontos isolados de descontinuidade, mas não considerando necessário acrescentar explicação algébrica (Rüthing, 1984).

Em 1870, Hermann Hankel (1839- 1873) definiu função em registro verbal somente, como tantos outros matemáticos do seu tempo:

> uma função y de x, porque todo valor da variável x dentro de um certo intervalo corresponde a um certo valor de y; não importa se y é ou não dependente de x em todo intervalo de acordo com a mesma lei; se a dependência pode ou não ser expressa por meio de operações matemáticas. (Rüthing, 1984, p. 75, nossa tradução)

George Boole (1815-1864) definiu função como transformação (em que cada elemento x é transformado no elemento $f(x)$), enquanto Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831- 1916) utilizou a ideia de aplicação. E, finalmente, quando um grupo de matemáticos, em sua maioria franceses, criou a personagem Nicolas Bourbaki, um pseudônimo coletivo sob o qual escreveram uma série de livros que expunha a Matemática da época, chegou-se à definição tal como nos atuais livros da Educação Básica (Rüthing, 1984, p. 77).

O Conceito de Função no Ensino Fundamental

Embora o objetivo deste livro seja abordar o processo ensino-aprendizagem do tópico funções na transição entre o Ensino Médio e o Superior, é fundamental que os estudantes compreendam esse conceito desde as etapas iniciais da formação deles. No entanto, a experiência de vários professores indica que a forma como é introduzido o tema no Ensino Fundamental - geralmente começando diretamente pela definição formal – não favorece uma compreensão sólida do conceito. Como consequência, os estudantes tendem a cometer erros recorrentes ao longo de sua trajetória acadêmica, especialmente em avaliações.

Uma alternativa para contornar essas dificuldades é que o professor, ainda no Ensino Fundamental, proponha atividades, na forma de problemas, que explorem o conceito de função de maneira progressiva, acompanhando, de forma adequada ao ano escolar do estudante, a evolução histórica do conceito. Tinoco (2001) defende que a construção intuitiva do conceito de função deve ocorrer a partir, ou até mesmo antes, do sexto ano do Ensino Fundamental.

A primeira atividade pode inserir os estudantes em problemas envolvendo registro de representação tabular, que, intuitivamente, carregam o conceito de função. A atividade seguinte tem o mesmo objetivo, apresentar o conceito de função, mas sem se referir ao objeto matemático como função, entretanto trazendo um diferencial, um registro geométrico.

Numa terceira atividade, em que o estudante já tenha adquirido essa ideia intuitiva, podem ser apresentados problemas combinando dois registros de representação, o tabular e o geométrico e, para a compreensão completa do conceito, numa quarta atividade são desenvolvidos finalmente problemas com os estudantes que contemplem os registros tabular, geométrico e algébrico.

A definição formal de função deve ser dada num segundo momento, após as atividades descritas. Não estamos sugerindo, em hipótese alguma, que o professor omita a definição ou sequer fale a palavra função. O que recomendamos é o ensino por etapas, seguindo cronologicamente o desenvolvimento histórico do conceito para somente, então, passar para a definição.

Várias atividades visando a construção do conceito de função no Ensino Fundamental podem ser encontradas em Tinoco (2001). A seguir apresentamos quatro atividades desenvolvidas em Barros, Silva e Silva (2021), que acompanham a evolução histórica deste conceito.

A **primeira atividade,** sugerida para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, é a construção de uma tabela de números inteiros e seus múltiplos, portanto, tem como objetivo uma representação tabular de uma função, relacionada à noção intuitiva como compreendemos que havia na época, segundo Youschkevitch (1976), noção intuitiva do conceito. A duração desta atividade é 1 tempo de 50 min (sem oficina), e mais 4 tempos (para a oficina). O professor, ao introduzir o conceito de fração, solicita aos alunos que, a partir de uma medida (comprimento) que pode ser a diagonal do chão da sala de aula, ou um dos lados da janela da sala de aula, ou mesmo, a altura da porta da sala de aula, dividam esta medida em partes (metade, um terço, quarta parte etc.). Sugerimos que o professor considere aproximação dessas partes pois o foco do exercício não é calcular fração, mas, sim, associar a coluna da esquerda de uma tabela à coluna da direita em uma relação biunívoca.

A **segunda atividade** é mais elaborada pelo fato de o professor necessitar explicar a seus alunos o método de multiplicação dos egípcios. Ela também envolve representar uma função na sua forma tabular e é recomendada para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Sugerimos que a atividade seja dividida em duas partes, porém com total de 50 min de duração.

A primeira parte da atividade consiste em explicar o método egípcio de duplicação para realizar multiplicações. O professor pode usar, como exemplo, a multiplicação de 42 por 31 da forma apresentada na Figura 1. 10, atribuída ao matemático Stifel, que pode ser encontrada em livros do período Renascentista (Smith, 1953, p. 106). A partir da multiplicação "$42 \cdot 31$", num segundo momento, o professor deverá usar de diagramas com os conjuntos $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ e $\{42, 84, 168, 336, 672\}$ e mostrar a relação entre eles (desenhando setas). Ainda, sem usar a palavra função, pedir aos alunos para complementarem novos diagramas cuja relação entre os números pode ser x e $50x$, ou x e $73x$.

1 . 42 =	42
2 . 42 =	84
4 . 42 =	168
8 . 42 =	336
16 . 42 =	672
31 . 42	1302

Figura 1. 10 - Exemplo de produto usando o método de duplicação dos egípcios
Fonte: Barros; Silva e Silva (2021), segundo Smith (1953, p. 106).

Como uma **atividade extra** e variação desse exercício, usamos o exemplo de Stifel (Smith, 1953, p. 106), apresentado na Figura 1. 11, no qual alguns dados são omitidos num diagrama justamente para que o aluno possa completar. Isso será importante mais tarde, quando este mesmo aluno se deparar com a definição de função inversa.

? . 42 =	42
2 . 42 =	84
? . 42 =	168
8 . 42 =	336
? . 42 =	672
31 . 42	1302

Figura 1. 11 - Exercício de completar usando o método de duplicação dos egípcios
Fonte: Barros; Silva e Silva (2021), segundo exemplo de Stifel (Smith, 1953, p.106).

Essa atividade é muito simples, mas, acompanhando-a, existem conceitos relacionados a funções que serão aprofundados mais tarde. O direcionamento dos exercícios para pontos importantes do conceito de função nos parece uma boa metodologia para a aquisição efetiva do conceito ao longo do caminho de aprendizagem percorrido por esse aluno.

Nossa **terceira atividade** envolve uma representação gráfica de um problema de cinemática simples, ainda sem mencionar a palavra função, mas partindo da intuição que os estudantes possuem do movimento (velocidade, aceleração). Esta atividade é inspirada na percepção geométrica de Nicolau de Oresme em sua teoria de amplitude das formas (Youschkevitch, 1976, p. 46). Sendo essa atividade um problema relacionado ao movimento, embora rudimentar, acreditamos que ele possa levar aos estudantes um conceito inicial sobre função. Temos, nesse caso, uma compreensão intuitiva, conjuntamente com uma matematização inicial, quando, aos nossos alunos, apresentamos problemas de cinemática, trazendo a eles um fenômeno que se repete, tem certa regularidade e precisa ser generalizado (Tinoco, 2001).

Embora não tenhamos o gráfico de quaisquer das funções envolvidas na atividade, trabalhamos com uma forma geométrica, inspirada em Oresme, para explorar um problema cinemático simples. O emprego de geometria na atividade é um convite para que, posteriormente, o aluno possa passar de um registro verbal para um registro gráfico, sem dificuldade em identificar a mesma função. A inspiração em Oresme é proposital para que as atividades sigam o desenvolvimento histórico do conceito de função. Esta atividade é indicada para alunos a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, com a duração de 50 min.

A atividade 3 relaciona a distância percorrida por um táxi, numa estrada reta, com o tempo gasto (mais adiante, ampliamos o problema, nossa quarta e última atividade, sob o ponto de vista da Matemática financeira). Mais uma vez dividimos a atividade em dois momentos.

Parte 1: O professor desenha uma tabela, tempo *versus* quilometragem, considerando a cada 10 min, por exemplo, a distância percorrida por um táxi em uma estrada reta. A

Tabela 1. 1 apresenta um exemplo para essa atividade.

Tabela 1. 1 - Exemplo de dados para a Atividade 3- Parte 1

t (tempo)	s (distância percorrida)
10 min	15 km
10 min	13 km
10 min	10 km
10 min	8 km

Fonte: Barros; Silva e Silva (2021)

Parte 2: São calculadas as velocidades médias que, nesse caso, não serão constantes. E, seguindo a forma de representação de Oresme para tempo *versus* velocidade (Mendonça; Neto, 2016, Fig. 2, p. 51), é feita uma representação semelhante (tempo na horizontal e barras verticais com as velocidades médias, como mostra a Figura 1. 12). Por fim, o professor discute com os estudantes o que pode significar, em termos de aceleração, as mudanças de velocidade média ao longo do tempo.

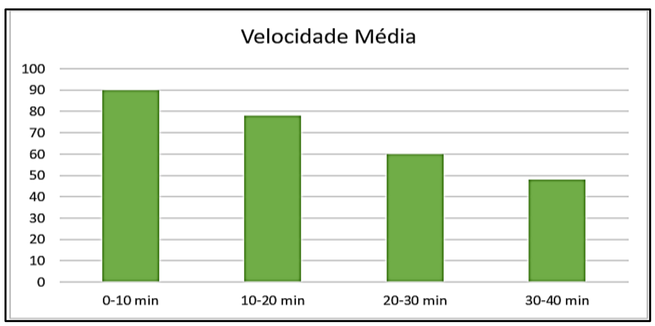


Figura 1. 12 - Exemplo de dados para a Atividade 3- Parte 2 considerando a Tabela 1
Fonte: Barros; Silva e Silva (2021)

Nessas escolhas de atividades, já passamos pelo registro tabular, passando agora para um registro 'inicial' gráfico, sendo de fácil compreensão do estudante, inclusive para a discussão final da atividade.

Em nossa **quarta atividade**, o problema do táxi, discutimos com os estudantes vários registros de representação de uma função (verbal, analítico e gráfico) para a completa compreensão do conceito. Ela é indicada para alunos a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, com a duração de 50 min.

Esta atividade pode ser aplicada, conjuntamente, com a atividade 3 para estudantes do 1º ano do Ensino Médio, considerada, então, uma terceira parte daquela. Utilizamos, desta vez, um exercício do banco de dados (*applet*) do GeoGebra (Figura 1. 13).

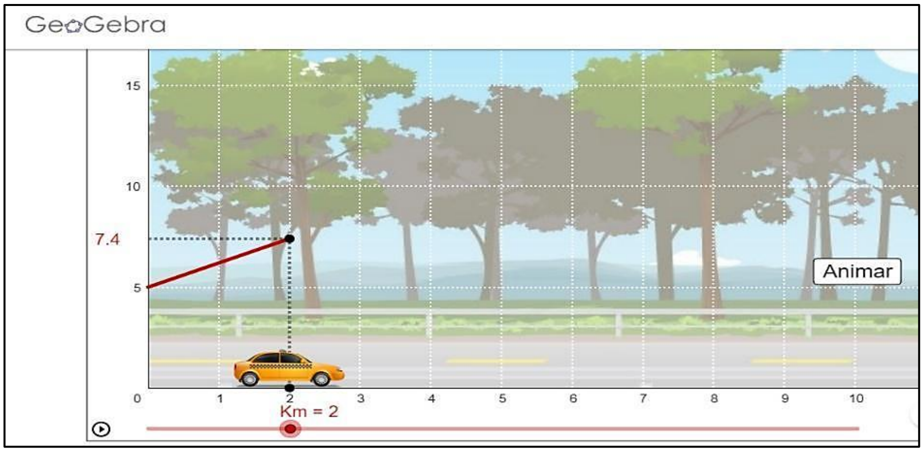


Figura 1. 13 - Exemplo da tarifa a ser paga durante uma corrida de táxi
Fonte: Schneider (2018).

O professor descreve para seus alunos como é cobrado o valor a ser pago pelo passageiro: quando você utiliza um táxi, o valor cobrado no final do trajeto é a soma do valor da "bandeirada" com o valor referente ao número de quilômetros rodados.

A "bandeirada" é um valor fixo, cobrado pelos taxistas, que independe de quantos quilômetros você vai rodar. Você pode observar que, ao entrar em um táxi, já está fixado esse valor no taxímetro. Você também pode observar que, para cada quilômetro rodado, há um valor fixo, isto é, a variação do preço é proporcional à distância percorrida, sem considerar a bandeirada e o tempo parado.

Suponha que o valor da bandeirada seja de R$ 5,00 e que o valor de cada quilômetro rodado seja R$ 1,20. Então, a função que relaciona o número de quilômetros rodados com o valor total a ser pago é uma função afim (Schneider, 2018). Portanto, o professor usa do registro gráfico com animação para a descrição do problema. A partir daí, ele obtém o registro algébrico.

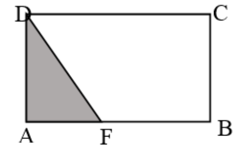
Todas as quatro atividades sugeridas podem ser aplicadas, num primeiro momento, para levar aos estudantes o conceito de função, sem necessariamente definir função. A definição deverá ser dada num segundo momento, por exemplo, no bimestre seguinte.

Nasser e Cardoso (2016) apontam que a aprendizagem de funções é um processo evolutivo, lento e gradual devido à sua complexidade, uma vez que existem vários tipos diferentes de representações para uma mesma função. Assim, o ensino-aprendizagem do conceito de função não se esgota nas quatro atividades, ao contrário, apenas inicia-se.

1.3 Resolução de Problemas: Etapas e Estratégias

Uma pesquisa realizada com 237 alunos de diversas turmas de Cálculo I, no início do segundo semestre de 2018, parte do trabalho de Nasser, Biazutti, Torraca e Barros (2019), incluiu a aplicação de um teste diagnóstico. Um dos problemas aplicado (Figura 1. 14) envolvia somente tópicos de Matemática da Escola Básica:

Questão 2: Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD, com vértices A, B, C, D, no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm, chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em um ponto F do contorno.



a) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado AB, Como mostra a figura ao lado, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

b) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado BC, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

c) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado CD, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

d) Determine a expressão algébrica da área do triângulo ADF, em função de x, se a formiga estiver em qualquer ponto do contorno.

e) Esboce o gráfico da função obtida no item d.

Figura 1. 14 - Segunda questão do teste diagnóstico- fonte: Nasser, Biazutti, Torraca e Barros (2019)
Fonte: Adaptado da prova da OBMEP (2014)

O resultado dos alunos foi: 8 % de acertos no item d, na obtenção da função procurada e 14 % de acertos no item e na obtenção do gráfico desta função, sendo que 54% dos alunos deixaram o gráfico em branco.

Uma possível razão para este baixo desempenho pode ser a complexidade do item. Nesse sentido, é possível qualificar dois tipos de itens: exercício e problema. Vários autores já se pronunciaram sobre as diferenças entre eles. Segundo Dante (2003, 2010) um **exercício** envolve praticar ou reforçar algoritmos já aprendidos, enquanto a resolução de um **problema** exige uma certa dose de iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

Possivelmente, o ensino e as avaliações da disciplina Cálculo I envolvem sobretudo **problemas,** enquanto na Educação Básica os estudantes estão mais acostumados a resolver **exercícios**.

De acordo com Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), o grande objetivo do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos.

> Trata-se de um objetivo ambicioso, mas necessário, que justifica o importante papel da Matemática em todos os sistemas educativos. Os alunos não desenvolvem a capacidade de raciocínio matemático por simples memorização de conceitos, representações e procedimentos rotineiros, que, pelo contrário, os leva a ter uma visão da Matemática como um conjunto de regras mais ou menos desconexas, e não como uma disciplina lógica e coerente. Para desenvolver esta capacidade é preciso trabalhar em tarefas que, por um lado, requerem raciocínio e, por outro lado, estimulam o raciocínio. Só deste modo se pode esperar uma compreensão efetiva dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte do aluno. (Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012, p. 356)

A utilização da resolução de problemas como estratégia de ensino é assunto de diversas pesquisas há vários anos. Um exemplo disso é o boletim do GEPEM de 1988, totalmente dedicado a artigos sobre isto. Em um dos artigos, Nasser ressalta a importância da resolução de problemas e comenta que é impossível descrever um método para resolver qualquer problema, o que se pode é desenvolver nos alunos a habilidade para a resolução de problemas.

Segundo Nasser (1988), há quatro grupos de fatores que podem influenciar o ensino e a aprendizagem em Resolução de Problemas. O grupo dos fatores relacionados ao resolvedor inclui todas as características individuais do estudante. Já os relacionados ao professor envolvem as suas atitudes frente aos problemas e a escolha deles. O terceiro grupo de fatores está relacionado à natureza dos problemas, se são interessantes, com nível de dificuldade adequado aos estudantes. O último grupo está relacionado aos processos utilizados para resolver problemas. As dificuldades maiores aparecem nos que requerem o uso de alguma estratégia ou heurística.

A seguir será apresentado um resumo das etapas e estratégias mais comuns, com base nas ideias de Polya (1978) e Nasser (1988). Em seguida serão apresentados alguns exemplos que exploram estas estratégias, que podem ser trabalhados pelos professores de disciplina de Pré-Cálculo e por professores de Matemática no Ensino Médio.

As etapas de resolução de um problema, adaptadas de Polya (1978), são em geral as seguintes.

A primeira consiste na **Leitura e delimitação do problema**, destacando os dados relevantes. Ao final desta etapa, devem estar identificados os dados do problema (o que é conhecido sobre ele) e o objetivo do problema (o que é desconhecido) a ser alcançado.

A segunda consiste na **Modelagem matemática do problema**, isto é, em transformar os dados utilizando conceitos de variável independente, dependente, função, intervalo, conjuntos.

A terceira etapa aponta para a **Escolha de estratégias para chegar à solução do problema**, que serão apresentadas mais adiante. Ao final destas duas últimas etapas, deve haver um plano (para chegar à solução do problema) que será posto em prática, em seguida.

A próxima etapa será a de execução do plano, isto é, a **Aplicação da(s) estratégia(s) para chegar à solução do problema**. Pode haver necessidade de utilizar várias estratégias, como elos numa cadeia lógica de raciocínio, dependentes umas das outras, ou várias etapas independentes cujas soluções conduzirão juntas ao resultado procurado. Caso se chegue a um impasse, durante a execução desta etapa, volta-se à etapa anterior, para revisão da escolha de estratégias.

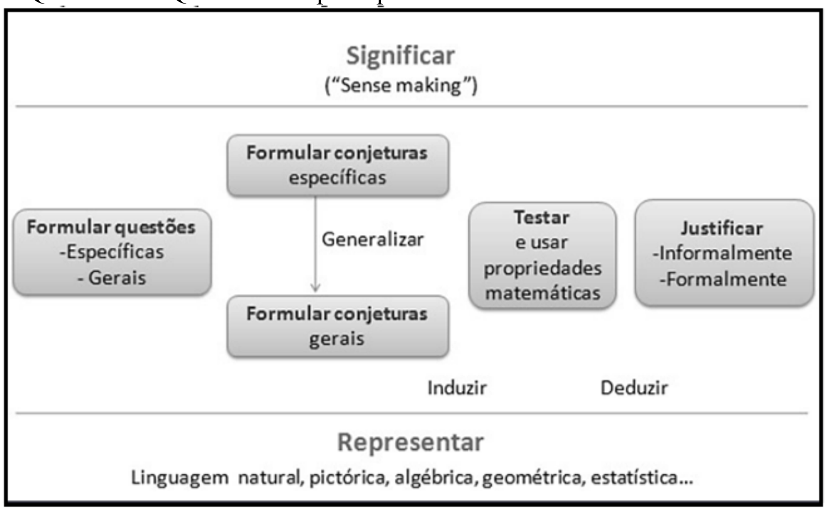
Na última etapa, que costuma ser esquecida por muitos alunos, deve ser feita a **Validação dos resultados obtidos**, isto é, a verificação crítica do trabalho realizado. Pode acontecer do resultado obtido não ser compatível exatamente com o resultado procurado. Nesse caso, além da observação do domínio da variável e da revisão nos cálculos à procura de erros em contas, modificações poderão ser necessárias. Deve-se então voltar à leitura e interpretação do texto do enunciado ou ao plano a ser executado.

Nasser (1988) fornece uma lista de estratégias para resolução de problemas: utilizar um esquema, diagrama, tabela ou gráfico; organizar uma sequência de passos; desdobrar um problema complexo em questões mais simples; trabalhar do fim para o princípio; simular/simplificar o problema; descobrir uma regra ou padrão; criar um problema equivalente; descobrir casos particulares e procurar um problema análogo mais simples.

Além destas, Nasser (1988) também citou as seguintes estratégias: tentativa e erro; fazer uma lista organizada ou uma figura; usar raciocínio lógico; observar simetrias.

Ponte, Mata-Pereira; Henriques (2021, p.359) afirmam que "os problemas e as tarefas de investigação constituem um contexto fundamental para o estudo do raciocínio matemático, atendendo aos processos usualmente usados na elaboração e teste de conjecturas e na sua justificativa". Tais autores defendem que o raciocínio indutivo tem lugar sobretudo na formulação de conjecturas gerais a partir de casos específicos, e o raciocínio dedutivo ocorre principalmente nos processos de justificação, conforme mostra o quadro 1.2 a seguir.

Quadro 1.2 - Quadro conceptual para a análise do raciocínio matemático



Fonte: Ponte; Mata-Pereira; Henriques (2021)

A seguir serão apresentados alguns exemplos do que pode ser utilizado em uma perspectiva de problema, em um sentido investigativo e exploratório. A ideia é oferecer ao leitor/professor caminhos para utilizar em diferentes problemas, explorando diferentes estratégias para chegar à solução.

Exemplo 1.1: *Para ir a uma festa uma pessoa tinha disponíveis 1 calça vermelha e 1 calça azul e três camisetas, uma amarela, uma verde e outra preta. De quantas maneiras distintas estas peças podem ser combinadas para produzir uma roupa para a festa?*

São 6 combinações possíveis para a roupa da festa. Para chegar a esta solução, pode ser utilizada a estratégia de criar um **esquema para listar e visualizar todos os casos possíveis, em uma sequência de passos**, como mostra a Figura 1. 15.

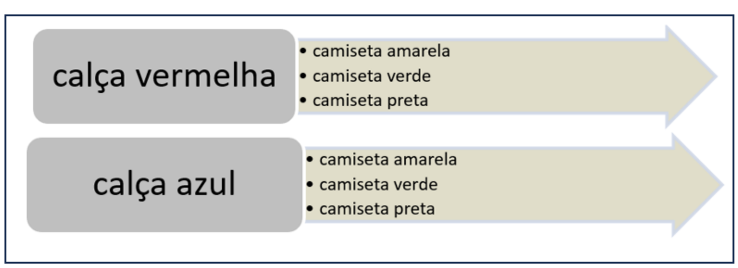


Figura 1. 15 - Esquema de passos

Este problema pode ser resolvido usando fórmulas de Análise Combinatória. No entanto, deve ser incentivado o uso de estratégias espontâneas dos alunos e evitar o uso de fórmulas prontas.

Exemplo 1.2: *Para ir a uma festa uma pessoa tinha disponíveis 1 calça vermelha e 1 calça azul, três camisetas, uma amarela, uma verde e outra preta e 3 sapatos, 1 preto, 1 marrom e 1 azul. De quantas maneiras distintas estas peças podem ser combinadas para produzir uma roupa para a festa?*

Pode-se começar inicialmente resolvendo o problema de combinar as calças e camisetas. Resolvido este, pode-se passar para o problema do acréscimo dos sapatos. Como visto no exemplo 1.1, há 6 combinações possíveis para o conjunto calça com camiseta. Agora é só montar o segundo esquema, com os casos possíveis para a segunda questão, isto é, o acréscimo do sapato. Como cada um dos 6 conjuntos poderá ser usado com 3 opções de sapatos, teremos $18 = 3 \times 6$ combinações possíveis.

A solução do problema foi obtida com **o desdobramento de um problema mais complexo em dois problemas mais simples.** Essa divisão é uma alternativa interessante para a resolução de problemas matemáticos.

Exemplo 1.3: *Uma criança levou para a escola um saco de biscoitos para dar aos amigos. Deu metade dos biscoitos que tinha no saco ao primeiro grupo de amigos que encontrou ao chegar. Depois encontrou mais amigos e deu metade dos que ainda tinha. E assim chegou à sala dele já só com 20 biscoitos, um para cada colega. Quantos biscoitos havia no saco, antes de ser aberto?*

Este problema deve ser resolvido trabalhando de "forma reversa". Vamos resolvê-lo em duas etapas:

Antes de chegar à sala, com 20 biscoitos, tinha entregado metade dos que tinha, logo tinha o dobro de 20, isto é, 40 biscoitos, antes de encontrar esses amigos. (1ª etapa)

Só que, ao chegar, tinha distribuído metade dos que tinha, então só poderia ter 80 biscoitos, para terem sobrado 40. Esta é a quantidade total de biscoitos no saco, antes de ser aberto: 80 biscoitos. (2ª etapa).

A estratégia acima, resumidamente, consistiu em aplicar operações inversas às realizadas na ordem original de ação, ou seja, **trabalhar do fim para o início**, juntamente com **raciocínio lógico**.

Exemplo 1.4: *Uma pessoa guarda suas meias todas desarrumadas numa gaveta em seu quarto. Ela sabe que tem 1 par de meias marrons, 1 par de meias pretas e 1 par de meias brancas, todas do mesmo modelo. Supondo que a pessoa precise escolher um par de meias da mesma cor, sem acender a luz do quarto, qual o menor número de meias que deve tirar da gaveta para que, quando sair do quarto para um local iluminado, tenha com certeza um par da mesma cor?*

É possível retirarmos duas meias e obtermos um par da mesma cor? Sim! É possível. Porém, ao retirarmos duas meias não teremos a garantia de que as duas serão da mesma cor. Ao retirarmos duas meias, podemos tirar:

- Duas meias brancas $\{b, b\}$
- Duas meias pretas $\{p, p\}$
- Duas meias marrons $\{m, m\}$
- Uma branca e outra preta $\{b, p\}$
- Uma branca e outra marrom $\{b, m\}$
- Ou, uma preta e outra marrom $\{p, m\}$

Observem que nos três últimos casos, o objetivo não é atingido. Desta forma, se retirarmos duas meias não teremos garantia de que formaremos um par da mesma cor. Suponha que retiremos três meias. Teríamos a garantia que formaríamos um par de meias da mesma cor? Ainda não!

Considere as três últimas situações descritas anteriormente, ou seja, aquelas em que o objetivo não foi alcançado com duas retiradas. Para cada uma delas, teríamos três possibilidades após a terceira retirada:

- Uma branca e outra preta {b, p} → **{b, p, b} ou {b, p, p} ou {b, p, m}**
- Uma branca e outra marrom {b, m} → **{b, m, b} ou {b, m, m} ou {b, m, p}**
- Ou, uma preta e outra marrom {p, m} → **{p, m, p} ou {p, m, m} ou {p, m, b}**

Notem que há um caso nas três situações em que o objetivo não é alcançado, pois teríamos três meias com cores diferentes.

Esse é um problema que, para ser resolvido, ou o estudante deve explorar todas as possibilidades, ou, simplesmente, imaginar o pior cenário possível. Neste caso, o pior cenário é retirar 3 meias de cores diferentes da gaveta. Como só existem três cores diferentes, com a retirada de mais uma meia, certamente haverá pelo menos duas da mesma cor. Logo, a solução é 4 meias.

Podemos observar que, mesmo que inicialmente o professor explore todos os casos possíveis, é necessário que o docente prepare seus alunos para desenvolver uma estratégia mais eficiente, que seria **simular uma situação simplificadora do problema**.

Para alertar para essa necessidade, o docente pode explorar um problema que envolva 100 pares de meias de cores diferentes. Nesse caso, qual seria o número mínimo de retirada?

O pior cenário possível seria retirar 100 meias de cores diferentes. Sendo assim, com a 101ª retirada teríamos a certeza de que formaríamos um par.

Exemplo 1.5: *Dobra-se uma folha de papel retangular ao meio, e repete-se o processo em seguida, várias vezes. Em quantas partes a folha de papel original fica dividida, se a folha for dobrada 50 vezes?*

A solução deste problema utiliza uma combinação de estratégias, começando por uma **sequência de passos**, obtidos resolvendo **problemas mais simples**, considerando menos dobras. Em seguida constrói-se uma **tabela** para registrar estes resultados, para facilitar a visualização. A partir deles tenta-se generalizar para obter uma **lei de formação**. Finalmente, conhecendo a lei de formação, obtém-se a solução procurada, como mostra a tabela 1.2.

Tabela 1. 2 - Simulação de dobras e partes

Dobras	0	1	2	3	4	5	n	50
Partes	1	2	4	8	16	32	2^n	2^{50}

Exemplo 1.6: *Márcio, Marcelo, Marcos e Maurício são quadrigêmeos, e a única maneira de diferenciá-los é pela cor de suas camisas. Nem Marcos nem Maurício gostam de vermelho. Marcelo sempre usa verde. Maurício pensou em escolher o amarelo, mas mudou de ideia. A cor favorita de um irmão de Márcio é azul. Que cor de camisa cada menino usa?*

Aqui uma estratégia razoável é usar **raciocínio lógico**. Cada menino vai usar camisa de uma cor diferente, dentre vermelho, verde, amarelo e azul. Já se sabe que Marcelo usa camisas verdes. Sobram então as camisas de cor vermelha, amarelo e azul. Marcos e Maurício não gostam de vermelho, logo só poderão estar com camisas nas cores amarela e azul, por exclusão. Como Maurício não escolheu amarela, então Maurício usa camisas azuis. Logo Marcos ficou com a camisa amarela. Sobrou então para Márcio usar camisa vermelha.

Exemplo 1.7: *Dispondo de 5 quadrados de 12 cm de lado, deseja-se construir uma única figura com 120 cm de perímetro, sem sobreposição, de modo que dois quadrados que sejam adjacentes se tocam ao longo de um lado completo. A solução é única? Por quê?*

Podem ser disponibilizados para os alunos quadrados recortados para que eles façam tentativas juntando os quadrados e calculando o perímetro das figuras formadas. Usando a **estratégia de simulação** de uma possível colocação dos quadrados enfileirados, como na Figura 1. 16 a seguir, teremos o seguinte:

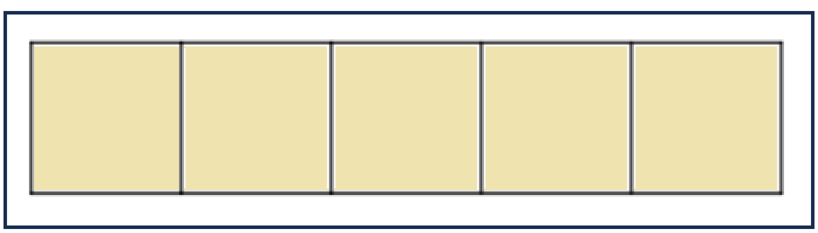


Figura 1. 16 - Cinco quadrados enfileirados

Será obtido o perímetro de 144 cm. Para chegar ao valor de 120 cm, o perímetro deverá reduzir em 24 cm, ou seja, correspondendo a dois lados de um quadrado ou a um lado de dois quadrados. Colocando 3 quadrados enfileirados, com os outros 2 por cima de dois deles adjacentes, conseguiremos o perímetro desejado, como mostra a Figura 1. 17 a seguir.

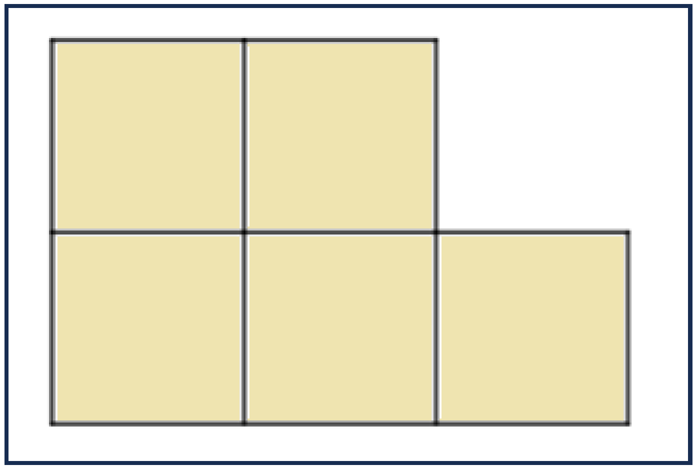


Figura 1. 17 - Figura formada por cinco quadrados com perímetro desejado

Pode-se observar, por **raciocínio lógico**, que a solução não é única, pois a figura refletida ou rotacionada conduz a outras soluções possíveis distintas.

Exemplo 1.8: *Paulo tinha 6 dias para preparar desenhos para uma exposição de artes da escola. Em cada dia, fez mais 4 desenhos que no dia anterior. Ele expôs 150 desenhos. Quantos desenhos ele fez em cada dia?*

Várias estratégias podem ser utilizadas para chegar à solução, como **tentativa e erro**, **esquemas, diagramas** e utilizando fórmulas de progressões aritméticas para **descobrir padrões**.

A estratégia mais utilizada pelos alunos é chamar de x o número de desenhos feitos no primeiro dia e formar uma equação que represente a situação do problema, que poderá ser da forma $x + (x + 4) + (x + 8) + (x + 12) + (x + 16) + (x + 20) = 150.$ Então será obtida a equação equivalente $6x + 60 = 150,$ chegando à solução $x = 15$ desenhos no primeiro dia. Logo, foram 19, 23, 27, 31, 35 desenhos nos dias seguintes.

Exemplo 1.9: *Como se pode dividir um quadrado em quatro partes congruentes, de seis maneiras diferentes?*

Aqui algumas estratégias podem ser a de **tentativa e erro** ou a de considerar **casos particulares mais simples,** como dividir o quadrado em 2 partes congruentes, que não precisam ser quadrados, depois considerar dividir estas duas partes em outras duas congruentes, depois cada uma destas em duas. A Figura 1. 18 mostra seis soluções encontradas.

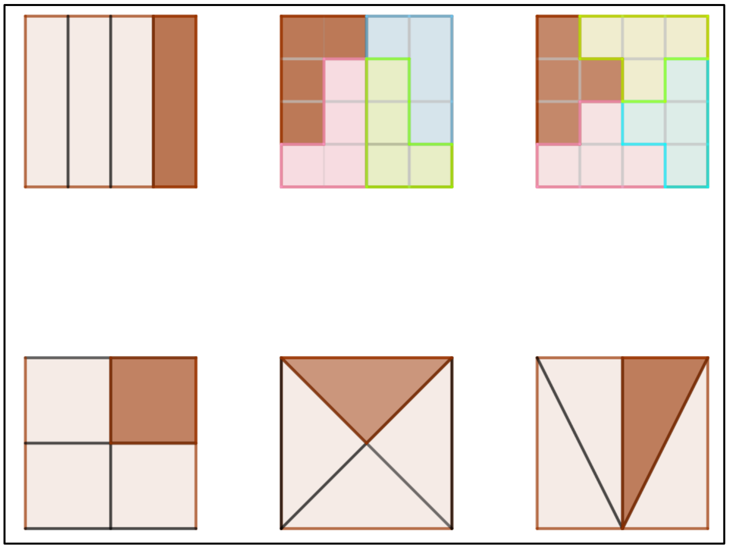


Figura 1. 18 - Divisão de um quadrado em quatro partes congruentes

Pode ser observado que outras soluções podem ser obtidas, sem que as partes congruentes sejam polígonos, podem ser regiões limitadas por curvas.

Exemplo 1.10: *Num campeonato de duplas de vôlei, em cada jogo a dupla perdedora é eliminada. Quantas partidas serão jogadas até se chegar à dupla campeã, num torneio com 15 duplas?*

Pode-se utilizar **um esquema,** considerando **caso análogo mais simples**, com menos duplas. Desta forma, rapidamente se chega à solução, serão 14 partidas, e se consegue generalizar, com n duplas haverá $(n-1)$ partidas. Outra possibilidade é estudar o que acontece quando for um número par de duplas. Neste caso também se chega à mesma expressão para a solução geral.

Exemplo 1.11: *Dois grilos saltitam ao longo de uma reta graduada muito comprida. No instante inicial um grilo está na marca de 10 cm e o outro grilo está na marca de 17 cm*, como mostra a *Figura 1. 19. Se cada grilo salta 2 cm para a esquerda ou para a direita, em algum momento eles podem estar no mesmo local?* (retirado de questões de simulados OBMEP-2018- N1)

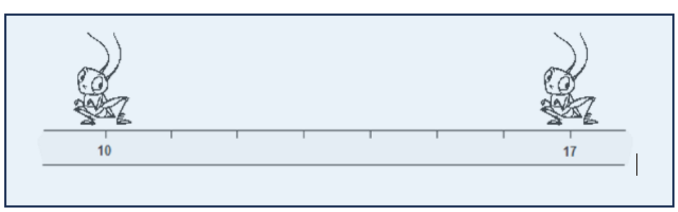


Figura 1. 19 - Posição inicial dos dois grilos
Fonte: OBMEP 2018

O grilo que está inicialmente na marca de 10 cm só pode ocupar pontos marcados com números da forma $10+2n$, em que n é um número inteiro positivo ou negativo. Isto significa que este grilo só ocupa posições marcadas com números pares. Já o grilo que está inicialmente na marca de 17 cm, ocupa posições marcadas com números da forma $17 + 2m$, em que m é um número inteiro positivo ou negativo. Ou seja, este grilo só ocupa posições marcadas com números ímpares, pois a soma de um número ímpar com um par é sempre um ímpar. Como um número par sempre é diferente de um número ímpar, estas duas observações implicam que os grilos nunca podem ocupar o mesmo ponto da reta graduada.

Neste problema o **raciocínio lógico** levou inicialmente ao **descobrimento de um padrão** para o deslocamento de cada grilo e, posteriormente, à conclusão final.

Exemplo 1.12: *Uma formiga está parada em um canto do chão de uma sala cúbica, no ponto A da Figura 1. 20 a seguir. Ela quer se mover para o canto oposto, no ponto B da mesma figura, usando o caminho mais curto. Ela só pode se mover ao longo das paredes, no piso e no teto da sala. Qual o comprimento do caminho mais curto que ela deve escolher? Como será este caminho mais curto?* (adaptada de Dorichenko (2016))

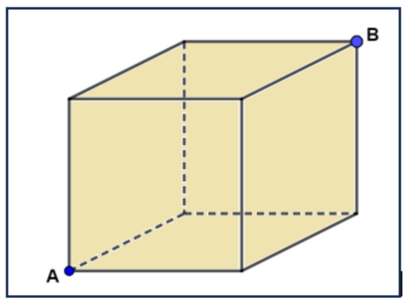


Figura 1. 20 - Posição inicial e final da formiga na sala cúbica

A sala tem um total de seis faces (4 paredes, piso e teto). Três são adjacentes ao canto A e três ao canto B. Para ir de A até B, a formiga tem que cruzar uma aresta (segmento de reta pertencente a duas faces distintas) de uma face adjacente a A para uma adjacente a B. Suponha que ela cruza a aresta XY no ponto M, como na Figura 1. 21 a seguir.

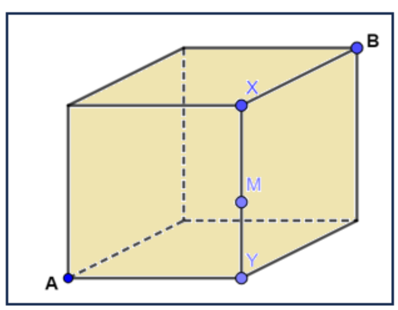


Figura 1. 21 - Ponto M por onde a formiga vai passar

De A até M, o caminho mais curto no trajeto permitido será ao longo do segmento de reta AM, depois disso o caminho mais curto, de M até B, será também um segmento de reta, MB. Resta descobrir onde deverá ser escolhido o ponto M, na aresta XY, para que o caminho total da formiga de A até B, formado pela soma dos comprimentos $AM + MB$, seja o menor possível.

Consideremos então a planificação das faces do cubo envolvidas no problema, ou seja, que contêm os segmentos AM e MB, como mostra a Figura 1. 22 a seguir.

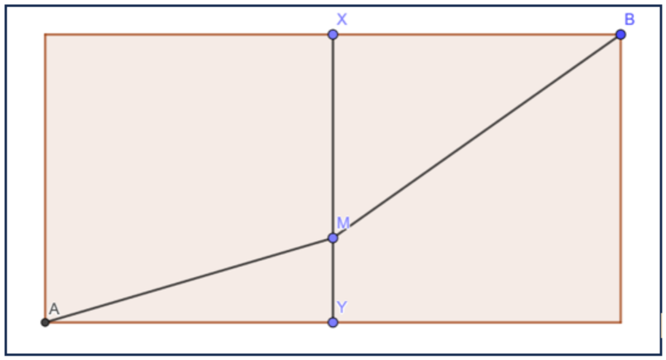


Figura 1. 22 - Planificação das faces do cubo onde a formiga vai andar

A solução do problema será quando AMB for um segmento de reta no retângulo formado pelas duas faces, ligando os pontos A e B, ou seja, a menor distância entre A e B é obtida pela diagonal do retângulo, como mostra a Figura 1. 23 a seguir.

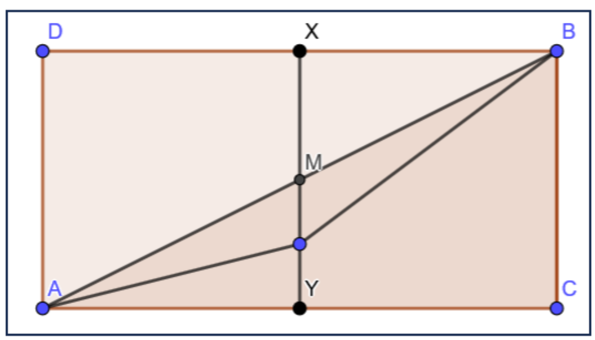


Figura 1. 23 - Diagonal do retângulo

Supondo o cubo de lado L, teremos que a diagonal será a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem L e $2L$. Usando o teorema de Pitágoras teremos $AB = d = L\sqrt{5}$. Só falta descobrir qual a posição de M, relativa à aresta XY.

Pode-se notar que os triângulos AMY e ABC são semelhantes, caso AAA. Neste caso, as medidas dos lados são proporcionais, isto é $\frac{AM}{AB} = \frac{AY}{AC} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$. Assim $AM = \frac{1}{2}AB$, ou seja, o ponto M deve ser o ponto médio da diagonal AB. Como as duas diagonais de um retângulo são congruentes, se intersectando no ponto médio entre elas, o triângulo AMC e seu oposto DMB também serão congruentes, logo as alturas XM e MY serão iguais. Assim M também é o ponto médio da aresta XY. A formiga deve sair do canto A, seguir reto até o ponto médio da aresta adjacente XY, e, em seguida, seguir direto ao canto B.

Neste problema o conhecimento de propriedades geométricas foi importante, mas as **figuras** e o **raciocínio lógico** foram essenciais. Pode-se observar que o problema inicial, de geometria espacial, foi reduzido a um outro problema, mais simples, de geometria plana, que se **desdobrou em problemas mais simples**, um resolvido utilizando o Teorema de Pitágoras e o outro utilizando semelhança de triângulos.

Exemplo 1.13: *A Figura 1. 24 a seguir mostra um sólido cuja seção transversal uniforme consiste em um retângulo $ABCD$ e de um quadrante DEC de um círculo, centrado no ponto D. O comprimento do lado AB é 5 cm, do lado AD é 2 cm e da aresta BG é 10 cm.*

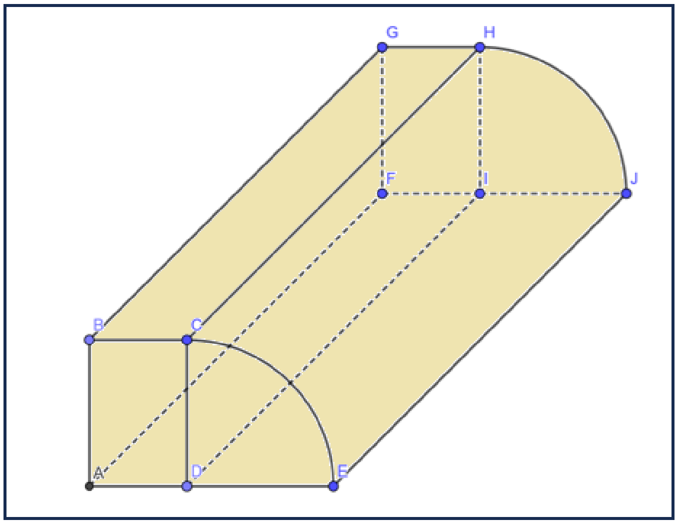


Figura 1. 24 - Sólido com seção transversal uniforme

a) Determine o volume deste sólido.
b) Determine a área de superfície total deste sólido.
c) Se juntarmos 5 unidades deste sólido e derretermos, para em seguida formar um outro sólido com a forma de um cone circular reto com 24 cm de altura, determine qual será o raio da base do cone.

As respostas devem ser obtidas aproximando os resultados para números inteiros. Este sólido tem base dada pela superfície representada na Figura 1.25 a seguir e cuja altura é igual a BG. Seu volume é igual ao produto da área da base multiplicada pela altura. A altura é igual ao comprimento de $BG = 10$ cm.

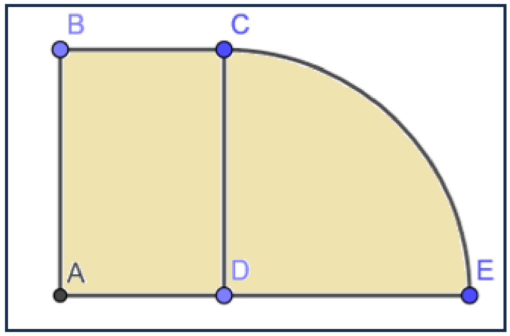


Figura 1.25 - Seção transversal do sólido

A base é formada pelo retângulo $ABCD$ e pelo quadrante DEC de um círculo. A área será então a soma das áreas das duas figuras. O retângulo tem comprimento $AD = 2$ cm e largura $AB = 5\ cm$, logo tem área $10\ cm^2$. O quadrante do círculo de centro D, tem raio com comprimento $CD = De = 5\ cm$, logo sua área será $\frac{\pi.CD^2}{4} = 6{,}25\pi$.

Então a área da base será $10 + 6{,}25\pi$. Por conseguinte, o volume do sólido será igual a $V = (10 + 6{,}25\pi).10 \cong 296{,}35$. Aproximando para um número inteiro teremos $V \cong 296\ cm^3$.

A área total da superfície do sólido será a soma das áreas das suas faces. Há duas faces com a forma da base, cuja área já foi calculada, igual a $10 + 6{,}25\pi$. Deve-se observar agora as faces laterais. Há uma face lateral com a forma do retângulo $ABFG$, com comprimento $BG = 10$cm e altura $AB = 5\ cm$, logo sua área é igual a $50\ cm^2$. Há outra face lateral com a forma do retângulo $AFJE$, com comprimento $AE = 7\ cm$ e largura $AF = BG = 10\ cm$, logo sua área é igual a $70\ cm^2$. Finalmente, a última face é formada pelo retângulo $BCHG$ junto com a quarta parte de um cilindro circular reto. A área do retângulo $BCHG$ é o produto do comprimento $BC = 2\ cm$ pela largura $BG = 10\ cm$, logo igual a $20\ cm^2$. A quarta parte do cilindro tem raio $CD = 5\ cm$ e altura igual a $BG = 10\ cm$. Então sua área será igual a $\frac{2\pi rh}{4} = \frac{\pi \times CD \times BG}{2} = 25\pi$. Então a última face terá área igual a $20 + 25\pi$. Somando as áreas das 5 faces teremos $A = 2(10 + 6{,}25\pi) + 50 + 70 + (20 + 25\pi) \cong 277{,}81\ cm$. Aproximando para um número inteiro teremos $A \cong 278\ cm^2$.

Juntando 5 unidades do sólido dado e derretendo, o material dos sólidos obtido terá volume igual a $5V \cong 1480\ cm^3$. Se for utilizado para construir um cone de 24 cm de altura, teremos, por conseguinte, $5V \cong 1480 = \frac{\pi r^2 h}{3} = 8\pi r^2$, que é o volume de um cone com a altura dada e raio igual a r.

Assim $r^2 \cong \frac{1480}{8\pi} \cong 185$. Logo $r \cong 14$ cm.

Novamente tivemos uma combinação de estratégias, como o **desdobramento de um problema complexo em vários problemas mais simples** e uso de **raciocínio lógico**.

Ao longo do livro serão abordados diversos tipos de problemas mais sofisticados, envolvendo funções. As estratégias exploradas nesta seção não esgotam as possibilidades. Na próxima apresentaremos um método diferenciado de resolução de problemas (MERP), que utiliza uma ferramenta computacional, o *software* GeoGebra, como mais uma estratégia para abordar estes problemas.

1.4 MERP – Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas

Como já foi mencionado em outra seção deste capítulo, as nossas investigações identificaram que, dentre as diversas barreiras para a aprendizagem em disciplinas iniciais de cursos superiores na área de Ciências Exatas, estão as dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de função, a dificuldade em reconhecer uma mesma função quando representada na forma algébrica ou na forma geométrica, por meio de seu gráfico e a dificuldade com a modelagem de problemas envolvendo funções.

É comum, mesmo entre professores, associar a ideia de função apenas à sua representação algébrica, como se a lei fosse a função, em si, enquanto o gráfico no plano cartesiano fosse a representação dessa lei. Outro exemplo desta crença pode ser observado na dificuldade da população brasileira em reconhecer o crescimento exponencial (ou similar) a partir de um gráfico, com o número de casos de contaminados com a COVID-19.

Como vimos na seção 1.1, Duval (2012) afirma que as representações semióticas de um objeto matemático são necessárias para a compreensão dos conceitos. Segundo o pesquisador, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos "reais" ou "físicos". É preciso, portanto, dar representantes. Os conceitos matemáticos somente serão acessíveis por meio da mobilização de pelo menos dois registros de representação semiótica (Duval, 2009). Quando o estudante consegue estabelecer relações entre estes, a aprendizagem se estabelece.

Por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado (Duval, 2012). A importância da utilização do registro adequado pode ser observada nas quatro operações aritméticas básicas, ou utilizando algarismos romanos ou números indo-arábicos. A utilização de um melhor registro possibilitou não somente a realização dessas operações, de forma mais clara e simples, ao longo da história, como o próprio desenvolvimento da Matemática. De modo similar, podemos associar a utilização da base dois à construção e evolução dos computadores.

Tivemos a ideia de utilizar uma ferramenta tecnológica que ajudasse o aluno a explorar diferentes representações de função. A escolhida foi o *software* GeoGebra.

O GeoGebra como Ferramenta de Ensino

As características do *software* educacional GeoGebra permitem explorar as representações algébrica e geométrica de uma função e transitar entre elas. Um recurso importante deste *software* permite simulações dinâmicas além das estáticas, ou seja, situações tipo "vídeo", além da opção tipo "foto". Neste sentido, a utilização do GeoGebra não deve então se limitar à representação geométrica de algumas situações estáticas como a exibição do gráfico de uma função específica.

A utilização de recursos computacionais no ensino pode incentivar à reflexão e ao desenvolvimento do lado cognitivo de cada aluno, principalmente por respeitar o ritmo de aprendizagem de cada um, deixando que os estudantes aprendam com seus erros. Segundo Abramovich (2013), a utilização destes recursos possibilita comunicar ideias matemáticas importantes, presentes em um tópico curricular banal e estudar tópicos mais difíceis de outra forma.

A utilização de ferramentas tecnológicas para resolução de problemas aparece na Competência 5 da BNCC:

> compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (Brasil, 2017, p.9.)

Além de possibilitar a exploração de diferentes registros de representação, o GeoGebra é um *software* gratuito. Pode ser instalado em quantos dispositivos forem necessários ou até mesmo utilizado diretamente online, o que facilita o acesso dos estudantes. Possui muitos recursos interativos e dinâmicos que podem ser aplicados facilmente em sala de aula, dessa forma tornando-se uma ferramenta facilitadora para o processo de ensino e de aprendizagem de funções e outros conceitos abstratos, como vetores.

Gerônimo, Barros e Franco (2010) destacam o uso do GeoGebra:

> Podemos utilizar sua interface gráfica e suas ferramentas para traçar retas, ângulos, circunferências etc. uma das vantagens do uso do GeoGebra é que as construções são dinâmicas, isto é, sem a perda dos vínculos geométricos. Isso permite que o usuário faça grande quantidade de experimentações que lhe possibilite construir proposições geométricas (2010, p. 11).

Em sua pesquisa sobre os efeitos da utilização do GeoGebra no processo de aprendizagem de alunos em uma escola na Malásia, Arbain e Shukor (2015) descrevem o aumento da autoconfiança e da motivação. Relatam que aumentou a livre comunicação entre os alunos e o professor e outros alunos. Os alunos são atraídos naturalmente por ferramentas tecnológicas. Houve uma melhora nítida entre os alunos do grupo que utilizou GeoGebra, comparados aos alunos do grupo de controle, que não utilizaram o GeoGebra.

Para o professor, as vantagens do *software* são: dinamizar a aula e despertar o interesse do aluno. Devido ao *software* possuir uma conectividade mundial, pode-se trocar informações e/ou experiências, ensinando e aprendendo com essa interação.

Tendo apoio do *software* GeoGebra para explorar diferentes registros de representação de funções e seguindo a orientação de Duval (2012) o próximo passo foi fazer uma associação com a resolução de problemas.

Ensino por meio da Resolução de Problemas

Em consonância com as ideias de Krulik e Rudnik (1993), interpretamos como um problema toda atividade que traga ponto ainda inexplorado, que se configure ao estudante como um desafio, algo que possibilite-o sair da zona de conforto. Um problema é uma tarefa que essencialmente não se resolve com procedimentos memorizados. Se os procedimentos para a resolução de uma tarefa escolar estão previamente contidos em algum algoritmo já aprendido pelo estudante, esta tarefa não é mais um problema.

Um problema deve proporcionar uma pequena dose de investigação e exploração, para ocorrer a descoberta. A resolução de problemas, geralmente, está relacionada a uma prática pedagógica em que o professor ensina determinadas técnicas e o estudante resolve cada questão com apenas uma forma de solução. Esta perspectiva está associada aos estudos de Polya (1978), pois seu foco está em "descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levem a enxergar caminhos para resolver problemas" (Onuchic; Allevato, 2011, p. 77-78).

Onuchic e Allevato esclarecem que, apesar do foco ser colocado sobre os processos de pensamento matemático e de aprendizagem através da descoberta, não havia, neste momento histórico, "concordância quanto à forma pela qual esse objetivo seria alcançado", pois os professores e educadores interpretavam de modo distinto o significado de utilizar a "resolução de problemas" na aprendizagem da matemática escolar (Onuchic; Allevato, 2011, p. 78-79). Há três modos

> de abordar Resolução de Problemas, que podem ajudar a entender e a refletir sobre essas diferenças de entendimento ou de abordagem que se faziam presentes, com maior ou menor intensidade, no contexto do ensino: (1) ensinar sobre resolução de problemas; (2) ensinar matemática para resolver problemas; e (3) ensinar matemática através da resolução de problemas (Onuchic; Allevato, 2011, p. 79).

O método de ensino proposto neste texto utiliza esta terceira perspectiva, pois "o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos" (Onuchic; Allevato, 2011, p. 80). Esta forma de ensino, segundo Matos e Serrazina (1996), deve possibilitar aos estudantes investigarem o conteúdo matemático e adquirir confiança neste processo.

Sendo assim, propomos neste texto a utilização do que denominamos de Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas (MERP).

Ferramenta Pedagógica: MERP

Este método, apresentado em Biazutti, Vaz e Andrade (2020), consiste na utilização de resolução de problemas como ponto de partida para o ensino de determinados conceitos, com apoio de diferentes representações semióticas e do *software* GeoGebra, conforme mostra a Figura 1.26. Também pode ser utilizado para preenchimento de lacunas e consolidação da aprendizagem.

Por este método, um conceito é desenvolvido formalmente depois de surgir, de maneira natural e intuitiva, na compreensão ou resolução de um problema. Neste livro utilizaremos o MERP para facilitar a compreensão dos conceitos, relacionados a função, na perspectiva do ensino de Pré-Cálculo. Os problemas selecionados para implementar este método devem explorar, prioritariamente, a conversão de registros. Neste sentido, *softwares* dinâmicos de construção de gráficos, como o GeoGebra, pelas suas próprias características, podem ser utilizados, tanto pelo professor como pelos alunos, para viabilizar uma discussão mais rica sobre diferentes registros de representações de um mesmo objeto.

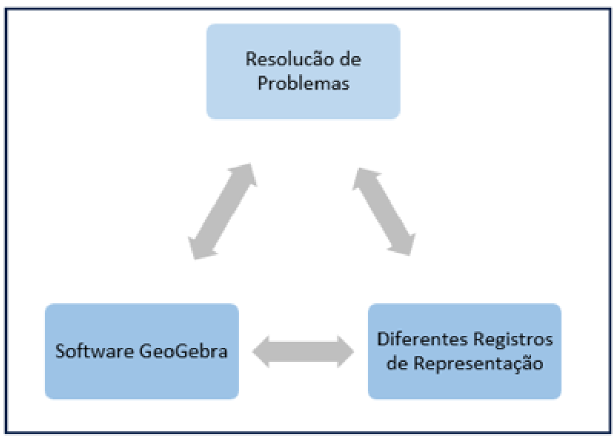


Figura 1.26 - Abordagem pedagógica do MERP
Fonte- Biazutti, Nasser, Torraca, Barros e Oliveira (2018)

Tais *softwares* possibilitam também a representação geométrica de funções descritas verbalmente nos enunciados de diversos problemas, explorando-as de modo dinâmico e interativo.

As estratégias de raciocínio apresentadas na seção anterior serão muito importantes para a compreensão e resolução dos problemas abordados.

Descrevendo Atividades de Ensino Utilizando o MERP

Este livro utiliza o MERP, como estratégia pedagógica facilitadora no processo ensino-aprendizagem, numa disciplina de Pré-Cálculo. Além disso, todos os problemas apresentados não necessitam, para sua resolução, de nenhum conhecimento formal de conceitos a serem estudados na primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), portanto, também podem ser resolvidos por estudantes do Ensino Médio.

Entretanto, o MERP também pode ser utilizado em disciplina de CDI em cursos de graduação da área de exatas, para introduzir conceitos como limite, derivada e integral.

O MERP também pode ser utilizado em disciplina de Geometria Analítica e de Álgebra Vetorial. Foi incluída uma atividade, envolvendo vetores, no Apêndice A2 do livro, em que o MERP também surge como estratégia pedagógica facilitadora, ao possibilitar a revisão de conteúdo que não é, em geral, abordado nas aulas de Matemática no Ensino Médio, somente nas de Física.

Para encerrar este capítulo, será apresentado um conjunto de atividades, desenvolvido por Biazutti, Vaz e Andrade (2023), para a disciplina de CDI, direcionadas para introduzir o conceito de limite de uma função, que é considerado extremamente abstrato e de difícil compreensão por parte dos alunos.

As funções escolhidas também apontarão alguns "defeitos" do GeoGebra, pois, como toda ferramenta tecnológica, tem recursos limitados, como, por exemplo, no caso de gráficos de funções descontínuas. O apêndice A1 deste livro apresenta exemplos de como utilizar os recursos do GeoGebra para esboçar este tipo de gráficos.

As atividades descritas foram utilizadas nas aulas iniciais da primeira disciplina de CDI para alunos de Licenciatura em Matemática, a maioria cursando a disciplina pela segunda vez, com resultados bastante positivos.

Atividade 1:

a) Seja $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$*. Determine domínio, gráfico e imagem da função* f.

b) Seja $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, se\ x \neq 3 \\ 7, se\ x = 5 \end{cases}$*. Determine domínio, gráfico e imagem da função* g.

c) Seja $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, se\ x \neq 3 \\ 6, se\ x = 5 \end{cases}$*. Determine domínio, gráfico e imagem da função h.*

d) Determine as semelhanças e diferenças entre as funções f, g *e h.*

e) No caso de cada função f, g, h*, como descrever, sem auxílio do gráfico, o que acontece com os valores da função numa vizinhança de* $x = 3$ *(abscissas bem próximas de* $x = 3$*, com valores maiores do que 3 ou menores do que 3, mas não igual a 3)?*

f) Seria interessante um conceito matemático que apresentasse cada descrição do item e de forma bem sintética?

A primeira atividade pode ser explorada inicialmente de forma tradicional e depois utilizando o *software* GeoGebra ou também invertendo a ordem. Neste último caso, o item *e* pode ficar especialmente atraente para os alunos se for utilizada a ferramenta do GeoGebra *controle deslizante*, para entrar com valores de x cada vez mais próximos de 3.

A seguir seria apresentado de modo informal o limite dos valores de f quando o elemento do domínio (abscissa) se torna cada vez mais próximo de um valor dado (que não precisa pertencer ao domínio). Também seria comentado que a função h é contínua, enquanto as funções f e g não são contínuas, após comparação dos gráficos de f, g e h, obtidos com auxílio de simplificação de polinômios ou utilizando GeoGebra.

Ao explorar esta atividade o professor poderia tanto apontar como o GeoGebra é um facilitador, como também tem "defeitos". Por exemplo, os gráficos das funções descontínuas f e g na *janela de visualização* do GeoGebra não excluem o ponto $(3{,}6)$, ou seja, são incorretos. Para obter os gráficos verdadeiros é necessário fazer esta exclusão "manualmente" utilizando outros recursos do GeoGebra (por exemplo, esboçar a reta vertical $x = 3$, obter o ponto de interseção desta reta com os gráficos incorretos, mudar a cor deste ponto para "transparente" e depois esconder a reta vertical com o recurso de esconder objeto, como mostra exemplo no apêndice A1 deste livro).

Já tendo sido introduzido de forma intuitiva o conceito de limite, por meio da primeira atividade, a segunda atividade tem como objetivo determinar a solução dos itens a e b a seguir, utilizando este novo conceito abstrato. Aqui são exploradas as representações tabular e geométrica e a conversão entre elas. Também pode ser utilizada para trabalhar a representação algébrica, como função definida por mais de uma sentença.

Atividade 2: *Uma empresa de entregas postais cobra para enviar cartas/impressos segundo o peso, de acordo com os valores apresentados na Tabela 1. 3.*

Tabela 1. 3 - Preço de cartas/impressos, de acordo com o peso

Peso (gramas)	Preço (reais)
Até 10 g	1,00
Mais de 10 g até 20 g	1,20
Mais de 20 g até 50 g	2,00
Mais de 50 g até 100 g	3,00
Mais de 100 g até 200 g	5,00

Fonte: Biazutti, Vaz e Andrade (2023)

a) Qual o preço para enviar um impresso com peso próximo de 40g? E próximo de 50g?
b) Represente geometricamente o gráfico da função que a cada peso associa um preço.

Como o GeoGebra possui uma *janela de entrada de comandos* (também chamada *janela de álgebra*), que pode ser utilizada para representação algébrica e uma *janela de visualização*, usada para representação geométrica, sua utilização simplifica bastante a compreensão e resolução do problema. Para que o GeoGebra obtenha o gráfico correto no item b, nos pontos de descontinuidade da função o procedimento é similar ao descrito na atividade anterior.

A terceira atividade tem como objetivo introduzir o conceito de limites laterais e descrever assíntotas utilizando o conceito de limite.

Atividade 3: *Determine o domínio da função f, com representação gráfica apresentada na Figura 1. 27, e o que se pede nos itens abaixo:*

a)$\lim_{x\to 1} f(x)$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)$

c) *Como você descreveria o que acontece com os valores de f, quando $x > -1$ cada vez mais próximo de -1? E se $x < -1$, cada vez mais próximo de -1?*

d) *Como você descreveria a relação entre a reta horizontal $y = 1$ e a função f?*

Figura 1. 27- Gráfico da função f

Fonte: Biazutti, Vaz e Andrade (2023)

O objetivo final desta atividade é descrever uma assíntota horizontal utilizando o conceito de limite. Também pode ser utilizada para fazer o mesmo no caso de assíntota vertical, que também aparece no gráfico da Figura 1. 27. Aqui o principal é explorar com os alunos a conversão entre a representação geométrica da função e dos limites laterais e assíntotas, para a representação algébrica, de forma inversa ao que foi trabalhado na atividade 1. Isto pode ser feito de forma ainda mais explícita, por meio de um complemento da terceira atividade.

Atividade 3- complemento:

a) Simule translações dos gráficos da função modular, da função $\frac{1}{x^2}$ *e da função* $ln\ (x)$*, com auxílio do GeoGebra, para determinar uma representação algébrica possível para a função* f*, como função definida por várias sentenças.*

b) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}|x+2|, se\ -3 \leq x < -1 \\ \frac{1}{x^2}, se\ -1 < x < 0 \\ Ln\ (x), se\ \ 0 < x < 2\ ou\ x > 2 \\ 1, se\ x = 2 \end{cases}$ *a representação algébrica de* f. *Represente geometricamente o que ocorre com os valores de* f, *quando* x *fica próximo de* -1, *quando* $x < -1$ *e e quando* $x > -1$, *usando o controle deslizante do GeoGebra e a ferramenta rastro.*

No próximo capítulo nosso objetivo será utilizar o MERP para explorar conceitos e propriedades relacionados a diversas funções, e, no capítulo seguinte, será estudar máximos e mínimos de funções, quando definidas em um determinado intervalo, ou seja, problemas de otimização. Com auxílio do MERP e de uma propriedade algébrica simples, a desigualdade que relaciona a média aritmética com a geométrica entre números não negativos, poderão ser resolvidos problemas muito interessantes, sem utilizar conceitos e propriedades ensinados em CDI, sendo, portanto, ideais para uma disciplina de Pré-Cálculo, ajudando assim os alunos na difícil transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior.

Capítulo 2 – Funções: Conceitos e Propriedades

Neste capítulo, vamos explorar a Resolução de Problemas como motivação para revisitar tópicos de Funções abordados na Educação Básica. Se o aluno não aprendeu significativamente algum conteúdo, isso pode causar dificuldades mais tarde, principalmente em disciplinas de CDI. Como vimos no Capítulo 1, o conhecimento de vários registros de representação e a habilidade de conversão entre eles é fundamental para a aprendizagem de um conceito. Por outro lado, Polya (1957) recomenda que o primeiro passo para a resolução de um problema deve ser a compreensão do enunciado, identificando seus dados e o que se deseja encontrar para resolvê-lo. Também vimos no Capítulo 1 que há uma diversidade de estratégias que podem ser usadas na resolução de um problema. Associando a compreensão do enunciado à escolha de uma estratégia adequada e ao uso do *software* GeoGebra, é possível realizar as conversões entre os diversos registros de representação de modo mais rápido e chegar à resolução do problema.

Os problemas deste capítulo serão usados como disparadores do estudo de vários tipos de funções e suas propriedades, mostrando aos alunos aplicações da Matemática em geral, e motivando-os para futuras abordagens em disciplina de CDI.

Também deve ser considerado o impacto da transição do Ensino Médio para o Superior. Em geral, durante a Educação Básica os alunos assumem uma atitude passiva, recebendo tarefas a resolver, e resultados prontos, sem a necessidade de investigar ou conjecturar. Já os calouros universitários devem ter uma postura ativa na busca da construção de novos conceitos, realizar pesquisas e investigações, por exemplo em relação à construção desses conceitos, introduzidos na primeira disciplina de CDI.

Convém ressaltar que os alunos devem ser instigados, sempre que possível, a explorar os problemas em ambientes virtuais de aprendizagem, usando o GeoGebra no contexto do MERP, como foi visto no capítulo 1.

Alguns problemas serão resolvidos, chamando atenção para a função usada na sua resolução e destacando suas propriedades. Outros problemas serão propostos para aprofundar as ideias e podem atuar como desafios para os alunos.

A maioria dos problemas que envolvem uma função para sua resolução é apresentada por meio de uma descrição verbal da situação problema. O aluno precisa fazer a conversão do registro verbal para uma representação algébrica para chegar à solução, ou, a partir desta, efetuar uma conversão para a representação num registro gráfico e assim chegar finalmente à solução.

2.1 Domínios de Funções e Funções Crescentes/Decrescentes

Nesta seção utilizaremos Resolução de Problemas e o *software* GeoGebra para destacar algumas propriedades importantes de funções. Aproveitaremos para explorar de forma mais profunda a importância do domínio de uma função em um problema contextualizado, o qual interfere muitas vezes na sua solução.

Nos problemas a seguir serão exploradas as diferentes representações de cada situação problema: verbal, tabular, algébrica e gráfica, conforme discutido no capítulo 1.

Vamos abordar problemas que podem ser resolvidos por tipos especiais de funções. Começaremos por um problema simples, em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais. Como se traduz essa proporcionalidade na prática?

Alguns alunos acreditam que duas grandezas são diretamente proporcionais quando têm comportamentos semelhantes, do tipo quando uma cresce, a outra também cresce. Por exemplo, quanto mais tempo você deixar o carro no estacionamento rotativo, maior será o preço a pagar. No entanto, em geral, esse valor não é proporcional ao tempo de permanência.

Considere um estacionamento que cobra R$ 20,00 pela primeira hora de utilização e cobra R$ 5,00 para cada hora excedente. Deste modo, um cliente que ficar com o carro por 3 horas irá pagar R$ 30,00 (20 reais pela primeira hora e 5 reais para cada uma das duas horas excedentes). Observe o quadro a seguir:

Quadro 2. 1 - Valores a pagar em função do tempo de permanência

Tempo de utilização em horas	Preço do estacionamento em reais	Razão entre o preço e o tempo de utilização
1	20,00	20,00
2	25,00	12,50
3	30,00	10,00

Notem que à medida que o tempo aumenta, o preço também aumenta. Apesar das grandezas tempo e preço crescerem, não são grandezas diretamente proporcionais, pois crescem de modo não proporcional. Mas, como verificar isso? Vejamos uma definição.

Duas **grandezas** x e y são ditas **diretamente proporcionais** quando a razão entre elementos correspondentes x_i *e* y_i é constante, isto é $\frac{y_i}{x_i} = k$.

A terceira coluna do quadro 2.1 corresponde às razões entre as duas grandezas. Observem que as razões não são constantes, variando entre 20; 12,5 e 10, logo não existe a constante de proporcionalidade k. Observando a definição anterior, estas grandezas não são diretamente proporcionais.

O problema a seguir apresenta duas grandezas diretamente proporcionais.

Problema 2.1: *O preço de um livro da coleção "Matemática Sempre Útil" é R$ 35,00.*

a) Quanto vai pagar um pai de aluno ao comprar três destes livros?

b) Complete a tabela a seguir com os valores a serem pagos na compra de livros dessa coleção.

Tabela 2. 1 - Valor pago em função da quantidade de livros

Livros	0	1	2	3	5	10	15	20	50
Preço (em reais)									

c) Encontre a expressão algébrica da função f que associa a cada número de livros comprados o preço a ser pago por eles.

d) O gráfico da Figura 2. 1 a seguir representa a situação problema? Por quê?

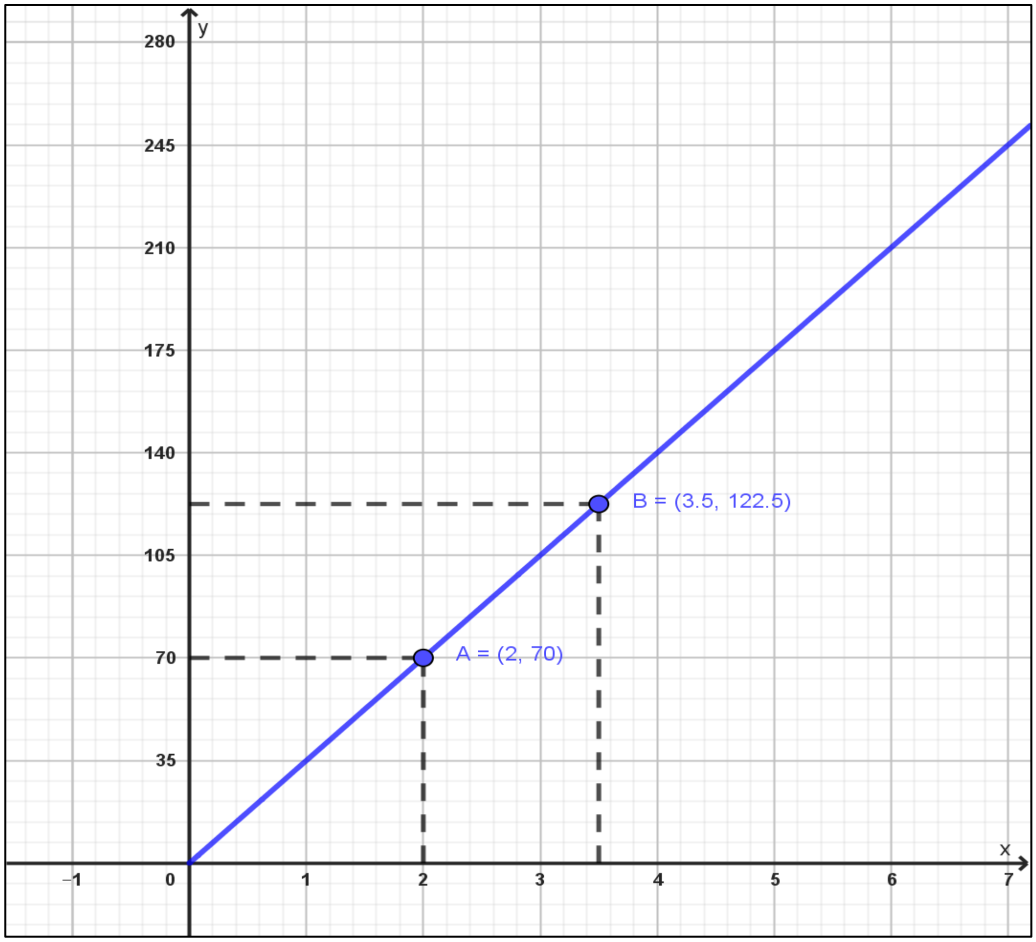


Figura 2. 1 - Possível representação gráfica da situação-problema

e) Utilize o GeoGebra para determinar o gráfico que melhor representa essa situação.

Ao trabalhar este problema em sala de aula, é recomendável apresentar inicialmente somente os 3 primeiros itens, uma vez que o gráfico da Figura 2. 1 vai induzir respostas para os itens anteriores.

Para encontrar o preço de 3 livros, todos com o mesmo preço, basta multiplicar o preço unitário pela quantidade de livros (3), obtendo o valor R$ 105,00. Desta forma é possível preencher a tabela com a mesma estratégia e, ainda generalizar com $f: x \to 35x$. É importante que os alunos percebam que o **domínio da função *f* para o problema contextualizado** (x quantidade de livros) é, neste caso, $x \in \mathbb{N}$.

A solução correta do item c levará certamente a resolver o item d: o gráfico da Figura 2. 1 não representa a situação problema, porque o domínio de f na figura não é um conjunto discreto, formado pelos números naturais. Finalmente, utilizando ferramentas do GeoGebra (para detalhes sobre os comandos necessários, consultar o Apêndice no final do livro), chega-se ao gráfico correto, representado na Figura 2.2 a seguir.

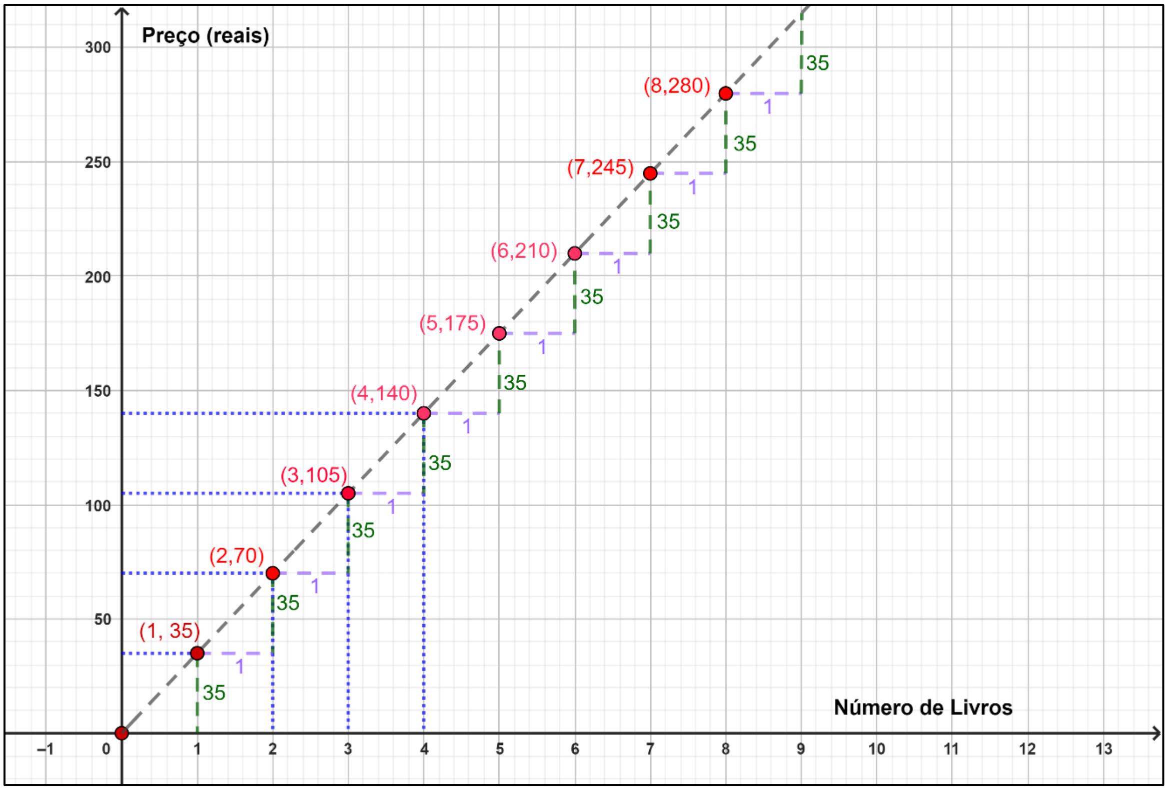


Figura 2.2 - Gráfico correto para a situação-problema

Observe que o gráfico da Figura 2.2 representa uma função crescente, uma vez que quando cresce a quantidade de livros, o preço pago por eles também cresce. Além disso, a cada livro a mais comprado, é acrescida uma quantia fixa. Com isso, a cada acréscimo de uma unidade no domínio, há um acréscimo constante de 35 reais no valor da compra (imagem), conforme mostra a Figura 2.2. Por isso, as grandezas representadas são diretamente proporcionais, o valor da constante de proporcionalidade $k = 35$, e seu gráfico é representado por pontos posicionados sobre uma reta que passa pela origem, já que o domínio é um conjunto discreto, formado pelos números naturais.

A definição de **função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$,** onde X e Y são dois conjuntos, deve ser abordada também com os alunos, que podem ter dúvidas a respeito. Trata-se de uma regra (ou lei) que diz como se deve associar cada elemento $x \in X$ a um único elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X é o **domínio** da função f e o conjunto Y é o **contradomínio** de f. O conjunto formado por todos os elementos $\{y = f(x),\ para\ todo\ x \in X\}$, é chamado de **imagem** da função f.

Muitas vezes os alunos têm dificuldades em entender um gráfico como representação geométrica de uma função em que X e Y são conjuntos numéricos (em que o gráfico é formado por um conjunto de pares ordenados de números) porque confundem a função (a lei/regra) com o conjunto Imagem da função (ou seja, um conjunto numérico).

Outra dúvida frequente é quando duas funções são iguais. A regra de associação tem que ser a mesma, assim como o domínio e o contradomínio. A função do problema 2.1 é $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 35x$. A função cujo gráfico está representado na Figura 2. 1 tem a mesma lei, mas o domínio (e o contradomínio) é o conjunto $\mathbb{R}^+$. A função com domínio discreto é uma **restrição da função** com domínio contínuo, ou a função de domínio contínuo é uma **extensão da função** com domínio discreto. Portanto são funções distintas. Mas, como têm a mesma lei, muitas vezes se usa a mesma notação.

O problema a seguir também envolve grandezas proporcionais e uma função crescente, mas a diferença está justamente no domínio do problema contextualizado.

É bom lembrar que uma **função** $f: X \to \mathbb{R}$ é **crescente** se, para cada $x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$ (e **decrescente** se tivermos $f(x_1) > f(x_2)$). Ela será **não decrescente** se, para cada $x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2$, então $f(x_1) \leq f(x_2)$ (e **não crescente** se tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$). No problema 2.1 o domínio é o conjunto $X = \mathbb{N}$, já o domínio para o problema 2.2 veremos a seguir.

Este problema aborda o conceito de **perímetro** de uma figura geométrica plana, que, no caso de polígonos, é a soma das medidas dos seus lados.

Problema 2.2: *a) Um terreno plano quadrado, com* $25{,}5$ *metros de lado, vai ser cercado em toda a sua volta. Qual o comprimento de cerca necessário para esta tarefa?*
b) Quanto mede o lado de um terreno quadrado que tem 157 *metros de perímetro?*
c) Complete a tabela 2.2 a seguir, que relaciona o lado de um quadrado ao seu perímetro.

Tabela 2. 2 - Relação lado versus perímetro

Lado do Quadrado (cm)	1	2	$2{,}5$		$3{,}5$		$4{,}7$	$2\sqrt{3}$	
Perímetro (cm)				$12{,}4$		$1/5$			$4\sqrt{50}$

d) Determine a expressão da função f *que associa o lado de cada quadrado ao perímetro correspondente.*
e) Encontre o domínio e a imagem da função f*.*
f) Utilize o GeoGebra para determinar o gráfico da função f*.*
g) As grandezas ***lado do quadrado*** *e* ***perímetro do quadrado*** *são diretamente proporcionais? Qual a diferença entre o tipo dos gráficos dos problemas 2.1 e 2.2?*

Utilizando a definição de perímetro, basta multiplicar a medida do lado por 4 (número de lados de um quadrado) para obter o valor 102 m para o comprimento da cerca. Com a mesma estratégia o aluno é levado a concluir que o perímetro de um quadrado de lado x será igual ao valor $y = 4x$.

Se for conhecido o valor do perímetro de um quadrado, para obter o lado, basta proceder de forma inversa, isto é, $x = \frac{y}{4}$. Então, o lado de um quadrado com 157 m de perímetro será $x = \frac{157}{4} = 39{,}25\ m$. Repetindo a estratégia utilizada nos itens a e b é fácil preencher a tabela 2.2 e obter $f: x \to 4x$, com $x > 0$, o que acarreta $y > 0$ também, concluindo os itens d e e.

O gráfico de f, utilizando o GeoGebra, está representado na Figura 2.3 a seguir. As grandezas também são diretamente proporcionais ($k = 4$), mas, neste caso, o domínio, ao invés de discreto, como no problema 2.1, é um conjunto contínuo (o conjunto dos números reais positivos).

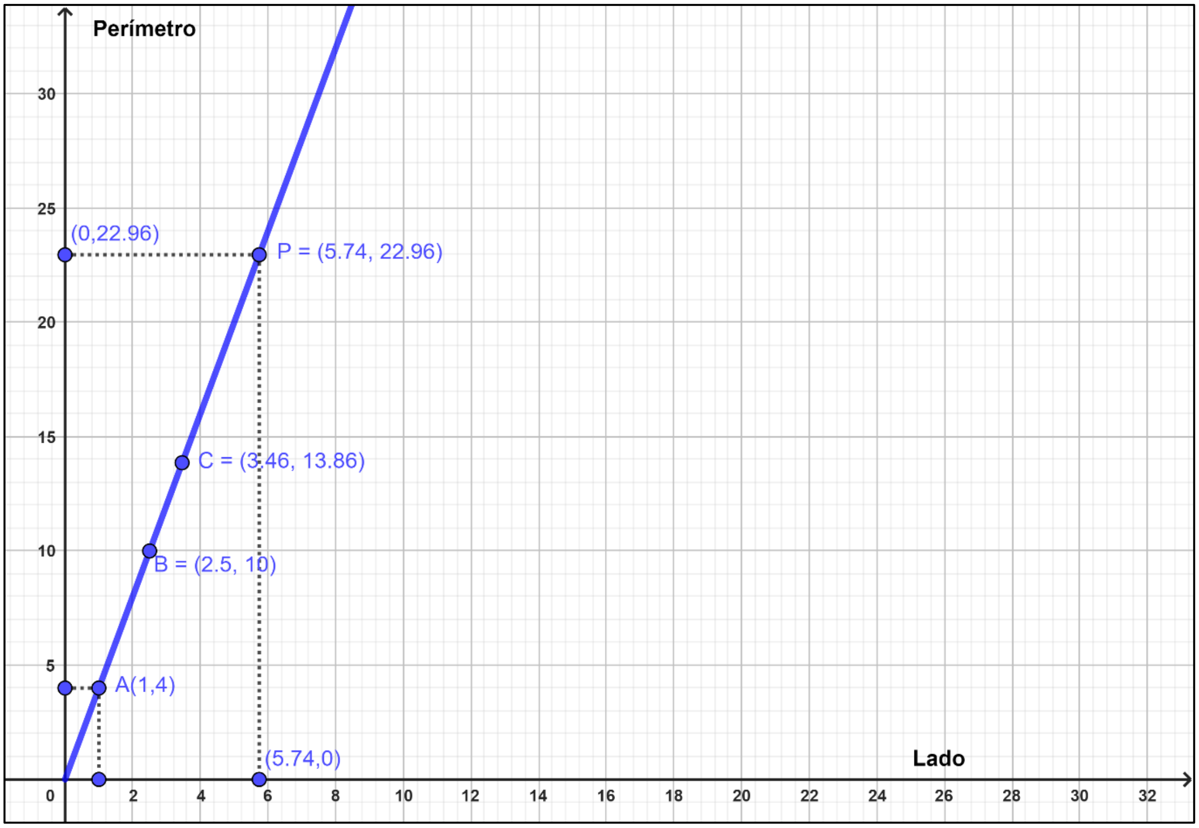


Figura 2.3 - Gráfico de f

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que modela um problema que representa **grandezas diretamente proporcionais** é aquela que satisfaz as seguintes condições: para todo $x \in \mathbb{R}$ e toda constante real k, $f(kx) = kf(x)$ e, para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

É simples verificar que as funções do problema 2.1 ($f: x \rightarrow 35x$) e do problema 2.2 ($f: x \rightarrow 4x$) satisfazem a estas condições para cada x em seu respectivo domínio.

Após explorar a noção de perímetro, é interessante trabalhar a noção de área. No ensino tradicional, os alunos estudavam exaustivamente o perímetro de diversos polígonos. Depois de um tempo, eram apresentados ao conceito de área e passavam a explorar e definir fórmulas para o cálculo da área de polígonos.

Pesquisadores indicam que a melhor estratégia é trabalhar os dois conceitos simultaneamente, além do de volume. Desse modo, segundo Nasser (2013), os alunos conseguem fazer melhor a distinção entre esses conceitos. O próximo problema vai trabalhar a noção de área, associada a uma outra função importante, a função quadrática.

Problema 2.3: *Um terreno quadrado, com* 25,5 *m de lado, vai ser revestido de grama sintética, em toda a sua extensão.*

a) Quantos metros quadrados de grama serão necessários para esta tarefa?

b) Quanto mede o lado de um terreno quadrado que tem 324 *m² de área?*

c) Complete a tabela 2.3 a seguir, que relaciona o lado de um quadrado à sua área.

Tabela 2. 3- Lado versus área de um quadrado

Lado do quadrado (cm)	1	2	2,5		3,5		4,7	$2\sqrt{3}$	
Área (cm^2)	1			10,24		1/25			200

d) Qual a expressão da função f *que associa o lado de cada quadrado à área correspondente?*

e) Qual o domínio e a imagem da função f *?*

f) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função f.

g) As grandezas lado do quadrado e área do quadrado são diretamente proporcionais? Qual a diferença entre o gráfico de f *e o gráfico da função do problema 2.2?*

A solução para o item a é o valor da área do terreno a ser revestido de grama, sendo um quadrado de 25,5 m de lado, a área será igual a $A = 25{,}5^2\ m^2 = 650{,}25\ m^2$.

Este problema utiliza o conceito de área de um quadrado, e o aluno é levado a concluir que a área do quadrado é obtida pelo produto do lado por ele mesmo, ou seja, a área do quadrado é obtida elevando-se a medida do lado à segunda potência. Utilizando raciocínio inverso, se a área for 324 m², o lado medirá $l = \sqrt{324m^2} = 18\ m$.

Generalizando teremos que a função que representa a área de um quadrado, em função do seu lado $x > 0$ será $f: x \to x^2$. Nesse caso, o domínio de f é o conjunto de números reais $x > 0$ e a imagem de f será o conjunto de números reais positivos $y = f(x) = x^2 > 0$. Utilizando GeoGebra teremos o gráfico de f apresentado na Figura 2.4 a seguir. Podemos observar também, pela Figura 2.4, que a função f é sempre crescente em seu domínio.

Neste problema as grandezas não são diretamente proporcionais, como nos problemas 2.1 e 2.2, porque a cada acréscimo num elemento do domínio (por exemplo 1,2) não há um acréscimo constante no valor da imagem correspondente (que será 1,44, e não 1,4).

Poderíamos ter chegado à conclusão anterior de outra forma: verificar que a condição $f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 \neq {x_1}^2 + {x_2}^2 = f(x_1) + f(x_2)$ sempre que x_1 e x_2 forem diferentes de zero.

A diferença entre os gráficos no problema 2.3 e no problema 2.2 é a seguinte: no problema 2.2 temos uma (parte de) uma reta passando pela origem, o que não é o caso neste problema.

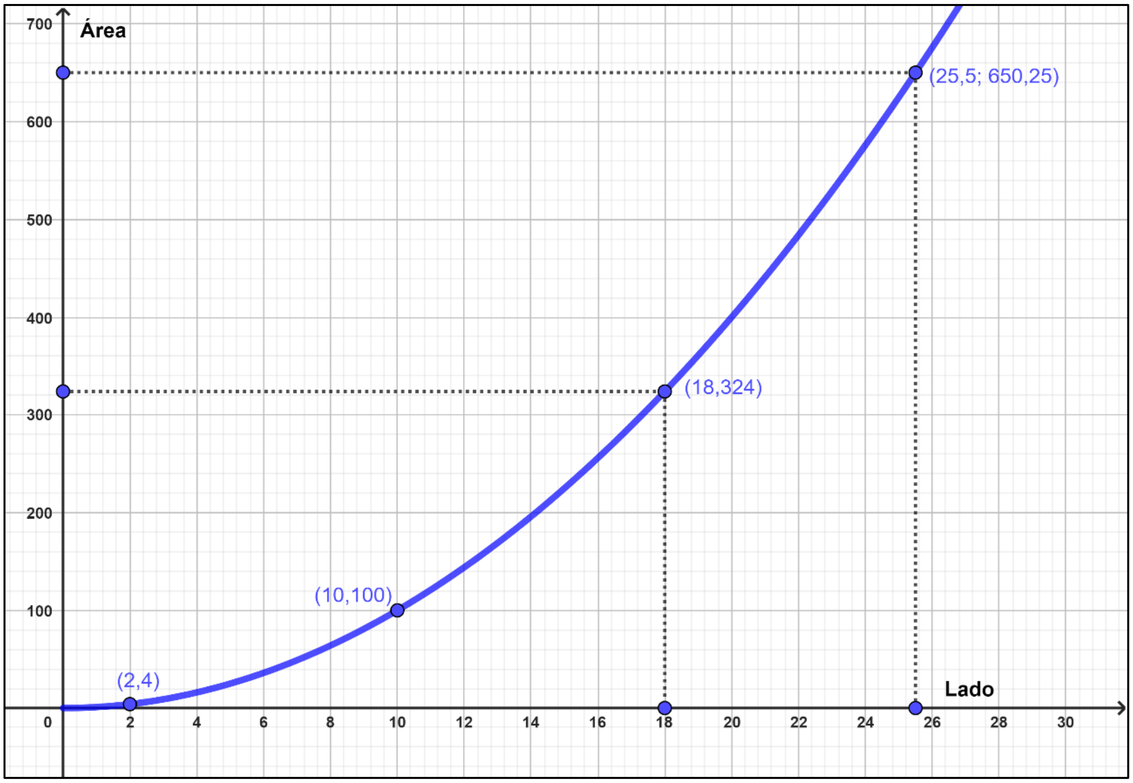


Figura 2.4 - Gráfico da função quadrática f do problema 2.3

De modo geral, definimos uma função como **função quadrática** (ou função polinomial do segundo grau) se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com o valor $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c,}$ para cada número real $\boldsymbol{x}$, sendo $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$ números reais dados (parâmetros), com $a \neq 0$, ou seja, a expressão $f(x)$ é um polinômio do segundo grau.

Supondo que o polinômio do segundo grau tenha raízes reais x_1 e x_2 , a expressão da função quadrática poderá ser escrita de outra forma, $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$, realizando um tratamento, conforme vimos na seção 1 do primeiro capítulo.

A expressão resolutiva, que permite encontrar as **raízes de uma função quadrática** (isto é, os valores de x tais que $f(x) = 0$) em termos dos coeficientes a, b e c, é dada por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Licenciandos de Matemática que realizaram o ENADE 2005 tiveram que responder uma questão objetiva (questão 32), cujo objetivo era avaliar se eles conheciam o método de demonstração da fórmula desenvolvendo um completamento de quadrados, e se seria adequado utilizá-lo em sala de aula, numa proposta de ensino. Segundo o relatório-síntese oficial do ENADE, esta questão foi considerada difícil pelos estudantes e o índice de respostas corretas ficou entre 16% e 40%.

A demonstração da fórmula resolutiva por este método foi incluída para chamar atenção para a importância das demonstrações junto aos alunos, mesmo na Educação Básica, e mais ainda em Pré-Cálculo.

Para isso, vamos dividir a expressão $ax^2 + bx + c = 0$ pela constante $a \neq 0$, de modo a obter $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Segue que $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$. Para completar o quadrado perfeito do primeiro membro é necessário somar, nos dois membros, a constante $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Obtemos então que $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$, e segue que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, tem-se $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ ou $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$, de onde vem a expressão resolutiva $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Cabe ressaltar que só existirá solução real para a equação do 2º grau se $b^2 - 4ac \geq 0$. A expressão algébrica $b^2 - 4ac$ é representada por Δ, conhecido como **discriminante** da equação do 2º grau.

É importante lembrar os alunos de que o gráfico de uma função quadrática é uma curva plana conhecida desde o século IV a.C. pelos gregos: a **parábola**, que é formada por todos os pontos P tais que a distância de cada P a um ponto fixo dado, denominado foco F, é igual à distância de P a uma reta fixa dada r, que não contém o foco, chamada diretriz (isto é $PF = dist(P, r)$), como apresentado na Figura 2. 5.

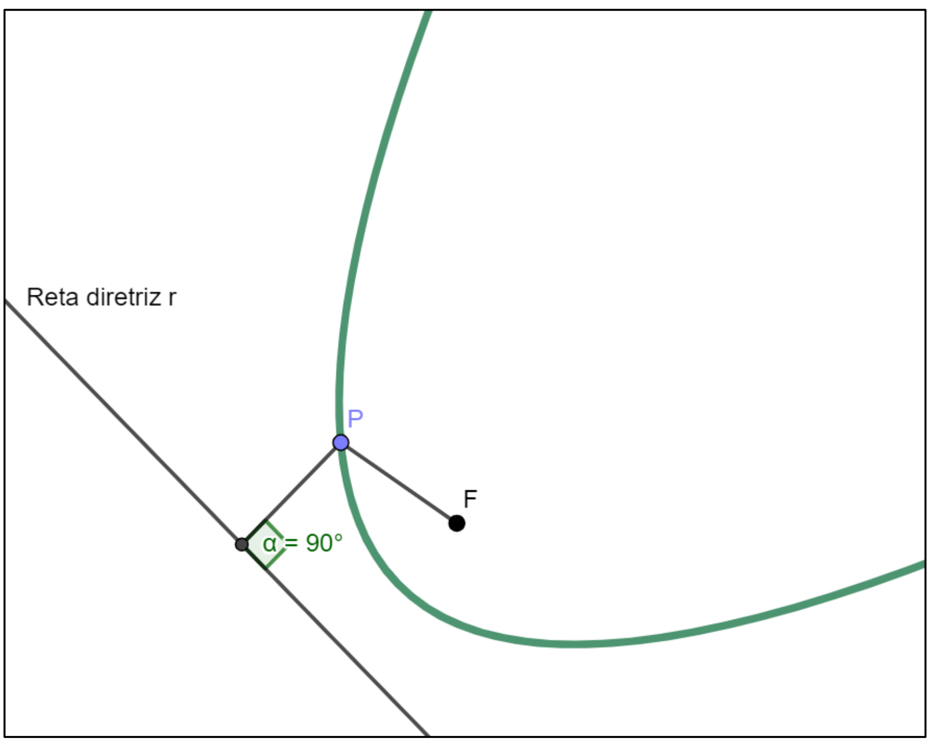


Figura 2. 5 - Gráfico de uma parábola

No contexto mais recente de Geometria Analítica, a **equação geral da parábola** é dada por $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0$, com $B^2 - AC = 0$, $A + C \neq 0$ e todos os coeficientes reais. O **eixo de simetria da parábola** é a reta que contém o foco F e é perpendicular à reta diretriz r. O **vértice** V é o ponto de interseção da parábola com seu eixo de simetria. Quando o coeficiente $B = 0$ temos A ou C também nulo e encontramos dois tipos possíveis de equação.

Quando a equação é do tipo $x = ay^2 + by + c$, temos uma parábola onde a reta diretriz é paralela ao eixo das ordenadas, ou seja, o eixo de simetria é paralelo ao eixo das abscissas, como no caso da Figura 2. 6 que mostra o gráfico da parábola $x = y^2 - 1$, com foco em $F\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, reta diretriz $x = -\frac{5}{4}$, eixo de simetria paralelo coincidente com o eixo das abscissas $y = 0$ e vértice no ponto $V(-1,0)$.

Note que a curva da Figura 2. 6 não é gráfico de nenhuma função, pois existem valores de x que estão associados a mais de um valor de y.

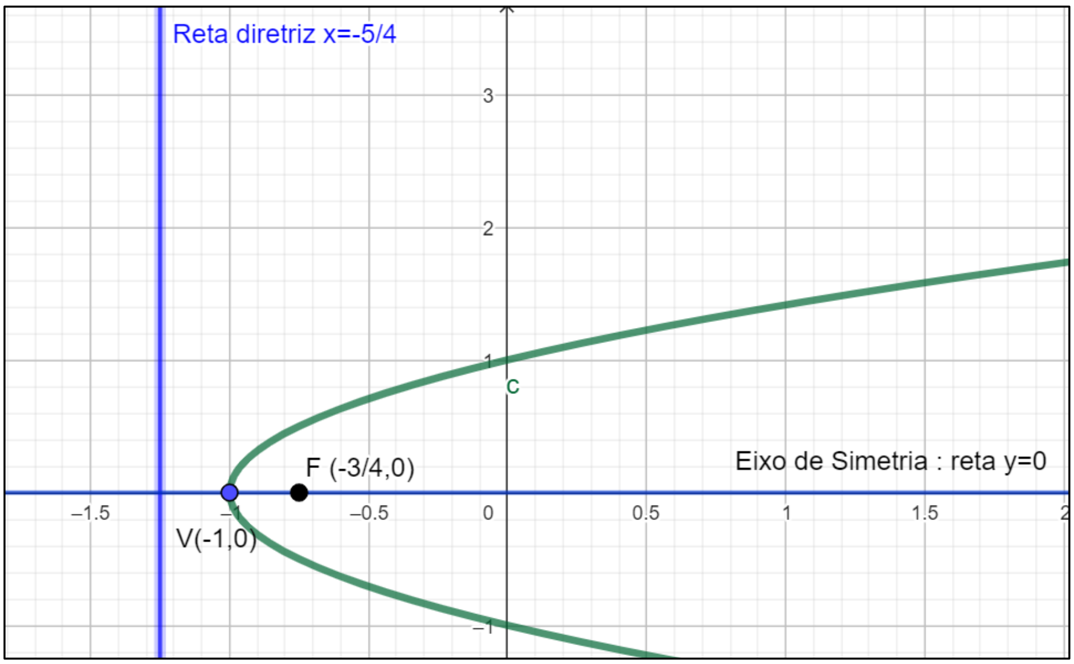


Figura 2. 6 - Gráfico da parábola $x = y^2 - 1$

A segunda equação é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, que corresponde a uma parábola em que a reta diretriz é paralela ao eixo das abscissas, ou seja, o eixo de simetria é paralelo ao eixo das ordenadas. O **gráfico de uma função quadrática,** de acordo com a definição desta função, é uma parábola com este tipo de equação, cujo **eixo de simetria** é a reta vertical $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$.

Calculando a média aritmética das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, determina-se a coordenada x do vértice da parábola $x_v = \frac{1}{2}\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = -\frac{b}{2a}$, ou seja, o eixo de simetria é sempre a reta vertical $x = x_v$.

Substituindo esse valor na expressão de $f(x)$ encontra-se a coordenada y do vértice, isto é, como $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$. Deste modo, teremos $y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$, chegando a $y_v = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$. Concluímos então que o **vértice** da parábola que é o gráfico da função quadrática está situado no ponto $\boldsymbol{V}\left(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}, -\frac{\Delta}{\boldsymbol{4a}}\right)$.

Conhecendo as coordenadas do vértice da parábola, pode-se obter uma outra forma de apresentar o polinômio do segundo grau (chamada ***forma canônica***), da seguinte maneira: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$. Finalmente encontramos a forma canônica: $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v}$.

Considerando a função quadrática para quaisquer valores dos parâmetros a, b e c, pode-se concluir que ou o gráfico da função é uma **parábola côncava para cima** (se $a > 0$) ou **côncava para baixo** (se $a < 0$).

Assim a função é sempre crescente numa parte de seu domínio e decrescente em outra. Tal propriedade está diretamente relacionada à existência de máximo ou mínimo para a função quadrática, como será visto posteriormente.

O gráfico da Figura 2.4 é (uma parte de) uma parábola côncava para cima, cujo eixo de simetria (se fosse considerada toda a curva) é o eixo das ordenadas e cujo vértice é o ponto $V(0,0)$.

O gráfico de diversas funções quadráticas, obtido variando-se os parâmetros a, b e c, é o objetivo do exemplo A1.14, no apêndice A1 deste livro.

Com base nas soluções dos problemas 2.1 e 2.2, muitos alunos poderiam ser levados a acreditar que uma reta sempre representa grandezas diretamente proporcionais. O problema a seguir vai deixar claro se esta crença é ou não verdadeira.

Problema 2.4: *No serviço de táxi de uma certa cidade, o motorista cobra R$ 5,80 de bandeirada, ou seja, o valor fixo cobrado, independente da distância a ser percorrida, acrescido de R$ 2,60 por quilômetro rodado.*

a) *Qual o valor que deverá ser pago ao motorista, por uma corrida relativa a um percurso de 20 quilômetros?*
b) *Quantos quilômetros foram percorridos numa corrida que custou R$ 26,60?*
c) *Escreva a expressão algébrica que permite determinar o valor $\boldsymbol{p}$ a ser cobrado por uma corrida de x quilômetros.*
d) *Utilizando o GeoGebra, represente por meio de um gráfico, a função que associa a cada distância percorrida (em quilômetros) qual será o valor cobrado (em reais) e determine o domínio e imagem desta função.*

Segundo o enunciado, a solução do item a será a soma da **bandeirada** com o valor de 2,60 multiplicado pelo número de quilômetros rodados, isto é $(5{,}80 + 2{,}60 \times 20) = 57{,}80$ reais.

O resultado do item b é $(26{,}60 - 5{,}80) \div 2{,}60 = 8$ km, ou seja, diminuindo do valor pago a **bandeirada,** obtém-se o produto do preço por quilômetro pela distância, então dividindo pelo preço por quilômetro encontra-se a distância.

Para resolver o item c observa-se o raciocínio para o item a substituindo 20 quilômetros por x quilômetros, obtendo assim a expressão $p = 5{,}80 + 2{,}60x$.

Para o item d denominemos f a função que a cada distância x associa o valor cobrado $p(x) = f(x)$. O gráfico da função f, na Figura 2.7 a seguir, é (parte de) uma reta que não passa pela origem e pode-se observar, a partir dele, que o domínio desta função é o conjunto dos reais não negativos e a imagem é formada pelos números reais $p \geq 5{,}80$. A função f é uma função crescente, com domínio $[0; +\infty[$.

Uma vez resolvidos os itens c e d, pode-se observar ainda que a solução do item b poderia ser também obtida (ou comprovada) de duas outras maneiras. A partir da expressão algébrica de p, determina-se a expressão de $x = \frac{p-5{,}80}{2{,}60}$, e, substituindo $p = 26{,}60$, verifica-se o resultado de b, ou seja, $x = 8$.

Os pontos do gráfico da função $f: x \to p = 5{,}80 + 2{,}60x$, na Figura 2.7 são pares ordenados (x, p). Então o ponto com ordenada $p = 26{,}60$ terá abscissa $x = 8$, que seria obtida usando o comando do GeoGebra para esboçar a reta horizontal $y = 26{,}80$ e depois o comando para achar o ponto de interseção entre esta reta e o gráfico de f.

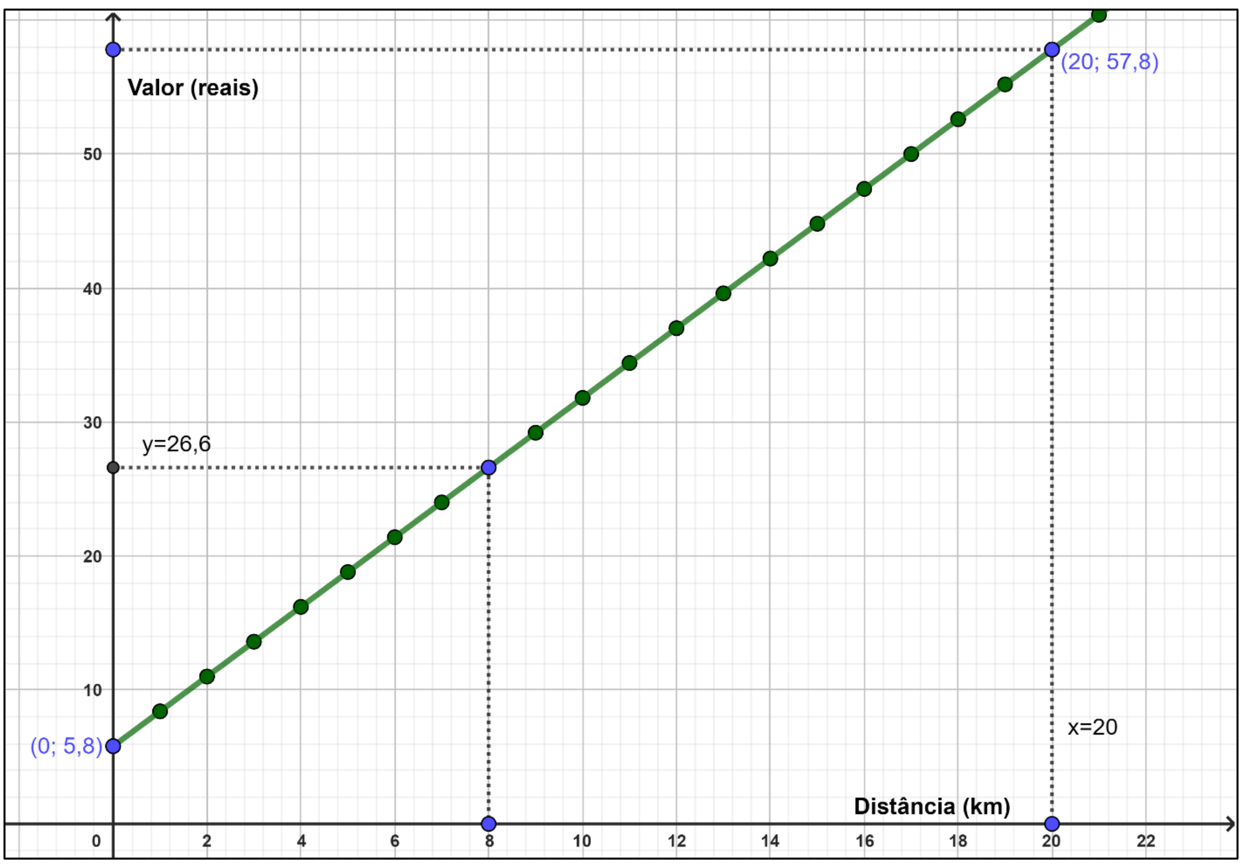


Figura 2.7 - Gráfico da função f do problema 2.4

Como observado na Figura 2.7 , o gráfico de f é uma (semi)reta. Serão as grandezas diretamente proporcionais?

Teremos $f(kx) = 5{,}80 + 2{,}60(kx)$. Por outro lado, $kf(x) = k\ (5{,}80 + 2{,}60x)$. As duas expressões serão distintas para todo $x > 0$, sempre que $k \neq 1$.

Nem precisamos testar a outra condição, uma vez que a primeira não é cumprida. Então as grandezas no problema 2.4 não são diretamente proporcionais.

Recordemos que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **afim** quando existem constantes $a, b\ \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Casos particulares da função afim são as funções **lineares,** quando a constante $b = 0$, ou seja, $f(x) = ax$, e as funções **constantes**, quando $f(x) = b$, ou seja, a constante $a = 0$.

O gráfico de toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **afim** é formado pelo conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ onde $y = ax + b$, ou seja, uma reta com coeficiente angular igual à constante a. O coeficiente angular da reta representa a **taxa de variação** da função f. Quando, além disso, a função for linear, a reta passa na origem e se a função for constante, a reta é horizontal.

O gráfico de diversas funções afins, obtido variando-se os parâmetros a e b, é o objetivo do exemplo A1.13, no apêndice A1 deste livro.

Podemos concluir que as funções dos problemas 2.1, 2.2 e 2.4 são restrições de função afim (com domínio no conjunto dos naturais ou reais positivos). Mas as que representam grandezas diretamente proporcionais são somente as que também são funções lineares (problemas 2.1 e 2.2).

Interpretando geometricamente nossa conclusão (efetuando uma conversão, segundo as ideias de Duval, apresentadas na seção 1 do primeiro capítulo), temos que as grandezas diretamente proporcionais são sempre representadas graficamente por retas (ou pontos sobre retas) que passam pela origem.

O comportamento do gráfico da função quadrática (uma parábola) está ligado a situações de Física, como lançamento de projéteis. A seguir apresentaremos um problema que explora este tipo de situação- problema, além de mostrar a importância das coordenadas do vértice da parábola, do eixo de simetria e dos intervalos em que a função quadrática com este gráfico é crescente ou decrescente.

Problema 2.5: *Em um jogo de futebol um jogador irá bater uma falta diretamente para o gol. A falta será batida do ponto P, onde se encontra a bola, no chão plano do campo, sendo P localizado a* 12 *m de distância da base da barreira. Suponha que a trajetória da bola seja uma parábola, com ponto de máximo em* Q, *diretamente acima da barreira, a* 3 *m do chão. Sabendo-se que o gol (delimitado por 3 traves, duas verticais e uma horizontal, situadas no mesmo plano vertical) está a* 8 *m da barreira, determine:*

a) qual a altura da bola ao atingir o gol;

b) se a bola vai entrar no gol, sabendo-se que a altura do gol é de $2{,}44$ *m (ou seja, a altura da trave horizontal).* (Adaptado da Questão 11- ENADE – Matemática, 2008)

A forma mais simples de compreender o problema e decidir uma estratégia para resolvê-lo é fazer uma figura, como a Figura 2.8.

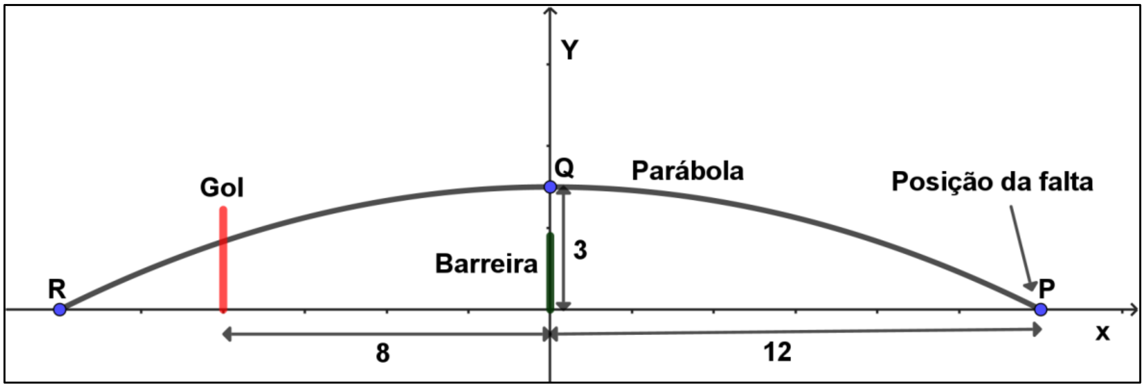


Figura 2.8 - Situação-problema para o problema 2.5

A altura da bola ao atingir o gol será a ordenada y, do ponto da parábola correspondente à abscissa $x = -8$. Para determinar y, precisamos obter a função quadrática cujo gráfico coincide com a parábola da Figura 2.8.

Note que as raízes são 12 e -12, $a < 0$, a curva do gráfico passa em $(0,3)$ que é o vértice da parábola, a função é crescente quando $x \in [-12,0[$ (ou seja, quando x cresce, y cresce) e decrescente quando $x \in]0,12]$ (ou seja quando x cresce, y decresce).

Observe que, para representar o problema, o chute começa quando $x = 12$, logo a interpretação sobre crescimento e decrescimento da função é invertida em relação ao que foi relatado no parágrafo anterior.

Teremos então uma ideia da expressão, $y = a(x-12)(x+12) = a(x^2 - 144)$, onde falta determinar o valor da constante a.

Como $(0,3)$ é um ponto sobre a curva, substituindo na expressão da curva o valor de $x = 0$ e o valor de $y = 3$ teremos $-144a = 3$, logo $a = -\frac{3}{144}$. Concluímos que a função que modela o problema é $f: x \to y$, com domínio sendo $x \in [-12, 12]$ e imagem sendo o conjunto de valores $y \in [0, 3]$, onde $y = \frac{3}{144}(144 - x^2)$.

Outra maneira de chegar a este resultado é utilizar a forma canônica da função quadrática $f: x \to y$, onde $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ e o vértice é $V(x_v, y_v)$. Nesse problema temos o vértice $V(0,3)$, logo $x_v = 0$ e $y_v = 3$. Assim, $y = ax^2 + 3$. O ponto $(12,0)$ pertence ao gráfico da função logo $0 = a(12)^2 + 3$. Assim $a = -\frac{3}{144}$ e a função quadrática satisfaz $y = -\frac{3}{144}x^2 + 3$.

Portanto, quando $x = -8$ teremos $y \cong 1{,}66m$, que será a altura aproximada da bola ao atingir o gol. Como a altura da trave do gol é de 2,44m, isto significa que a bola vai entrar no gol, completando assim a solução do problema 2.5.

A grande maioria dos alunos acredita que a Matemática é um pacote pronto e inalterável, ou seja, tudo já foi descoberto num passado muito distante e já no formato como é ensinado hoje. Esta é mais uma razão para que encarem a Matemática como uma ciência sem graça.

O conteúdo da seção 2 do capítulo 1 deste livro pode ser utilizado para mostrar aos alunos que até o conceito de função não foi bem compreendido a princípio. Mas, mesmo dentro deste tópico considerado básico, ainda há o que descobrir. Em uma aula do primeiro ano do Ensino

Médio num curso técnico em Química, a aluna Etiene descobriu um teorema envolvendo as raízes da função quadrática, cujo enunciado está a seguir.

Teorema de Etiene: Considere a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Então o ponto $P(x_e, c)$, simétrico com relação ao eixo de simetria da parábola ao ponto $(0, c)$ é tal que o número x_e é igual à soma das raízes da função $y = f(x)$, ou seja, $x_e = -\frac{b}{a}$ (Muniz, 2019).

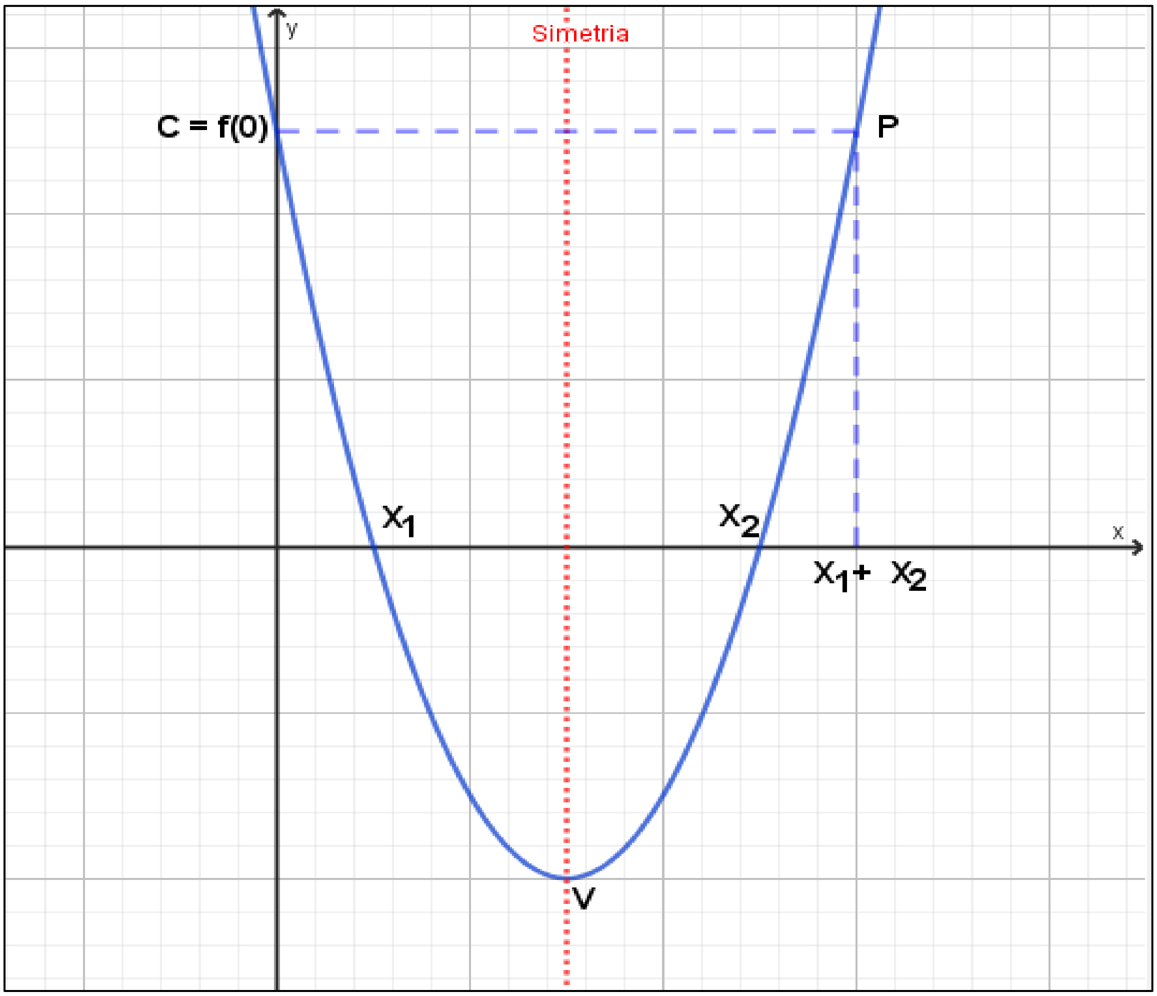


Figura 2.9 - Ilustração do Teorema de Etiene
Fonte: file:///C:/Users/torra/Downloads/ArtigoOTeoremadeEtiene.pdf

Uma atividade que pode ser proposta aos alunos é, numa primeira etapa, usar o GeoGebra para investigar o valor de x_e, como mostra a Figura 2. 10 a seguir. Em seguida os alunos devem mostrar que o resultado do teorema é sempre verdadeiro (como ilustrado na Figura 2.9). Por último o professor conta a história por trás do teorema.

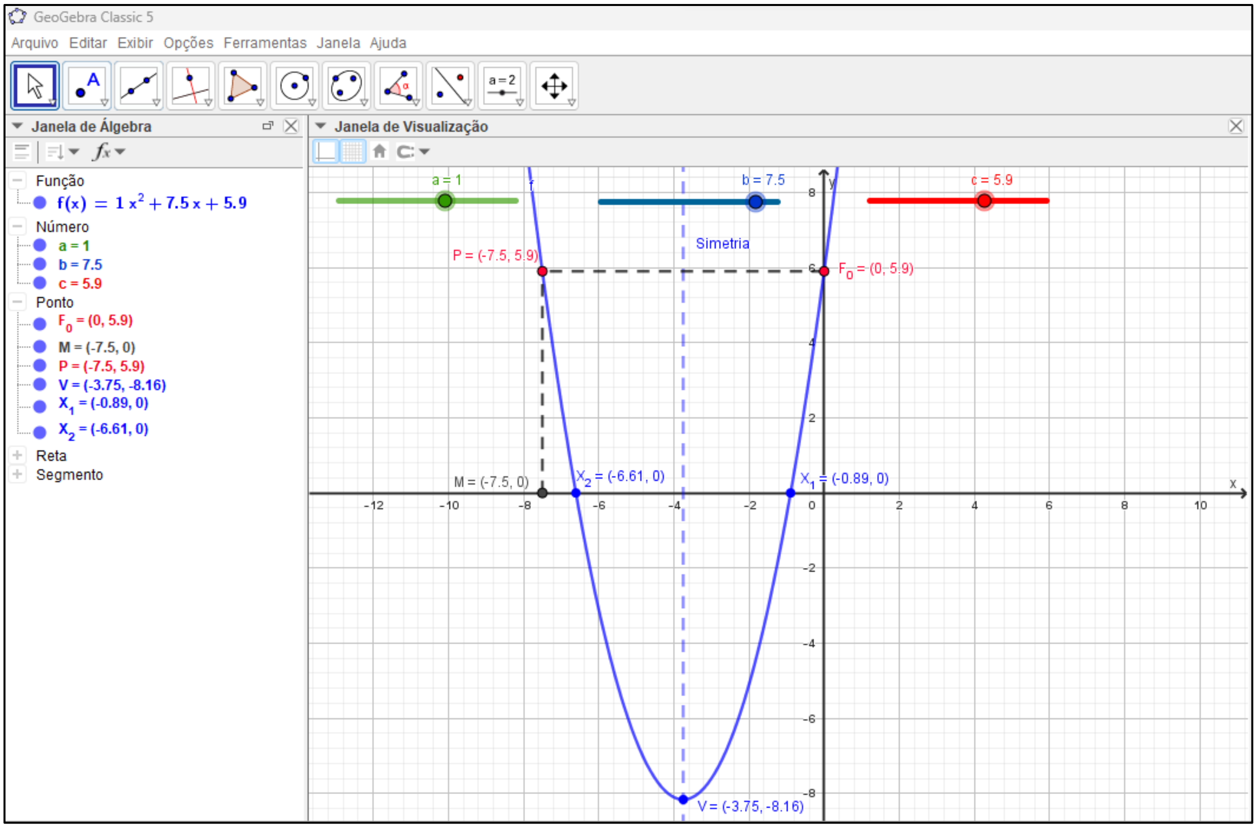


Figura 2. 10 - Investigação para o Teorema de Etiene

O problema 2.6 a seguir explora inicialmente a representação de pontos no plano cartesiano, uma das dificuldades dos alunos de Ensino Médio e Superior que surgiu nas pesquisas do grupo Transição (Biazutti, Vaz e Andrade, 2020).

São trabalhadas representações em três registros, para a função envolvida: tabela, algébrica e gráfica. A associação com progressões aritméticas pode e deve ser feita, ao considerar o registro algébrico.

Problema 2.6: *A Figura 2. 11 a seguir mostra uma sequência de símbolos que representam a letra Y, seguindo um padrão.*

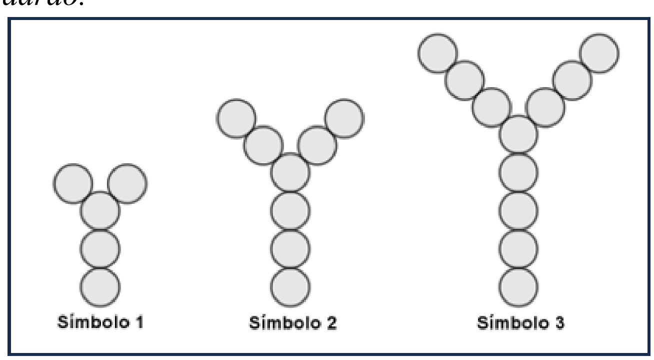


Figura 2. 11 - Símbolos para a letra *Y*
Fonte: adaptado de Biazutti, Vaz e Andrade (2020)

a) Faça uma tabela relacionando o número do símbolo com a quantidade de bolinhas para obter a letra Y, começando do símbolo 1 até o símbolo 6.

b) Use o GeoGebra para marcar os seis pares ordenados no plano cartesiano, em que a abscissa (eixo x) é o número do símbolo e a ordenada (eixo y) é a quantidade de bolinhas.

c) Volte à tabela obtida no item a e obtenha uma expressão (do tipo $y =$...) que relacione o número do símbolo com a quantidade de bolinhas, supondo que haja um número disponível ilimitado de bolinhas para construir o símbolo Y.

d) Utilize o comando "Sequência" do GeoGebra para exibir uma sequência de pares ordenados (x, y) com x variando de 1 a 15. (Adaptado de OBMEP, prova da 1ª fase, questão 15, nível 2, 2019)

Observando os primeiros 3 símbolos na Figura 2. 11, é possível construir as 3 primeiras linhas da tabela e, a partir da forma como cada símbolo é construído, chegar às próximas 3 linhas, de modo a obter a tabela a seguir.

Tabela 2. 4

Número do Símbolo	Quantidade de Bolinhas
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

A partir da tabela 2.4 temos o conjunto dos pares ordenados do plano cartesiano $(x, y) = \{(1,5), (2,8), (3,11), (4, 14), (5, 17), (6,20)\}$, representados na Figura 2. 12 a seguir.

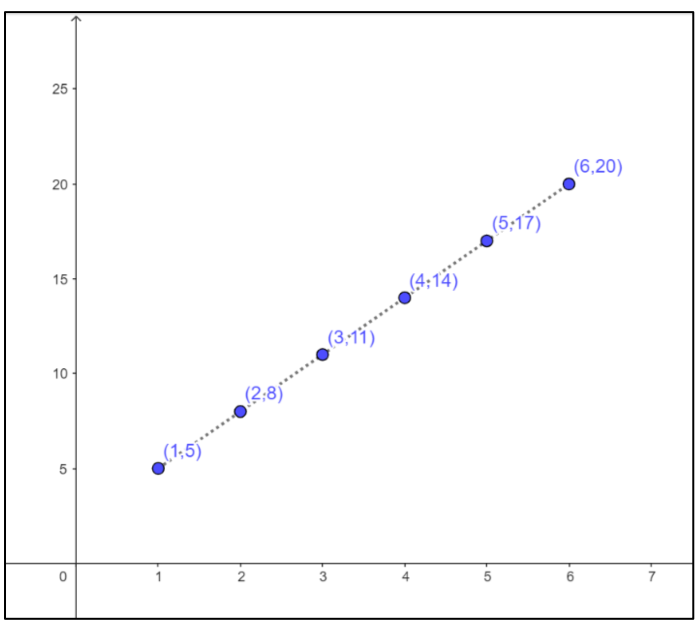


Figura 2. 12 - Pares ordenados correspondentes à tabela 2.4

Observando a forma como cada símbolo é construído, a partir do primeiro, é possível chegar à expressão algébrica $y = 5 + 3(x - 1) = 3x + 2$, onde $x \in \mathbb{N}$.

Utilizando o comando Sequência do GeoGebra, podemos obter a representação gráfica da Figura 2. 13 a seguir.

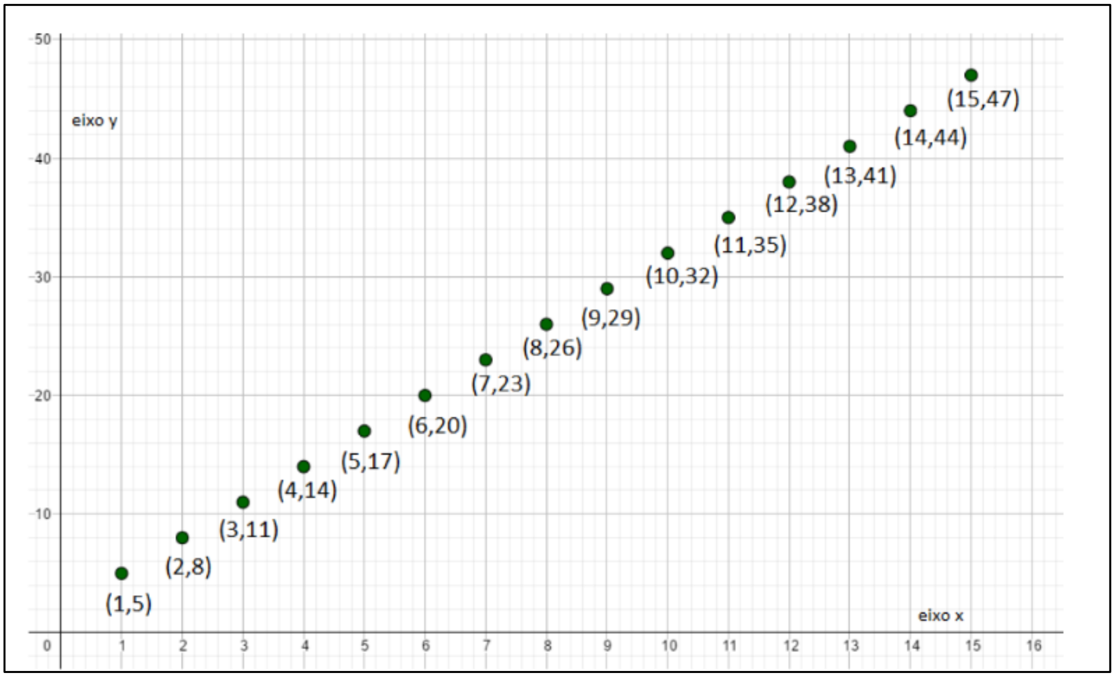
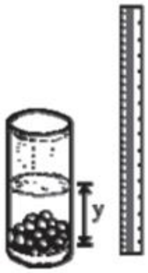


Figura 2. 13 - Sequência de pontos no plano cartesiano até o símbolo número 15.

É interessante notar que, no gráfico da Figura 2. 13 a sequência de elementos do domínio pode ser vista como uma progressão aritmética (P.A.) onde o seu primeiro termo e sua razão são ambos iguais a 1, enquanto os valores obtidos na imagem também formam o mesmo tipo de progressão, tendo como primeiro termo o valor 5 e razão igual a 3.

O domínio da função deste problema é um conjunto discreto de números naturais e a função é crescente em seu domínio. Este problema parte de uma representação geométrica para uma representação tabular, levando à algébrica e conclui com uma representação por um gráfico cartesiano. Já no próximo problema, temos inicialmente, uma representação tabular, seguindo para algébrica e, por fim, geométrica.

Problema 2.7: *Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura 2. 14 a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo. A tabela da Figura 2.14 mostra alguns resultados do experimento realizado.*



número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Figura 2.14 - Experimento e tabela de resultados para o problema 2.7
Fonte: www.penta.ufrgs.br

a) Qual a altura do nível da água antes de se iniciar a colocação das bolas?
b) Quantas bolas haverá no copo de vidro quando a água alcançar a altura de 8,8 *cm?*
c) Dê a expressão algébrica que dá o nível da água em função do número de bolas no copo de água.
d) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função, e explicite seu domínio e imagem (Adaptado do ENEM 2009 – prova azul – questão 159).

Pela tabela da Figura 2.14 podemos notar que a cada 5 bolas colocadas o nível aumenta 0,35 cm. Logo podemos concluir que o nível inicial (antes das 5 primeiras bolas) era de 6 cm.

Além disso, usando a proporcionalidade, a cada bola colocada o aumento no nível deve ser de $\frac{0{,}35}{5} = 0{,}07\ cm$.

Portanto, a expressão algébrica que dá o nível da água no copo (y) em função do número de bolas no copo (x) deverá ser $y = 6 + 0{,}07x$. Temos então que a função associada ao problema é $f: x \to y$, onde $y = f(x) = 6 + 0{,}07x$, sendo $x \in \mathbb{N}$.

Para a solução do item b podemos determinar x, sabendo que $y = 6 + 0{,}07x$, encontrando $x = \frac{y-6}{0{,}07}$. Assim, se $y = 8{,}8cm$, teremos $x = 40$ bolas.

Não está claro no enunciado do problema se é acrescentada uma bola de cada vez, ou se são acrescentadas 5 bolas a cada vez. O domínio e imagem de f serão diferentes em cada um dos casos.

Supondo que é acrescentada 1 bola de cada vez, e que se possa colocar bolas no copo indefinidamente, o domínio da função será o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, isto é, uma P.A. de razão 1 e a imagem será o conjunto dos números $\{6; 6{,}07; 6{,}14; 6{,}21; \ldots\}$, ou seja, uma P.A de razão 0,07.

Caso sejam acrescentadas 5 bolas de cada vez, o domínio será o conjunto formado pelos números $\{0, 5, 10, 15, \ldots\}$ ou seja, uma P.A. de razão 5, e a imagem será o conjunto formado pelos números $\{6; 6{,}35; 6{,}70; 7{,}05; \ldots\}$, ou seja, uma P.A. de razão 0,35.

Supondo a segunda opção, acrescentando 5 bolas de cada vez, utilizando o comando sequência do GeoGebra, podemos obter o gráfico da Figura 2. 15 a seguir.

Como já recordamos anteriormente, trata-se da restrição de uma função afim, ou seja, seu gráfico é um conjunto de pontos sobre uma reta que, neste problema, não passa pela origem.

A partir do gráfico pode-se solucionar o item b de forma geométrica. Considera-se a reta horizontal $y = 8{,}8$. Encontramos o ponto de interseção desta reta com o gráfico da função f. A abscissa deste ponto será o valor de $x = 40$. Estas etapas podem ser realizadas facilmente utilizando comandos do GeoGebra.

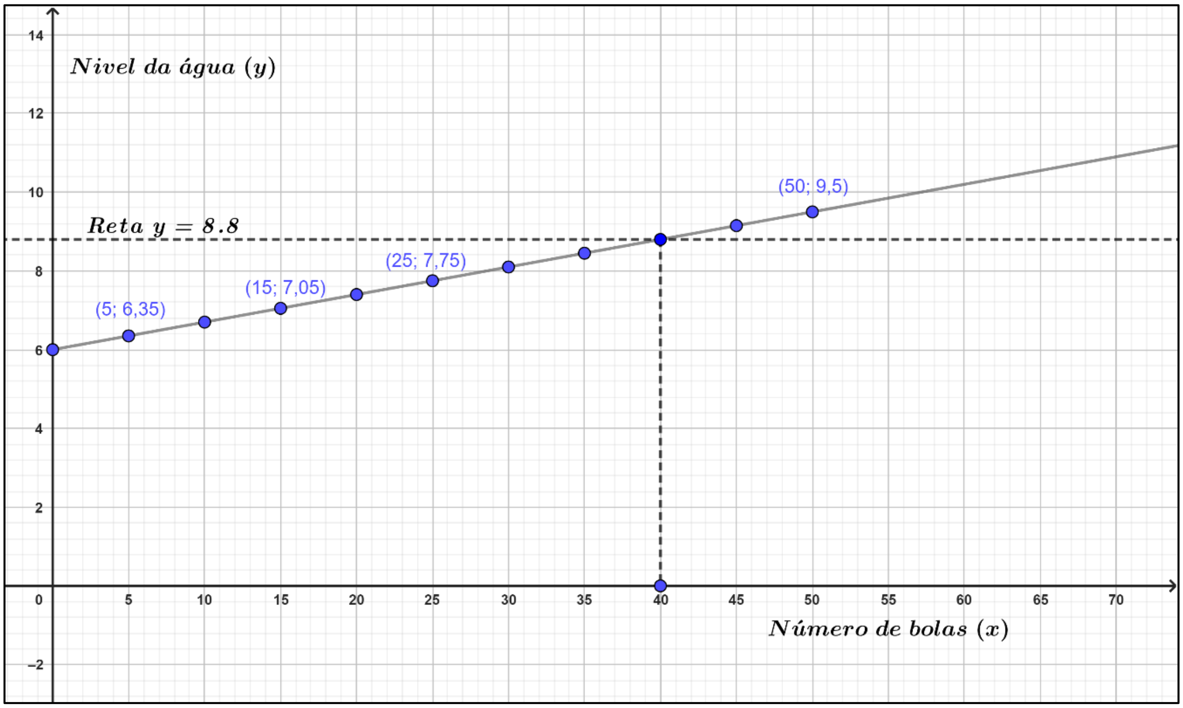


Figura 2.15 - Gráfico da função do problema 2.7

Estamos na verdade, tanto algebricamente como geometricamente, explorando intuitivamente a função inversa de f. A existência da inversa de uma função e suas propriedades, além da utilização prática de funções compostas será o assunto da próxima seção.

2.2 Funções Compostas e Inversas

Sabemos que o conceito de função é utilizado em diversas áreas do conhecimento. Portanto, é comum, e às vezes extremamente necessário, que possamos representar diferentes fenômenos físicos, químicos, biológicos etc. por meio de funções.

Sendo assim, poderemos ter situações em que o domínio da função pode ser restrito a um intervalo, bem como o contradomínio e/ou imagem, como já visto na seção anterior deste capítulo.

Em certos problemas contextualizados, a função que consegue representar melhor cada situação é, na verdade, combinação de funções mais simples, somando, subtraindo, multiplicando ou dividindo duas ou mais funções, sendo uma função composta de duas outras ou uma função inversa.

É importante conhecer o comportamento da função composta, quando ela pode ser definida e como é o seu domínio, imagem e contradomínio, relacionando-os com os das funções que foram combinadas. O mesmo cuidado é importante para a possível função inversa de uma função.

O problema 2.8 a seguir é bastante simples e permite explorar a função composta e a inversa, de forma intuitiva.

Problema 2.8: *Um estudo das condições ambientais em um certo município indica que a taxa média de monóxido de carbono no ar (*$\boldsymbol{c}$*) está relacionada ao número de habitantes (*$\boldsymbol{p}$*), de forma que* $c = 0{,}2p - 2$*, onde* $\boldsymbol{c}$ *é medida em partes por milhão (ppm) e* $\boldsymbol{p}$ *é medida em milhares de habitante. Estima-se que, em* $\boldsymbol{t}$ *anos (considerando hoje como instante inicial), a população (*$\boldsymbol{p}$*) será dada por* $p = 60 + 0{,}08t^2$*. Determine:*

a) a expressão algébrica da função que associa a cada $\boldsymbol{t}$ *(em anos) a taxa média de monóxido de carbono no ar* $\boldsymbol{c}$ *(em ppm).*

b) em quantos anos a taxa $\boldsymbol{c}$ *será igual a* $13{,}6$ *ppm.* (Adaptado do vestibular UERJ)

Dos dados do problema podemos obter $c = 0{,}2p - 2 = 0{,}2(60 + 0{,}08t^2) - 2 = 12 + 0{,}016t^2 - 2$, logo se obtém a solução do item a, definida por $c = 10 + 0{,}016t^2$.

Uma atividade extra que pode ser proposta aos alunos, antes de revisar o conceito de função composta, é solicitar que esbocem os gráficos das duas funções que aparecem no enunciado do problema.

A função do item a é a composta das funções intermediárias, $f: [60, +\infty[\to \mathbb{R}$, com $Im(f) = [10, +\infty[$, tal que $f(p) = c$, $g: \mathbb{R}^+ \to [60, +\infty[$, tal que $g(t) = p$, levando diretamente a $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $h(t) = c = 10 + 0{,}016t^2$. Podemos observar que $h = f \circ g$, pois $h(t) = f\big(g(t)\big) = f(p) = c$. O domínio da função h é formado pelos números reais $t \in \mathbb{R}^+$. O gráfico de h, obtido utilizando o *software* GeoGebra, está representado na Figura 2.16 a seguir.

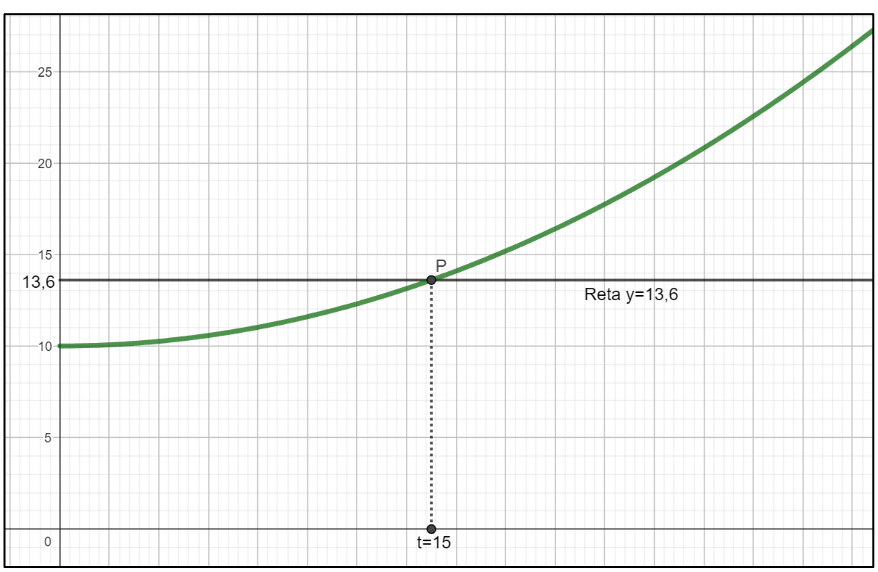


Figura 2.16 - Gráfico da função composta h do problema 2.8

A solução do item b pôde ser determinada geometricamente, conforme mostrado na Figura 2.16 utilizando GeoGebra, interceptando-se o gráfico da função h, com a reta horizontal $y = 13{,}6$. A abscissa do ponto de interseção P será $t = 15$, ou seja, após 15 anos.

Uma solução algébrica também pode ser obtida resolvendo a equação $10 + 0{,}016t^2 = 13{,}6$, onde $t \in \mathbb{R}^+$. Teremos então $t^2 = 225$, logo $t = 15$, ou seja, foi obtida a imagem inversa do valor 13,6 que é o elemento do domínio $t = 15$.

O problema 2.8 apresentou as funções intermediárias f e g e precisava da função composta $h = f \circ g$ para determinar a solução. Em outros problemas, como veremos no capítulo 3, a função composta é determinada diretamente, mas é mais complicado encontrar a solução de um problema de máximo ou mínimo de h. Então as funções intermediárias f e g, geralmente mais simples, podem ser usadas como facilitadoras.

De modo geral, dadas as funções $g: X \to Y$ e $f: Y \to Z$, podemos definir a **função composta** $h: X \to Z$, onde $\boldsymbol{h = f \circ g}$ e, da mesma forma, se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$, podemos definir a **função composta** $h: X \to Z$, onde $\boldsymbol{h = g \circ f}$.

Pode ser observado, para os alunos, que a definição correta de composta e das funções intermediárias pode facilitar a solução de problemas envolvendo este tipo de funções, ao se trabalhar, em CDI, com aplicações de derivada envolvendo funções compostas (regra da cadeia).

É interessante apresentar alguns exemplos de composta e de produto de duas funções, chamando atenção dos alunos para o fato de serem combinações diferentes (note que a função g é quadrática e a função f é afim, logo, o produto seria uma função polinomial de terceiro grau, enquanto a composta é uma função quadrática) e nem sempre gozam de propriedades similares, como a comutatividade ($f \cdot g = g \cdot f$, no entanto $g \circ f \neq f \circ g$ em geral).

Intuitivamente a inversa de uma função $f: X \to Y$, que associa um número $a \in X$ a um número $b \in Y$, seria uma função $g: Y \to X$, que associa o número $b \in Y$ ao número $a \in X$. No caso do problema 2.8, a função inversa de h seria obtida encontrando t em função de c, o que foi feito exatamente na solução algébrica do item b, para um único valor de c. Assim a inversa de h seria a função h^{-1}, tal que $t = h^{-1}(c) = \sqrt{\frac{c-10}{0{,}016}}$. Vamos verificar, mais adiante se isto está correto. Uma pergunta que surge é se sempre é possível obter a inversa de uma função, ou seja, que condições algébricas/geométricas são necessárias para a existência da inversa de uma função. Outra questão interessante é a relação entre o gráfico de uma função e o de sua inversa.

Inicialmente vamos recordar uma propriedade relacionada à existência de função inversa: uma função $f: X \to Y$ é dita **injetora** quando, para cada x_1, x_2 pertencendo ao domínio X da função, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Se compararmos com a definição de função crescente e função decrescente apresentadas na seção 1 deste capítulo, chegaremos à conclusão de que se f for sempre crescente (ou sempre decrescente) em seu domínio X, então f será injetora.

Temos então duas formas de verificar que uma função é injetora, algebricamente e geometricamente, que podemos utilizar para as duas funções da Figura 2.17 a seguir.

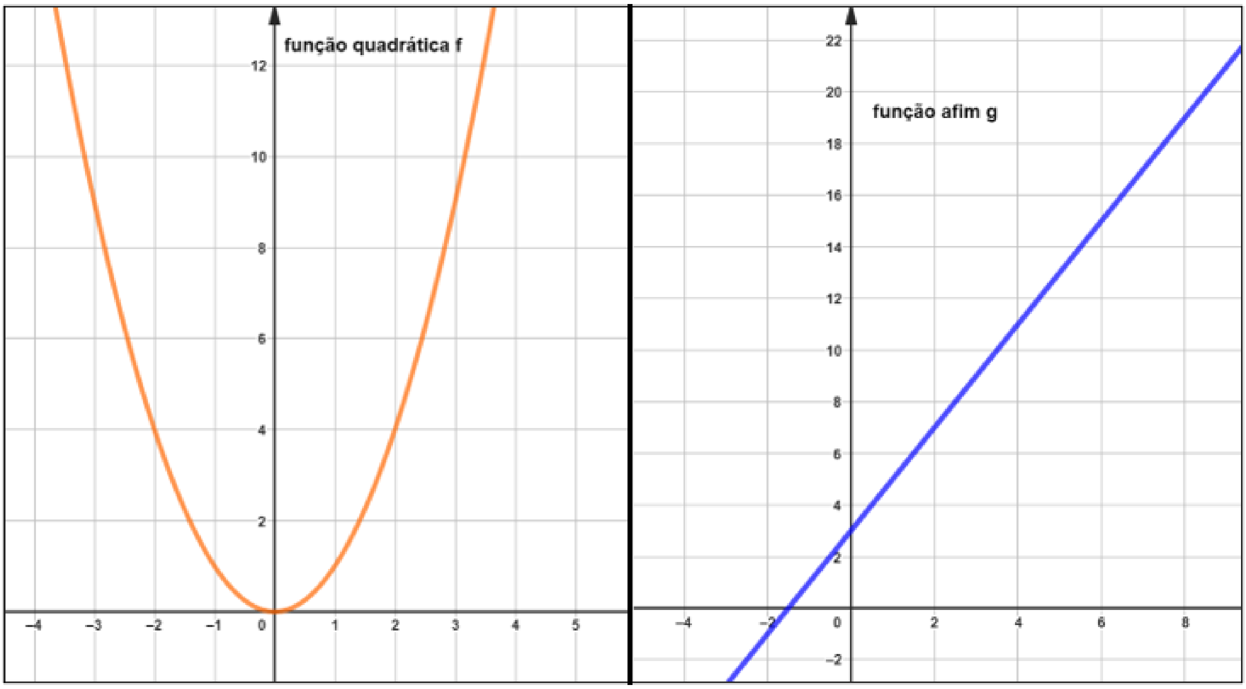


Figura 2.17 - Função quadrática tal que $f(x) = x^2$ e Função afim onde $g(x) = 2x + 3$.

A função afim $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre crescente em todo o seu domínio, logo é injetora. Já a função quadrática f é decrescente se $x < 0$ e crescente se $x > 0$, não é injetora. No entanto, se for considerada uma restrição de f, $f_1: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ou $f_2:]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, ambas com contradomínio $\mathbb{R}$ e ambas também com conjunto imagem $[0, +\infty[$, tanto f_1 como f_2 serão funções injetoras.

Uma forma geométrica simples de verificar que uma função é injetora é interceptando o seu gráfico com retas horizontais. Se existe pelo menos uma reta horizontal que intercepta o gráfico da função em mais de um ponto, então ela não é injetora. Este é o caso da função quadrática da Figura 2.17, logo ela não é injetora. A função afim g da mesma figura é um exemplo de função injetora, uma vez que toda reta horizontal que intercepta seu gráfico, só o faz em um único ponto. Outro exemplo de função injetora é a função h do problema 2.8, como mostra a Figura 2.16.

Dada uma função $f: X \rightarrow Y$, a função inversa “natural” seria $f^{-1}: Y \rightarrow X$. Esta última expressão representará realmente uma função somente se obedecer às condições da definição, já apresentada na seção 1 deste capítulo, ou seja, cada elemento de Y deverá estar associado a um único (esta parte de unicidade estará garantida se f for injetora) elemento de X. Mas a primeira parte da definição só será satisfeita se o contradomínio de f for exatamente o mesmo conjunto que a imagem de f, isto é, quando a função f for **sobrejetora.**

Consideremos, por exemplo, a função $f_1: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = x^2$. O contradomínio considerado é o conjunto dos reais, enquanto o conjunto imagem de f_1 é somente formado pelos números reais não negativos, ou seja, $[0, +\infty[$, então a função não é sobrejetora. Mas, se definirmos uma restrição de f_1 tal que $f_3: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, o contradomínio desta restrição será o mesmo conjunto que a imagem. Isto também ocorrerá com a restrição de f_2, dada por $f_4:]-\infty, 0] \to [0, +\infty[$. Logo as restrições f_3 e f_4 serão ambas sobrejetoras. As funções que são ao mesmo tempo injetoras e sobrejetoras são chamadas **bijetoras**, logo f_3 e f_4 são exemplos de funções bijetoras.

Já vimos que a função $h: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ do problema 2.8 é injetora e podemos observar, pela Figura 2.16 que sua imagem é o intervalo $[10, +\infty[$. Considerando então uma restrição da função h (ainda mantendo a mesma notação para facilitar), $h: [0, +\infty[\to [10, +\infty[$, teremos que o contradomínio coincide com a imagem, logo h também é sobrejetora. Assim temos mais um exemplo de função bijetora.

Nem sempre é necessário restringir o domínio e/ou o contradomínio de uma função para obtermos uma restrição que seja bijetora. A função afim $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x + 3$, apresentada na Figura 2. 17 é uma função bijetora. É fácil verificar isto também geometricamente, observando que cada reta horizontal, passando por todo ponto sobre o eixo das ordenadas, intercepta o gráfico de g (logo o contradomínio coincide com a imagem de g) e só o faz em um único ponto do gráfico de g (logo dois valores diferentes no domínio, sobre o eixo das abscissas, são sempre associados a dois valores diferentes na imagem). Isto também pode ser verificado para as funções bijetoras f_3 e f_4, como mostra a Figura 2.18 a seguir.

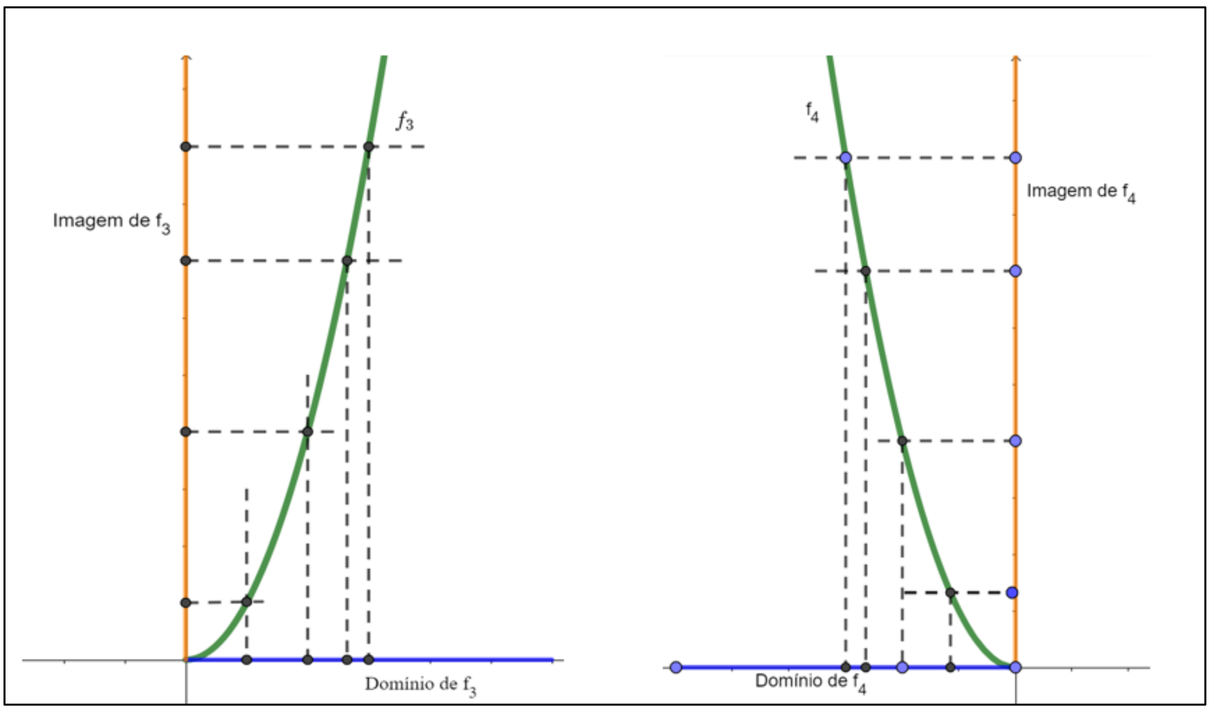


Figura 2.18 - Restrições bijetoras da função quadrática

Podemos agora revisar a definição de função inversa: uma função $\boldsymbol{h}$, tal que $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$, é dita **inversa da função** $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, se $h(f(a)) = a$, para cada $a \in A$ e $f(h(b)) = b$, para cada $b \in B$. Se $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ é a inversa de $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, denotamos h por $h = f^{-1}$. Da mesma forma podemos dizer que $f = h^{-1}$. Quando h é a inversa de f (ou f é a inversa de h) temos $h(b) = a$ se e somente se $f(a) = b$. Uma função $\boldsymbol{f}: A \to B$ possui inversa se e somente se $\boldsymbol{f}$ **é bijetora**.

É importante apontar aos alunos a diferença de notações: a expressão $\frac{1}{f(x)}$ é o inverso multiplicativo do valor $f(x)$ e pode ser denotada por $[f(x)]^{-1}$.

A inversa da função afim da Figura 2.17 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x + 3$, pode ser definida, porque g é bijetora, e teremos g^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para determinar a expressão algébrica, chamando $y = 2x + 3$, devemos isolar o valor de x. Teremos então $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$, logo, trocando as variáveis entre si, teremos $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Da mesma forma as funções f_3 e f_4 possuem inversa por serem bijetoras. Teremos então f_3^{-1}:$[0, +\infty[\to [0, +\infty [$, com $f_3^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e f_4^{-1}:$[0, +\infty[\to]-\infty, 0]$, com $f_4^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Observando a definição de inversa é possível concluir que está bem definida a função composta $h \circ h^{-1}: B \to B$, tal que $h \circ h^{-1}(b) = b$, para cada $b \in B$ e também $h^{-1} \circ h: A \to A$, tal que $h^{-1} \circ h(a) = a$, para cada $a \in A$. Portanto a composta de uma função com sua inversa é a função identidade, relativa ao domínio considerado.

Para a construção de gráficos é importante notar que, se f tem inversa e um par ordenado (a, b) pertence ao gráfico de f, então o par ordenado (b, a) pertence ao gráfico da inversa f^{-1}. Assim, os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$, bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes do plano cartesiano.

Utilizando esta propriedade e a ferramenta de reflexão em relação a uma reta, disponível no GeoGebra, a partir do gráfico da função afim g mostrado na Figura 2.17 pode-se obter diretamente o gráfico da sua inversa, g^{-1}, como mostra a Figura 2.19 a seguir.

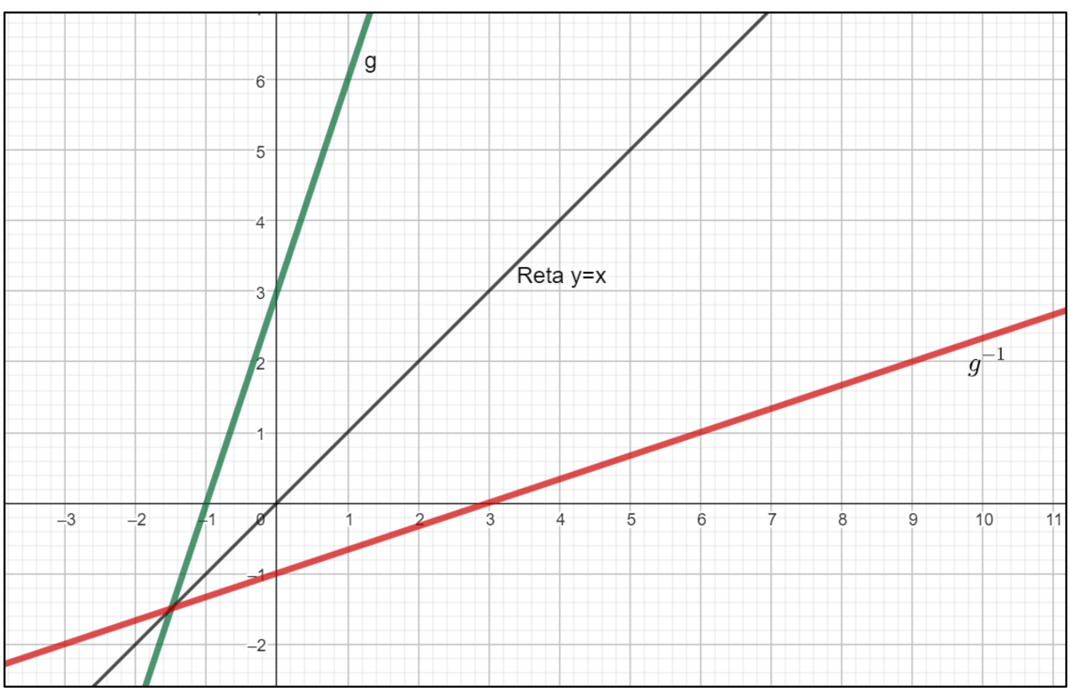


Figura 2.19 - Gráfico da função afim tal que g(x)=2x+3 e sua inversa

A Figura 2.20 mostra o gráfico das funções f_3 e f_3^{-1}, este último obtido de forma similar.

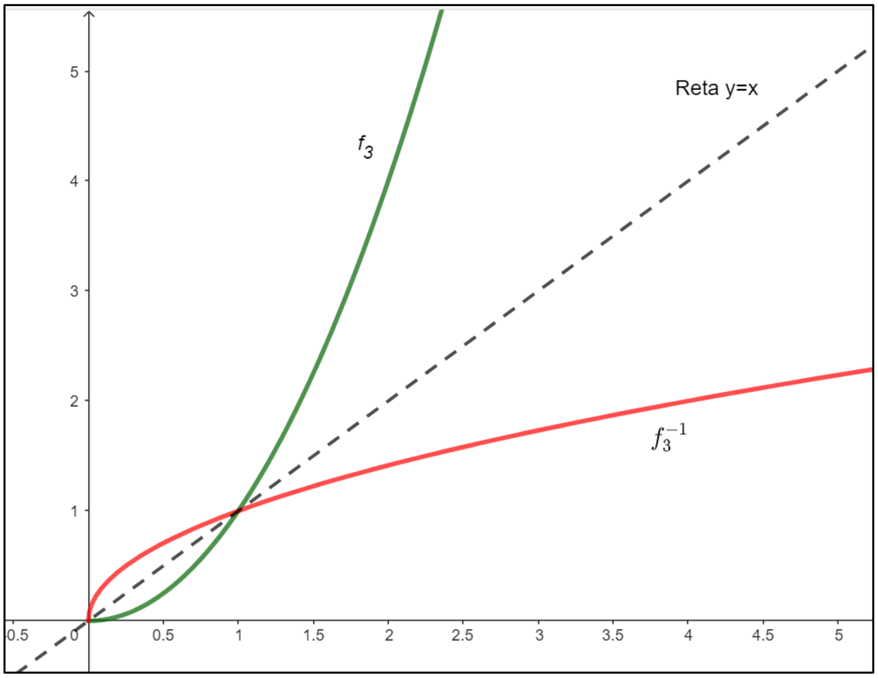


Figura 2.20 - Gráficos da restrição bijetora de f_3, tal que $f_3(x) = x^2$ e de sua inversa $f_3{}^{-1}$, onde $f_3{}^{-1}(x) = \sqrt{x}$

A Figura 2.21 a seguir apresenta os gráficos das funções f_4 e f_4^{-1}, onde $f_4^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

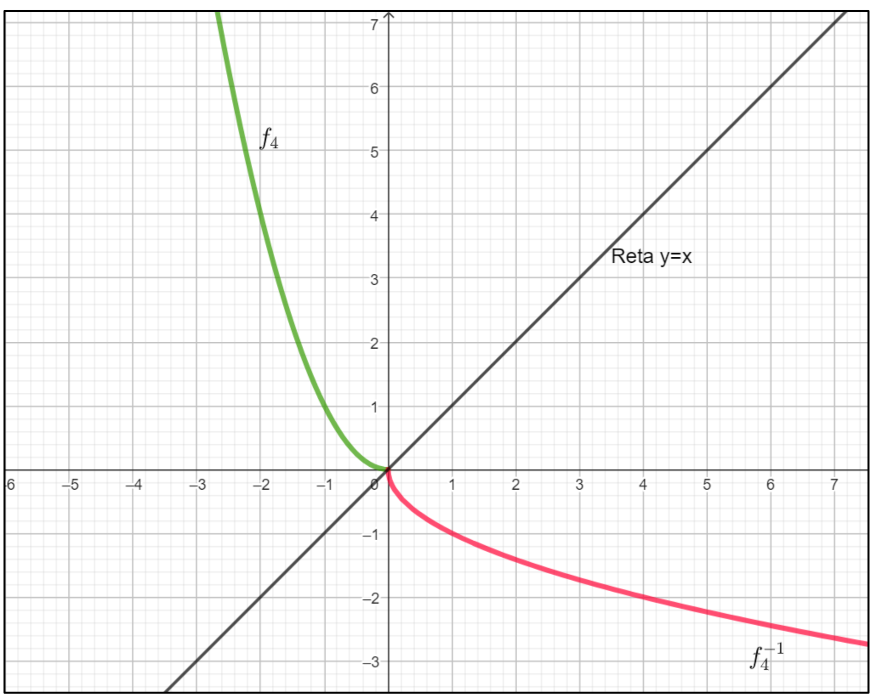


Figura 2.21 -Gráficos da função f_4, tal que $f_4(x) = x^2$ e de sua inversa $f_4{}^{-1}$, onde $f_4{}^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Voltando ao problema 2.8, a restrição da função $h: [0, +\infty[\rightarrow [10, +\infty[$ é bijetora, logo pode ser definida a inversa $h^{-1}: [10, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$. Uma vez que $c = h(t) = 10 + 0{,}016t^2$, isolando a expressão de t teremos finalmente $t = h^{-1}(c) = \sqrt{\frac{c-10}{0{,}016}}$. Usando a propriedade de simetria em relação à reta $y = x$, teremos o gráfico de h^{-1} representado na Figura 2. 22 a seguir.

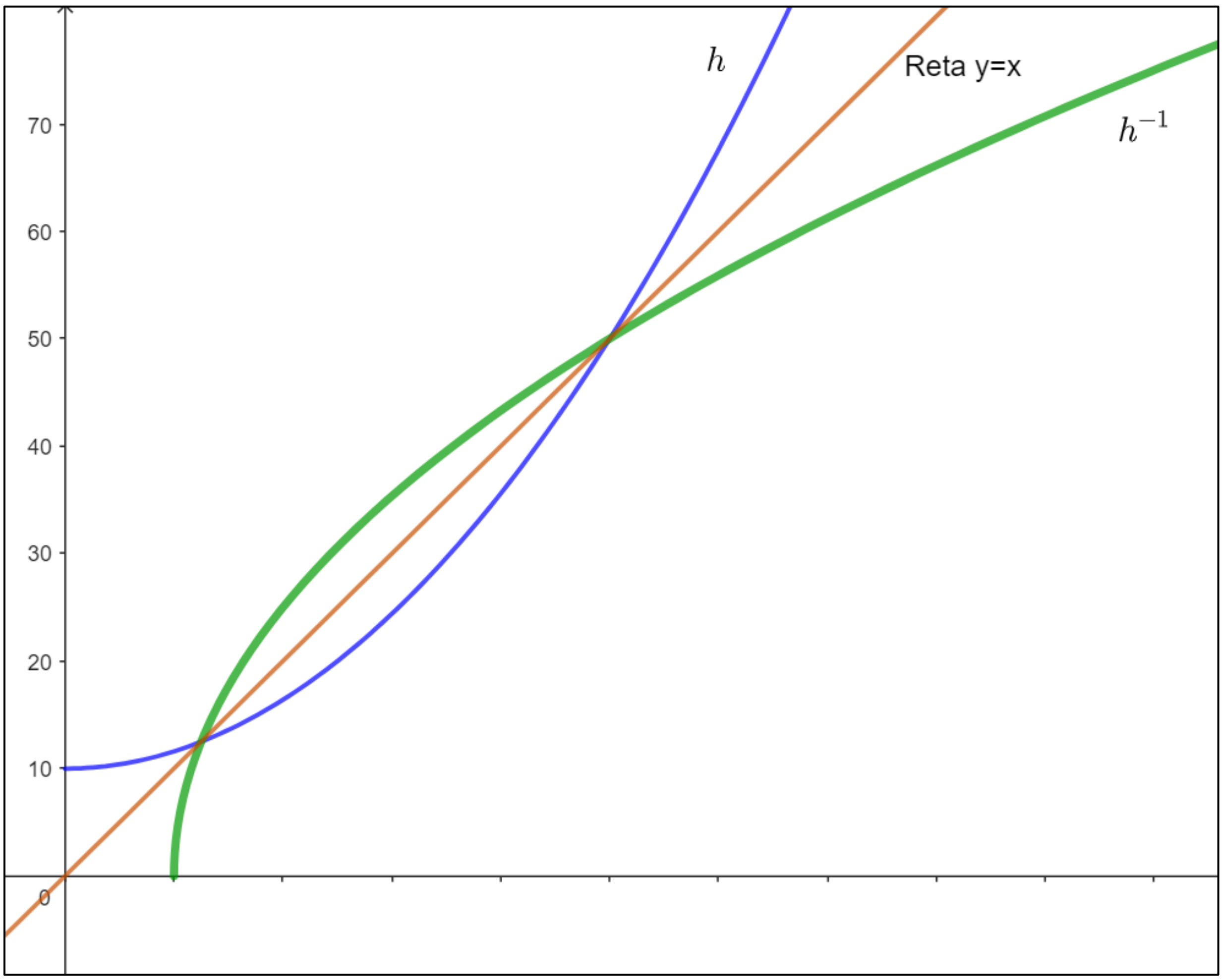


Figura 2. 22 - Gráficos da função h do problema 2.8 e sua inversa

O problema contextualizado a seguir vai explorar conceitos e propriedades relacionados à função exponencial, além de trabalhar também com a inversa desta função, utilizando abordagem algébrica e geométrica.

Problema 2.9: *A área de superfície de um litoral coberta por certas algas tem crescido aproximadamente* 25% *a cada ano, em relação à área coberta no ano anterior, de acordo com as pesquisas dos biólogos. Atualmente eles estimam que a área coberta por algas é de, aproximadamente,* 4 096 *m^2.*

a) Determine a área coberta por algas daqui a 1 ano, e daqui a 2 anos.

*b) Determine qual a área coberta por algas daqui a **t** anos.*

c) *Utilize o GeoGebra para obter o gráfico da função área, com variável $\boldsymbol{t}$ anos.*

d) *Estime quantos anos se passarão até a população de algas cobrir uma área aproximada de* $15\,625$ *m²*. (Adaptado de Iezzi, Dolce, Degenszajn e Perigo, 2011)

Uma estratégia facilitadora para lidar com este problema é a utilização do método do eixo das setas, extremamente útil também para tratar problemas diversos de Matemática Financeira, de acordo com Nasser (2010).

Para este fim, vamos construir um diagrama, que consiste em um eixo horizontal, que funciona como uma escala de passagem de tempo $\boldsymbol{t}$ (aqui medido em anos), e setas verticais relacionando a área coberta pelas algas (medida em m²). O objetivo é generalizar esta área para cada $\boldsymbol{t}$, obtendo assim uma função que representa o problema.

Das informações do enunciado sabemos que atualmente ($t = 0$), a área da população de algas é $A(0) = 4096$ m².

Daqui a 1 ano, a população vai aumentar 25%, em relação a hoje, logo, teremos $A(1) = 4096 + \frac{25}{100}.4096 = 4096 \cdot (1 + 0{,}25)$.

Daqui a 2 anos, a população vai aumentar mais 25% em relação ao ano $t = 1$, logo será $A(2) = A(1) + 0{,}25.A(1) = A(1) \cdot (1 + 0{,}25) = 4096 \cdot (1 + 0{,}25)^2$.

Transportando estas conclusões para o diagrama apresentado na Figura 2. 23, conseguimos generalizar de forma a obter a área coberta após t anos, que será $A(t) = 4096 \cdot 1{,}25^t$.

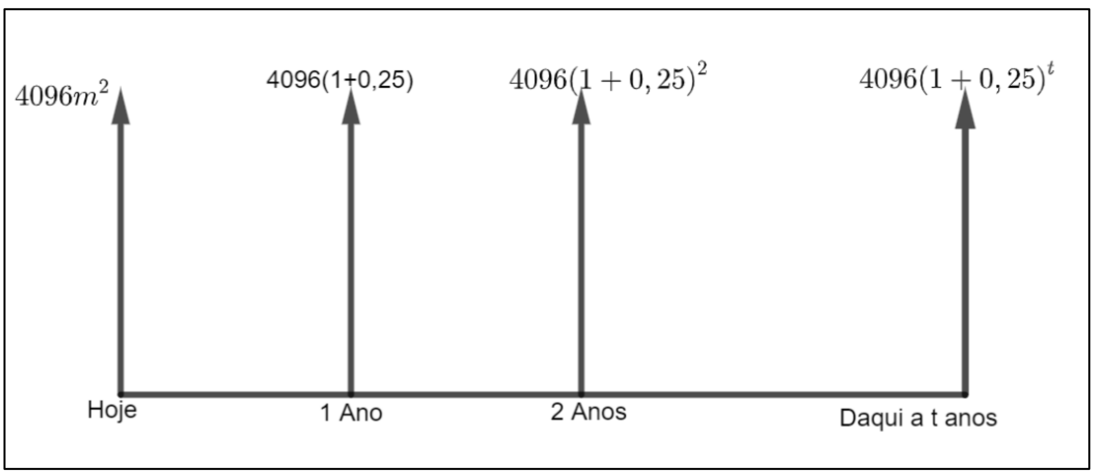


Figura 2. 23 - Diagrama do eixo das setas corresponde ao crescimento das algas

Utilizando o GeoGebra podemos obter o gráfico da função $A: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, que associa t (medido em anos) a $A(t)$ (medida em m²), que fornece a área da população de algas no ano t, representado na Figura 2.24 a seguir.

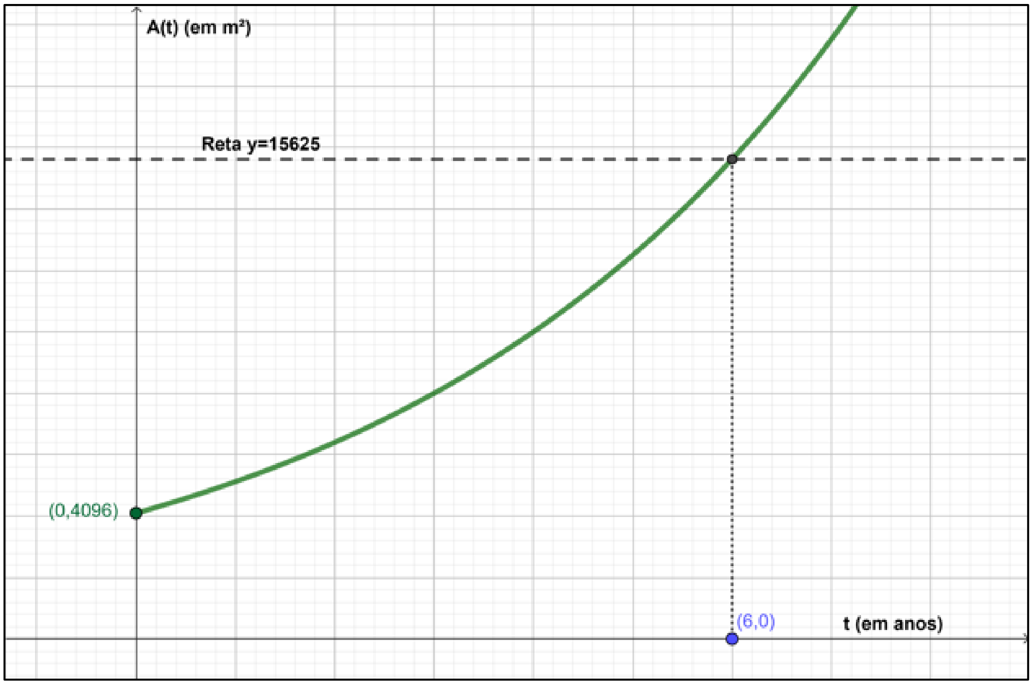


Figura 2.24 - Gráfico da função que fornece a área da população de algas em cada ano

Podemos obter a solução do último item por raciocínio algébrico ou geométrico. Utilizando a informação do enunciado, sabemos que em um tempo desconhecido t^*, a área da população de algas será $A(t^*) = 15625$ m^2.

Então $4096 \cdot (1{,}25)^{t^*} = 15625$.

Assim, $(1{,}25)^{t^*} = \frac{15625}{4096} = \frac{5^6}{4^6} = \left(\frac{5}{4}\right)^6 = (1{,}25)^6$.

Comparando então as duas expressões, obtemos $t^* = 6$ anos. Neste problema, em particular, foi possível resolver por meio de manipulações com potências, mas nem sempre os dados são tão simples, logo, é recomendável aproveitar este problema para revisar propriedades da função exponencial e de sua **inversa**.

Utilizando o *software* GeoGebra podem ser realizadas atividades com os alunos para obter o gráfico da **função exponencial** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, tal que $f(x) = a^x$. Ela é uma função bijetora, crescente quando a base $a > 1$, decrescente quando $0 < a < 1$. Logo f possui uma inversa. Uma propriedade importante é $f(x_1 + x_2) = f(x_1).f(x_2)$.

A inversa da função exponencial (de base a) é chamada **função logaritmo (de base a),** que associa a cada número real positivo x, o número real $\log_a x$. A seguir, na Figura 2. 25, o gráfico de um exemplo de função exponencial, quando a base $0 < a < 1$, juntamente com sua inversa.

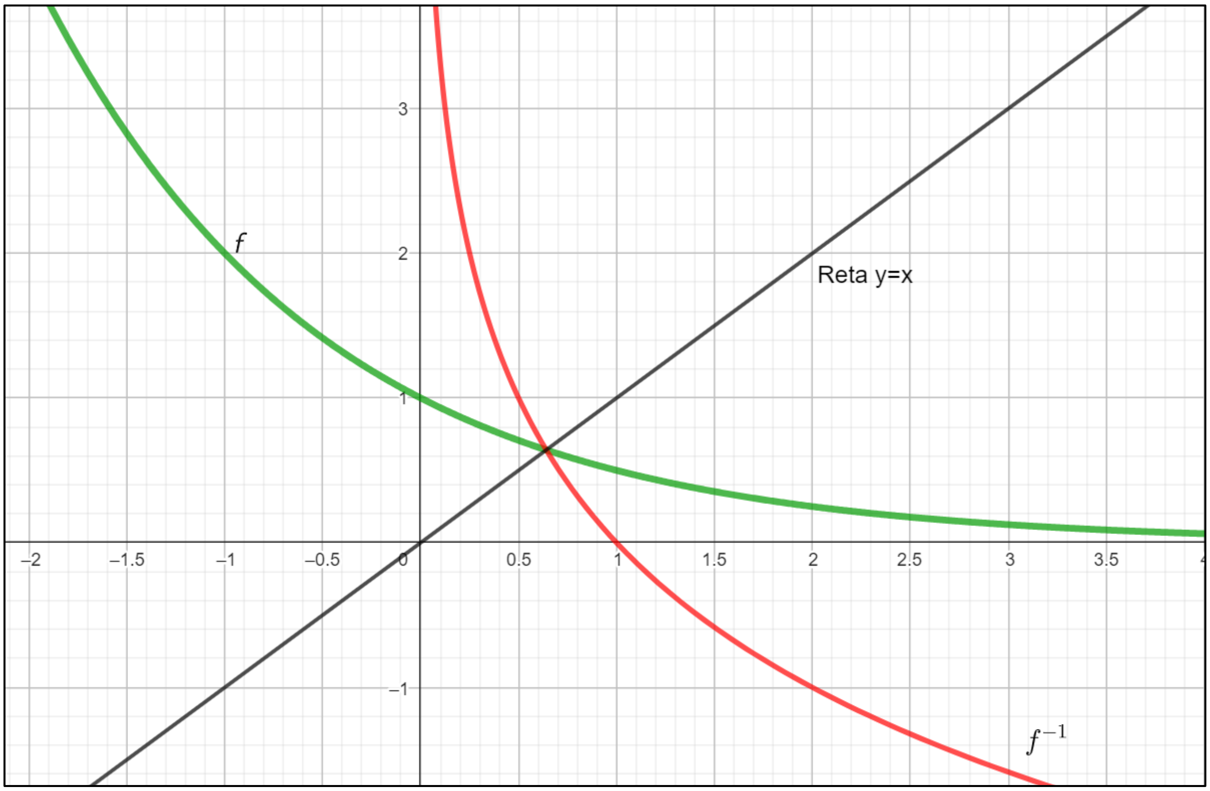


Figura 2. 25 - Gráfico de função exponencial e sua inversa quando $0 < a < 1$

Da propriedade importante da exponencial, citada acima, segue-se a seguinte propriedade da função logarítmica: $\log_a(x_1.x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$. Esta propriedade de transformar produtos em somas foi muito importante antes da invenção dos computadores, quando os cálculos, principalmente na Astronomia, envolviam grandes números.

Atualmente a função logarítmica possui outras aplicações, como em fenômenos sísmicos, por exemplo. Assim como sua inversa, é uma função crescente quando a base $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

As funções logarítmicas mais importantes são a de base $a = 10$ (**logaritmos decimais**) e a de base e (**logaritmos naturais ou neperianos**). O *software* GeoGebra também pode ser muito útil para esboçar gráficos da função logaritmo, utilizando a ferramenta que reflete o gráfico da função exponencial com respeito à reta $y = x$, para obter o gráfico da sua inversa, como já foi feito no problema 2.8.

Tem-se então que, para números $x \in \mathbb{R}$, $a^x = y$ se e somente se $x = \log_a y$, considerando $a > 0, a \neq 1, y > 0$. Então, sendo $(1{,}25)^{t^*} = \frac{15625}{4096}$, teremos $t^* = \log_{1,25}\left(\frac{15625}{4096}\right) = 6$ anos.

Para obter solução utilizando raciocínio geométrico basta proceder como na resolução do problema 2.8, considera-se a reta horizontal $y = 15625$ e obtém-se o ponto de interseção do gráfico da função A com esta reta, que será $(t^*, 15625)$.

Portanto a abscissa deste ponto será a solução procurada. Cabe ressaltar que, se a solução do problema for um valor irracional para t^*, como todo *software*, o GeoGebra vai retornar um valor aproximado, ou seja, um número racional.

O próximo problema, apesar de apresentar a função envolvida, é bastante relevante, porque trata de um assunto sempre atual, mas que não é bem compreendido por parte da maioria das pessoas.

Além disso, mostra que propriedades do logaritmo consideradas abstratas e inúteis pelos alunos podem ter utilidades práticas.

Problema 2.10: *A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é dada por um número* $I \geq 0$, *definido pela fórmula* $I = \frac{2}{3} log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, *onde E é a energia liberada no terremoto, em quilowatt-hora,* $E_o = 7.10^{-3}\ kWh$ *e o logaritmo tem base* 10*. Acredita-se que o terremoto mais intenso conhecido teve* $I = 9{,}5$ *e foi no Chile, em 1960.*

a) *Utilize o software GeoGebra para obter o gráfico da função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, *tal que* $f(x) = 10^x$;
b) *Obtenha o gráfico da função inversa de* f, *tal que* $f^{-1}(x) = log\, x$, *utilizando o resultado do item a e a ferramenta de reflexão em relação a uma reta do GeoGebra;*
c) *Determine qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter;*
d) *Supondo que a intensidade do terremoto aumente uma unidade, determine por quanto fica multiplicada a energia liberada* (Adaptado da questão 137, ENEM- prova LIBRAS, 2017).

A solução dos itens a e b está representada na Figura 2.26 a seguir. A solução do item c pode ser obtida algebricamente com auxílio da inversa da função logaritmo decimal, isto é, a função exponencial de base 10. Sabendo-se que $I = 8$, teremos que $\log(\frac{E}{E_0}) = 12$, assim $\frac{E}{E_0} = 10^{12}$. Substituindo o valor de E_o teremos $E = 7.10^9$ kWh de energia liberada.

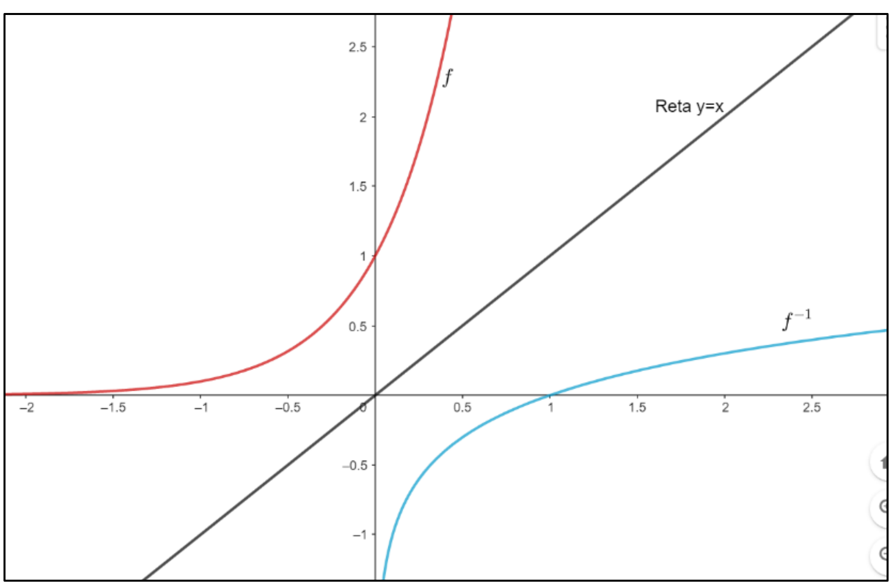


Figura 2.26 - Gráficos de função exponencial e logaritmo na base 10

No caso do item d, a propriedade dos logaritmos $\log(\frac{x_1}{x_2}) = \log x_1 - \log x_2$ será de grande ajuda para obter a solução. Do enunciado sabemos que as intensidades de dois terremotos satisfazem I_2=$I_1 + 1$. Queremos comparar a energia liberada em cada um. Da definição de I teremos $\frac{2}{3}log\left(\frac{E_2}{\mathrm{E_0}}\right) = \frac{2}{3}log\left(\frac{E_1}{\mathrm{E_0}}\right) + 1$. Então $log\left(\frac{E_2}{\mathrm{E_0}}\right) - \ log\left(\frac{E_1}{\mathrm{E_0}}\right) = \frac{3}{2}$. Usando a propriedade dos logaritmos que recordamos acima, teremos $\log(\frac{E_2}{E_1}) \ = \frac{3}{2}$. Novamente, utilizando a inversa da função logaritmo na base 10, que é a exponencial de base 10, encontramos $10^{3/2} = \frac{E_2}{E_1}$, ou seja $E_2 = 10^{3/2}E_1$.

Sendo $10^{3/2} \cong 31{,}6$ obteremos finalmente que $E_2 \cong 31{,}6\ E_1$, ou seja, o acréscimo de 1 unidade na intensidade do terremoto multiplica a energia liberada por mais de 30 vezes o número de kWh.

A escala de medida de sons (decibéis) também é logarítmica, logo um aumento na escala de 1 unidade significa muito desconforto para as pessoas. Pode ser um bom assunto para que os alunos pesquisem.

O próximo problema vai explorar uma função exponencial com base $a \in (0{,}1)$, além de resolver uma inequação exponencial, algo considerado inútil pelos alunos, e que tem utilidade prática aqui. Esta inequação será resolvida utilizando propriedade de função decrescente, que já foi explorada na seção anterior deste capítulo e a função logaritmo, inversa da exponencial. Uma outra forma de chegar à solução, utilizando GeoGebra, também será apresentada.

Problema 2.11: *Várias espécies de baleias já foram declaradas ameaçadas de extinção. Quando a população de uma particular espécie de baleias fica perigosamente pequena, biólogos encorajam governantes a banir a caça desses animais. Em 1994 havia apenas 5000 baleias de uma particular espécie, o número de baleias diminuiu para 4500 em 1995 e foi de 4050 em 1996. Considere que foi previsto que a população de baleia continuou diminuindo desta forma.*
a) Utilize o GeoGebra para determinar o gráfico de uma função que represente a evolução da quantidade de baleias ao longo do tempo, a partir de 1994.
b) Determine o que aconteceu com a população de baleias em 2001.
c) Suponha que o ponto onde essa espécie de baleias corre perigo de extinção acontece quando a população fica abaixo de 2000 baleias. Quando isso ocorrerá, se nada for feito para banir a sua caça? (Adaptado de Presmeg e Nenderadu, 2005)

É preciso estabelecer um modelo matemático que represente razoavelmente a evolução da quantidade de baleias ao longo do tempo. Para isso, devemos determinar uma função f que fornece a população de baleias dependendo da quantidade de anos passados.

A partir dos dados do enunciado temos três pontos que pertencem ao gráfico da função f: $A = (0; 5000), B = (1; 4500)\ e\ C = (2; 4050)$.

À primeira vista, uma possível f seria a função cujo gráfico é a reta que passa por A e B, porém, expandindo a janela gráfica observa-se que os pontos A, B e C não são colineares e dessa forma é gerado um pequeno erro como mostrado na Figura 2. 27 a seguir.

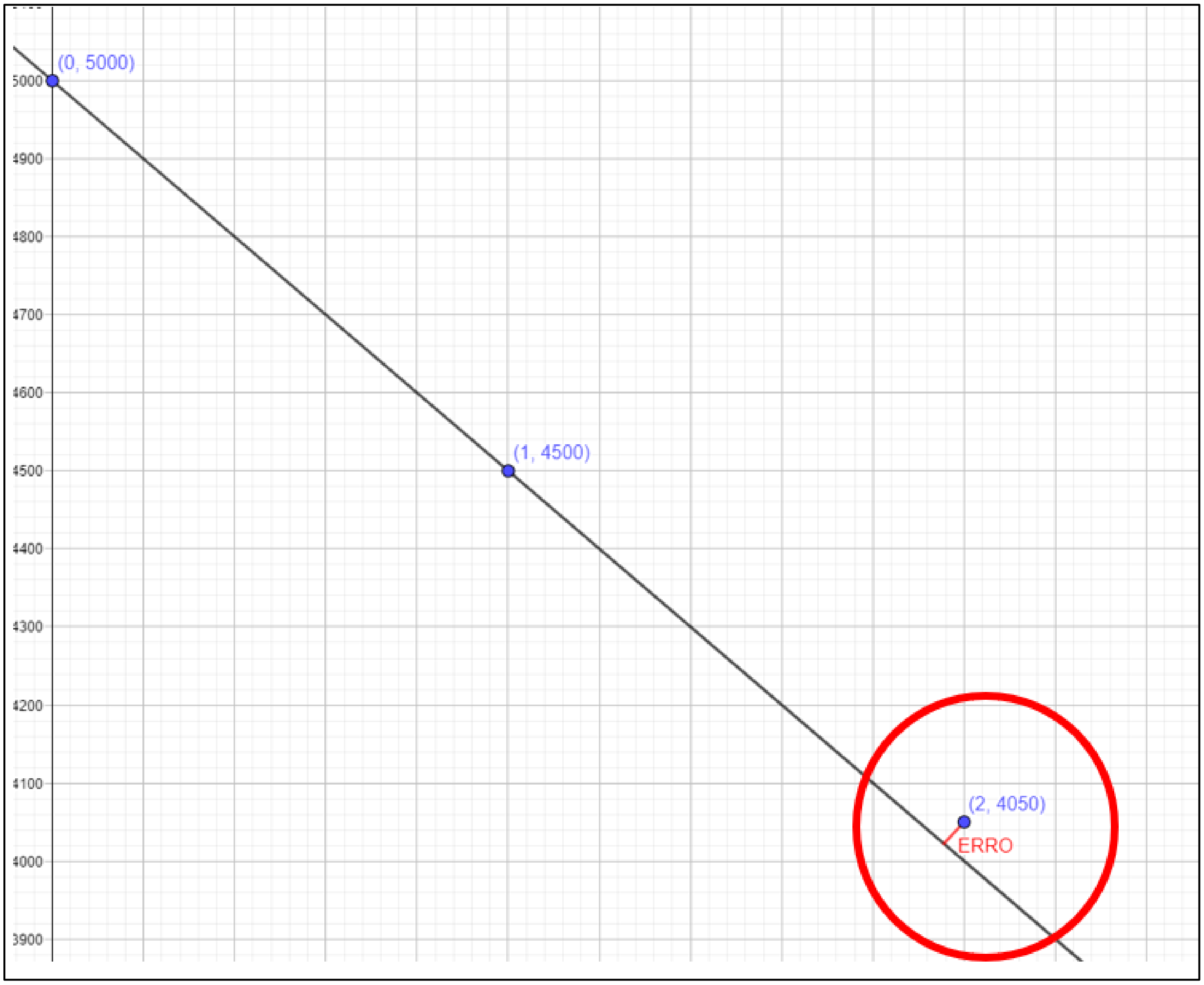


Figura 2. 27 - Pontos do gráfico da provável função para o problema 2.11

Tentaremos obter uma curva que se adapte aos pontos gerados pela nossa base de dados. Uma representação dos dados relevantes do problema por meio de uma tabela pode ser útil para determinar a expressão algébrica desta função. A partir daí pode-se procurar por um padrão, de modo que se possa estabelecer uma generalização.

Pode-se notar que o número de baleias decresce 10% em relação ao número do ano anterior. Isto aconteceu de 1994 para 1995 e de 1995 para 1996. Então temos um padrão que se repete, que pode ser generalizado. Utilizando o método do eixo das setas temos o diagrama da Figura 2 28.

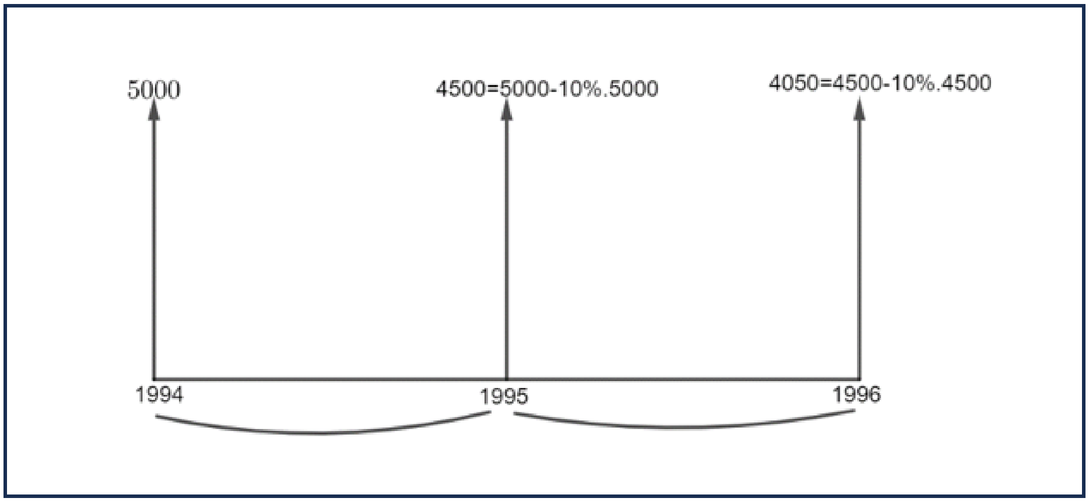


Figura 2 28 - Diagrama do eixo das setas para o problema 2.11

Assim, f é uma função tal que $f(0) = 5000$, $f(1) = 4500 = 5000 - (10\%).5000 = 5000(1 - 0{,}1) = 5000.(0{,}9)$ e $f(2) = 4050 = 4500 - (10\%).4500 = 4500(1 - 0{,}1) = 4500.(0{,}9) = f(1).(0{,}9) = 5000.(0{,}9)^2$. Generalizando, temos $f(x) = 5000.0{,}9^x$ onde x é o número de anos passados a partir de 1994 (quando $x = 0$).

Já sabemos, antes de obter o gráfico, que a função f é decrescente, pois a base da função exponencial é $0{,}9 \in]0{,}1[$. Utilizando o GeoGebra podemos obter o gráfico, apresentado na Figura 2. 29 a seguir.

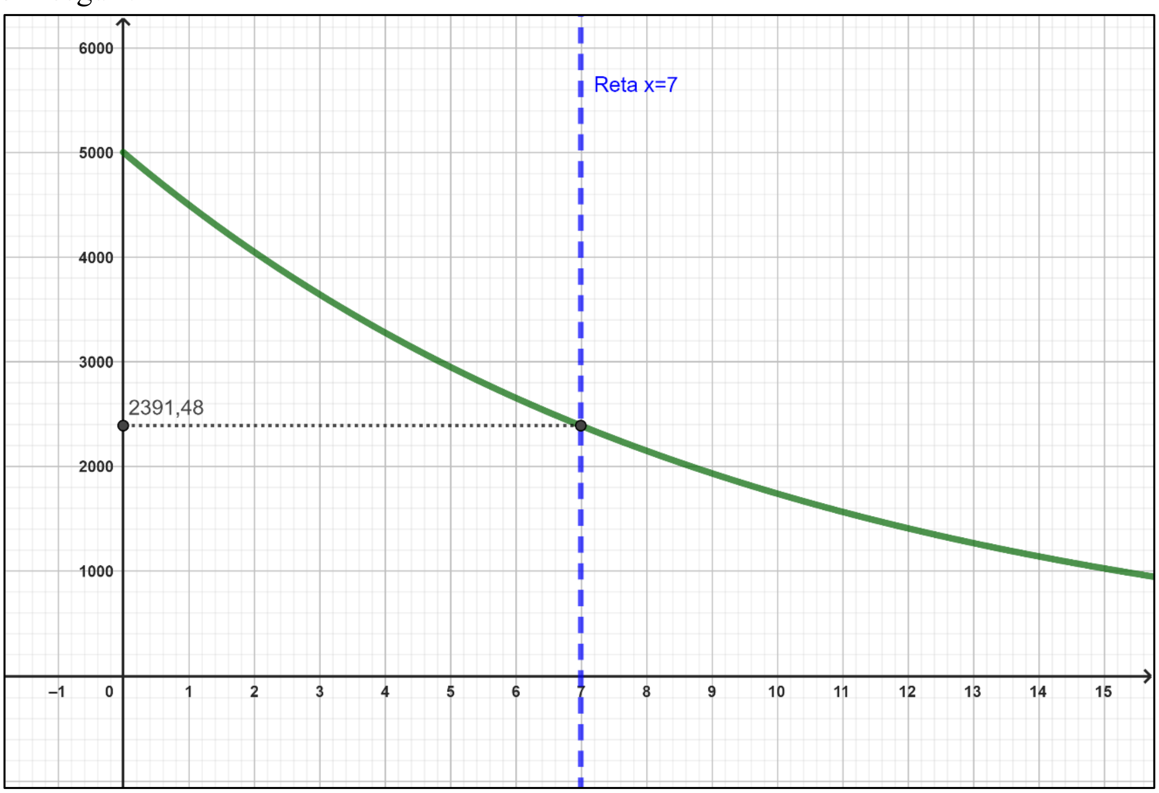


Figura 2. 29 - Gráfico da função exponencial do problema 2.11

Considerando 1994 correspondendo ao ano $x = 0$, em 2001 temos $x = 7$. Utilizando GeoGebra traçamos a reta vertical $x = 7$ e podemos obter a sua intersecção com o gráfico da função f.

Se for utilizada a expressão algébrica da função f, basta calcular o valor de $f(7) = 5000.\,0{,}9^7 = 2391{,}48$. Como nosso modelo é uma aproximação da realidade, devemos aproximar este número pelo inteiro mais próximo, obtendo que a população em 2001 será de, aproximadamente, 2391 baleias.

Para resolver o item c precisamos determinar o valor de x (número de anos após 1994) em que $f(x) < 2000$. Uma forma simples de resolver esta inequação é a seguinte: observando a figura 2. 27 podemos notar que, sendo f uma função decrescente, se determinarmos x^* tal que $f(x^*)= 2000$, teremos que, se $x > x^*$ então $f(x) < f(x^*)= 2000$.

Para obter x^* temos que resolver agora a equação $5000.\,0{,}9^{x^*} = 2000$, obtendo inicialmente $0{,}9^{x^*} = \frac{2}{5}$. Como já revisamos antes, precisaremos da inversa da exponencial, isto é, a função logarítmo. Neste caso teremos então que $x^* = \log_{0{,}9}\left(\frac{2}{5}\right)$.

As calculadoras embutidas nos celulares costumam calcular somente logaritmos na base 10 (decimais) e na base $\boldsymbol{e}$ (logaritmos naturais ou neperianos). É importante revisar com os alunos o número irracional $\boldsymbol{e}$, que pode ser obtido por um processo que utiliza o conceito de limite, o qual será estudado na primeira disciplina de CDI.

Este número tem valor aproximado $\boldsymbol{e} \cong 2{,}72$, e possui uma história importante. Detalhes desta história podem ser consultados em Boyer (1996), Eves (2004), Struik (1954) e outros livros sobre história da Matemática.

Podemos transformar o número procurado utilizando a propriedade dos logaritmos conhecida como fórmula de mudança de base: $\log_a y = \log_a b\,.\log_b y$, válida para cada número real $y > 0$, onde $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$.

No nosso caso, tomando $a = 10, b = 0{,}9$ e $y = 2/5$, teremos $x^* = \frac{\log_{10}\left(\frac{2}{5}\right)}{\log_{10}(0{,}9)}$. Utilizando uma calculadora de celular encontraremos $x^* \cong 8{,}696718$.

Portanto, se $x > 8{,}696718$ (número de anos a partir de 1994, aproximadamente a partir de 2003) teremos que a população ficará abaixo de 2000 baleias, o que significará risco de extinção.

Outra forma de resolver é usando o *software* GeoGebra. A interseção da reta horizontal $y = 2000$ com o gráfico de f será o ponto $(x^*, 2000)$. A abscissa será fornecida (de forma aproximada) pelo GeoGebra, conforme mostra a Figura 2. 30 a seguir.

Estudos mostram que os alunos apresentam dificuldades na articulação entre a leitura e a interpretação das representações gráficas cartesianas, conforme já foi comentado na seção 1 do primeiro capítulo deste livro. Os alunos também costumam ter muita dificuldade para trabalhar com problemas que misturam conteúdos que foram estudados na Escola Básica em momentos distintos.

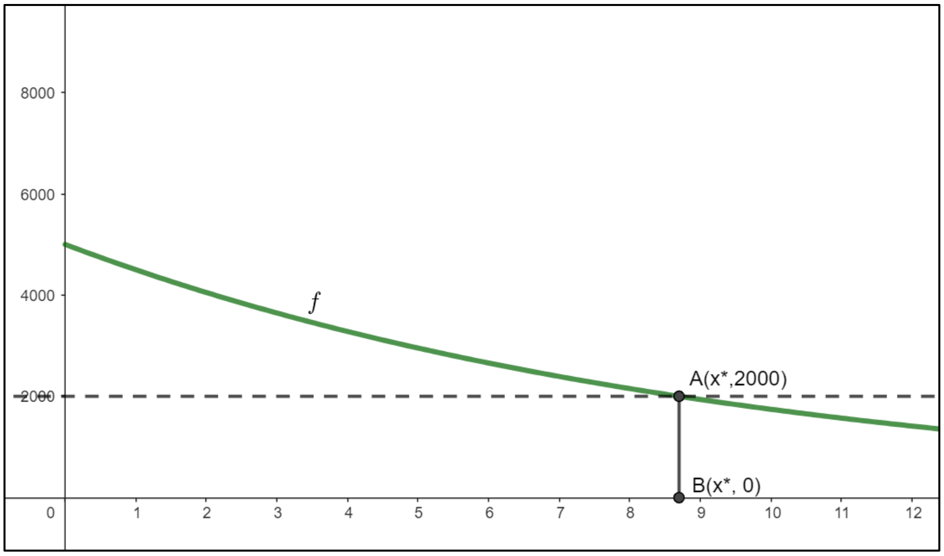


Figura 2. 30 - Solução geométrica aproximada do item c do problema 2.11

O próximo problema fornece informações por meio do gráfico da função logarítmo e necessita, para sua solução, de propriedades da função logaritmo e de áreas de figuras planas, como o trapézio e o triângulo.

Ao invés de muitos problemas, que fornecem dados no registro algébrico e, a partir deste, se chega ao registro gráfico, o problema a seguir necessita da conversão do registro gráfico para o algébrico para sua solução, o que é considerado mais difícil pelos estudantes.

Problema 2.12: *Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função* $y = log_n x$, *com* $n > 1$, *conforme Figura 2. 31 a seguir. Suponha que* $A = (x - 1{,}0)$, $B = (x, 0)$ *e* $C = (x + 1{,}0)$.

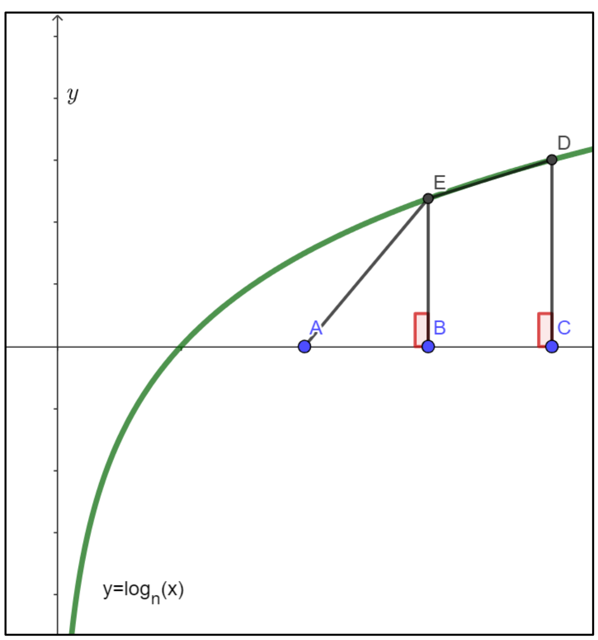


Figura 2. 31 - Gráfico do logaritmo. Fonte: FUVEST

a) Determine o valor de x, para o qual a área do trapézio $BCDE$ é o triplo da área do triângulo ABE.
b) Considere a função f, que a cada valor de x, associa o valor obtido subtraindo a área do trapézio $BCDE$ menos a área do triângulo ABE. Determine o valor de n, de modo que $f(999) = \frac{3}{2}$. (Adaptado do vestibular FUVEST)

A área do triângulo ABE é dada por $\frac{b.h}{2} = \frac{\overline{AB}.\overline{BE}}{2} = \frac{1.\log_n x}{2}$ e a área do trapézio $BCDE$ é dada por $\frac{(B+b)h}{2} = \frac{(\overline{CD}+\overline{BE})\overline{BC}}{2} = \frac{(\log_n(x+1)+\log_n x).1}{2}$.

Portanto, igualando a área de $BCDE$ ao triplo da área de ABE, obteremos a equação $\frac{\log_n(x+1)+\log_n x}{2} = 3\ \frac{1.\log_n x}{2}$. Assim, $\log_n(x+1) + \log_n x\ = 3\log_n x$, de onde se encontra $\log_n(x+1) = 2\log_n x$.

Usando a propriedade dos logaritmos em que $\log(x^y) = \mathrm{y}\log x$, a última igualdade equivale a $\log_n(x+1) = \log_n(x^2)$.

Temos então que $x + 1 = x^2$, ou seja $x^2 - x - 1 = 0$. Resolvendo esta equação, lembrando que $x > 0$ para a função logaritmo estar definida, teremos $\mathrm{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Para resolver o item b, utilizando as informações obtidas no item a, podemos escrever $f(x) = \frac{(\log_n(x+1)+\log_n x).1}{2} - \frac{1.\log_n x}{2}$. Então $f(x) = \frac{1.\log_n(x+1)}{2}$. Como $f(999) = \frac{3}{2}$ tem-se $\frac{1.\log_n(1000)}{2} = \frac{3}{2}$, o que acarreta que $log_n(1000) = 3$.

Utilizando a exponencial que é a inversa do logaritmo, isto significa que $n^3\ =\ 1000$, concluindo que $n = 10$.

O último problema desta seção, embora a função já mencionada no enunciado seja uma exponencial, utiliza, na sua resolução, propriedades da inversa desta função, isto é, a função logaritmo. Isto acontece em grande parte dos problemas que envolvem uma das duas funções, as propriedades da inversa muitas vezes aparecem como facilitadoras no processo de resolução, ou na modelagem. Cabe notar que, como a exponencial tem base e, ao utilizar a inversa, foi naturalmente escolhida a função logaritmo também na base e.

Problema 2.13: *Quando um corpo aquecido a uma certa temperatura permanece em um ambiente com temperatura constante A, a lei do resfriamento de Newton afirma que a temperatura D do corpo se modifica com uma taxa de variação proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do ambiente.*
Esta situação pode ser representada pela função f, que associa a cada instante t, a temperatura do corpo naquele instante, definida por $\boldsymbol{D = f(t) = A + Be^{(-Kt)}}$, onde K é uma constante determinada experimentalmente e que varia com o material do qual é feito o corpo, sua massa e sua condutividade térmica.

O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da perícia chegou às 23:30 h e imediatamente mediu a temperatura do cadáver, que era de $34{,}8^o\ C$. *Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou* $34{,}1^o\ C$. *A temperatura do quarto estava sendo mantida constante a* $20^o\ C$. *Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é aproximadamente* $36{,}5^o\ C$.

a) Determine uma estimativa para a hora em que foi cometido o crime.

b) Utilize o GeoGebra para obter um esboço do gráfico da função f.

(Adaptado de Figueiredo e Neves, 1997)

A temperatura ambiente $A = 20°C$, logo a função $f(t) = 20 + Be^{(-Kt)}$. Consideremos que $t = 0$ corresponde à hora da morte T. Nesse caso $f(0) = 36{,}5$. Assim $f(0) = 20 + B = 36{,}5$. Logo $B = 16{,}5$ e $f(t) = 20 + 16{,}5e^{(-Kt)}$.

Após t_1 horas após o crime temos $f(t_1) = 34{,}8 = 20 + 16{,}5e^{(-Kt_1)}$. Depois de mais 1 hora, isto é, decorridas $t_1 + 1$ horas após o crime, teremos o valor de $f(t_1 + 1) = 34{,}1°C = 20 + 16{,}5e^{(-K(t_1+1))}$.

Temos então um sistema com 2 equações não lineares: $14{,}8 = 16{,}5e^{(-Kt_1)}$ e $14{,}1 = 16{,}5e^{(-Kt_1)}.e^{(-K)}$. Dividindo uma equação pela outra, tem-se $14{,}1 = 14{,}8\ e^{(-K)}$, o que acarreta que $e^{-K} = \frac{14{,}1}{14{,}8}$. Substituindo na primeira equação obtemos $14{,}8 = 16{,}5(e^{-K})^{t_1} = 16{,}5\left(\frac{14{,}1}{14{,}8}\right)^{t_1}$. Assim chegamos a $\left(\frac{14{,}1}{14{,}8}\right)^{t_1} = \frac{14{,}8}{16{,}5}$ e teremos $\ln\left(\frac{14{,}1}{14{,}8}\right)^{t_1} = \ln\left(\frac{14{,}8}{16{,}5}\right)$. Usando a propriedade do logaritmo de uma potência obtemos $t_1 = \frac{ln\left(\frac{14{,}8}{16{,}5}\right)}{ln\left(\frac{14{,}1}{14{,}8}\right)} \cong 2{,}246\ h$, ou $t_1 \cong$ 2h15min.

Sendo T a hora da morte e, t_1 horas depois da morte ter ocorrido, a polícia chega às 23:30h, então $T + t_1 = 23{:}30\ h$. Concluímos então que $T \cong 23h30min - 2h15min = 21h15min$.

Note que não chegamos a obter o valor da constante K, já que o nosso objetivo principal era achar t_1. Se desejarmos encontrá-la, aplicando de novo propriedades de logaritmo, chegamos a $K = ln\left(\frac{14{,}8}{14{,}1}\right) \cong 0{,}048$.

Com o valor de K obtido acima, que se aplica a seres humanos em geral, a função que determina a temperatura em cada instante vai satisfazer $f(t) = A + Be^{(-Kt)} = A + B\ e^{(-0{,}048t)}$. Como $f(0) = A + B = 36{,}5$ é a temperatura aproximada de uma pessoa no instante da morte, temos que $B = 36{,}5 - A$, onde A é a temperatura do ambiente onde está a vítima. Concluímos então que $f(t) = A + (36{,}5 - A).e^{(-0{,}048.t)}$.

Conhecendo esta fórmula, os peritos de seriados de TV chegam na hora H, medem neste momento a temperatura do ambiente A e a temperatura do corpo, que será o valor $f(t_1)$. Eles então substituem este último valor na fórmula, a partir dela encontram o tempo que passou entre a hora da morte T e a hora em que eles chegaram H, que é o valor de t_1. Então a hora da morte será, aproximadamente, $T = H - t_1$.

No caso do problema 2.13, como a temperatura ambiente era $A = 20^0$ Celsius, a função f satisfaz $f(t) = 20 + 16{,}5e^{(-0{,}048.t)}$. Utilizando o GeoGebra obtemos o gráfico de f, apresentado na Figura 2. 32 a seguir. Note que a temperatura do corpo com o passar do tempo se aproxima da temperatura do ambiente (que é de 20^o Celsius), que está de acordo com a Física.

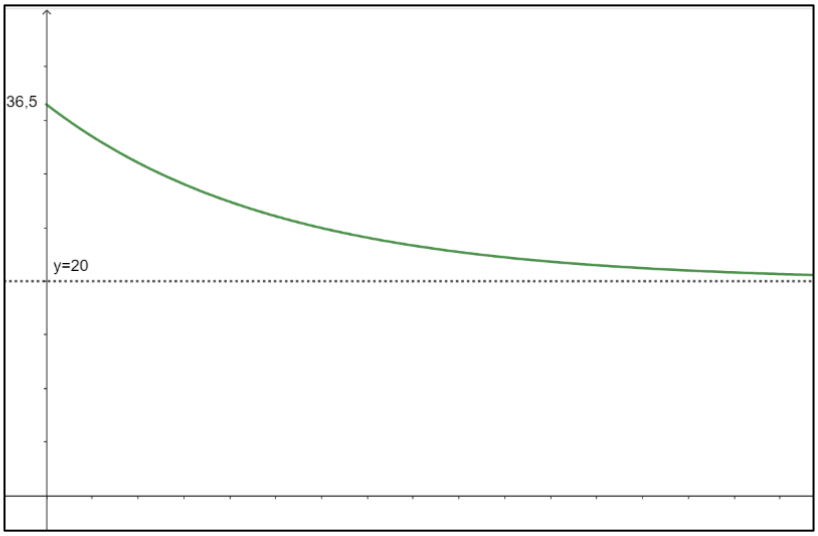


Figura 2. 32 - Gráfico da função temperatura de um corpo segundo a lei de resfriamento de Newton

Como já visto nas seções anteriores, a utilização de funções na resolução de problemas pode ser facilitada com o conhecimento de algumas propriedades da função: em que intervalos ela é crescente ou decrescente, se ela é bijetora, se ela pode ser expressa como composta de duas outras funções mais simples ou se existe a sua inversa.

Um outro elemento facilitador é conhecendo a representação algébrica da função, conseguir determinar se o seu gráfico possui certas características de simetria ou de repetição. Para a próxima seção foram selecionados problemas envolvendo algumas funções importantes que possuem este tipo de propriedades.

Alguns destes problemas exploram também a composta destas funções importantes com função afim e como esta operação afeta o gráfico destas funções. Este tipo de funções compostas é importante para modelar problemas envolvendo diversos fenômenos físicos e biológicos.

2.3 Funções Pares/Ímpares e Funções Periódicas

O primeiro problema desta seção explora gráficos, simetrias e repetições. As atividades em sala de aula com os alunos são muito enriquecidas pela utilização do GeoGebra.

Problema 2.14: *Seja* $f: [-5{,}5] \to \mathbb{R}$ *uma função tal que uma parte do seu gráfico está representada na Figura 2. 33 (a).*
a) Utilize as ferramentas do GeoGebra para completar o gráfico de f*, sabendo que o gráfico é simétrico em relação à origem.*

b) Considerando que a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par e periódica de período $T = 4$, utilize as ferramentas do GeoGebra para completar o seu gráfico, respeitando as informações sobre ele apresentadas na Figura 2. 33 (b).

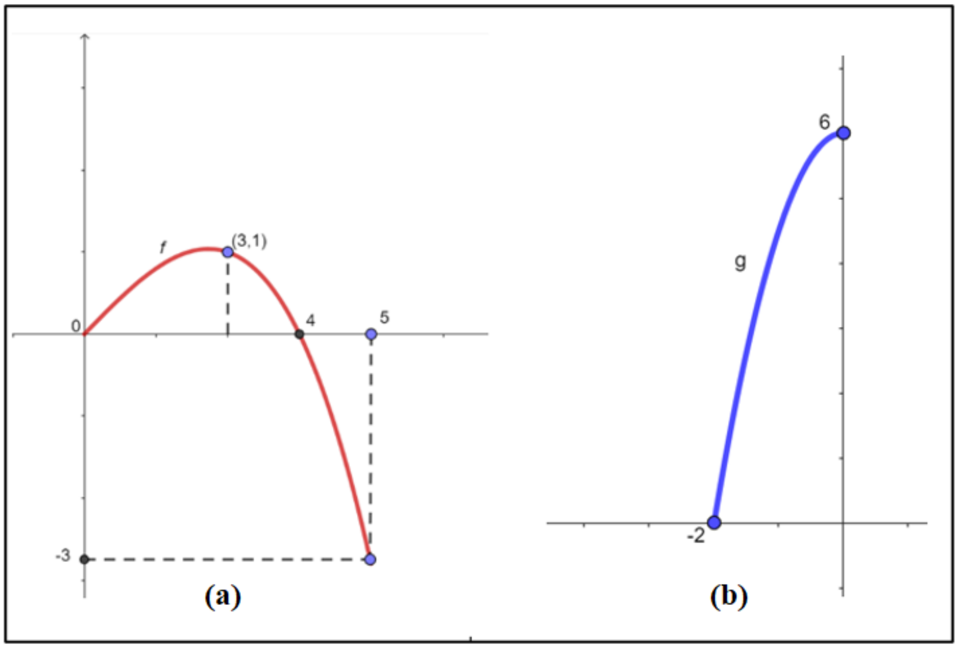


Figura 2. 33 - Parte dos gráficos das funções f e g do problema 2.14

Para obter a solução do problema, recordemos a definição de **função par**: $g: X \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = g(-x)$, para cada $x \in X$, domínio da função g. Geometricamente o gráfico de g é simétrico em relação ao eixo cartesiano vertical.

Uma **função ímpar**, $f: X \to \mathbb{R}$, é aquela que satisfaz a condição em que $f(x) = -f(-x)$, para cada $x \in X$, domínio da função f, tal que $-x \in X$. Geometricamente isto significa que o gráfico de f é simétrico em relação à origem (ou seja, é obtido após reflexão em relação ao eixo cartesiano vertical, seguida de reflexão em relação ao eixo cartesiano horizontal ou viceversa).

Uma função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **periódica** quando existe um número $T \neq 0$ tal que $h(x + T) = h(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Quando isto acontece, então $h(x + kT) = h(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$ e para cada $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $h(x + T) = h(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$ é chamado **período** da função f.

Pode-se notar, observando diretamente a definição, que funções pares e funções periódicas não podem ser injetoras.

Comparando com a definição acima, verificamos que a função f do item a é uma função ímpar. Utilizando-se a ferramenta do GeoGebra de reflexão em relação a um ponto (no caso a origem), associado ao gráfico da Figura 2. 33 (a), obtemos o gráfico de f, representado na Figura 2.34 a seguir.

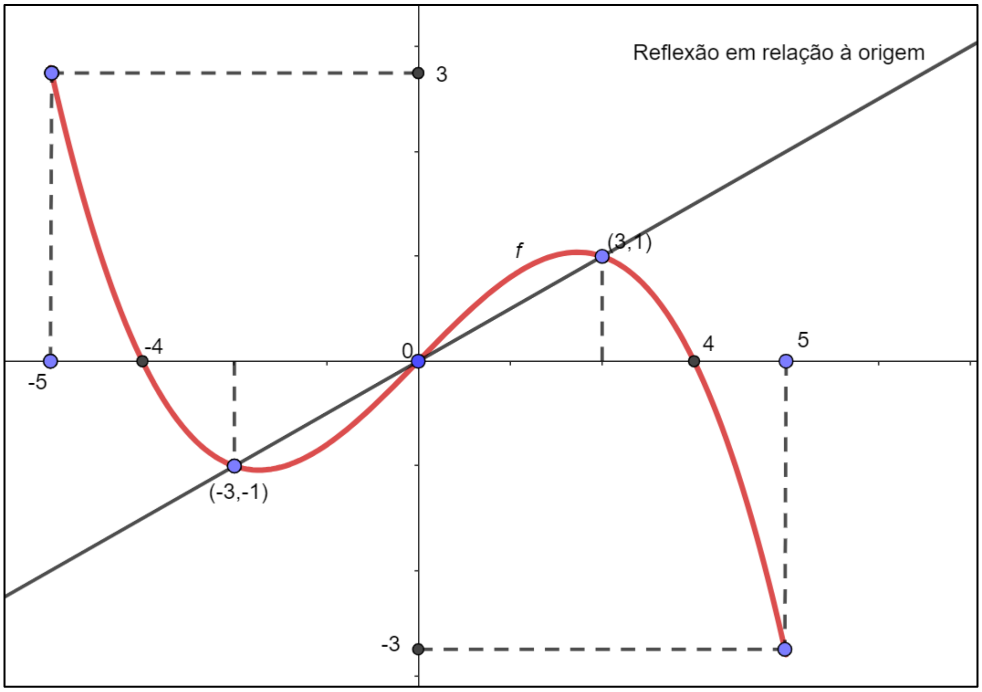


Figura 2.34 - Gráfico da função ímpar f do problema 2.14

Utilizando as definições de função par e de função periódica fornecidas anteriormente e a ferramenta do GeoGebra de reflexão em relação a uma reta, a partir do gráfico da Figura 2. 33 (b), obtemos o gráfico de g, apresentado na Figura 2.35.

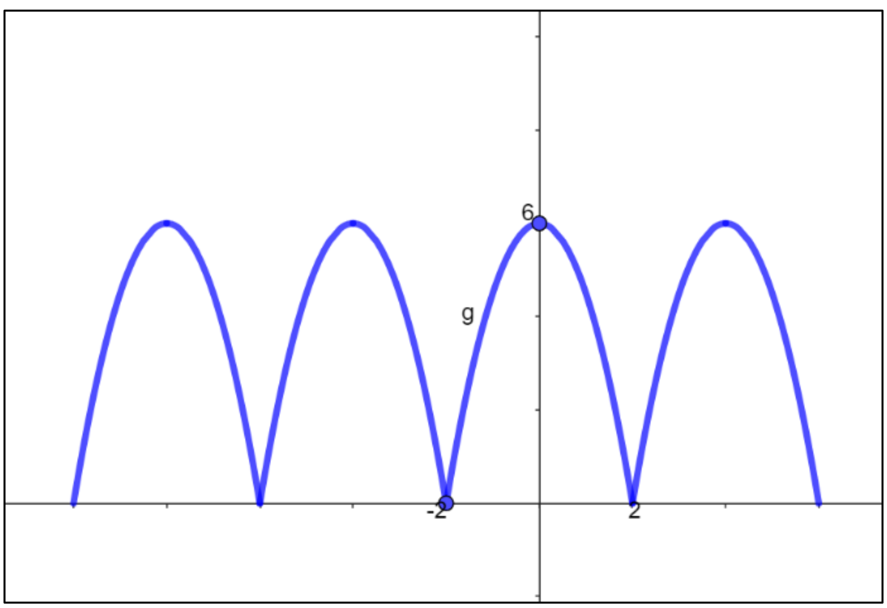


Figura 2.35 - Gráfico da função g par e periódica de período 4 do problema 2.14

Nasser, Sousa e Torraca (2016) investigaram o conhecimento de alunos de CDI em relação a funções pares, ímpares, ou nem pares nem ímpares, utilizando problemas como o problema 2.14.

Foi possível perceber que a identificação de funções pares (pela simetria em relação ao eixo vertical) ocorre com mais facilidade do que a de funções ímpares.

Assim é importante trabalhar em sala de aula mais problemas envolvendo gráficos de funções ímpares, de preferência utilizando o GeoGebra.

Para evitar que os alunos comecem a tirar conclusões falsas do resultado do item (b) do problema 2.14, é interessante lançar entre eles uma pesquisa sobre exemplos de função par/ímpar que não seja periódica e de função periódica que não seja par/ímpar.

Duas funções periódicas muito importantes, utilizadas para modelar problemas envolvendo conceitos de Física, Química ou Biologia, são as **funções trigonométricas seno e cosseno**. Elas podem ser utilizadas para descrever fenômenos como fases da lua, altura das marés, pressão arterial, ondas eletromagnéticas, volume de ar nos pulmões, entre muitos outros.

Muitos alunos têm dificuldades associadas a elas na primeira disciplina de CDI, porque ou elas foram abordadas de forma muito superficial no Ensino Médio ou nem foram abordadas.

Problemas envolvendo estas funções, que formam o alicerce das funções trigonométricas, são importantes em uma disciplina de Pré-Cálculo, principalmente se explorarem os seus gráficos e algumas propriedades fundamentais, como seno e cosseno da soma e da diferença.

Lacunas de aprendizagem das demais funções trigonométricas e as funções trigonométricas inversas poderão ser resolvidas mais tarde na disciplina de CDI, se os alunos já tiverem esta base inicial.

Problema 2.15: A *maior roda gigante do mundo foi inaugurada em 2021, é a Dubai Eye, instalada em Dubai, nos Emirados Árabes Unidos. Comporta até 1700 passageiros em 48 cápsulas, com duração do passeio de, aproximadamente, 40 minutos. Nesta roda gigante, a altura* h *(em metros) em que um passageiro se encontrará no instante* t *(em minutos), foi determinada pela seguinte lei:* $h = 126 - 124\cos\left(\frac{\pi}{20}\,t\right)$, onde $t \in [0, 40]$.

a) No início do passeio, a que altura se encontrará o passageiro? E após 25 minutos?

b) Utilize o GeoGebra para determinar o gráfico da função $f\colon t \mapsto h = f(t)$.

c) Determine a altura máxima que o passageiro atingirá durante o passeio e em que instante isto ocorrerá (*utilize, se necessário, as seguintes aproximações:* $\sqrt{2} \cong 1{,}4$ *e* $\sqrt{3} \cong 1{,}7$).

Inicialmente revisaremos a definição das funções seno, cosseno e tangente, seus gráficos e algumas propriedades importantes.

No Ensino Fundamental, ao estudar triângulos retângulos com hipotenusa medindo a e ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, opostos respectivamente aos catetos com medidas b e c, conforme mostra a Figura 2.36 foram **definidos** $\mathbf{sen}\,(\hat{\boldsymbol{B}}) = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$, ou seja, o quociente entre a medida do cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$ e a medida da hipotenusa, $\mathbf{cos}\,(\hat{\boldsymbol{B}}) = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$, ou seja, o quociente entre a medida do cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$ e a medida da hipotenusa. De forma análoga foram definidos $\mathbf{sen}\,(\hat{\boldsymbol{C}}) = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$

e $\boldsymbol{\cos}\,(\widehat{\boldsymbol{C}})=\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$. A tangente do ângulo agudo $\hat{B}$ foi definida como o quociente entre o $\text{sen}(\hat{B})$ e o cos $(\hat{B})$, ou seja, $\mathbf{tg}(\widehat{\boldsymbol{B}}) = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$. De forma similar foi definida a $\mathbf{tg}(\widehat{\boldsymbol{C}}) = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$.

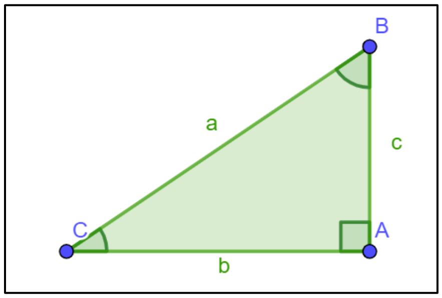


Figura 2.36 - Seno e cosseno num triângulo retângulo

Foi possível definir também a cotangente de ângulos agudos, como $\frac{1}{\text{tangente}}$, a secante, como $\frac{1}{\text{cosseno}}$ e a cosecante, como $\frac{1}{\text{seno}}$. As **funções trigonométricas** generalizam estes conceitos, para cada arco real x.

A **função seno** é definida como a que associa a cada número real x o valor do seno do arco que mede x radianos. A **função cosseno** é definida, de modo análogo, como a que associa a cada número real x o valor do cosseno do arco que mede x radianos. A **função tangente** é definida como a que associa a cada número real x, tal que $\cos x \neq 0$, o valor da tangente do arco que mede x radianos. Da mesma forma se podem definir a **função cotangente**, a **função secante** e a **função cossecante**.

A função seno e a função cosseno podem ser construídas com auxílio da circunferência trigonométrica (circunferência com centro na origem e raio igual a 1), da seguinte maneira:

Quando o arco $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, denominado **primeiro quadrante** da circunferência, temos que o ponto P, interseção da circunferência trigonométrica com o segmento de reta a partir da origem (centro da circunferência trigonométrica), que forma arco x com o eixo x positivo, tem coordenadas $(\cos x, \text{sen}\, x)$, conforme a figura 2. 37 (a) e, se o arco pertencer ao **segundo quadrante,** onde $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, as funções seno e cosseno são definidas como $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \beta = \text{sen}(\pi - x)$ e $\cos x = -\cos \beta = -\cos(\pi - x)$, conforme a Figura 2.37 (b).

Pelo mesmo raciocínio, se o arco pertencer ao **terceiro quadrante,** onde $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, as funções seno e cosseno poderão ser definidas como $\text{sen}\, x = -\text{sen}\, \beta = -\text{sen}(x - \pi)$ e $\cos x = -\cos \beta = -\cos(x - \pi)$ e, quando o arco pertencer ao **quarto quadrante,** quando o arco $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, as funções seno e cosseno serão definidas como $\text{sen}\, x = -\text{sen}\, \beta = -\text{sen}(2\pi - x)$ e $\cos x = \cos \beta = \cos(2\pi - x)$.

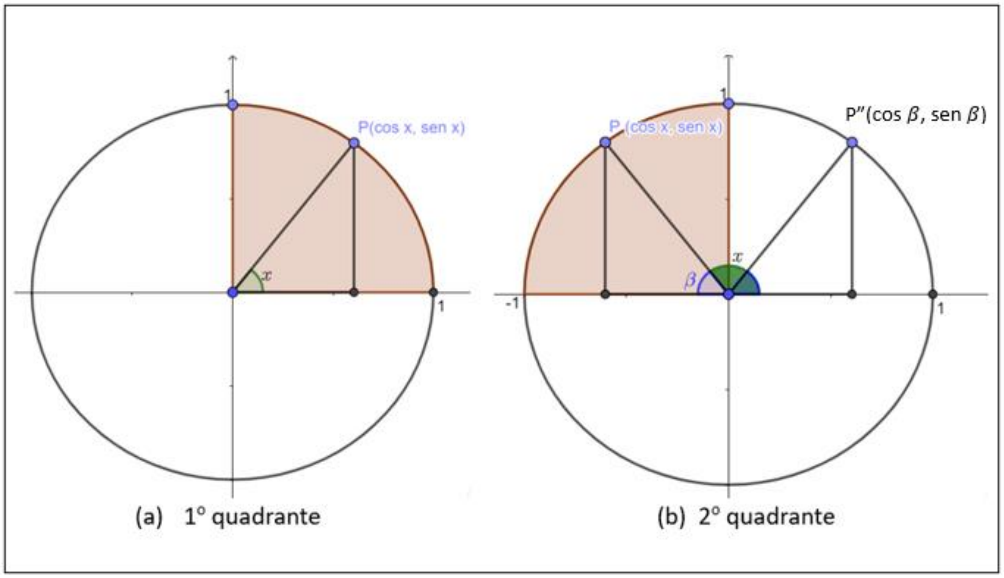


Figura 2.37 - Seno e cosseno nos dois primeiros quadrantes da circunferência trigonométrica

Consideram-se arcos com medida positiva, quando medidos a partir do eixo das abscissas no sentido anti-horário, e com medida negativa, caso contrário. Quando um arco x é maior do que 2π radianos os valores de $\operatorname{sen} x$ e de $\cos x$ são obtidos considerando-se o círculo trigonométrico sendo percorrido mais de uma vez, ou seja, as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π.

A Figura 2.38 mostra a associação entre cada arco x no círculo trigonométrico e seu respectivo $\operatorname{sen} x$.

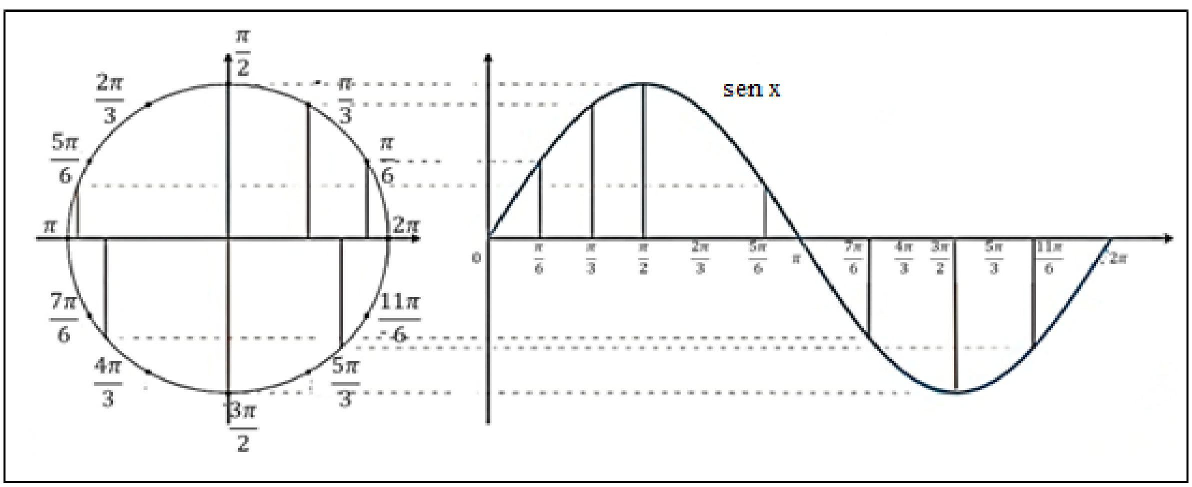


Figura 2.38 - Gráfico da função seno para valores de x ∈ [0,2π]

O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$, obtido utilizando-se o *software* GeoGebra, está representado na Figura 2. 39 .

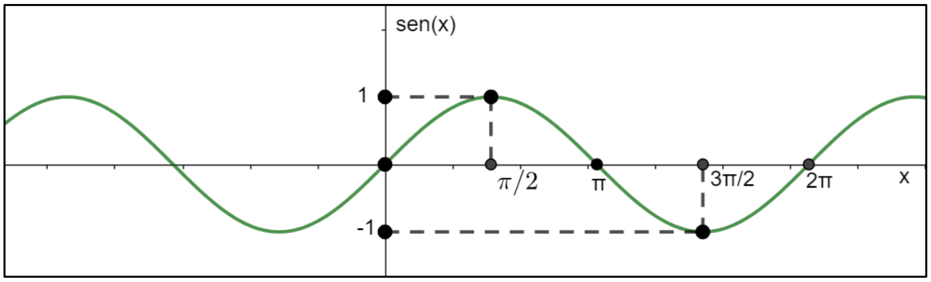


Figura 2. 39 - Gráfico da função real sen x

A função seno é ímpar, periódica de período $T = 2\pi$. Sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$. Seus valores principais são $\text{sen}\, 0 = \text{sen}\, \pi = \text{sen}(2\pi) = 0$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$. Outros valores importantes são $\text{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

O gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \cos x$, obtido utilizando-se o *software* GeoGebra, está representado na Figura 2. 40 .

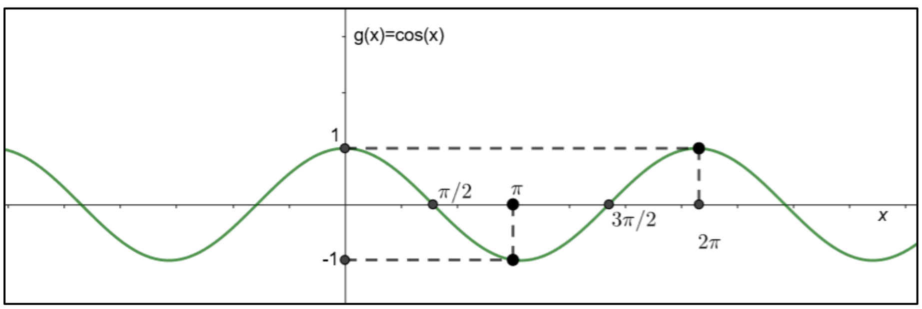


Figura 2. 40 - Gráfico da função cosseno

A função cosseno é par, periódica de período $T = 2\pi$. Sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$. Os seus valores principais são: $\cos 0 = \cos(2\pi) = 1$, $\cos \pi =$ -1, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$. Outros valores importantes são $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pode-se observar também que o gráfico da função cosseno é a translação do gráfico da função seno de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda, ou seja, $\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. No apêndice A1 deste livro, o exemplo A1.10 mostra como utilizar recursos do GeoGebra para obter o gráfico da função cosseno por translação do gráfico da função seno.

As demais funções trigonométricas, também podem ser construídas com auxílio da circunferência trigonométrica.

A representação gráfica da função tangente é caracterizada pelos seus pontos de descontinuidade, como mostra a Figura 2. 41.

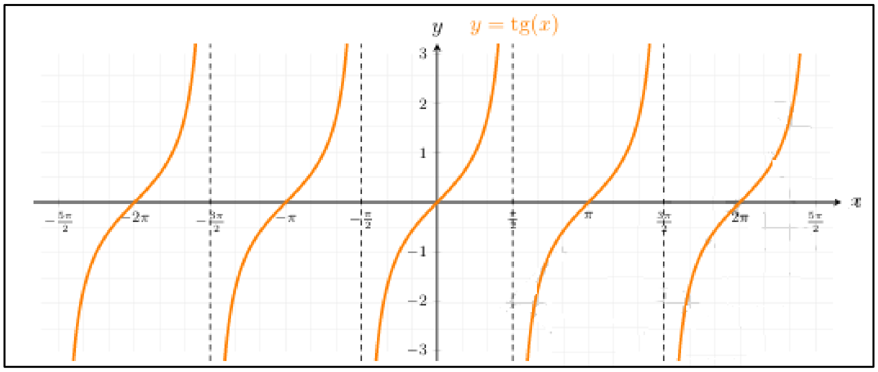


Figura 2. 41 - Gráfico da função tangente

Existem muitas propriedades importantes envolvendo as funções seno, cosseno e tangente, que são grandes facilitadoras na resolução de problemas. Entre elas, cabe destacar a relação $\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x) = 1$; o seno da soma, $\mathrm{sen}(x + y) = \mathrm{sen}(x).\cos(y) + \mathrm{sen}(y).\cos(x)$ e o da diferença, $\mathrm{sen}(x - y) = \mathrm{sen}(x).\cos(y) - \mathrm{sen}(y).\cos(x)$; a fórmula para o cosseno da soma $\cos(x + y) = \cos(x).\cos(y) - \mathrm{sen}(x).\mathrm{sen}(y)$ e, de modo similar, para o da diferença, dada por $\cos(x - y) = \cos(x).\cos(y) + \mathrm{sen}(x).\mathrm{sen}(y)$. Finalmente, a fórmula para a tangente da soma, $\mathrm{tg}(\,x + y) = \frac{\mathrm{tg}(x)+\mathrm{tg}(y)}{1-\mathrm{tg}(x).\mathrm{tg}(y)}$ e da diferença $\mathrm{tg}(\,x - y) = \frac{\mathrm{tg}(x)-\mathrm{tg}(y)}{1+\mathrm{tg}(x).\mathrm{tg}(y)}$.

Cabe observar que as funções trigonométricas, sendo periódicas, não são injetoras. Considerando restrição delas a domínios em que elas sejam injetoras, e com contradomínios coincidindo com imagem, teremos restrição de seno, cosseno e tangente bijetoras, logo possuindo inversas, que são muito úteis.

No caso da função tangente, considerando a restrição $h\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, encontraremos a inversa que a cada real x associa um número real arc $\mathrm{tg}(x)$, no intervalo aberto $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, conforme mostra a Figura 2. 42 a seguir.

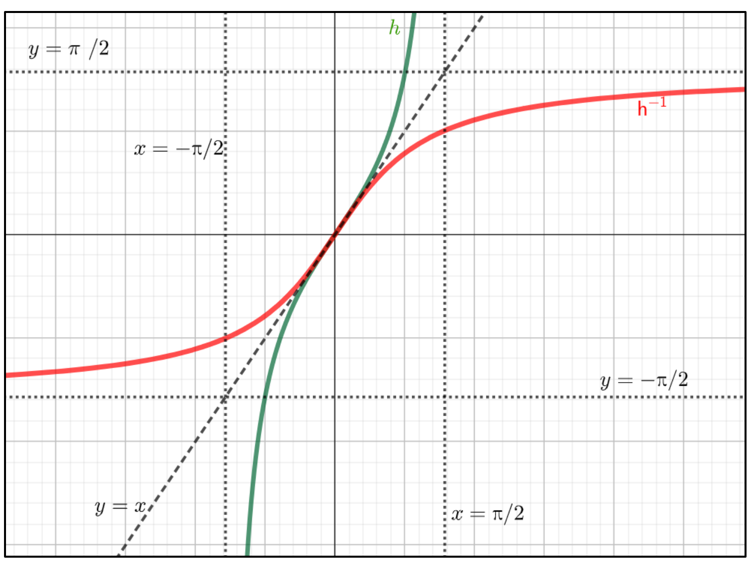


Figura 2. 42 - Gráfico da função tangente h e sua inversa arcotangente h^{-1}

Estamos agora prontos para resolver o problema 2.15. No caso do item a calculamos primeiro a altura inicial, $h_1 = f(0) = 126 - 124\cos 0 = 126 - 124 = 2$m.

Após 25 minutos, $h = f(25) = 126 - 124\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Utilizando a fórmula do cosseno da soma e alguns dos valores importantes de seno e cosseno, obtemos que $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, $h = 126 + 62\sqrt{2} \cong 213{,}7$ m.

Utilizando o GeoGebra obtemos o gráfico da função $f: [0,40] \to \mathbb{R}$, conforme Figura 2.43.

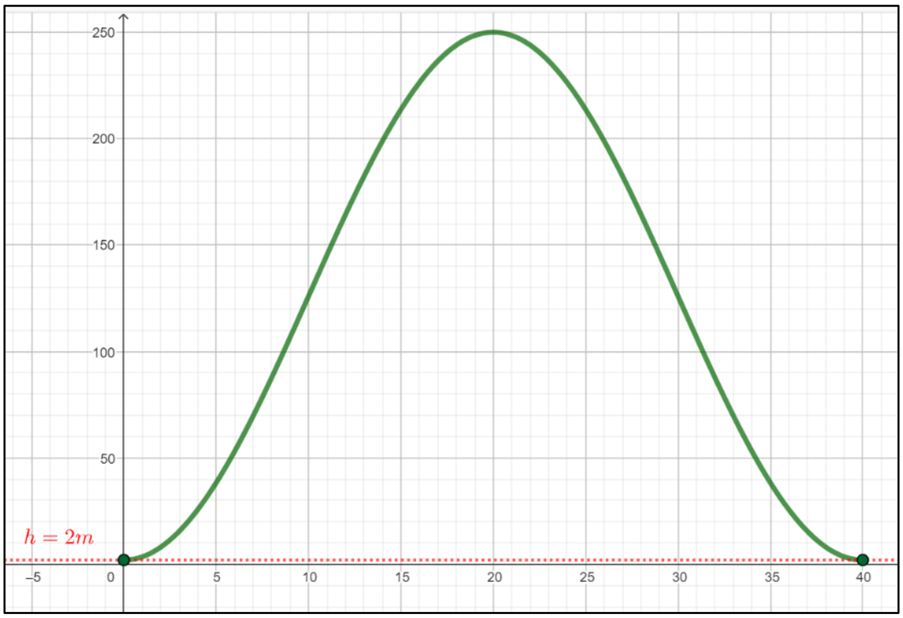


Figura 2.43 - Gráfico da função f do problema 2.15

Uma forma de obter a solução do item c é estudando a função altura e observando o gráfico da função cosseno na Figura 2. 40.

Temos $h = 126 - 124\cos\left(\frac{\pi}{20}\,t\right)$ e $0 \leq t \leq 40$. Assim, $0 \leq \frac{\pi}{20}\,t \leq \frac{\pi}{20}.40 = 2\pi$. No intervalo $[0, 2\pi]$, a função cosseno tem valor máximo igual a 1 e mínimo igual a (-1).

Observando a fórmula para a altura h notamos que, como se trata de uma subtração, o valor de h aumenta à medida que a parcela a subtrair diminui, então h será máxima quando o cosseno tiver valor mínimo. Assim, a altura máxima será $h = 126 - 124(-1) = 250$ metros.

Pelo gráfico da Figura 2. 40, o valor mínimo de $\cos x$ é -1 quando $x = \pi$. Neste problema $x = \frac{\pi}{20}\,t$, portanto $\pi = \frac{\pi}{20}\,t$. Chegamos finalmente ao valor procurado de $t = 20$ minutos.

Outra forma de chegar à solução deste item é utilizar um raciocínio geométrico, explorando o gráfico obtido no item b com auxílio do GeoGebra, associado a uma outra ferramenta deste *software*, a reta tangente a uma curva. Esta forma de obter o valor máximo ou mínimo de uma função será apresentada em detalhe mais adiante, no capítulo 3.

Supondo que a função h do problema anterior fosse estendida para cada $t \in \mathbb{R}$, qual será o seu período? Para que a função cos x complete um **período ou ciclo completo**, x deve variar entre 0 e 2π. Definindo $x = \frac{\pi}{20}\ t$, então teremos $0\ \leq \frac{\pi}{20}\ t \leq 2\pi$, o que acarreta que $0\ \leq t \leq 40$ deverá ser o ciclo completo. Assim, o período de h será $T = 40$ min.

Ao trabalhar com funções periódicas é importante observar como o período se modifica ao considerar uma função trigonométrica (como seno ou cosseno) composta com outra função (geralmente uma função afim, em particular uma função linear).

De modo geral é simples verificar, da mesma forma como foi feito no caso anterior, que o período das funções definidas por $y = a + b\text{sen}(ct + d)$ ou $y = a + b\cos(ct + d)$, onde a, b, c, d são constantes reais e $c \neq 0$ será $T = \frac{2\pi}{|c|}$, ou seja, o período não depende das constantes a, b e d. Esta propriedade será utilizada na resolução do próximo problema. Note que o valor das constantes a e b tem o poder de alterar os valores máximo e mínimo das funções. Já o valor das constantes c e d influem nos valores de t onde as funções alcançam valor máximo e mínimo.

Problema 2.16: *O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a Figura 2. 44 a seguir.*

Suponha que, em um instante t*, medido em segundos, a altura* $h(t)$ *do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão* $h(t) = 4 + 4\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}05}\ t\right)$.

a) Determine a altura mínima e a altura máxima que este pistão pode atingir.
b) Encontre o número de ciclos completos que este pistão realiza, funcionando durante 1 minuto.
c) Utilize o GeoGebra para obter o gráfico da função h. (Adaptado do vestibular UFPR)

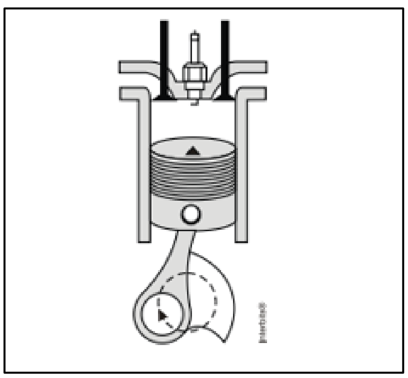


Figura 2. 44 - Pistão de um motor dentro de um cilindro
Fonte: UFPR (2013)

Sabendo que o valor máximo e o valor mínimo de $sen(x)$ são, respectivamente, 1 e -1, obtemos $h_{min} = 4 + 4(-1) = 0$ e $h_{max} = 4 + 4(1) = 8$, ou seja, a altura mínima do pistão será 0 cm e a altura máxima será de 8 cm.

Para obter a solução do item b, determinamos primeiro o período da função h, com base na propriedade já mencionada anteriormente. Teremos $T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{0,05}} = 2\pi.\frac{0,05}{2\pi} = 0,05$. Então, quando o pistão se movimenta por 0,05 segundos, ele realiza um ciclo completo. Se o pistão funcionar durante 1 minuto, isto é, por 60 segundos, efetuando uma regra de três simples, teremos que o número de ciclos completos é $n = \frac{60}{0,05} = 1200$ ciclos completos.

O gráfico da função h, obtido utilizando-se o GeoGebra, está representado na Figura 2. 45.

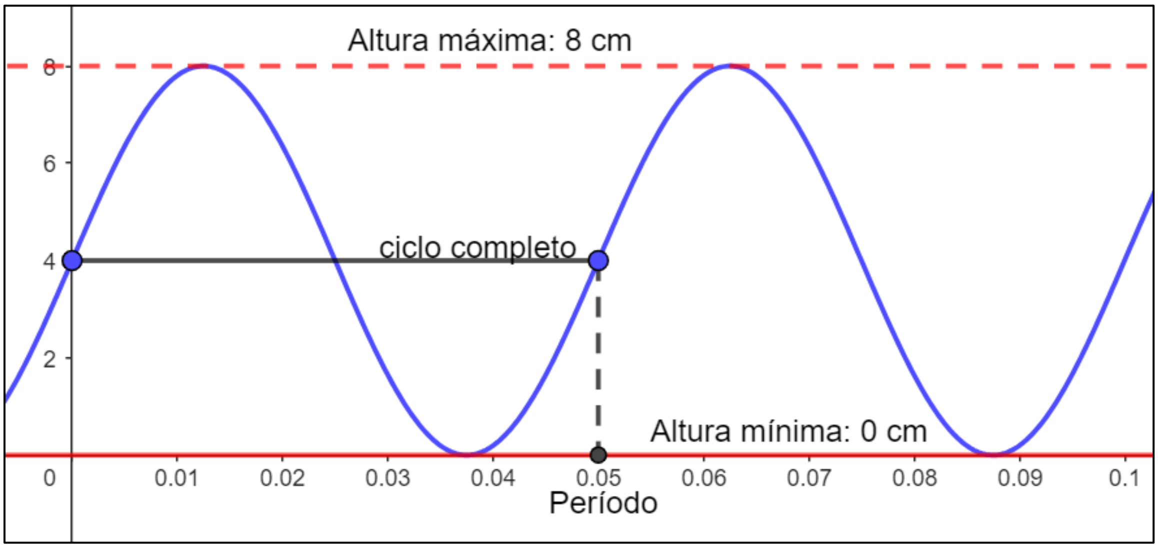


Figura 2. 45 - Gráfico das oscilações de um pistão

No próximo problema, tem-se uma ideia da função que descreve o fenômeno periódico e o objetivo é determiná-la completamente com auxílio de informações sobre o fenômeno. Apesar de parecer complicado, o fato de se tratar de um fenômeno periódico com vários dados observados conhecidos faz com que sua solução, neste caso, seja bastante simples.

Problema 2.17: *O subir e descer das marés é regulado por vários fatores, sendo o principal deles a atração gravitacional entre Terra e Lua. Se desprezássemos os demais fatores, teríamos sempre o intervalo de 12,4 horas entre duas marés altas consecutivas, e sempre a mesma altura máxima de maré, por exemplo, 1,5 metro. Nessa situação, o gráfico da função que relacionaria tempo* (t) *e altura de maré* (A) *seria semelhante ao da Figura 2. 46 a seguir.*

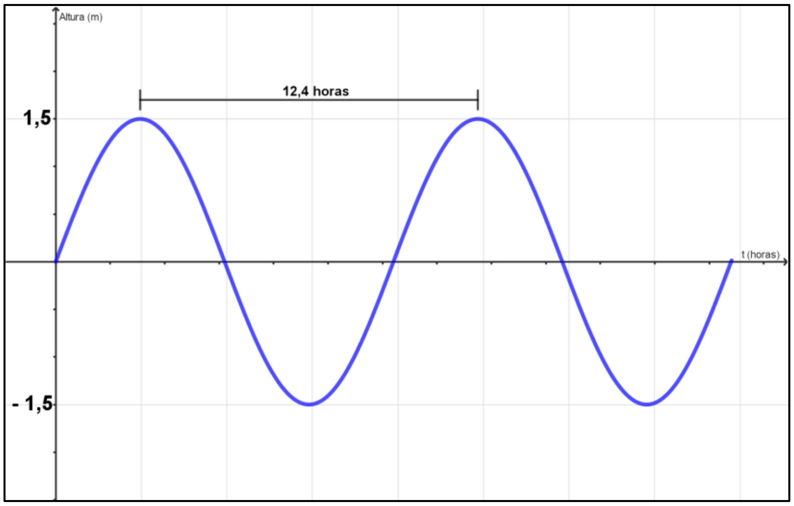


Figura 2. 46 - Função $f: t \to A$ que descreve altura das marés
Fonte: PUC Campinas, SP

O fenômeno das marés pode ser descrito então por uma função f tal que $A = f(t) = \alpha \text{ sen } (\beta t)$, onde A é medida em metros e t, em horas. O intervalo entre duas marés altas sucessivas é de 12,4 horas, tendo sempre a mesma altura máxima de 1,5 metro. Determine o valor das constantes α e β.(Adaptado vestibular PUC-Campinas, SP)

Dos dados observados sabemos que o período da função f é $T = 12{,}4$. Por outro lado, como já foi apontado antes, o período de uma função qualquer f tal que $f(t) = b \text{ sen}(ct + d)$ é dado por $T = \frac{2\pi}{|c|}$. Então $\frac{2\pi}{|c|} = 12{,}4$, logo os dois valores possíveis são $c = \mp \frac{\pi}{6{,}2}$. Supondo que $c = \frac{\pi}{6{,}2}$, os valores da função f terão que satisfazer a equação $f(t) = \alpha \text{ sen}\left(\frac{\pi t}{6{,}2}\right)$, onde $\beta = \frac{\pi}{6{,}2}$. Como a altura máxima vai ocorrer quando o valor da função seno for máximo, isto é, quando $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6{,}2}\right) = 1$ e $f(t) = 1{,}5$, logo obrigatoriamente $\alpha = 1{,}5$. Uma possível função f será tal que $f(t) = 1{,}5 \text{ sen}\left(\frac{\pi t}{6{,}2}\right)$. Outra solução para as constantes será $\beta = -\frac{\pi}{6{,}2}$, acarretando que o valor de $\alpha = -1{,}5$, portanto a função terá a mesma expressão algébrica.

O próximo problema também consiste em determinar uma função que descreva o fenômeno, mas é menos imediato que o que acabamos de apresentar.

Problema 2.18: *Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo (até a inauguração da Dubai Eye), a High Roller, situada em Las Vegas. A Figura 2. 47 representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras.*

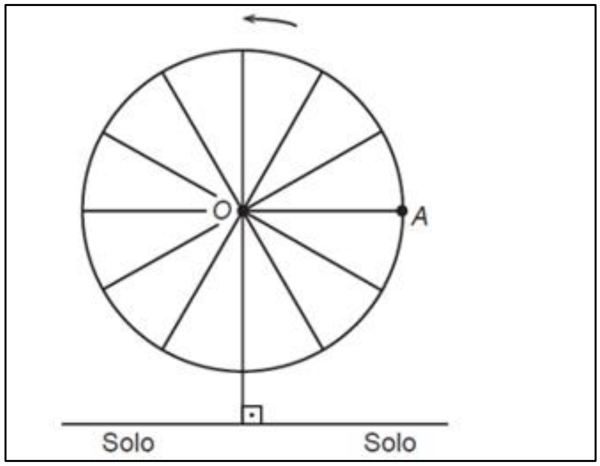


Figura 2. 47 - Esquema da roda-gigante High Roller
Fonte: adaptado de http://en.wikipedia.org.

A partir da posição indicada, em que o segmento AO se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento AO em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o gráfico da Figura 2. 48. A altura pode ser calculada pela expressão $f(t) = a + b.\cos(t) + c.\operatorname{sen}(t)$. Determine então o valor de cada constante a, b e c. (Adaptado da questão 170, ENEM 2018)

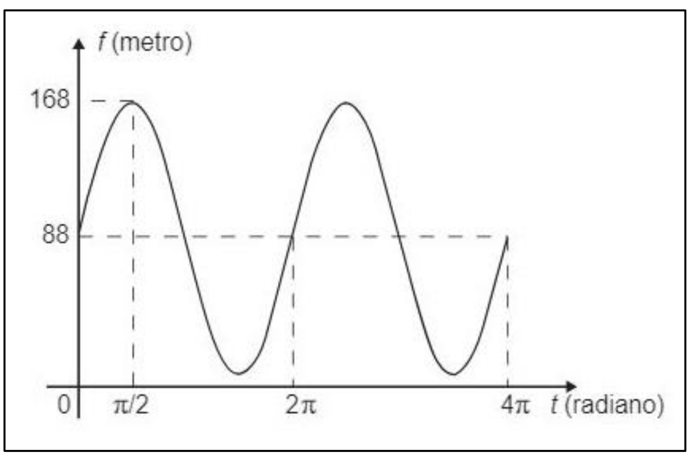


Figura 2. 48 - Possível gráfico da função do problema 2.19
Fonte: ENEM 2018)

Observando o gráfico da Figura 2. 48, retiramos os dados $f(0) = 88$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 168$. Devido à simetria observada, tem-se também que $f(\pi) = 88$. Substituindo os dados na expressão de $f(t)$ obtemos então as seguintes equações: $a + b = 88$, $a + c = 168$ e $a - b = 88$. Utilizando a primeira e a terceira equações temos que $b = 0$ e $a = 88$. Substituindo na segunda equação teremos $c = 80$. Concluímos que $f(t) = 88 + 80\operatorname{sen}(\mathrm{t})$.

Na primeira seção deste capítulo foram incluídos problemas onde, além de funções, eram abordados conceitos de perímetro e de área. Para encerrar esta seção foi escolhido um problema que explora o conceito de volume, além de incluir funções ímpares não periódicas.

Problema 2.19: *Um fabricante deseja projetar uma caixa de base quadrada, com lado medindo x cm e altura medindo h cm, tendo área superficial fixada em 108* cm^2.
a) Supondo que a caixa não tenha tampa, determine a função f que associa a cada possível valor de x, o volume correspondente V e o domínio de f.
b) Supondo que a caixa tenha tampa, determine a função g que associa x ao volume V, e o domínio de g.
c) Utilize o GeoGebra para obter o gráfico das funções f e g.
d) A partir dos gráficos obtidos estime qual seria o volume máximo da caixa sem tampa e da caixa com tampa.

Uma caixa como descrita no enunciado, será como na Figura 2. 49 a seguir, cujo volume será dado por $V = x^2h$, supondo x e h positivos.

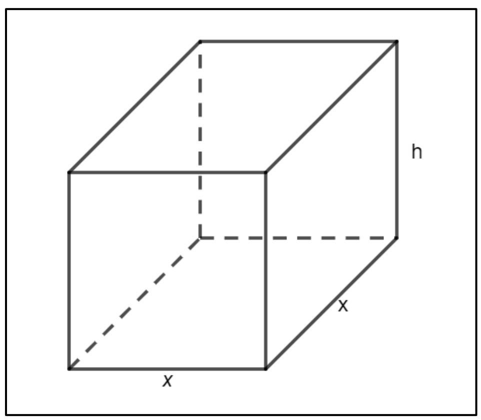


Figura 2. 49 - Caixa de base quadrada do problema 2.19

Do enunciado, temos que a área superficial $A = 108$ cm^2. Assim, supondo que a caixa não tenha tampa, existem quatro faces laterais, cada uma com área igual a $x.h$, e o fundo da caixa, com área igual a x^2, logo $A = 108 = 4xh + x^2$. Desta equação obtemos $h = \frac{108-x^2}{4x}$.

Como $x > 0$, para que $h > 0$, é necessário também que $108 - x^2 > 0$, o que vai acarretar que $0 < x < \sqrt{108}$.

Substituindo a expressão de h na fórmula do volume da caixa, encontramos a expressão $V = \frac{x^2(108-x^2)}{4x} = 27x - \frac{1}{4}x^3$.

Podemos definir então a função $f:]0, \sqrt{108}\,[\longrightarrow \mathbb{R}$, que associa, a cada $x \in]0, \sqrt{108}\,[$, o valor $V = f(x)$.

Para resolver o item b o processo é similar, apenas teremos que incluir na área superficial da caixa a tampa, com área igual a x^2, obtendo $108 = A = 4xh + 2x^2$. Desta equação obtemos o valor correspondente para h como sendo $h = \frac{108-2x^2}{4x} = \frac{54-x^2}{2x}$.

Agora o domínio da função g é o intervalo aberto $]0, \sqrt{54}\,[$ e temos a expressão da função g satisfazendo $V = g(x) = \frac{x^2(54-x^2)}{2x} = 27x - \frac{1}{2}x^3$.

Utilizando o *software* GeoGebra é possível encontrar a solução do item c, representada pelos gráficos de f e g, nas Figura 2. 50 (a) e (b) respectivamente.

A parte do gráfico da Figura 2. 50 (a) que corresponde a f é somente quando $x \in]0, \sqrt{108}[$ e a parte do gráfico da Figura 2. 50 (b) que corresponde a g é somente quando $x \in]0, \sqrt{54}\,[$.

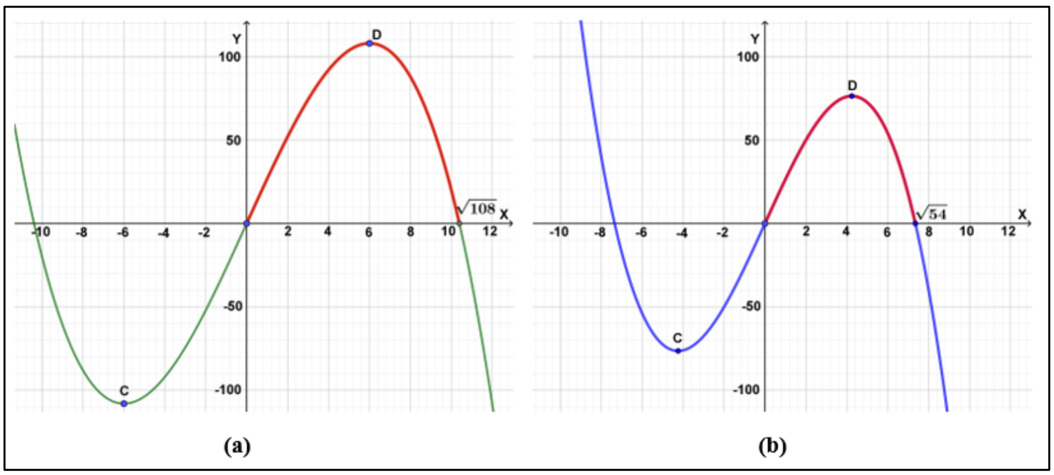


Figura 2. 50 - (a) e (b)- Gráficos das funções f e g do problema 2.19

Observando os dois gráficos, podemos estimar que o volume máximo da caixa sem tampa (gráfico da Figura 2. 50 (a)) ocorrerá quando x for um valor próximo de 6 cm e, nesse caso, o volume máximo será $V \approx 108$ cm³. No caso da caixa com tampa (gráfico da Figura 2. 50 (b)), o volume máximo ocorrerá quando x for próximo de 4 cm e o volume máximo será $V \approx 76\ cm^3$.

O *software* GeoGebra possui um recurso (“Otimização”) para determinar (aproximadamente, em geral, se for um número que necessite arredondamento/truncamento) onde estão os “picos” e “vales” de funções, como mostram a Figura 2. 50 (a) e a Figura 2. 50 (b). O que isto significa, matematicamente, será visto no capítulo 3.

Utilizando este recurso para as funções f e g descobrimos que o volume máximo ocorre aproximadamente para $x = 6\ cm$, e será aproximadamente igual a $V = 108\ cm^3$, no caso da caixa sem tampa. No caso da caixa com tampa, o valor aproximado para $x \cong 4{,}24\ cm$, e o volume correspondente aproximado será $V \cong 76{,}37\ cm^3$. Para obter as soluções exatas, é necessário usar uma conversão e trabalhar com uma representação algébrica. Esse aspecto será abordado no capítulo 3.

O próximo capítulo será inteiramente dedicado a problemas de máximo/mínimo de funções, com auxílio de novos conceitos e de outros recursos do GeoGebra. Nesse mesmo capítulo um outro problema envolvendo funções polinomiais de terceiro grau (ou de grau 3) será resolvido de forma mais precisa utilizando estas técnicas adicionais.

Além disso, na primeira disciplina de CDI será estudado um novo conceito, de derivada de funções, um recurso poderoso para resolver este tipo de problemas de forma mais rápida e simples, em geral.

Com respeito às extensões das funções f e g (supondo com domínio $\mathbb{R}$) do problema 2.19, podemos observar que são funções ímpares (nem toda função polinomial do terceiro grau é ímpar, observe por exemplo a função k tal que $k(x) = x^2 - x^3$, ela não é nem par nem ímpar, pois não satisfaz às duas definições já apresentadas no início desta seção.

Uma propriedade das funções ímpares é a seguinte: se 0 pertencer ao domínio de uma função ímpar g, então necessariamente $g(0) = 0$ (consequência direta da definição). É o que ocorre com as duas funções da Figura 2. 50.

A função polinomial de grau três mais simples é a função $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x^3$. É uma função ímpar e seu gráfico está representado na Figura 2. 51.

É fácil ver pelo gráfico que a função h é bijetora, logo, pela definição já revisada na seção 2.2, ela tem inversa, a função $h^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. O gráfico da inversa, obtido utilizando a ferramenta do GeoGebra que produz reflexão em relação a uma reta, também está representado na mesma Figura 2. 51.

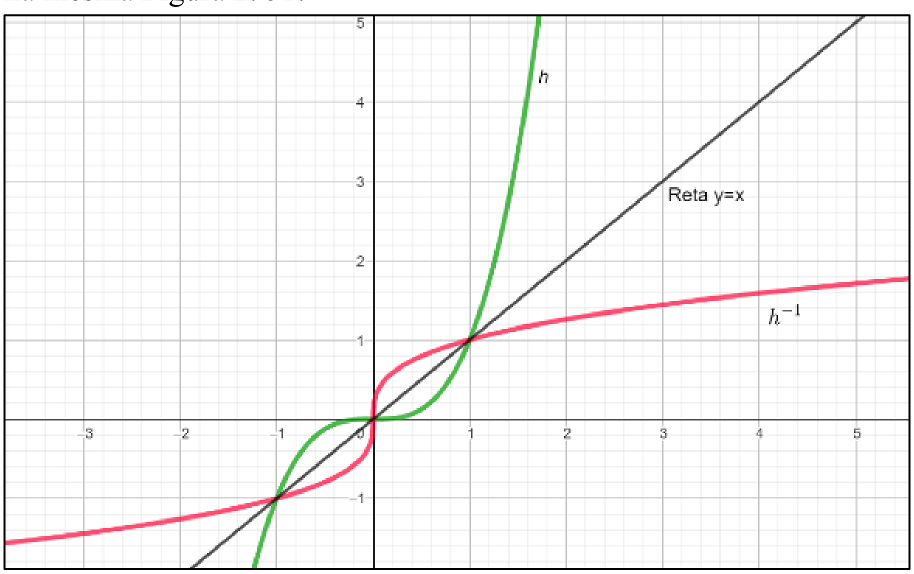


Figura 2. 51 - Gráfico da função h onde $h(x) = x^3$ e sua inversa

A próxima seção será dedicada às funções definidas por várias sentenças e às funções descontínuas, que aparecem em muitas situações reais, funções que descrevem comportamentos de grandezas que constam do nosso cotidiano, muitas vezes veiculadas em notícias de jornais, e são pouco exploradas na Educação Básica.

2.4 Funções Definidas por Várias Sentenças e Descontínuas

Muitas situações reais são representadas por funções definidas por mais de uma sentença, como o desconto do imposto de renda e as situações em que temos um preço fixado para cada intervalo de variação do número de itens. Apesar disso, esse tipo de função é pouco abordada, em geral, na Educação Básica.

Em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de um dos professores da equipe foi aplicado um teste diagnóstico, no qual havia uma questão, onde se pedia o gráfico da função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

Nenhum aluno respondeu essa questão. Eles perguntavam qual era a expressão algébrica da função. No entanto, trata-se de um gráfico muito simples, representado na Figura 2. 52.

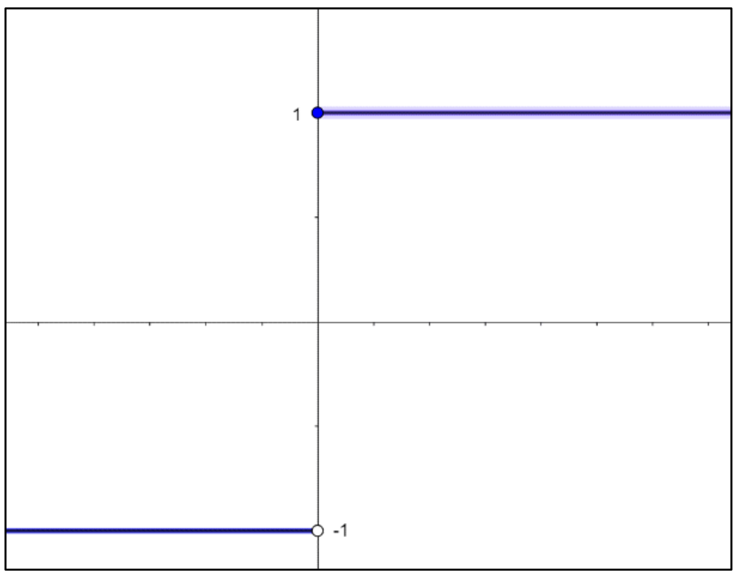


Figura 2. 52 - Gráfico de função definida por 2 sentenças simples

Outro exemplo clássico de função definida por mais de uma sentença é o da função modular $g(x) = |x|$, que se desdobra em $g(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, cujo gráfico é formado por duas semirretas partindo da origem, representado na Figura 2. 53.

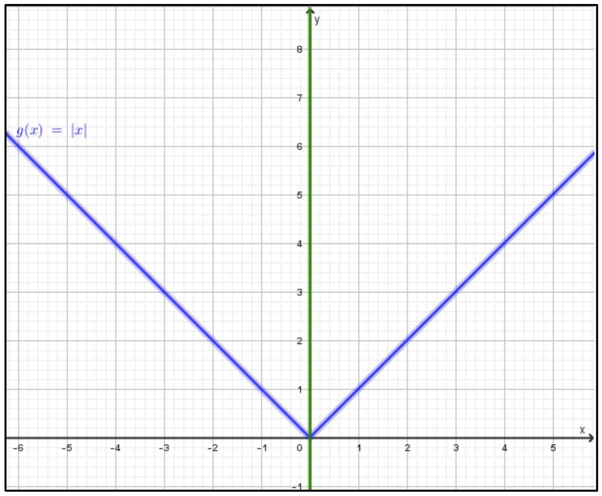


Figura 2. 53 - Gráfico da função modular g tal que $g(x) = |x|$

Essa função tem várias propriedades importantes. Por exemplo, se f é uma **função poligonal** definida em um intervalo fechado $[a, b]$ (ou seja, seu gráfico é uma linha poligonal) então, para cada $x \in [a, b]$ tem-se $f(x) = A + c_1|x - a_1| + c_2|x - a_2| + \cdots + c_n|x - a_n|$, onde as constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são as abscissas dos vértices da poligonal.

Consideremos, por exemplo, a função poligonal h, definida no intervalo $I = [-1, 3]$, cujo gráfico está mostrado na Figura 2. 54.

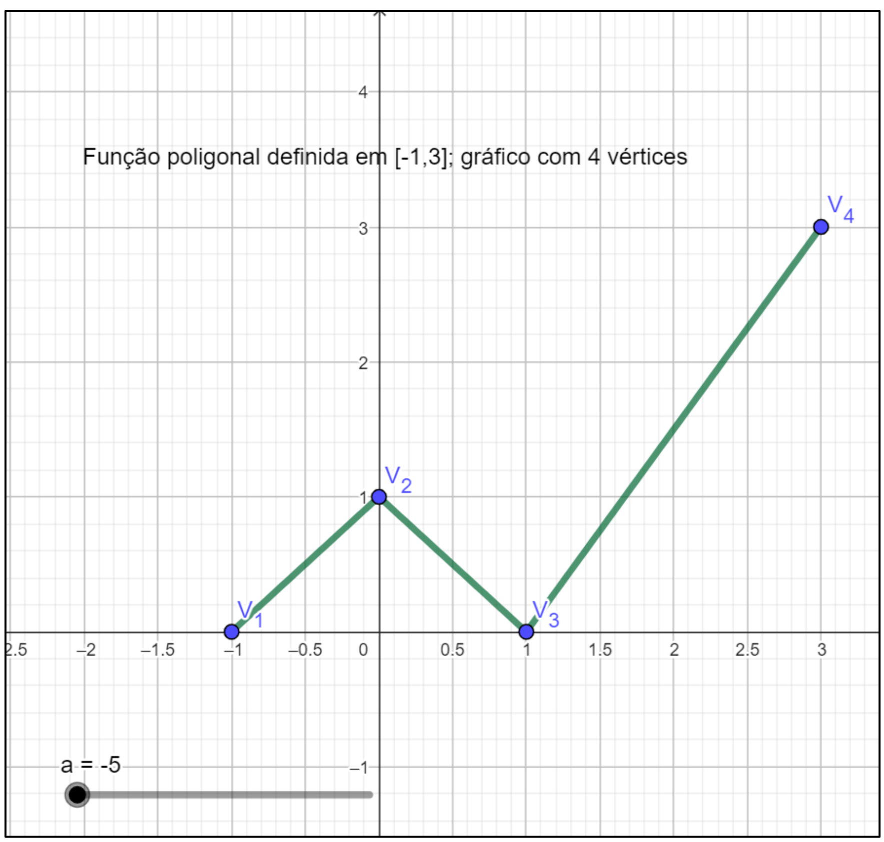


Figura 2. 54 - Função poligonal

Os vértices são os pontos $V_1(-1,0), V_2(0,1)$ $V_3(1,0)$ e $V_4(3,3)$. Utilizando a expressão geral apresentada anteriormente teremos $h(x) = A + c_1|x+1| + c_2|x| + c_3|x-1| + c_4|x-3|$.

Resolvendo o sistema linear, obtido a partir das informações sobre o gráfico de h nos vértices, é possível determinar as soluções, para cada valor real de A. As funções com o mesmo gráfico em I vão satisfazer $h(x) = A + \left(\frac{7-2A}{8}\right)|x+1| - |x| + \frac{5}{4}|x-1| + \left(\frac{-3-2A}{8}\right)|x-3|$.

O Apêndice A1 deste livro apresenta este exemplo, com a construção de uma simulação dinâmica obtida usando um controle deslizante para a constante A (no GeoGebra, na Figura 2. 54, corresponde à letra a do controle deslizante), mostrando que o gráfico não se altera, no intervalo $[-1, 3]$ à medida que A varia.

Em uma outra pesquisa em turmas do Ensino Médio (já comentada na seção 1.3), há um problema em que se pede para determinar o gráfico de uma função definida por várias sentenças num passo a passo em que se determina o valor da função em cada intervalo.

Os alunos acabaram esboçando vários gráficos num único esboço, superpostos. Não entenderam o objetivo do problema (este problema vai ser apresentado ainda nesta seção, problema 2.21).

Por essas razões, consideramos esta seção muito importante para ajudar o professor a perceber estas lacunas na aprendizagem e ajudar os seus alunos a superar esses obstáculos.

Para começar a seção foi escolhido um problema contextualizado, relacionado à função modular, e ainda foi incluído um item relacionado a funções periódicas (não trigonométricas).

Problema 2.20: *Após análise das compras em meses anteriores, o site de compras online Compra Fácil verificou que o número de pessoas P que compram algum produto em cada dia* x *de um mês qualquer (considerando um modelo matemático de mês padrão com 30 dias) é dado pela função* $f: \{1,2,\ldots,30\} \longrightarrow \mathbb{N}$*, satisfazendo* $P = f(x) = 200|x-25| + 3000$.
a) Determine quantas pessoas compram algum produto neste site no dia 05.
b) Determine em qual dia do mês 4000 pessoas compram algum produto neste site.
c) Em qual dia do mês o número de compradores é mínimo? Qual foi este número?
d) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função f *e, a partir dele, calcular o dia em que o número de compradores é máximo.*
e) Obtenha a solução do item anterior utilizando somente argumentos algébricos, a partir da definição da função modular.
f) Suponha que a função f *possui uma extensão, periódica de período 30, definida no conjunto* $\{1,2,3\ldots,360\}$. *Supondo um modelo aproximado em que cada mês tem 30 dias, determine em qual dia do ano (supondo ano de 360 dias), situado no 10º mês, o número de compradores será mínimo.* (Adaptado de Iezzi, Dolce, Degenszajn e Périgo, 2011).

A solução do item a depende, essencialmente, do aluno ter o conhecimento de que o módulo de um número é o seu valor absoluto. Assim, $P = f(5) = 200|5-25| + 3000 = 200|-20| + 3000 = 200.20 + 3000 = 7000$ pessoas.

O item b consiste em achar o(s) dia(s) x em que o número de compradores seja $P = 4000$. Substituindo o valor de P na expressão de $f(x)$ chegamos à equação modular $|x - 25| = 5$. Então, se $x \geq 25$, teremos $|x - 25| = x - 25 = 5$. Assim, $x = 30$.

Mas, se $x < 25$, teremos $|x - 25| = 25 - x = 5$. Nesse caso, $x = 20$. Logo, nos dias 20 e 30 do mês, o número de compradores será 4000.

Ao discutir este problema em sala, o professor pode aproveitar para discutir se esta função tem alguma característica especial (não é injetora, logo não tem inversa).

No caso do item c, como se sabe, o valor mínimo da função valor absoluto de um número é zero. Isto poderá ocorrer, desde que $x = 25$ (que é um dia do mês possível). Assim, o valor mínimo da função f ocorrerá neste dia, e será $P = f(25) = 3000$ pessoas.

Como o domínio da função é um conjunto discreto, conforme já vimos na primeira seção deste capítulo, o gráfico será formado por pontos isolados, e pode ser obtido utilizando o comando sequência do GeoGebra (consulte para detalhes o Apêndice A1 deste livro). O gráfico obtido está representado na Figura 2. 55.

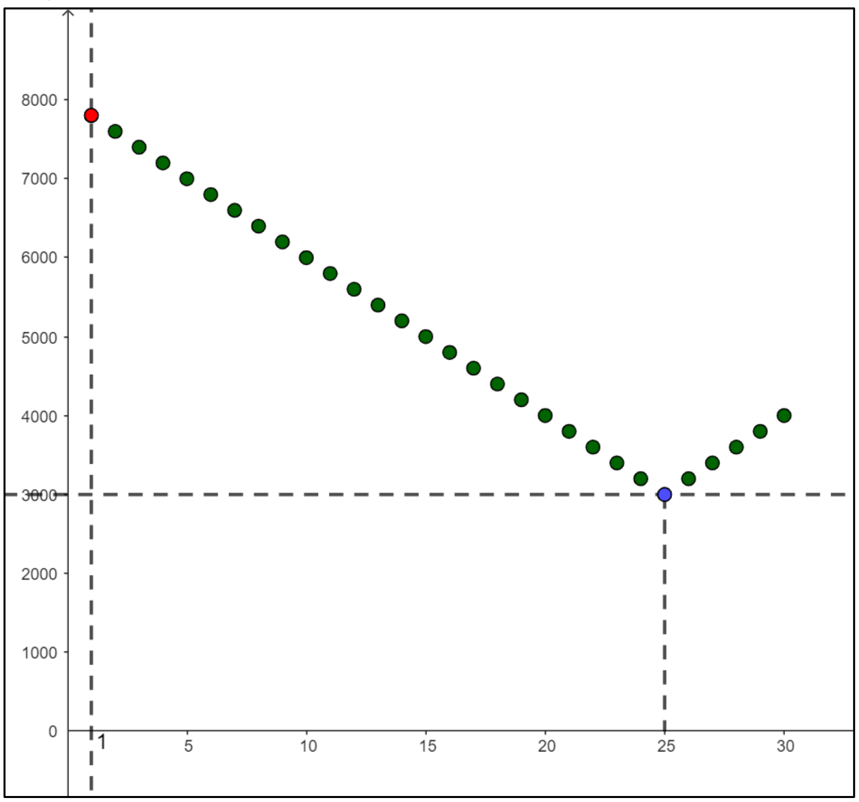


Figura 2. 55 - Gráfico da função f do Problema 2.20

Observando o gráfico, tem-se que o dia em que o número de compradores é máximo é o dia $x = 1$ e o número de compradores neste dia é calculado substituindo-se este valor na função. $P = f(1) = 200|1 - 25| + 3000 = 200|-24| + 3000 = 200.24 + 3000 = 7800$. Logo são 7800 pessoas.

A resolução algébrica do item e pode ser obtida analisando o termo $|x - 25|$ na expressão da função e descobrindo quando ele é máximo (porque os outros termos da expressão são constantes, não interferem). Lembremos que os valores possíveis de $x \in \{1,2,3 \dots 30\}$, ou, de modo equivalente, $1 \leq x \leq 30$, com $x \in \mathbb{N}$.

Da definição de módulo, temos $|x-25| = x-25$, se $x \geq 25$, e aí teríamos o maior valor da expressão quando $x = 30$. Nesse caso $P = 200(30-25)+3000 = 200 \times 5 + 3000 = 4000$. Por outro lado, se $1 \leq x < 25$, teremos $|x-25| = 25-x$, que será máximo quando a parcela a subtrair for mínima (a função g tal que $g(x) = 25 - x$ é decrescente), logo quando $x = 1$. Portanto, $P = 200 \cdot (25-1) + 3000 = 200 \cdot 24 + 3000 = 7800$. Assim o número máximo de compradores será 7800, no dia 1 do mês, conforme mostra a Figura 2. 55.

A solução do item f segue ao constatar que $x = 25 + (n-1)T$, onde x é o dia do ano, ou seja $x \in \{1,2,3 \dots,360\}$, n é o número de ciclos (meses), T é o período, isto é, $T = 30$ e 25 é o dia do primeiro mês em que o número de compradores foi mínimo, segundo o item c. No mês 10 teremos $x = 25 + (10-1).30 = 25 + 270 = 295$. Outra forma de resolver, geometricamente, é obter o esboço da extensão periódica de f, de período 30, e observar qual será a abscissa do ponto onde a função terá mínimo no décimo mês.

O capítulo 3 inclui um outro problema interessante cuja solução exige interpretação dos dados para chegar à expressão da função, que será também uma função modular.

O próximo problema desta seção envolve uma função poligonal e sua solução também necessita que, a partir das informações contidas no enunciado, se chegue à função procurada. Na seção 1 do primeiro capítulo deste livro estão comentados os resultados insatisfatórios da aplicação deste problema em um teste diagnóstico com alunos de CDI. Vários alunos conseguiram esboçar o gráfico, mas sem conseguir achar a expressão algébrica, logo, de acordo com Duval (ver capítulo 1, seção 1), a aprendizagem significativa do conceito de função não ocorreu.

Problema 2.21: *Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo $ABCD$, com vértices A, B, C, D, no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em algum ponto F do contorno.*

a) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado AB, como mostra a Figura 2. 56, determine a função que associa ao comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.

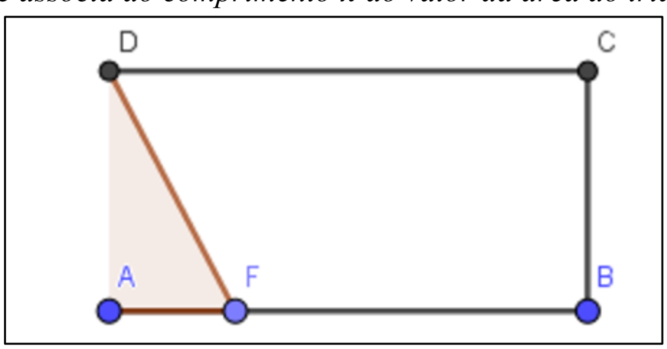


Figura 2. 56 - Posição da formiga no ponto F do contorno AB

b) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado BC, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.
c) Supondo que a formiga esteja em algum ponto do lado CD, determine a função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF.
d) Determine a expressão algébrica da área do triângulo ADF, em função de x, se a formiga estiver em qualquer ponto do contorno $ABCD$.
e) Utilize o software GeoGebra para esboçar o gráfico da função obtida no item d. (Adaptado da questão 2, 2ª fase, nível 3, OBMEP, 2014)

Observando a Figura 2. 56, o triângulo ADF é retângulo, com base de comprimento x e altura igual à medida do segmento AD, que é 10. Logo a área do triângulo ADF, se $0 \leq x \leq 20$ terá valor $f(x) = \frac{1}{2}x.10 = 5x$, resolvendo o item a.

Suponhamos agora que a formiga percorreu o contorno indo de A até F, F sobre o lado BC, teremos um triângulo ADF como na Figura 2. 57.

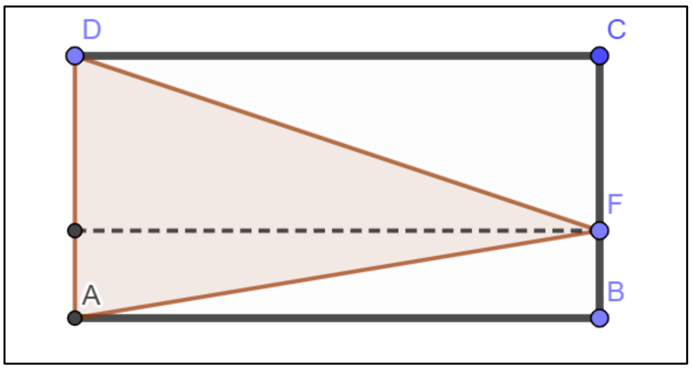


Figura 2. 57 - Posição da formiga no ponto F do contorno BC

Nesse caso, o triângulo ADF terá o comprimento da base $AD = 10$ e altura medindo 20, se F estiver em qualquer ponto do lado BC, portanto a área do triângulo ADF, se $x = AB + BF$, ou seja, $20 \leq x \leq 30$, terá medida $f(x) = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100$. Temos assim a solução do item b.

Agora, se a formiga percorreu o contorno indo de A até F, F sobre o lado CD, teremos um triângulo como na Figura 2. 58.

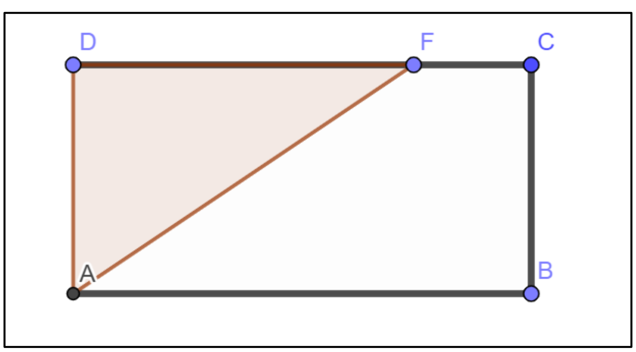


Figura 2. 58 - Posição da formiga no ponto F do contorno CD

O triângulo ADF terá o comprimento da base igual a $AD = 10$ e altura medindo o comprimento de DF. Como o comprimento total $AB + BC + CD = 20 + 10 + 20 = 50$ e o comprimento $AB + BC + CF = x$, obtemos que a altura do triângulo ADF, terá medida $DF = 50 - x$. Assim, a área do triângulo, se $30 \leq x \leq 50$, terá medida $f(x) = \frac{1}{2}.10.(50 - x) = 250 - 5x$, finalizando assim a solução do item c.

Observando as soluções dos três itens anteriores, a função $G: x \longrightarrow S = G(x)$, onde x é a distância percorrida pela formiga de A até F, ao longo de algum ponto do contorno $ABCD$ e S é a área do triângulo ADF, será definida da seguinte forma: $S = G(x) =$

$$\begin{cases} 5x, & se \ \ 0 \leq x \leq 20 \\ 100, & se \ \ 20 \leq x \leq 30. \\ 250 - 5x, & se \ 30 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

Para finalizar o item e, observamos a expressão algébrica obtida no item d, e utilizamos o comando do GeoGebra para esboçar gráficos de função definida por mais de uma sentença (ver detalhes no Apêndice A1 deste livro) para determinar o gráfico de G, representado na Figura 2. 59.

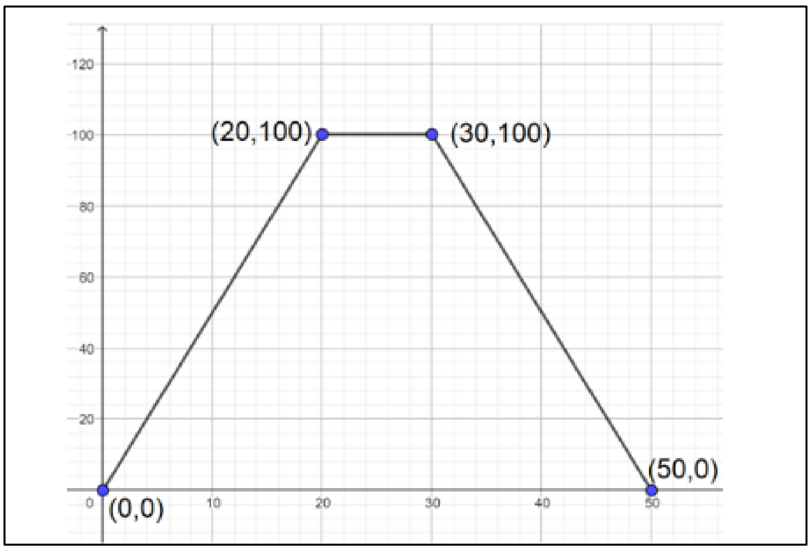


Figura 2. 59 - Gráfico da função área G para o problema 2.21

A maioria dos problemas sobre função é apresentada por meio de uma descrição verbal de situações envolvendo uma função que o aluno precisa identificar a partir de uma representação algébrica para chegar à solução, ou, a partir desta, ainda efetuar uma conversão para a representação num registro gráfico e assim chegar finalmente à solução.

No problema 2.22 a seguir, é invertida a ordem habitual, ou seja, a partir da representação gráfica de uma função chega-se à solução de um problema e, só é solicitada uma conversão para representação num registro algébrico, quando realmente for necessário.

A sequência de itens proposta no enunciado do problema teve como objetivo provocar uma reflexão no aluno de forma que ele consiga compreender o papel essencial das restrições no domínio.

Problema 2.22: *Numa loja existem dois tipos de máquinas copiadoras, A e B. A Figura 2.60 a seguir, mostra esboços, feitos por um funcionário da loja, dos gráficos das funções f_A e f_B, ambas do tipo afim por partes, que fornecem os preços $f_A(x)$ e $f_B(x)$ que cada copiadora cobra para fazer x cópias.*

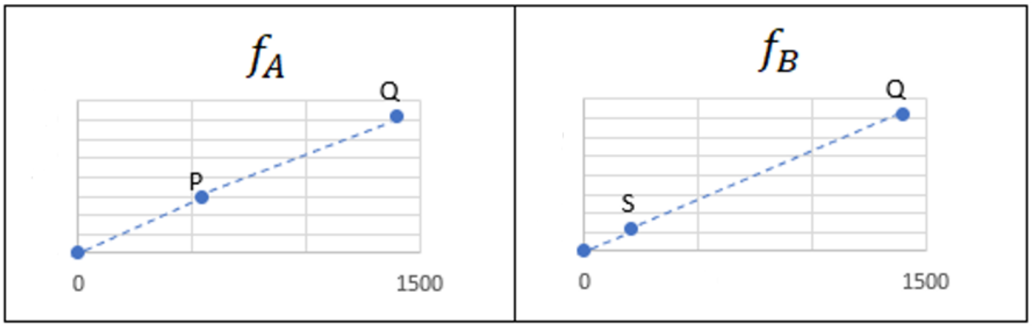


Figura 2.60 - Gráficos das funções f_A (à esquerda) e f_B (à direita)
Fonte: Adaptada de Biazutti, Vaz e Andrade (2021)

a) Utilize o GeoGebra para representar os gráficos das funções f_A e f_B , localizando os pontos $P(650, 65)$, $Q(1400, 80)$ e $S(200, 24)$ e utilizando a mesma escala.
b) Utilize o GeoGebra para representar as duas funções f_A e f_B no mesmo plano cartesiano, e determine cada quantidade possível de cópias em que o preço total, usando qualquer uma das copiadoras, seja o mesmo.
c) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico de uma nova função g, que associa a cada número de cópias o menor preço entre as duas copiadoras.
d) Determine uma representação algébrica da função g e o valor de $g(1200)$ e $g(1500)$. (Adaptado do vestibular FATEC)

Para facilitar a comparação entre os preços das duas copiadoras, ao utilizar o GeoGebra para esboçar os gráficos, vamos considerar em ambos a variação no eixo horizontal entre $x = 0$ e x um pouco maior do que 1400, uma vez que este é o maior valor entre as abscissas dos pontos P, Q e S. Um raciocínio similar nos leva a considerar a variação no eixo vertical entre $y = 0$ e y um pouco maior do que 80.

O domínio das funções é o conjunto dos naturais, mas o conjunto de valores de x torna complicado visualizar o gráfico como conjunto de pontos isolados, então resolveremos um problema auxiliar similar, mas com domínio sendo os reais positivos, lembrando que a solução de cada item precisa ser uma quantidade de cópias possível (portanto um número natural).

Utilizando então os recursos do GeoGebra para traçar pontos e segmentos de reta, obtemos os gráficos da Figura 2.61 resolvendo assim o item a do problema.

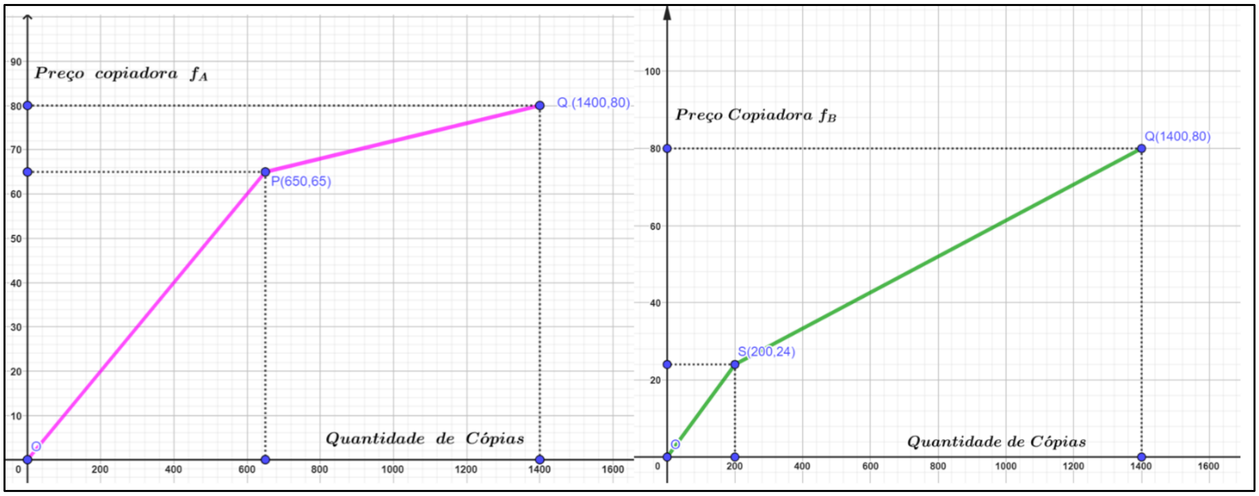


Figura 2.61 - Gráficos das funções f_A e f_B localizando os pontos P, Q, S

Justapondo os dois esboços no mesmo plano cartesiano, como mostra a Figura 2.62, é possível verificar que os gráficos se interceptam nos pontos $O(0,0)$ e $Q(1400,80)$, já conhecidos a partir do enunciado, ou seja, o preço de 0 cópias é 0 reais e de 1400 cópias é 80 reais, utilizando qualquer uma das duas copiadoras. Além deles, o ponto $E(275; 27{,}5)$ também é ponto de interseção, e suas coordenadas podem ser obtidas utilizando o recurso de interseção de pontos do GeoGebra. Portanto, o preço de 275 cópias, usando qualquer uma das copiadoras, é de R$ 27,50. Assim está resolvido o item b do problema.

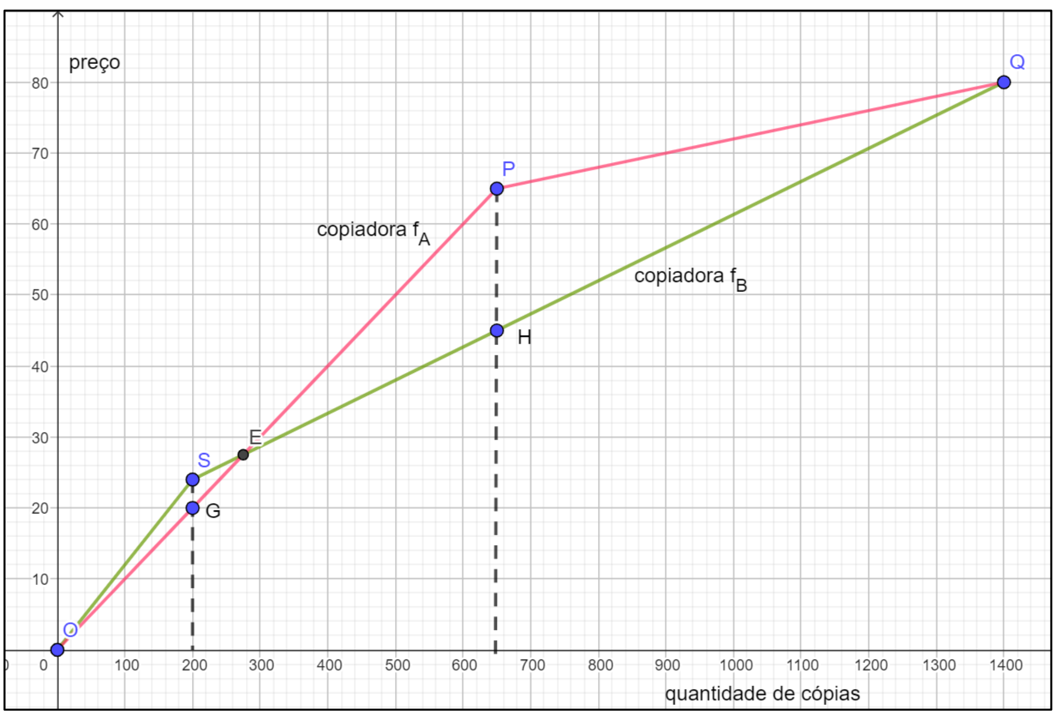


Figura 2.62 - Comparação dos preços das duas copiadoras

Para obter a solução do item c é necessário comparar os preços das copiadoras A e B, porque a função $g = \min\{f_A, f_B\}$, isto é: $g(x) = f_A(x)$, quando $f_A(x) \leq f_B(x)$ e $g(x) = f_B(x)$, quando $f_B(x) \leq f_A(x)$.

Entre os pontos O e E, ou seja, quando $0 \leq x \leq 275$, o gráfico de f_A (na cor rosa) está abaixo do de f_B (na cor verde), logo o preço da copiadora A é menor do que o da copiadora B.

Já entre os pontos E e Q, ou seja, quando $275 \leq x \leq 1400$, o gráfico que está abaixo (ou seja, com valor menor das ordenadas, ou imagens da função) é de f_B (em verde). Ou seja, o preço da copiadora B é menor do que a copiadora A.

Para valores de $x \geq 1400$, vai mudar de novo, o menor preço é o da copiadora A. Então, utilizando setas, informações e os recursos do GeoGebra, podemos obter o gráfico da função g, representado na Figura 2.63 (na cor laranja).

Para concluir a solução, utilizando a fórmula para equação de reta conhecidos dois dos seus pontos, é fácil obter a expressão algébrica de f_A e f_B . Encontraremos então o seguinte:

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, se\ 0 \leq x \leq 650 \\ \frac{x}{50} + 52, se\ x \geq 650 \end{cases} \qquad f_B(x) = \begin{cases} \frac{3x}{25}, se\ 0 \leq x \leq 200 \\ \frac{7x}{150} + \frac{44}{3}, se\ x \geq 200 \end{cases}$$

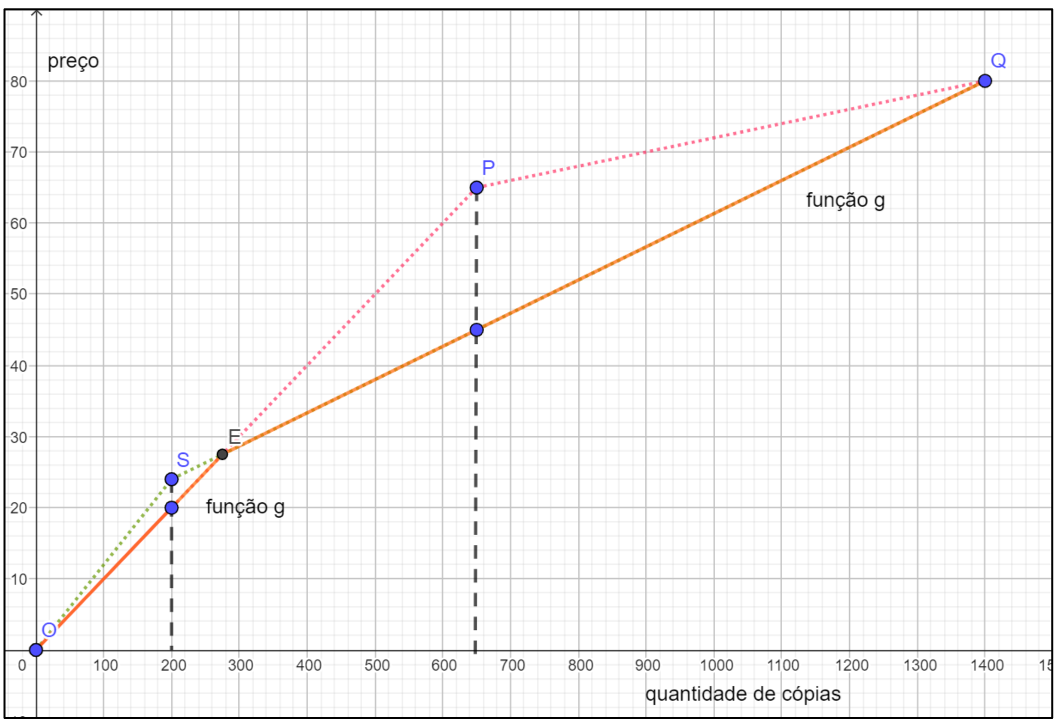


Figura 2.63 -Gráfico da função $g = \min\{f_A, f_B\}$

Utilizando o mesmo raciocínio já empregado na solução do item c, teremos que a função g vai satisfazer o seguinte: $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, \; se\; 0 \leq x \leq 275 \\ \frac{7x}{150} + \frac{44}{3}, \; se\; 275 \leq x \leq 1400. \\ \frac{x}{50} + 52, se\; x \geq 1400 \end{cases}$ Então $g(1200) \cong 70{,}67$ e $g(1500) = 82$.

Também poderíamos obter a expressão de g diretamente, observando o gráfico de g na Figura 2.63 e utilizando a fórmula da equação de reta que passa por $O(0, 0)$ e $E(275; 27{,}5)$ e a que passa por E e $Q(1400, 80)$. Para determinar a última sentença na expressão de $g(x)$, teríamos que observar que, para $x \geq 1400, g(x) = f_A(x)$. Então bastaria obter a expressão de f_A para valores de $x \geq 650$, isto é, para o trecho do gráfico entre P e Q.

Desta forma, em vez de obter 4 sentenças (duas para f_A e duas para f_B), para aproveitar somente as três sentenças da expressão de g, encontraríamos as três sentenças de g diretamente. Afinal, o problema não solicita encontrar a expressão dos preços de cada copiadora.

É sempre importante discutir com os alunos qual deve ser o planejamento para obter a solução de um problema, que tem várias etapas, para trabalhar de forma mais simples e objetiva. Poupa tempo e evita cálculos evitáveis, passíveis de render erros de conta etc.

Até este momento, cada problema apresentado em que o domínio era contínuo envolveu uma **função contínua** em todos os elementos do seu domínio. Intuitivamente, dizemos que uma função $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em algum elemento $a \in \mathbb{R}$, quando, à medida que escolhemos elementos $x \in I$ cada vez mais próximos de a, tivermos os valores correspondentes $f(x)$ cada vez mais próximos do valor $f(a)$. Caso isto não aconteça, dizemos que **f é descontínua** em a. A definição formal, utilizando conceito de **limite**, é estudada na primeira disciplina de CDI.

Como muitos problemas contextualizados envolvem funções descontínuas, é importante selecionar alguns para esta seção. O próximo problema envolve uma função com várias descontinuidades, chamada **função escada,** ou seja, ela é constante em cada subintervalo do domínio**.** A função do problema também é definida por várias sentenças.

Problema 2.23: *Um estacionamento rotativo usa a tabela apresentada na Figura 2. 64 para cobrança, de acordo com o tempo de permanência:*

Figura 2. 64 -Tabela na entrada de um estacionamento rotativo

a) *Encontre o valor que vai ser cobrado se o carro ficar no estacionamento por 3 horas.*
b) *De acordo com a tabela da Figura 2. 64 pode ocorrer uma cobrança de R$ 10,00? Por quê?*
c) *Pedro pagou R$ 15,00. Quanto tempo seu carro pode ter ficado no estacionamento?*
d) *Determine o domínio e o conjunto imagem da função f que fornece o valor pago (em reais) dependendo do tempo (x) de permanência (em horas e frações de hora).*
e) *Utilize o GeoGebra para representar geometricamente a função f.* (Adaptado da questão 166, 2ª reaplicação PPL, ENEM 2021)

Tabela 2.5 - Tempo X Preço

Tempo	**Preço**
$0 < x \leq 1$	6
$1 < x \leq 2$	9
$2 < x \leq 3$	11
$3 < x \leq 4$	13
$n < x \leq n+1, n \in \mathbb{N}$	$9 + 2(n-1)$

Para facilitar a resolução, utilizamos a estratégia de, a partir dos dados da tabela de preços para o estacionamento apresentada na Figura 2. 64 construir a tabela 2.5, associando o tempo (x), em horas e frações de hora, em que o carro permanece no estacionamento, ao valor cobrado $(f(x))$, em reais.

Observando a tabela 2.5, encontramos o preço de R$ 11 reais, se o carro ficar 3h no estacionamento. Não é possível pagar 10 reais, o valor a ser pago "pula" direto de 9 para 11 reais, devido à cobrança de frações de hora como hora completa.

Supondo que o preço cobrado foi de R$15,00, para obter o tempo no estacionamento basta resolver a equação $9 + 2(n-1) = 15$. Encontramos então $n = 4$. Assim, utilizando a expressão correspondente na primeira coluna da tabela 2.5, obtemos $4 < x \leq 5$, ou seja, o tempo de estacionamento foi superior a 4h e não ultrapassou 5h.

Observando a primeira coluna da tabela, podemos concluir que o domínio da função f é composto pelos números reais do intervalo $[0, +\infty[$ e a sua imagem é o conjunto discreto de números naturais $\{6, 9, 11, \ldots, 9 + 2(n-1), \ldots\}$.

De posse das informações obtidas, utilizando o comando do GeoGebra para função definida por várias sentenças, é possível obter um esboço do gráfico de f.

Entretanto, o gráfico não é preciso para o que acontece nos pontos de descontinuidade, devido a um "defeito" do *software* que já foi comentado na seção 1 do capítulo 1. Para que estes pontos de descontinuidade $(x, f(x))$ apareçam corretamente, eles têm que ser marcados diretamente no gráfico, utilizando as informações da tabela e digitando as coordenadas de cada ponto na janela de comando do GeoGebra. Os pontos correspondentes aos limites inferiores de cada intervalo também são marcados diretamente, mas são colocados na cor "branca". O exemplo A1.4 do apêndice A1 deste livro mostra as etapas para obter o gráfico correto, como mostra a Figura 2.65.

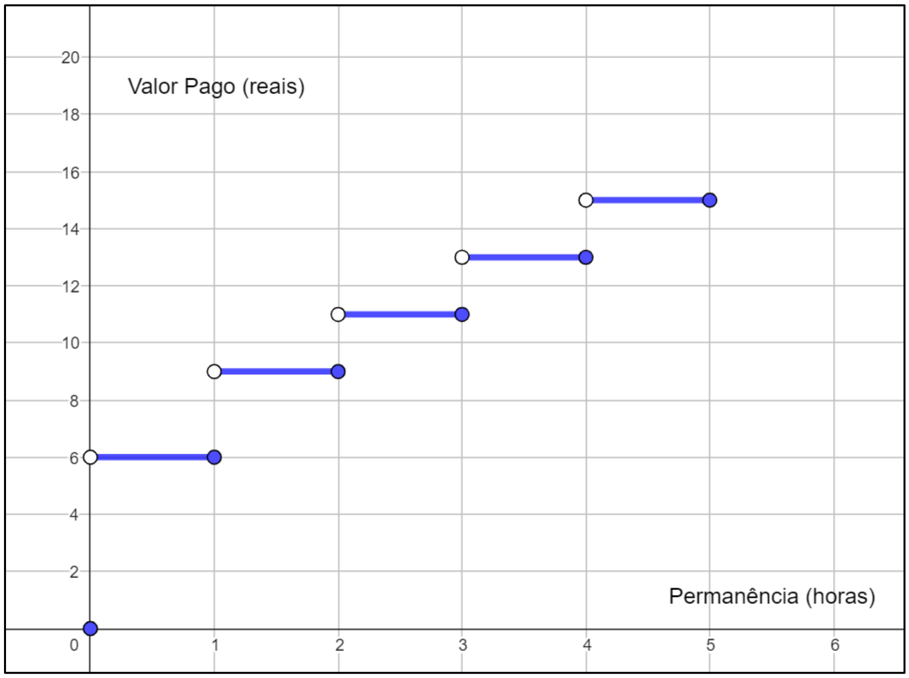


Figura 2.65 - Valor do estacionamento em função do tempo de permanência

As funções associadas a problemas físicos são geralmente contínuas, mas existem exceções, como problemas envolvendo resistências elétricas. O problema a seguir, associado a uma lei física, envolve uma função contínua em seu domínio. Além disso o problema aborda grandezas inversamente proporcionais, complementando problemas na seção 1 em que discutimos grandezas diretamente proporcionais.

Problema 2.24: *De acordo com a lei física de Boyle-Mariotte, o volume de uma massa gasosa é inversamente proporcional à pressão a que ele está submetido, isto é, o produto da pressão P pelo volume V é constante, sempre que sua temperatura permanece constante. Foi determinado experimentalmente que, num ambiente mantido a uma certa temperatura, um certo gás submetido a uma pressão de 3 atmosferas (atm), tem volume igual a 12* cm^3.

a) Qual será o volume deste mesmo gás, à mesma temperatura, se a pressão subir para 4 atm? E se a pressão subir para 5 atm?

b) Utilizando o GeoGebra determine o gráfico da função que associa a pressão $x > 0$ *ao volume de gás correspondente* $V = f(x)$*, supondo que a temperatura no ambiente permanece constante.*

c) Supondo que o volume do gás chegou a $V = 4\ cm^3$*, qual foi a pressão sofrida?*

d) Determine a função inversa f^{-1}*. Qual o domínio e a imagem desta função?*

e) Considere agora a função abstrata g*, extensão de* f*. Qual o maior domínio possível para esta função?*

f) Determine o gráfico de g *utilizando o GeoGebra. Qual a imagem de* g*? Qual propriedade especial é satisfeita pela função* g*?*

g) A função g é contínua em $x = 0 \in \mathbb{R}$? Por quê?

Das informações do enunciado, sabemos que a temperatura é constante, logo $P.V = k$, onde k é uma constante, o que torna P e V grandezas inversamente proporcionais, ou seja, uma é proporcional ao inverso da outra.

Nesta temperatura, sendo $P = 3$ atm tem-se $V = 12$ cm^3, logo obtemos o valor da constante, $k = 36$, ou seja $V = \frac{36}{P}$. Se $P = 4$ atm, teremos $V = 9$ cm^3 e, quando $P = 5$ atm, encontramos $V = 7{,}2\ cm^3$, resolvendo o item a.

Utilizando o GeoGebra, obtemos um esboço da função V, que associa cada valor da pressão $P = x > 0$ (em atm), ao valor correspondente para o volume $V = f(x) = \frac{36}{x}$ (em cm^3), apresentado na Figura 2.66 solucionando o item b.

A solução geométrica do item c pode ser encontrada utilizando o GeoGebra; basta esboçar a reta $y = 4$ (volume dado) e determinar a sua interseção com o gráfico de f, para obter a abscissa correspondente x.

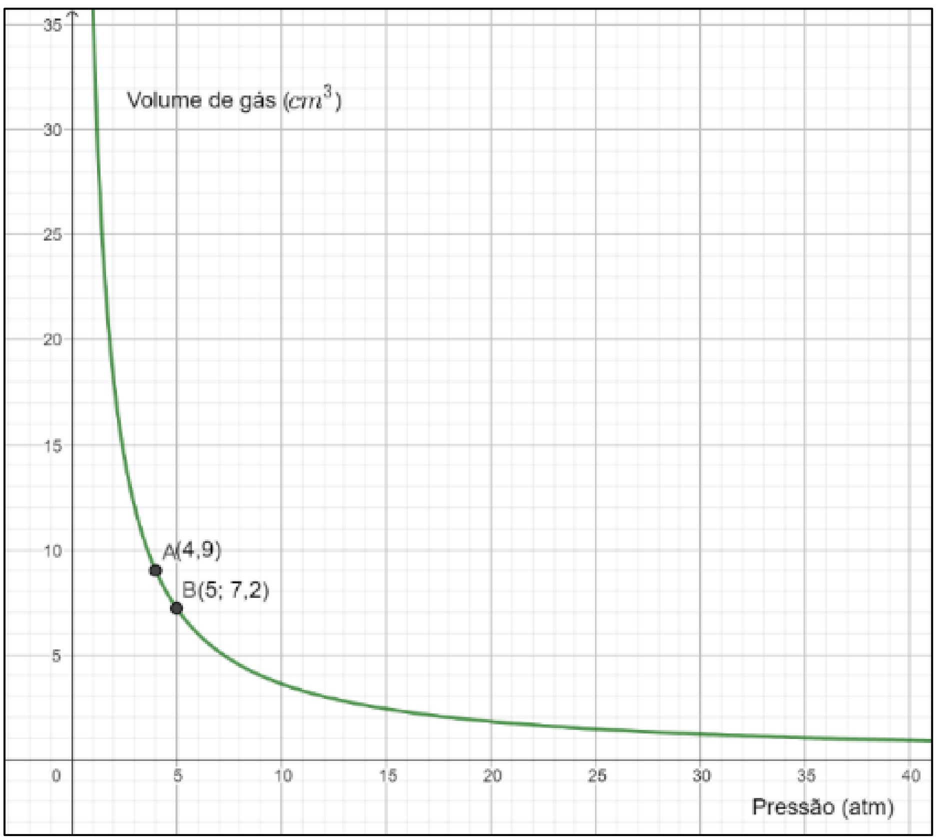


Figura 2.66 - Gráfico da função volume de um gás, dependendo da pressão

A solução algébrica é obtida substituindo-se diretamente $V = 4$ na expressão da função f. De ambas as maneiras teremos $x = 9$ atm.

Observando o gráfico da função f temos que o domínio de f é o conjunto dos números reais positivos e o mesmo ocorre com o seu conjunto imagem.

Da expressão algébrica de f obtemos que sua inversa f^{-1} coincide com ela (logo seu gráfico também coincide, como na figura 2. 66), logo $Dom(f^{-1}) = Im(f^{-1})$ será também o conjunto dos números reais positivos, resolvendo o item d.

A função g, tal que $g(x) = \frac{36}{x}$ está definida par cada valor real de x diferente de zero, sendo a extensão de f com maior domínio possível, resolvendo o item e.

O gráfico da função g está apresentado na Figura 2.67, logo o seu conjunto imagem também é o conjunto dos números reais não nulos.

Da expressão algébrica de g temos $g(-x) = \frac{36}{-x} = -\left(\frac{36}{x}\right) = -g(x)$, ou seja, g é uma função ímpar.

Finalmente, g não é contínua em $0 \in \mathbb{R}$, porque $0 \notin Dom(g)$.

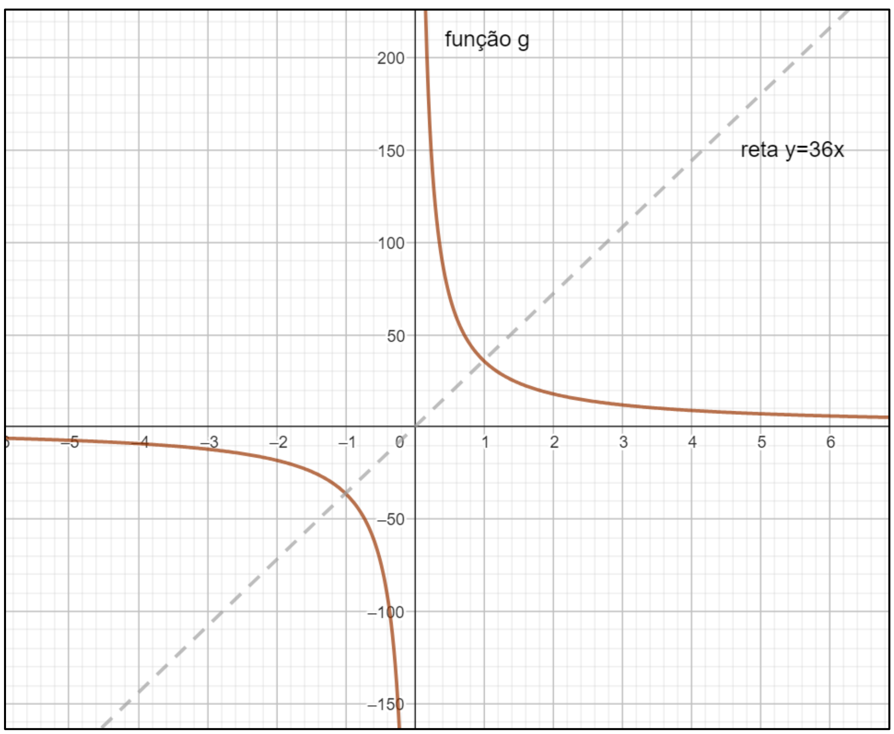


Figura 2.67 - Gráfico da função g

É possível notar que a função f é contínua em cada elemento x de seu domínio (o conjunto dos números reais positivos), de acordo com a definição apresentada anteriormente nesta seção, como mostra o gráfico da Figura 2.66.

É possível verificar que o gráfico da Figura 2.67 é uma hipérbole rotacionada, com focos sobre a reta $y = 36x$, simétricos em relação à origem, ao invés de estarem sobre o eixo das abscissas.

Cabe lembrar aos alunos que uma **hipérbole** é uma curva plana, conhecida deste o século IV a.C., formada por todos os pontos P tais que o valor absoluto da diferença entre as distâncias de cada P a dois pontos fixos (denominados focos) F_1 e F_2 é igual a uma constante real positiva k (isto é, $|dist(P,F_1) - dist(P,F_2)| = k$).

No contexto mais recente de Geometria Analítica, a equação geral da hipérbole é dada por $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0$, com $B^2 - AC > 0$ e todos os coeficientes reais. Mais detalhes sobre cônicas estão disponíveis em Medeiros, Andrade e Wanderley (1980).

Para encerrar esta seção foi escolhido um problema envolvendo o Imposto de Renda de Pessoa Física (IRPF). A maioria das pessoas conhece a tabela de desconto do IRPF (isto é, o que é descontado dos salários de referência para cálculo do IRPF mensal antes deles serem recebidos pelos trabalhadores). Baseando-se somente por esta tabela, muitas pessoas concluem que, ganhando mais dinheiro de forma a mudar de faixa, serão prejudicadas com respeito ao seu salário efetivamente recebido. Abordar o problema a seguir com os alunos é extremamente importante para a Educação Financeira deles, validando ainda mais o estudo de funções definidas por várias sentenças.

Problema 2.25: *No Brasil, o Imposto de Renda de Pessoa Física* (IRPF) *está sendo cobrado desde fevereiro de 2024 de acordo com a tabela 2.6 a seguir.*
a) Seja f a função que associa, a cada valor de salário de referência para cálculo de IRPF mensal, qual deve ser o IRPF mensal cobrado. Determine a expressão algébrica de f e, utilizando o software GeoGebra, construa seu gráfico.
b) Suponha duas pessoas, Ana e Beatriz, cujos salários de referência para cálculo de IRPF mensal são, respectivamente, de R$ 2.200,00 e R$ 2280,00. Qual será o valor do IRPF mensal cobrado de cada uma?
c)Como ficaria o IRPF mensal de Ana e Beatriz se não houvesse esta parcela a deduzir? Explique o que significa a "parcela a deduzir" da tabela 2.6.

Tabela 2. 6 - IRPF

Faixa	Salário de Referência	Alíquota	Parcela a Deduzir
1	Até R$ 2.259,20	Isento	0
2	De R$ 2.259,21 até R$ 2.826,65	7,5%	R$ 169,44
3	De R$ 2826,66 até R$ 3.751,05	15,0%	R$ 381,44
4	De R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68	22,5%	R$ 662,77
5	Acima de R$ 4.664,68	27,5%	R$ 896,00

Fonte: Receita Federal, acessada em 20/11/2024

Consideremos x o salário de referência para cálculo de IRPF mensal e $f(x)$ o IRPF mensal correspondente, de acordo com a faixa de renda. Observando a tabela 2.6 sabemos que a função f será definida por várias sentenças. Então, se $0 \leq x \leq 2259{,}20$, não haverá IRPF mensal a pagar, ou seja, $f(x) = 0$.

Supondo agora que $2259{,}21 \leq x \leq 2826{,}65$, considerando apenas a terceira coluna da tabela 2.6, teríamos que o imposto seria igual a $\frac{7{,}5x}{100} = 0{,}075x$. Mas a quarta coluna solicita que seja deduzida a quantia de 169,44. Sendo assim, o IRPF será $f(x) = 0{,}075x - 169{,}44$.

Observando agora a terceira linha da tabela, se $2826,66 \leq x \leq 3751,05$, raciocinando da mesma forma, o imposto será $f(x) = 0,15x - 381,44$.

De modo similar, teremos, utilizando a quarta linha da tabela, se $3751,06 \leq x \leq 4664,68$, encontraremos $f(x) = 0,225x - 662,77$.

Finalmente, seguindo as informações da última linha da tabela, teremos, se $x \geq 4664,69$ que $f(x) = 0,275x - 896,00$.

Assim, o gráfico da função f será representado na Figura 2.68 e a sua expressão algébrica terá a seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ \ 0 \leq x \leq 2259,20 \\ 0,075x - 169,44, & se\ \ 2259,21 \leq x \leq 2826,65 \\ 0,15x - 381,44, & se\ \ 2826,66 \leq x \leq 3751,05 \\ 0,225x - 662,77, & se\ \ 3751,06 \leq x \leq 4664,68 \\ 0,275x - 896,00, & se\ \ x \geq 4664,69 \end{cases}$$

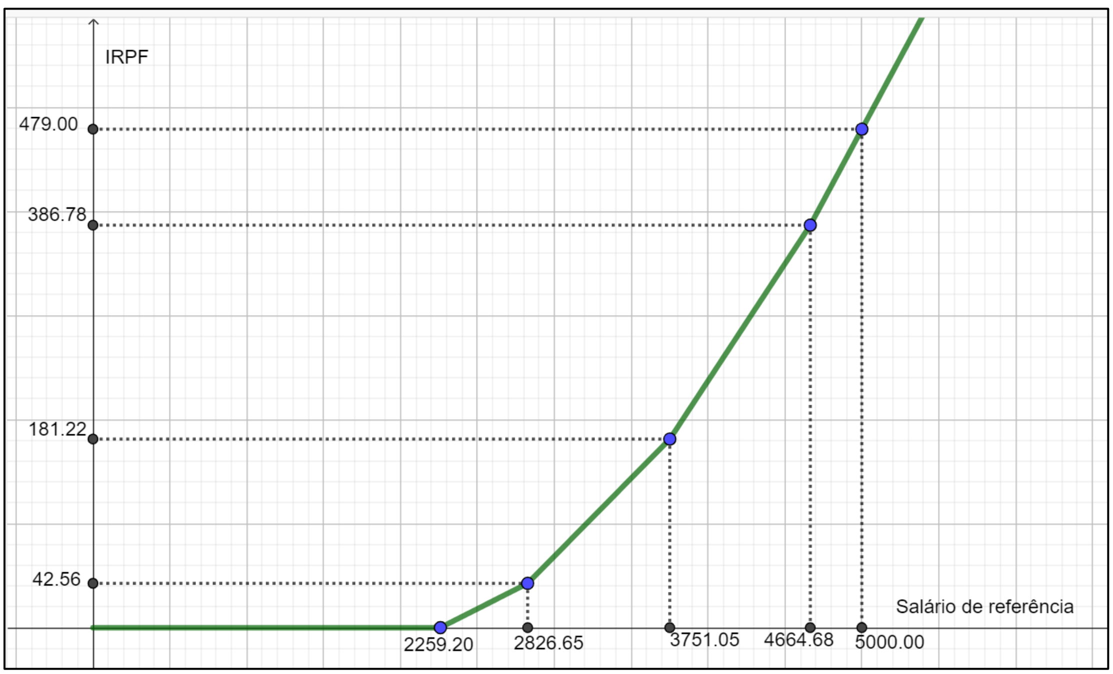


Figura 2.68 - Gráfico da função f do IRPF mensal

Deve-se observar que, na verdade, os salários de referência para cálculo de IRPF mensal e IRPF correspondentes são números racionais (inclusive arredondados para duas casas decimais), assim a função matematicamente correta seria descontínua. Mas apresentamos, no gráfico da Figura 2.68, o caso ideal em que os salários e IRPF são números reais.

Os gráficos apresentados em jornais, revistas, televisão e outras mídias, para terem sua compreensão facilitada por parte de leitores "não especializados em Matemática" evitam apresentar descontinuidades e cometem, muitas vezes, pequenos erros, do ponto de vista matemático. É importante chamar atenção dos alunos para estas situações, inclusive incentivandoos a fazerem pesquisas em diferentes mídias sobre evolução de preços de produtos, taxas de inflação etc.

Passemos agora ao item b do nosso problema. Consideremos a situação das duas pessoas. Ana está na primeira faixa, então está isenta do desconto de IRPF mensal, pois $f(2200) = 0.$ Já Beatriz está na segunda faixa, então $f(2280) = 0{,}075 \times (2280) - 169{,}44 = 171 - 169{,}44 = 1{,}56$, que será o valor do seu IRPF mensal.

Examinemos agora o item c. Se não houvesse a "parcela a deduzir" o IRPF mensal de Ana continuaria igual a zero, mas o IRPF mensal de Beatriz seria igual a $\bar{f}\,(2280) = 171.$ A diferença entre o salário de referência para cálculo de IRPF mensal de Beatriz (2280) e o de Ana (2200) é de apenas 80 reais, enquanto a diferença entre o IRPF das duas seria de 171 reais.

Ao comparar os dois salários de referência para cálculo de IRPF mensal, Ana e Beatriz certamente concluiriam que não valia a pena Beatriz se esforçar para ter um pequeno aumento de 80,00 porque o IRPF iria "comer" o seu aumento e ela ainda seria penalizada, passando a receber menos que Ana.

O que significa então a "parcela a deduzir"? Ela atende ao princípio da tributação progressiva. A alíquota mais alta vai incidir somente na parte do salário de referência para cálculo do IRPF mensal que excedeu o valor máximo permitido para a alíquota anterior. Suponha uma pessoa com salário de referência para cálculo do IRPF mensal na segunda faixa, ou seja, $2259{,}21 \leq x \leq 2826{,}65.$ Então este salário será $x = 2259{,}20 + z.$ A parcela de 2259,20 está na primeira faixa, ou seja, é isenta de IRPF. Somente na parcela z é que incidirá o IRPF, que será de 7,5%. Então o IRPF será $f(x) = 0 \times (2259{,}20) + 0{,}075y = 0{,}075(x - 2259{,}20) = 0{,}075x - 0{,}075 \times 2259{,}20.$ Esta última parcela da subtração é exatamente o valor da "parcela a deduzir" de 169,44.

De modo similar, se uma pessoa tiver salário de referência para cálculo do IRPF mensal na terceira faixa, este valor $x = 2826{,}66 + z = 2259{,}20 + 567{,}46 + z.$ Então a parcela de 567,46 está na segunda faixa e vai pagar 7,5%. Somente no que passou da segunda faixa, z, é que vai incidir a alíquota de 15%. Então o valor total de IRPF será igual a $f(x) = 0 + 0{,}075 \times 567{,}46 +$ $0{,}15(x - 2826{,}66)$ = $0{,}15x + 42{,}56 - 432{,}99 = 0{,}15x - 381{,}44.$ Da mesma forma chegaremos à "parcela a deduzir" de cada uma das últimas duas faixas.

As consequências, se não houvesse a "parcela a deduzir", podem ser observadas na solução do problema 2.35, na próxima seção, onde se aborda o IRPF num país fictício. Será interessante explorar os dois problemas em sala de aula, de forma que os alunos consigam concluir que a "parcela a deduzir" transforma a função IRPF do problema 2.25 numa função contínua, o que não ocorre no caso do problema 2.35.

Conforme observado em Nasser (2010), há uma clara escassez de material didático adequado para o ensino de Educação Financeira. Portanto, é importante trabalhar este tipo de problema, com os alunos e com os (futuros) professores da Educação Básica, já que existem muitas dúvidas sobre o assunto, como comprova a pesquisa de Torraca, Coutinho, Ivo e Menezes (2024).

2.5 Problemas Propostos

Esta seção contém uma lista de problemas envolvendo diversas funções já abordadas neste capítulo. Na seção seguinte estão incluídas respostas, comentários ou informações de onde estão localizadas, em outras partes deste livro, soluções para alguns deles. Tentamos colocar os problemas em ordem crescente de complexidade.

Problema 2.26: *Vinícius vai assinar um plano mensal de internet para a sua casa e está analisando cinco operadoras diferentes:* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{i}$ *e* $\boldsymbol{j}$. *Ele verificou que o preço dos planos em todas as operadoras varia de acordo com a quantidade de internet consumida e por isso criou um gráfico que mostra o valor, em reais, em relação ao número de gigabytes utilizados, conforme mostra a Figura 2.69 a seguir.*

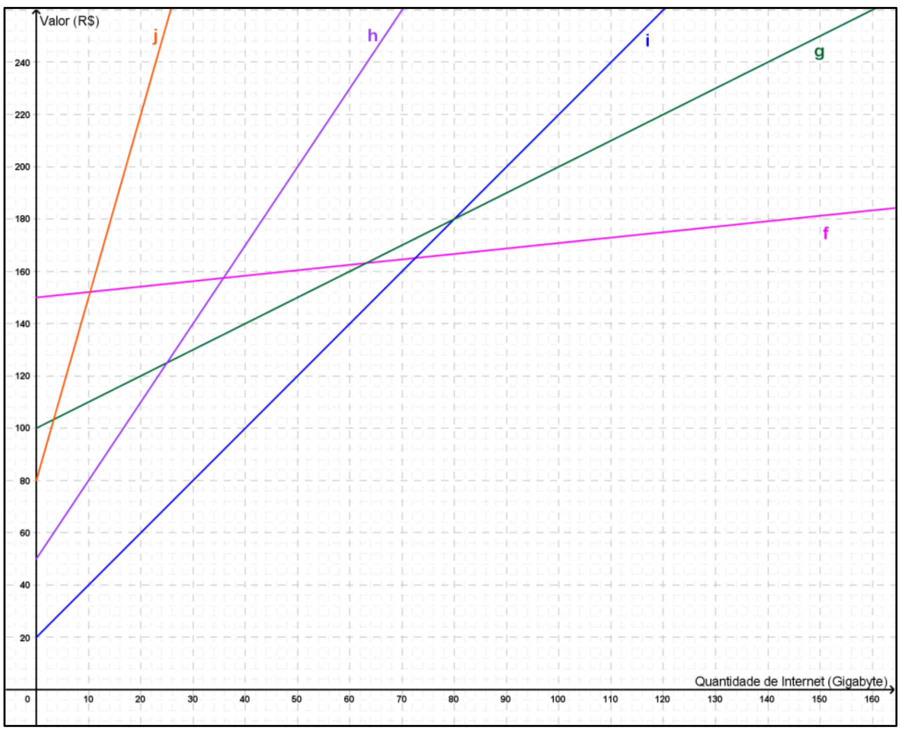


Figura 2.69 - Gráficos das funções dos planos de internet

a) *Se Vinícius pretende consumir 40 gigabytes por mês, qual o plano mais vantajoso que ele deve escolher? E quanto ele vai pagar?*
b) *Em Gigabytes contratados, quando a operadora* $\boldsymbol{j}$ *será mais vantajosa? Discuta as diversas comparações entre as operadoras.*
c) *A operadora* $\boldsymbol{i}$ *é mais vantajosa até que quantidade de Gigabytes? E depois desse valor, qual operadora passa a ser mais vantajosa?* (Adaptado da questão 157, ENEM – 2014)

Problema 2.27: *O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte expressão* $V(t) = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$*. Nela,* V *é o volume medido em* m^3 *após* t *horas, contadas a partir de 8h de uma manhã. Determine:*
a) o domínio da função f *que associa* t *ao valor* $V(t)$*;*
b) a expressão algébrica da função f *e o seu gráfico;*
c) o período desse dia em que haverá água no tanque. (Adaptado do vestibular da UERJ, 2018)

Problema 2.28: *Verificou-se experimentalmente que o volume do ar,* V*, em litros, nos pulmões de certo individuo em repouso, variava em função do tempo* t*, em segundos, de forma a satisfazer a expressão* $V(t) = 2{,}8 + 0{,}29 \times \cos(1{,}6\, t + \pi)$.

a) Utilize o GeoGebra para determinar o gráfico da função que associa a cada tempo t*, o valor* $V = f(t)$.
b) Determine o volume de ar que o indivíduo inspira em cada ciclo respiratório. (Adaptado do vestibular da UNIME 2014-1)

Problema 2.29: *Uma chapa retangular metálica, de área igual a 8,132 m², passa por uma máquina que a transforma, sem nenhuma perda de material, em uma telha ondulada. A Figura 2.70 mostra a telha em perspectiva.*

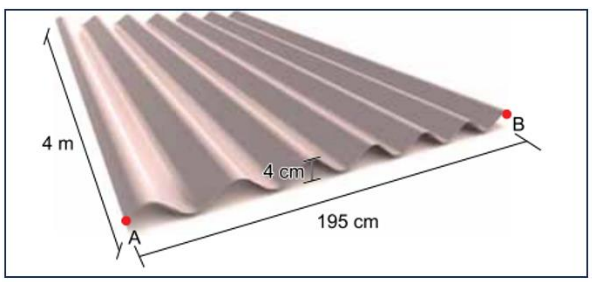


Figura 2.70 - Telha ondulada
Fonte: UNIFESP (2018)

A curva que liga os pontos A *e* B*, na borda da telha, é uma senoide. Considerando um sistema de coordenadas ortogonais com origem em* A*, e de forma que as coordenadas de* B*, em centímetros, sejam* $(195, 0)$*, a senoide será uma função* f*, que terá uma representação geométrica como mostra a Figura 2.71.*

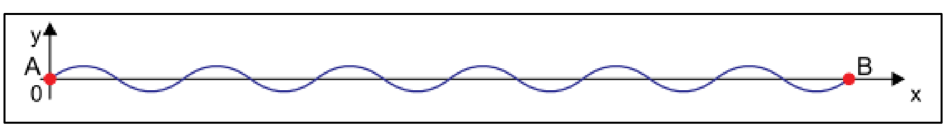


Figura 2.71 - Senoide
Fonte: UNIFESP (2018)

a) Determine o comprimento da senoide representada na figura 2. 71 do ponto A *até o ponto* B.
b) Determine o domínio, a imagem e o período da função f.

*c) Determine a expressão algébrica da função f e o seu gráfico utilizando GeoGebra. (*Adaptado do vestibular da UNIFESP, 2018)

Problema 2.30: *Um posto de gasolina encontra-se localizado no km 100 de uma estrada retilínea. Um carro com o tanque de gasolina cheio, parte do km 0 desta estrada em direção a uma cidade situada a 250km do ponto de partida, conforme a Figura 2.72.*

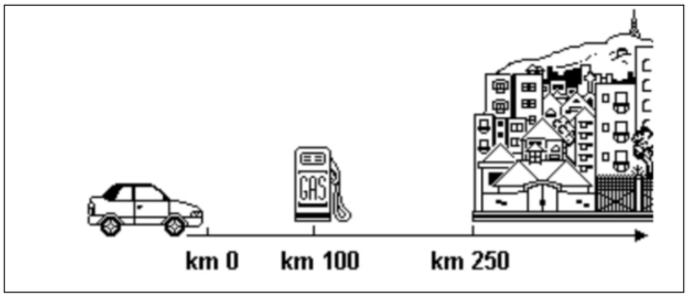


Figura 2.72 - Posição do carro, posto e cidade
Fonte: UFRN, 2000

a) Num dado instante sabe-se que o carro está a 10 km do posto, em frente a uma placa indicando a quilometragem da estrada. Indique as possíveis posições do carro (quilometragem da estrada indicada na placa).

b) Determine a expressão algébrica da função que associa a posição x do carro na estrada em cada instante do seu deslocamento desde a partida até chegar à cidade, à distância y deste carro ao posto; determine também o domínio desta função. É possível representar a função algebricamente de forma mais simples?

*c) Utilize o GeoGebra para determinar o gráfico da função do item b. (*Adaptado do vestibular UFRN, 2000)

Problema 2.31: *Suponha que o preço inicial D reais de um automóvel novo (no momento da venda) tenha desvalorização de 19% após o primeiro ano de uso e de 5% ao ano, em relação ao preço do ano anterior, nos anos seguintes.*

a) Determine a expressão algébrica da função $p = f(t)$, que representa o preço do carro após t anos de uso.

*b) Utilize o GeoGebra para representar graficamente a função p. (*Adaptado do vestibular UNICAMP, apud BACKES (2008)).

Problema 2.32: *Um maratonista está se preparando diariamente para a próxima competição. No primeiro dia de preparação, ele concluiu o percurso em 4 horas. A cada dia posterior ele diminui em 5 minutos o tempo anterior. O seu objetivo é atingir a marca de 2h 30min. Diante dessas informações, responda o que se pede:*

a) Em quanto tempo ele realizou o percurso no 7º dia.

b) Quantos dias ele levará para atingir o tempo de 3h10min?

c) Expresse algebricamente o tempo que ele leva para completar a maratona em função do número de dias de treinamento.
d) Determine o conjunto domínio e o conjunto imagem da função f, cuja expressão algébrica foi obtida no item anterior.
e) Utilizando recursos do GeoGebra, determine o gráfico da função f (Adaptado da prova 1, questão 50, ESAF, 2009).

Problema 2.33: *Um determinado campeonato de vôlei é disputado no sistema de turno e returno. Nesse sistema cada time participante joga contra todos os demais times participantes em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times.*
a) Determine a função que associa a cada número de times participantes o número total de jogos do campeonato.
b) Supondo que o total de jogos foi de 90, determine qual foi o número de times participantes (Adaptado da questão 141, ENEM 2017).

Problema 2.34: *A cobrança da tarifa da empresa Águas do Rio, responsável pelo serviço de água e esgoto do Grande Rio, está representada na Figura 2.73 abaixo.*

Categoria	Consumo em m³	Tarifa por m³
Residencial Tarifa 2	0 - 15	4,389986
	16 - 30	9,657969
	31 - 45	13,169958
	46 - 60	26,339916
	> 60	35,119888

Figura 2.73 - Tabela de tarifas de água e esgoto em junho de 2022
Fonte: https://aguasdorio.com.br/legislacao-e-tarifas

Considere que, em uma residência, o consumo de água em certo mês tenha sido de 40 m^3. O gráfico, da Figura 2.74 a seguir, representa como muitas pessoas equivocadamente interpretam as informações dadas na tabela da Figura 2.73 para obter o valor da conta de água desta residência.

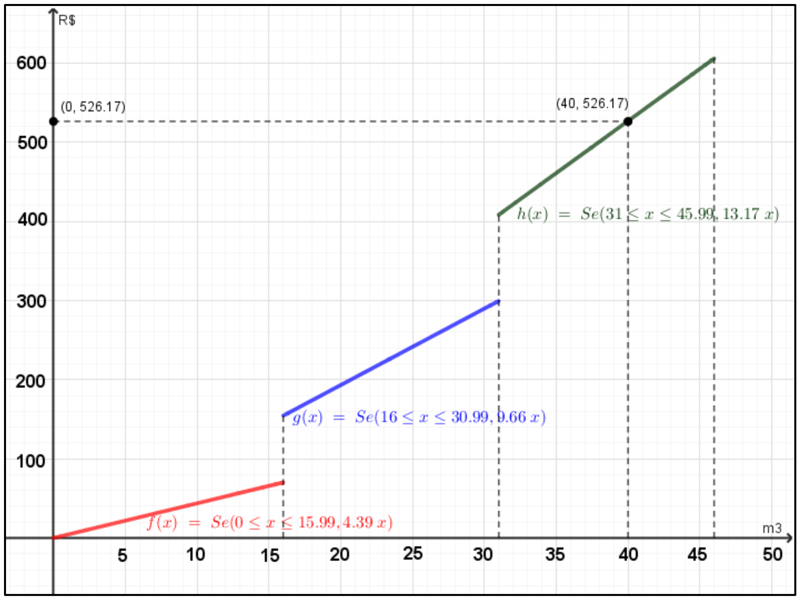


Figura 2.74 - Interpretação de muitas pessoas da tabela de consumo de água

a) Determine o valor correto da conta de água desta residência, referente ao consumo de água de 40 m^3.

b) Determine a expressão algébrica da função f*, tal que o valor* $f(40)$ *seja a resposta do item anterior (suponha consumo menor que 46* m^3*).*

c) A resposta do item anterior está de acordo com o gráfico da Figura 2.74? Por quê?

d) Utilizando recursos do GeoGebra determine o gráfico da função f*, que fornece o valor correto da conta de água (suponha consumo menor que 46* m^3*).*

e) Sabendo-se que a empresa cobra o mesmo valor da tarifa de água para o esgoto, qual será o valor total da conta da residência?

Problema 2.35: *Num certo país, o IRPF mensal é cobrado da seguinte forma: os que recebem salário de referência para cálculo do IRPF mensal até 1 500 u.m. (unidades monetárias) são isentos; dos que recebem salário de referência para cálculo do IRPF mensal acima de 1 500 u.m. até 6 000 u.m., cobra-se um IRPF mensal de 10% sobre o total do salário de referência para cálculo do IRPF mensal; acima de 6 000 u.m. de salário de referência para cálculo do IRPF mensal, o IRPF mensal é de 20% sobre o total do salário de referência para cálculo do IRPF mensal.*

a) Determine o valor do IRPF mensal de duas pessoas, uma com salário de referência para cálculo do IRPF mensal de 5 500 u.m. e a outra com 6 100 u.m. e compare o IRPF das duas.

b) Determine a expressão algébrica e utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função f, que relaciona o salário de referência para cálculo do IRPF mensal (x) *com o IRPF mensal* $(f(x))$*.*

c) Determine a expressão algébrica e utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função g*, que relaciona o salário de referência para cálculo do IRPF mensal* (x) *com o valor* $g(x)$*, obtido subtraindo o IRPF mensal* (x) *do salário de referência para cálculo do IRPF mensal* $(f(x))$ *.*

d)Represente no gráfico os salários de referência para cálculo do IRPF mensal (x) *e os* *respectivos valores $g(x)$ das duas pessoas do item a. Analise os resultados sob o ponto de vista de justiça social.*

Problema 2.36: *Deseja-se construir uma piscina com fundo horizontal e quatro paredes verticais, de modo que cada seção horizontal seja formada por dois lados opostos retos e paralelos de mesmo comprimento b e por outros dois que têm formato de semicircunferências, de mesmo raio r, ambas côncavas para o mesmo lado, conforme mostra a Figura 2.75. Sabe-se que cada seção horizontal da piscina precisa ter 200m² de área.*

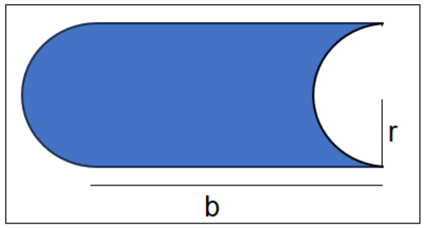


Figura 2.75 - Seção horizontal da piscina
Fonte: Biazutti, Vaz e Andrade (2020)

a) Determine a relação entre a base b e o raio r em cada seção da piscina.
b) Determine uma expressão algébrica para o perímetro da borda da piscina, como função do raio das semicircunferências.
c) Utilize o GeoGebra para obter o gráfico da função perímetro.
d) Com auxílio do item anterior, dê uma estimativa para o raio da circunferência (e a correspondente base) de modo que o perímetro da borda da piscina tenha medida $50\sqrt{\pi}$ metros.
e) Determine algebricamente todo valor possível para a base b e o raio r da circunferência correspondente, de modo que o perímetro da borda da piscina tenha medida $50\sqrt{\pi}$ metros.

Problema 2.37: *Maria e João foram passear num parque plano, escolhendo o mesmo caminho reto. Maria caminhou do ponto inicial A ao ponto B, percorrendo a distância de 900 m e voltou ao ponto inicial A, de acordo com o gráfico simplificado distância × tempo da Figura 2.76, onde as distâncias (em metros) estão no eixo vertical e o tempo (em minutos) no eixo horizontal. João foi de B a A, com velocidade uniforme de 90 m/min. Ele começou a caminhar 5 min depois de Maria.*

a) Descreva o passeio de Maria representado no gráfico da Figura 2.76.
b) Qual a velocidade de Maria no instante $t = 20$ min?
c) Quanto tempo João levou para ir de B a A?
d) Utilize o GeoGebra para esboçar os gráficos distância × tempo de João e Maria no mesmo sistema cartesiano.
e) Determine quando e onde Maria encontrou João.

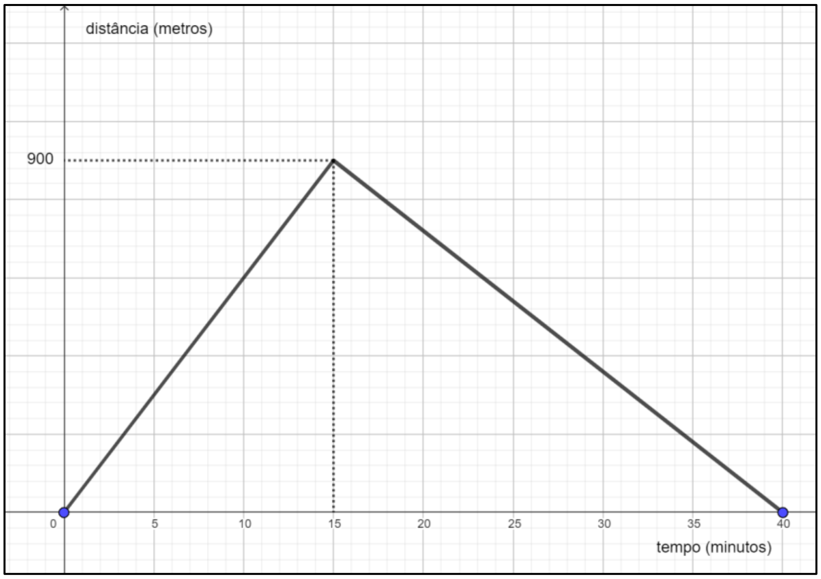


Figura 2.76 - Diagrama distância × tempo para deslocamento de Maria

Problema 2.38: *Um funcionário de uma loja tem seu salário mensal formado por uma parcela fixa de 1412 reais mais uma comissão que depende da quantidade de peças vendidas por ele no mês. O cálculo dessa comissão é feito de acordo com os seguintes critérios: até a quinquagésima peça vendida, paga-se 5 reais por peça; a partir da quinquagésima primeira peça vendida, o valor pago é de 7 reais por peça. Represente por q a quantidade de peças vendidas no mês por esse funcionário e por $S(q)$ o seu salário mensal, em real, nesse mês.*

a) Determine a expressão algébrica que descreve $S(q)$ em função de q.

b) Utilize o GeoGebra para obter o gráfico da função f, que associa a cada quantidade q o valor correspondente $S(q)$.

*c) Num determinado mês, o funcionário recebeu o salário de 2852 reais. Determine a quantidade de peças que o funcionário vendeu naquele mês. (*Adaptado da ENEM- questão 157, 2022)

Problema 2.39: *Os tamanhos de chapéus masculinos na Inglaterra, França e EUA são diferentes. A função f, tal que $f(x) = \frac{x-1}{8}$, converte os tamanhos franceses para os ingleses, e a função g, tal que $g(x) = 8x$, converte os tamanhos dos EUA para os franceses.*

a) Considerando que o tamanho dos chapéus, em qualquer dos três países, é um número real positivo, determine domínio, imagem e expressão algébrica da função h que converte o tamanho x dos EUA para o tamanho $h(x)$ dos ingleses.

b) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função h.

c) Se um chapéu tem tamanho inglês igual a 2, utilize o GeoGebra para calcular qual será o seu tamanho, convertido para o dos EUA.

d) Determine, utilizando o GeoGebra, o gráfico da função que converte tamanhos ingleses em tamanhos dos EUA, seu domínio e imagem. (adaptado do vestibular da UFAL apud Iezzi, Dolce, Degenszajn e Périgo, 2011).

2.6. Comentários e Respostas dos Problemas

Problema 2.26: No item a, como Vinícius pretende consumir 40 gigabytes por mês, o melhor plano será aquele que tiver o menor custo mensal, ou seja, o que tiver o menor valor da ordenada. Analisando o gráfico da Figura 2. 77 pode-se concluir que o melhor plano será o ***i***, com um gasto mensal de **100 reais.** No item b, apesar da operadora ***j*** ser mais vantajosa que a operadora ***f*** para um consumo abaixo de 10 *Gigabytes*, ela não é mais vantajosa que as operadoras ***i*** e ***h***, por exemplo. Notem que as retas indicativas das funções ***i*** e ***h*** estão sempre abaixo de ***j*.**

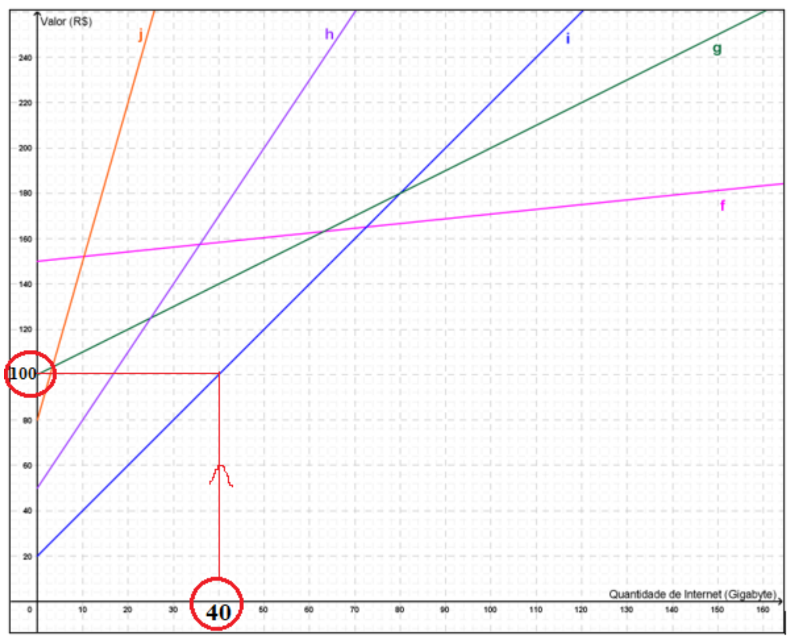


Figura 2.77 - Solução geométrica do item a

Para resolver o item c, analisando o gráfico da Figura 2. 78 pode-se concluir que a operadora ***i*** é mais vantajosa para quantidades inferiores a 72 gigabytes, aproximadamente.

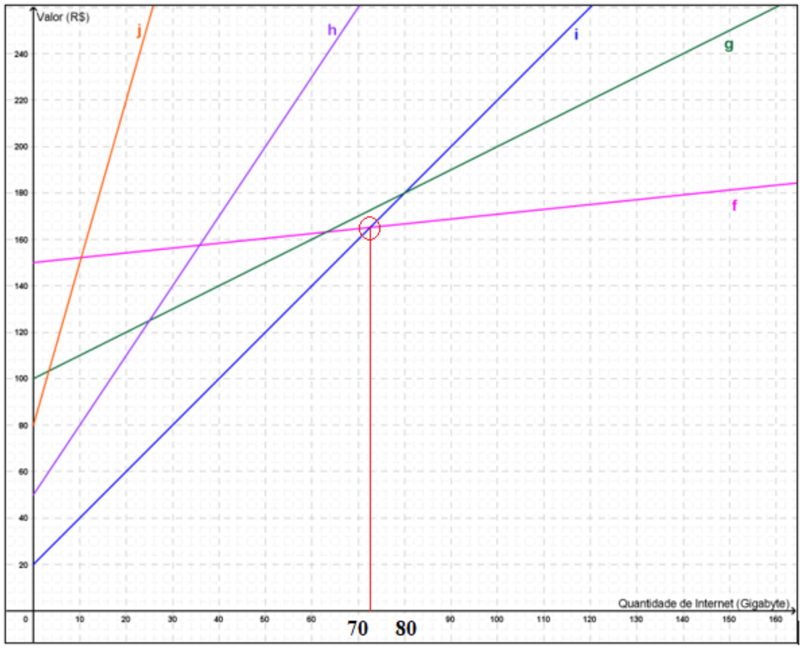


Figura 2. 78 - Solução geométrica do item c

Problema 2.27: Utilizando a definição da função modular, é possível determinar que a imagem da função f será $V(t)=\begin{cases} 4t, se\ t \leq 2 \\ 8,\ \ se\ 2 \leq t \leq 3 \\ -4t + 20, se\ t \geq 3 \end{cases}$. Como o volume não pode ser negativo, obteremos $t \in [0,5]$ que será o domínio da função f. Haverá água no tanque após as 8h e antes das 13h. O gráfico da função será dado pela Figura 2. 79 a seguir.

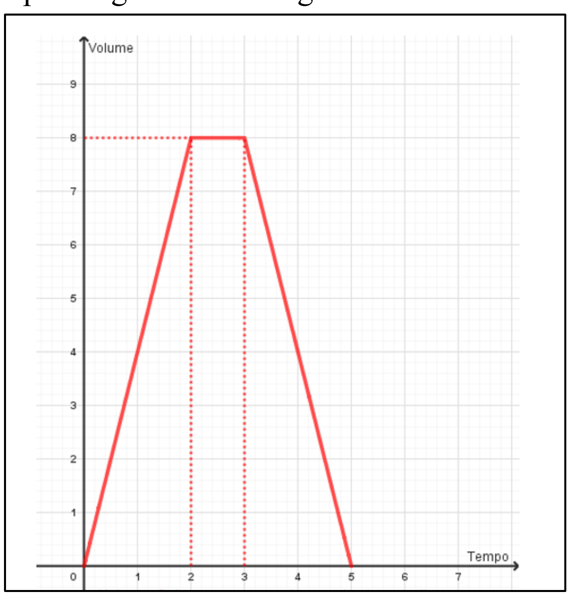


Figura 2. 79 - Gráfico do volume de água no tanque

Problema 2.28: O volume inspirado em um ciclo é a diferença entre o volume máximo e o volume mínimo atingidos neste ciclo, isto é, $V_i = [2{,}8 + 0{,}29 \times (1)] - [2{,}8 + 0{,}29 \times (-1)] = 0{,}58$ litros.

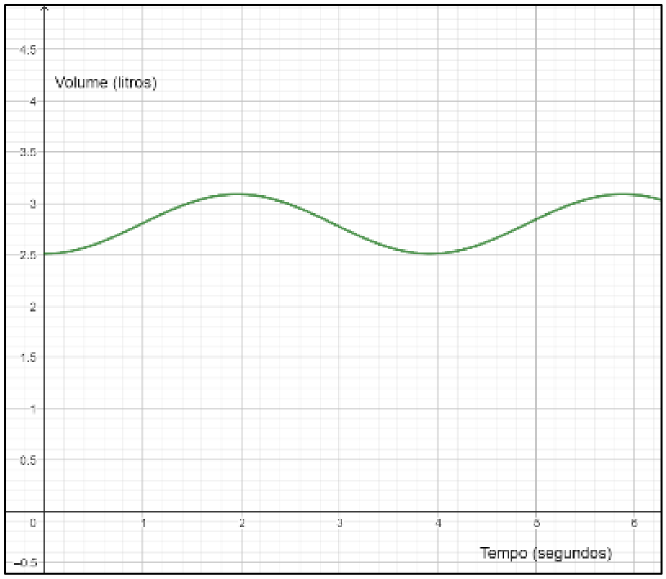


Figura 2. 80 - Gráfico da função V

Problema 2.29: Como a área $A = 4C$, onde C é o comprimento da senoide, substituindo o valor da área teremos C=2,033 metros. O domínio da função f é o intervalo $[0, 195]$, a imagem é o intervalo $[-2, 2]$. Observando a Figura 2. 81 obtemos o período $P = 195/6 = 32{,}5$. Como f é uma senoide teremos $f(x) = A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{P}\right)$. Substituindo o valor de P e observando o valor máximo e o mínimo de f teremos $f(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{32{,}5}\right)$ ou $f(x) = -2\,\text{sen}\left(-\frac{2\pi x}{32{,}5}\right)$.

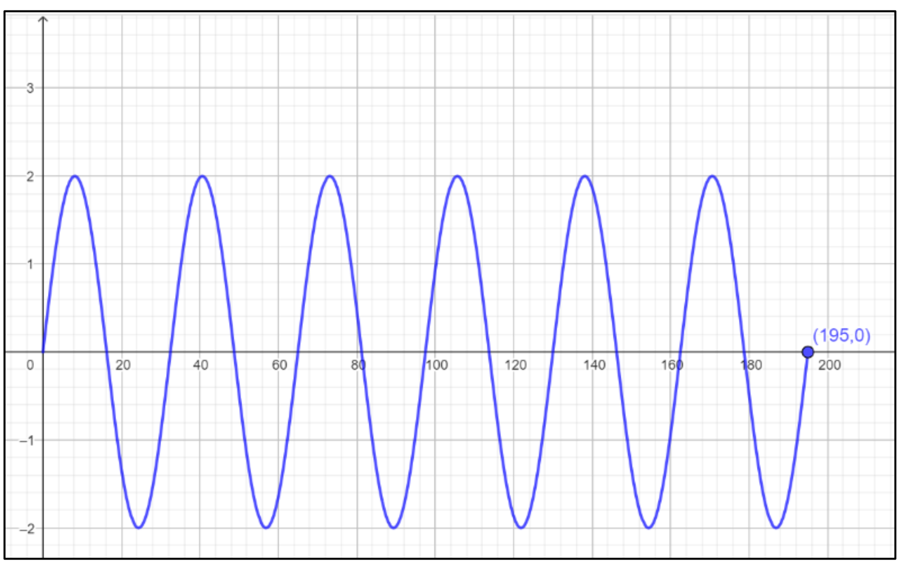


Figura 2. 81 - Gráfico da função f

Problema 2.30: Consulte solução do problema 3.9, no capítulo 3.

Problema 2.31: Consulte solução do problema 3.16, no capítulo 3.

Problema 2.32: Com ajuda de uma tabela é simples encontrar o tempo de 3h30min (ou 210 minutos) com 7 dias de treinamento oficial e o tempo de 3h10min com 11 dias de treinamento. A função $T = f(x)$, onde x é o número de dias e T o tempo (em minutos) vai satisfazer a expressão algébrica $T = 240 - 5(x - 1) = 245 - 5x$. Como os treinamentos vão continuar até que ela atinja o tempo de 2h30min, ou 150min, teremos 19 dias de treinamento oficial, assim o domínio (discreto) da função será o conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 19\}$ e a imagem será o conjunto discreto $\{240, 235, 230, \dots, 150\}$. O gráfico da função está representado na Figura 2. 82.

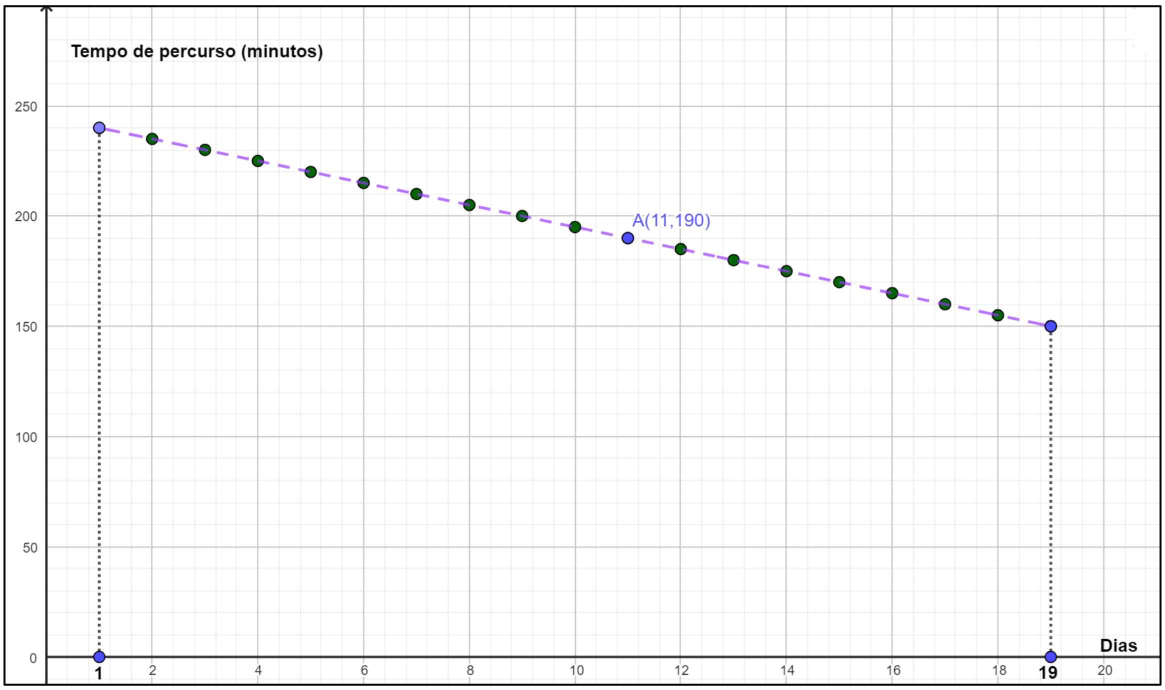


Figura 2. 82 - Gráfico da função tempo de maratona

Problema 2.33: Utilizando a estratégia já abordada na seção 3 do capítulo 1, de considerar um caso particular mais simples do problema, com apenas 3 times, teremos $T1, T2, T3$. Cada time joga com os restantes, em dois turnos, ou seja, teremos os jogos $T1T2, T2T1, T1T3, T3T1, T2T3, T3T2$. Se forem x times e y o número de jogos teremos $y = x.(x - 1)$, com $x \geq 2$. Se forem 90 jogos teremos $90 = x.(x - 1)$. Resolvendo a equação do segundo grau, para achar o valor de $x \geq 2$, encontramos 10 times. Este é um problema bastante simples, mas envolve o princípio multiplicativo, utilizado em análise combinatória. É importante mostrar para os alunos que, ao trabalhar com funções, podemos precisar utilizar conceitos e propriedades de outros tópicos de matemática.

Problema 2.34: Assumindo que o valor mais caro do m^3 seja cobrado somente no que exceder ao consumo com preço mais barato, teremos

$$f(40) = 4{,}389986 \cdot (15) + 9{,}657969 \cdot (15) + 13{,}169958 \cdot (10)$$

$$= 65{,}84979 + 144{,}869535 + 131{,}69958$$
$$= 210{,}719325 + 131{,}69958$$
$$= 342{,}418905$$
$$\cong 342{,}42 \text{ reais.}$$

Se x for o volume de água consumido então teremos que a conta de água, em reais, será dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4{,}389986x, & se\ 0 \leq x < 16 \\ 65{,}84979 + 9{,}657969(x-15), & se\ 16 \leq x < 31. \\ 210{,}719325 + (x-30), & se\ 31 \leq x < 46 \end{cases}$$

O gráfico correto da função f está representado na Figura 2. 83 a seguir.

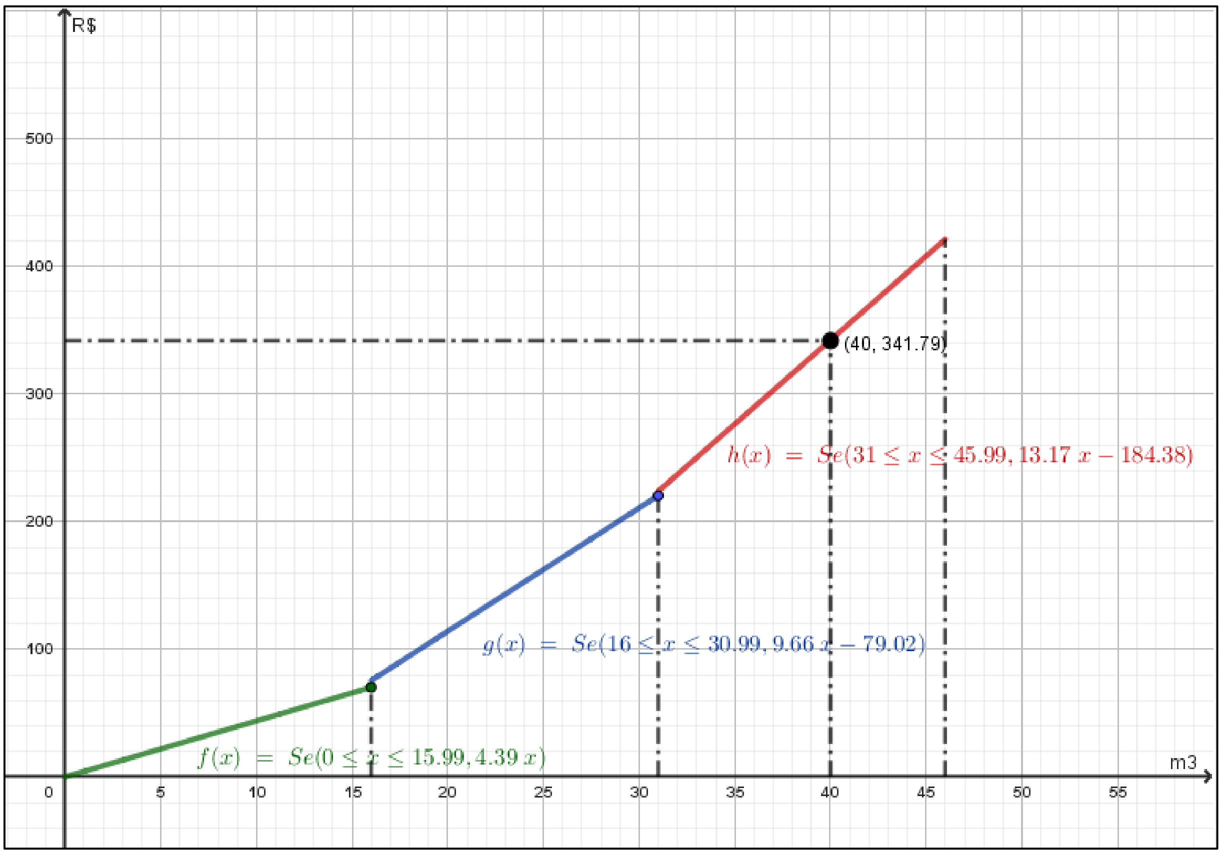


Figura 2. 83 - Gráfico correto do preço em função do consumo de água

Como a empresa cobra o mesmo valor da tarifa de água para o esgoto, o valor total da conta será igual a $342{,}41 \cdot 2 = 684{,}82$ reais.

Problema 2.35: A pessoa $P1$ tem salário de referência para cálculo do IRPF mensal de 5500 u.m., então o IRPF sobre o total será de 10%, ou seja, 550 u.m., enquanto a pessoa $P2$, com salário de referência para cálculo do IRPF mensal, de 6100 u.m., terá IRPF igual a 20%, ou seja, 1220

u.m. Assim, a diferença entre o salário de referência para cálculo do IRPF mensal e o IRPF de $P1$ será de 4950 u.m. enquanto esta diferença, no caso da pessoa $P2$ será de 4880 u.m.
A função f terá expressão algébrica satisfazendo

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq x \leq 1500 \\ 0{,}1x, & se\ 1500 < x \leq 6000 \\ 0{,}2x, & se\ x > 6000 \end{cases}.$$

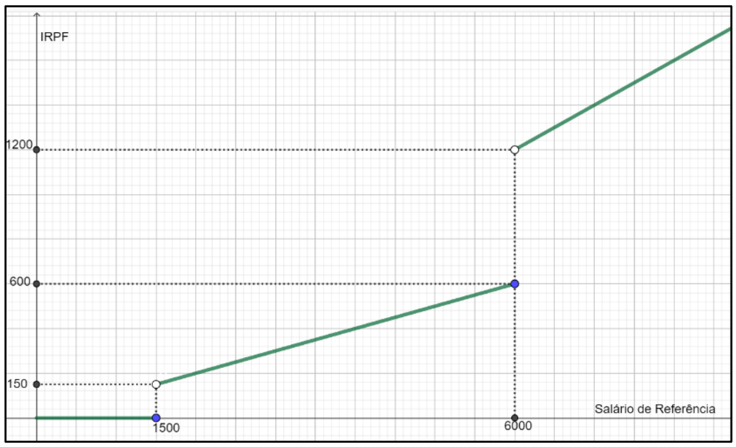


Figura 2. 84 - Gráfico da função f

A função g terá expressão algébrica $g(x)$ satisfazendo $g(x) = \begin{cases} x - 0, se\ 0 \leq x \leq 1500 \\ x - 0{,}1x, se\ 1500 < x \leq 6000 \\ x - 0{,}2x,\ se\ x > 6000 \end{cases}$

e seu gráfico está representado na Figura 2. 85 a seguir.

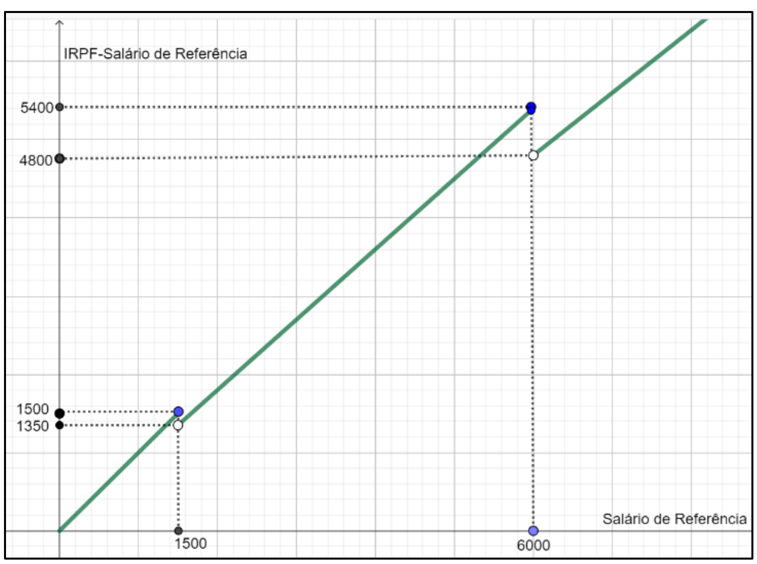


Figura 2. 85 - Gráfico da função g

Este sistema é injusto do ponto de vista social, porque os trabalhadores que recebem salário de referência para cálculo do IRPF mensal acima, mas próximo do limite de faixa, acabam recebendo menos do que os que recebem salário de referência para cálculo do IRPF mensal abaixo, mas próximo do limite da faixa, ou seja, quem recebe um pequeno aumento é penalizado, na verdade.

Problema 2.36: Consulte solução do problema 3.8, no capítulo 3. As soluções possíveis do item e serão $r = \frac{20}{\sqrt{\pi}}$, quando $b = 5\sqrt{\pi}$ ou $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$, quando $b = 20\sqrt{\pi}$.

Problema 2.37: a) Maria foi do ponto A ao ponto B, com velocidade uniforme $v = \frac{d}{t} = \frac{900}{15} = 60$ *m/min*, e voltou a A, com velocidade uniforme $v = \frac{900}{25} = 36$ *m/min*.
b) Após 20 *min* Maria já estava voltando, portando a velocidade era de 36 *m/min*.
c) João percorreu 900 m com velocidade 90 m/min, então $t = \frac{d}{v} = \frac{900}{90} = 10\ min$.
d) o gráfico distância × tempo de João e Maria está representado na Figura 2. 86. Para achar o ponto $P(t, d)$ de interseção, a partir do gráfico podemos obter a função f, que descreve o deslocamento de Maria para ir de A até B, tal que $f(t) = 60t$, uma vez que o coeficiente angular da reta (60) é a taxa de variação de d em relação a t, ou seja, a velocidade. Da mesma forma, lembrando que João começa em B, obtemos a função g, que descreve seu deslocamento de B até A, tal que $g(t) = 900 - 90(t - 5)$.

No ponto de interseção P, a ordenada é a mesma, isto é, $f(t) = g(t)$, de onde se segue que $t = 9\ min$ e $f(9) = g(9) = 540\ m$, ou seja, Maria e João estavam a $540\ m$ do ponto A.

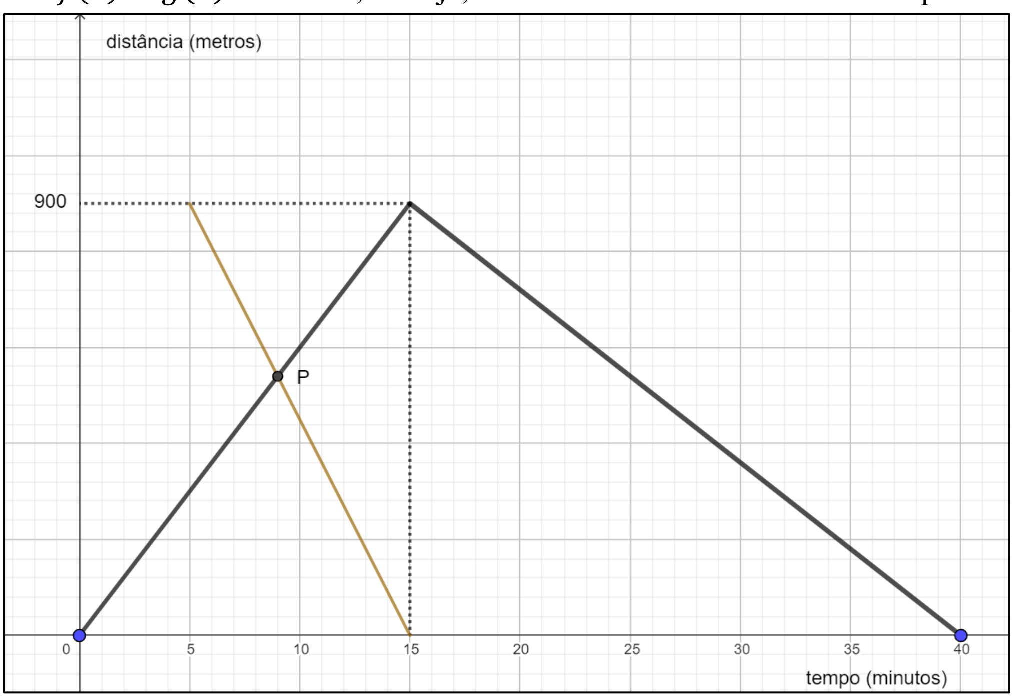


Figura 2. 86 - Diagrama distância × tempo para João e Maria

Problema 2.38: O domínio é formado por números naturais q: se $0 \leq q \leq 50$, teremos $S(q) = 1412 + 5q$, onde 1412 é a parcela fixa e $5q$ é a comissão de 5 reais sobre a venda de uma quantidade q de peças.

Caso o funcionário venda mais de 50 peças, as primeiras 50 terão a comissão acima. A quantidade vendida que exceder 50 é que terá comissão de 7 reais. Então, se $51 \leq q$ teremos o seguinte: $S(q) = 1412 + 50.5 + (q - 50).7 = 1312 + 7q$.

Portanto teremos uma função poligonal, definida por duas sentenças, com domínio discreto, em que $S(q) = \begin{cases} 1412 + 5q, se\ 0 \leq q \leq 50 \\ 1312 + 7q, se\ q \geq 51 \end{cases}$, lembrando que os valores de $q \in \mathbb{N}$.

Utilizaremos o comando do GeoGebra para função definida por várias sentenças. Mas consideraremos o gráfico auxiliar, supondo a função com domínio sendo os reais positivos, já que o intervalo de definição é grande e não permitiria de toda maneira enxergar os pontos isolados. O gráfico da função auxiliar está apresentado na Figura 2. 87 a seguir.

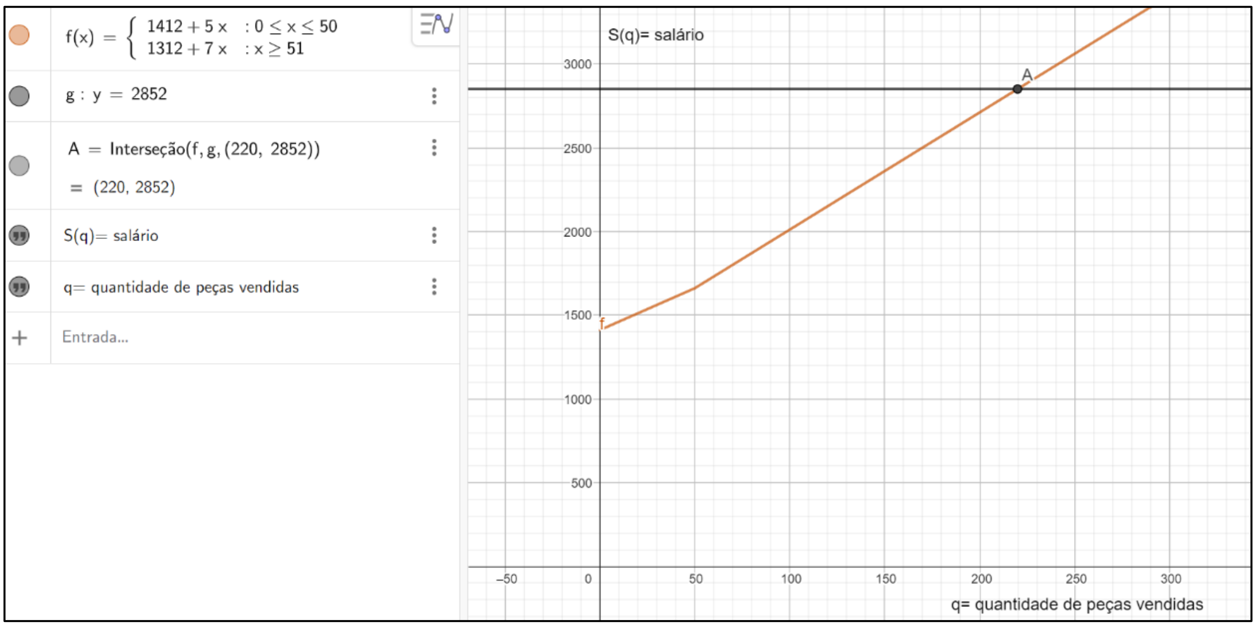


Figura 2. 87 - Gráfico da função auxiliar representando o salário dependendo da quantidade de peças

O GeoGebra permite obter geometricamente a solução para o item c, já que basta tomar a reta horizontal $y = 2852$ (correspondente ao salário $S(q) = 2852$ reais) e usar o recurso de interseção de objetos do GeoGebra para obter a abscissa correspondente no gráfico, que será $x = 220$ (correspondente à quantidade de peças vendidas, igual a 220).

O item c também pode ser resolvido algebricamente. Sem observar o gráfico, não sabemos a princípio, se o número de peças é menor ou maior que 50. Vamos verificar primeiro qual será o salário se forem vendidas 50 peças. Utilizando a primeira sentença obtemos $S(50) = 1662$ reais, que é menor do que o salário de 2852 reais, logo o número de peças correspondente será determinado utilizando a segunda sentença, isto é, resolvendo a equação $1312 + 7q = 2852$, de modo a obter o número de peças, que é 220.

Problema 2.39: A função $h = f \circ g$, tal que $h(x) = x - \frac{1}{8}$, tem como domínio o intervalo aberto $]\frac{1}{8}, +\infty[$ e como imagem o intervalo aberto $]0, +\infty[$. Seu gráfico está representado na

Figura 2. 88 a seguir. Se o tamanho é 2 para os ingleses, ele corresponde ao tamanho $17/8$ nos EUA, como mostra a figura. Como h é bijetora, existe a inversa h^{-1}, com domínio $]0,+\infty[$ e imagem $]\frac{1}{8},+\infty[$. Seu gráfico pode ser obtido refletindo-se o gráfico de h com respeito à reta $y = x$, como mostra a Figura 2. 88 a seguir.

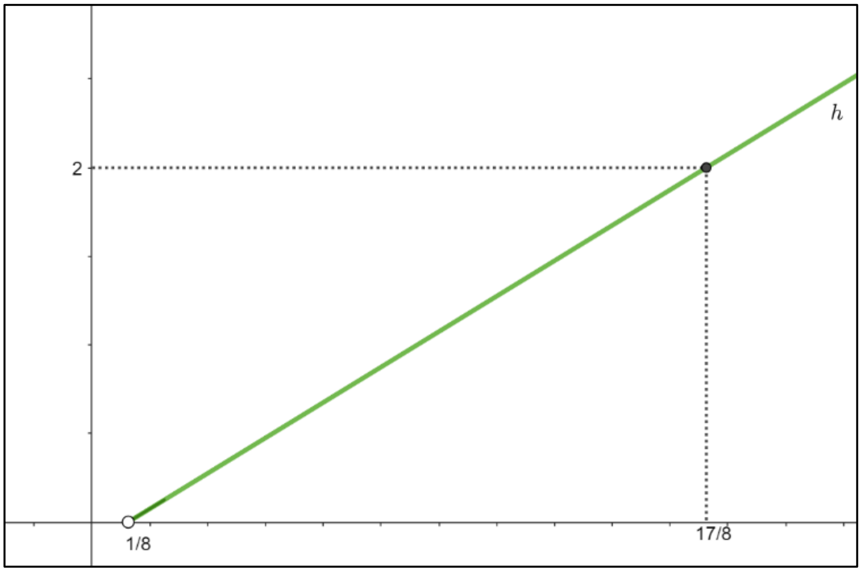


Figura 2. 88 - Conversão de tamanhos de chapéus nos EUA para os tamanhos de chapéus dos ingleses

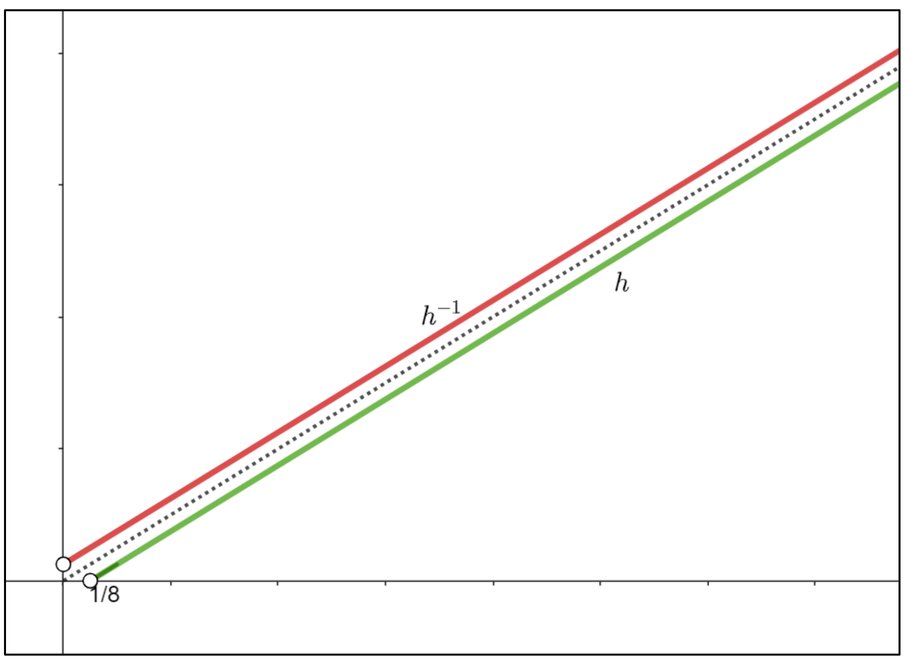


Figura 2. 89 - Função de conversão h e sua inversa

Capítulo 3 – Máximos e Mínimos de Funções

Neste capítulo serão apresentados, de forma intuitiva, alguns conceitos importantes que serão estudados pelos alunos posteriormente, de maneira mais formal, na primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI).

Para este fim serão explorados problemas envolvendo máximos ou mínimos de funções (problemas de otimização), como disparadores dos conteúdos a serem abordados, mostrando aos alunos aplicações da Matemática em geral e constituindo motivação para o estudo de CDI.

Entretanto, todos os problemas selecionados que possuírem solução, seja exata ou pelo menos aproximada, esta será obtida sem a utilização de conteúdos específicos do CDI.

A resolução destes problemas envolverá, sempre que for possível e desejável, a conversão entre diferentes registros de representação de funções. Poderão ser utilizados também recursos do *software* de geometria dinâmica GeoGebra como facilitadores para a visualização, compreensão ou solução dos problemas. Sendo assim, será empregado o MERP, já comentado nos capítulos 1 e 2 deste livro.

Um outro recurso que será utilizado na solução de diversos problemas será a Desigualdade das Médias (abordada na Escola Básica como parte do conteúdo de Estatística).

3.1 Existência e Quantidade de Soluções em Problemas de Máximo/Mínimo de Funções

O objetivo principal desta seção é desmistificar a concepção de que sempre existe solução para um problema de máximo ou mínimo de qualquer função, e que esta solução é sempre única. Mesmo restringindo os problemas a funções quadráticas, que são os que são estudados em geral no Ensino Médio, esta concepção pode se revelar falsa. É importante derrubar a forma automática como muitos alunos costumam resolver um problema sempre procurando usar a fórmula do vértice de uma parábola. Diversas funções não quadráticas serão abordadas nos problemas desta seção com soluções obtidas geometricamente.

O primeiro problema que será apresentado envolve inicialmente determinar a função que será objeto de otimização. Aqui algumas estratégias já descritas no capítulo 1 deste livro serão importantes auxiliares. Uma vez conhecida a função, o problema parece ser bastante simples.

Problema 3.1: *Joana visitará seus pais no Natal. Para isto, comprou uma passagem do Rio de Janeiro para São Paulo. O avião em que Joana viajará possui 200 lugares e cobra 400 reais por passagem, além de um adicional de 16 reais por cada lugar ainda não vendido.*
a) Determine uma expressão para a receita (R)*, obtida pela companhia aérea, sendo a variável* (x) *o número de lugares não vendidos no avião.*
b) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função receita, com domínio sendo $\mathbb{R}$*.*

c) Determine a quantidade de lugares não vendidos que proporcionará uma receita máxima para a empresa aérea (Adaptado de Gonçalves, 2019).

É necessário criar um modelo matemático para o problema. Neste caso, foi realizada uma simplificação em relação à realidade, pois o preço real de uma passagem está sujeito a outras variações, de acordo com a época ou horário da viagem e o acréscimo por cada lugar não vendido também pode mudar, dependendo da probabilidade de conseguir lotar ou não o avião. Assim a função receita real dependeria de mais de uma variável.

Denominamos P o preço de uma passagem e N o número de passageiros no avião. Nosso modelo será então $R(x) = P.N.$ Teremos que o valor de $N = 200 - x$. Já o valor de $P = 400 + 16x$. Assim $R = f(x) = (400 + 16x)(200 - x) = -16x^2 + 2800x + 80000$, resolvendo o item a. A solução do item b, que é o gráfico da função f, com domínio $\mathbb{R}$, está representada na Figura 3. 1 a seguir.

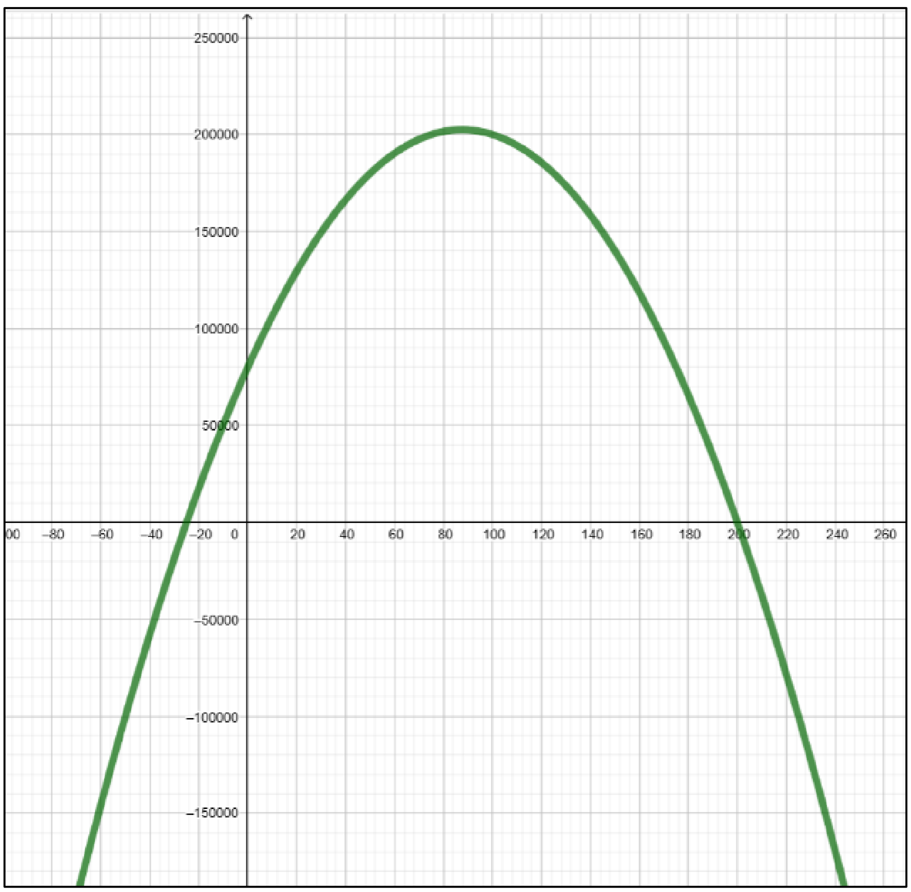


Figura 3. 1 - Gráfico da função R, com domínio $\mathbb{R}$

Uma vez que se trata de uma função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx + c$, cujo coeficiente do termo de segundo grau $a = -16 < 0$, o máximo de R ocorre no vértice desta parábola, que será no ponto $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Calculando os valores, obtemos $V = (87{,}5\,;202500)$.

Até aqui foi seguido procedimento bastante mecânico. Entretanto, ao responder à pergunta formulada no item c do enunciado, sobre o número de lugares vagos (x) para obter a receita máxima R, o valor será $x = 87{,}5$ lugares, que não é possível. Ao chegar à etapa de validação do resultado, de acordo com Polya, parece que a estratégia utilizada precisa ser repensada.

O ponto principal é que não foi observado qual o domínio da função R para o nosso problema contextualizado. Neste caso, o domínio da função R é: $J = \{0,1,2,\ldots,200\}$, ou seja, é um subconjunto dos números inteiros não negativos. Ao resolver o problema foi considerado que o domínio da função seria o conjunto dos números reais.

Uma modificação menos abstrata seria considerar como domínio um intervalo dos reais, $I = [0{,}200]$, mas levaria ao mesmo resultado impossível. Torna-se necessário comparar o gráfico da função R com domínio I, com o gráfico da função do nosso problema, com domínio J, em cujo comportamento estamos interessados.

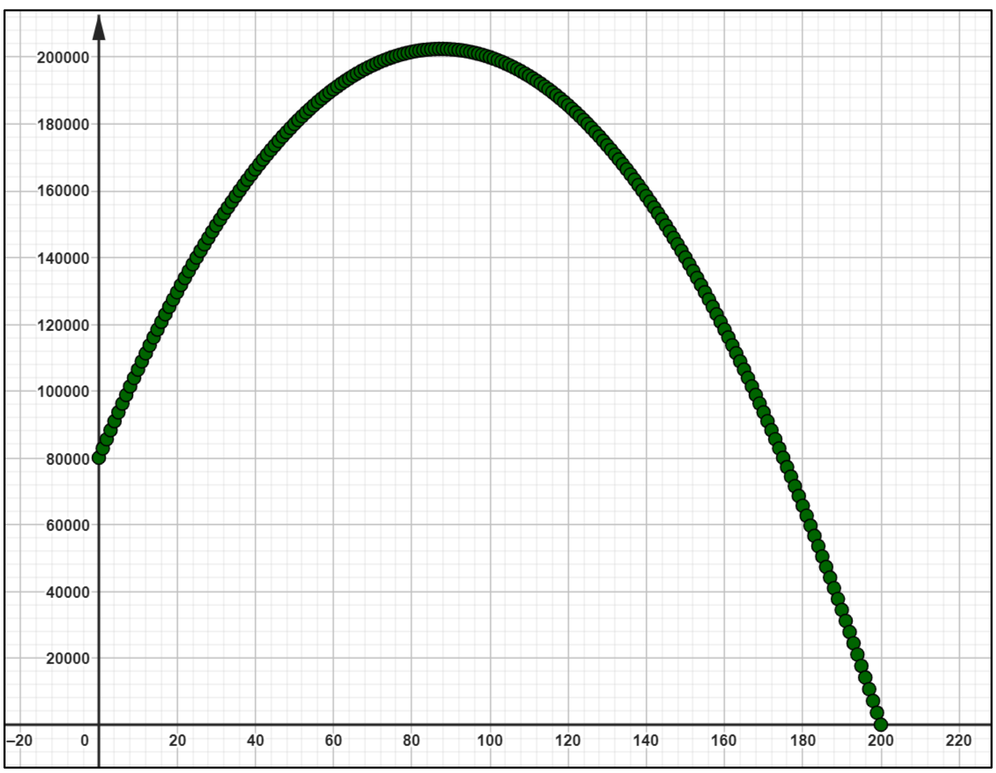


Figura 3. 2 - Gráfico da função receita R, com domínio

O gráfico da Figura 3. 2, para a função R com domínio J parece coincidir com o que seria o da função R, com domínio I, mas isto ocorre só de longe. Observando o gráfico da função R, com domínio J, utilizando a ferramenta *zoom* do GeoGebra, como mostra a figura 3. 3, podemos notar que ele é composto de pontos isolados e compreender melhor o resultado absurdo do número não inteiro e relacioná-lo com o gráfico.

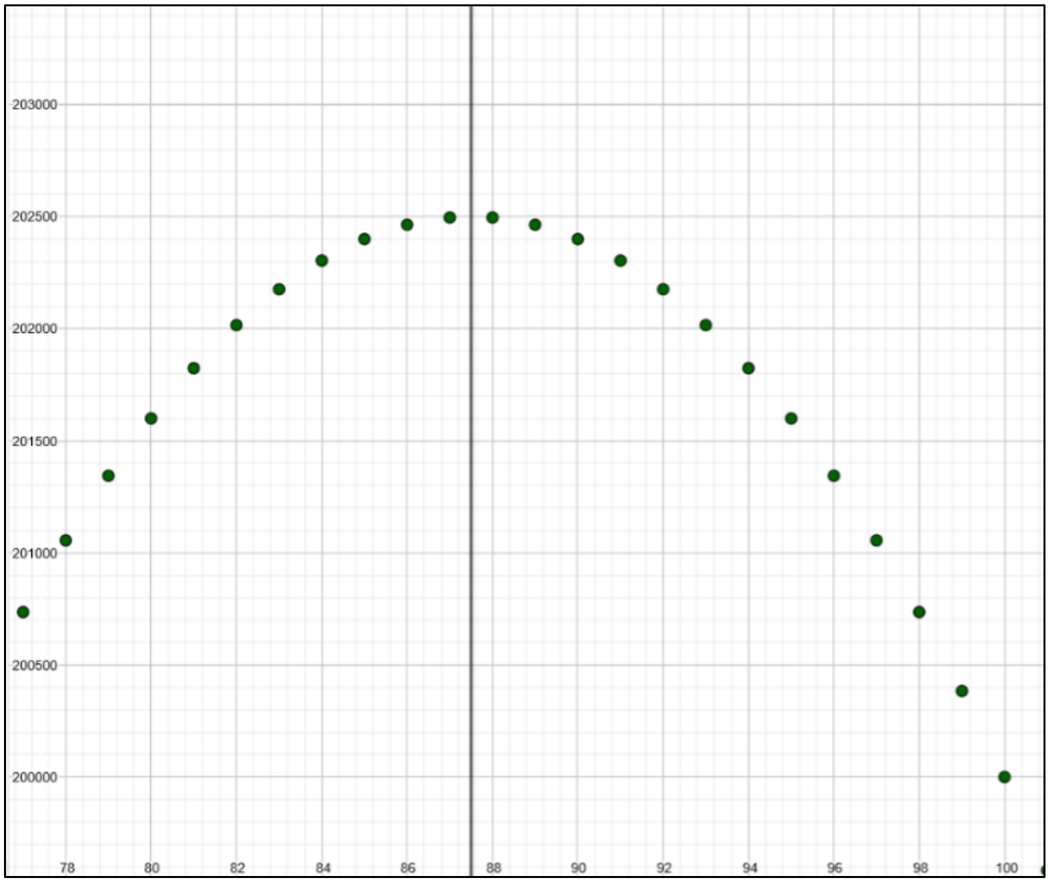


Figura 3. 3 - Detalhes do gráfico da função R, com domínio J

Na Figura 3. 3 a reta vertical $x = 87{,}5$ incluída é o eixo de simetria da parábola, no caso do gráfico da função R definida no intervalo I. Aqui a reta não intersecta o gráfico da função correspondente ao problema, cujo domínio é o conjunto J. No nosso caso podemos concluir que o problema tem duas soluções, ou seja, a receita máxima será obtida tanto com 87 como também com 88 lugares vagos no avião. Este resultado parece estranho, porque esperaríamos que a receita máxima ocorresse quando todos os lugares no avião estivessem ocupados, ou seja, o número de lugares vagos fosse igual a zero. No entanto, os modelos matemáticos utilizados pelas empresas aéreas levam em conta que muitos voos não lotam e existe também o lucro proporcionado por transporte de carga. No caso do nosso problema, o resultado obtido, mesmo utilizando um modelo simplificado em relação à realidade, fica mais plausível.

Mesmo se tratando de um tipo de problema de otimização bastante explorado na Educação Básica, pois envolve uma função quadrática, chama atenção aqui a importância do domínio da função para o problema contextualizado, que é um conjunto discreto, formado pelos números inteiros não negativos do conjunto J, subconjunto do domínio da função, considerada de forma abstrata, que é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Em termos formais, a função que modela o problema é uma restrição da função quadrática com domínio sendo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, como já havia sido mencionado na seção 2.1 deste livro.

Outro aspecto a observar é que o problema tem mais de uma solução (dois números possíveis para os lugares vagos no avião), diferente do que os alunos estão acostumados a encontrar. A receita máxima é a mesma, $R(87) = R(88) = 202.496$, uma vez que a reta $x = 87{,}5$ é o eixo de simetria da parábola e 87,5 está à mesma distância de 87 e de 88.

Finalmente, se fosse pedida a receita mínima da empresa, o problema teria solução também, $R(200) = 0$, isto é, quando os 200 lugares não forem vendidos, ou seja, o avião está vazio, considerando R definida no conjunto discreto J. No entanto, a função abstrata R, com domínio sendo o conjunto dos números reais, não teria valor mínimo, como se pode observar na Figura 3. 1, ou seja, o problema de minimização não contextualizado não teria solução.

A seguir será apresentado um problema que já foi explorado no capítulo anterior, quando o objetivo principal foi determinar a função que representa o problema contextualizado.

Problema 3.2: *Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo $ABCD$, com vértices A, B, C, D no sentido anti-horário, sendo A o vértice inferior esquerdo. Ela parte do ponto A, ao andar 20 cm chega ao vértice B, depois se andar mais 10 cm chega ao vértice C e finaliza seu trajeto andando mais 20 cm e chegando em D. A partir de A, se ela andar x cm, a formiga estará em um ponto F do contorno.*

a) *Utilize o GeoGebra para determinar o gráfico da função que associa o comprimento x ao valor da área do triângulo ADF, supondo que a formiga esteja em qualquer ponto do contorno $ABCD$.*

b) Determine onde a formiga deve estar para que a área do triângulo ADF seja máxima.

(Fonte: Adaptada da OBMEP, questão 2, nível 3, fase 2, 2014)

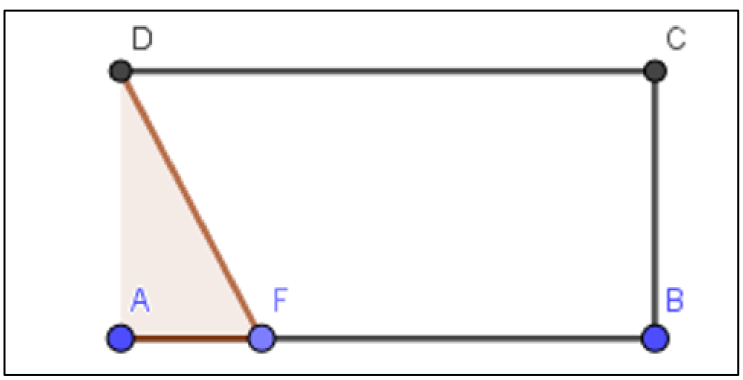


Figura 3. 4 - Posição da formiga no ponto F do contorno AB

No capítulo anterior este problema já foi discutido na seção 4 (problema 2.21), tendo sido fornecida uma figura que representa o contorno do retângulo e a área do triângulo ADF quando a formiga está no lado AB, ou seja, a Figura 3. 4. Foi solicitada uma representação algébrica para a função $S = G(x)$, onde S representa a área do triângulo ADF, se a formiga andar x cm ao longo do contorno $ABCD$, e o resultado foi que $S = G(x) = \begin{cases} 5x, & se\ \ 0 \leq x \leq 20 \\ 100, & se\ \ 20 \leq x \leq 30. \\ 250 - 5x, & se\ 30 \leq x \leq 50 \end{cases}$

Utilizando então o GeoGebra podemos obter o gráfico da função G, representado na Figura 3. 5 a seguir.

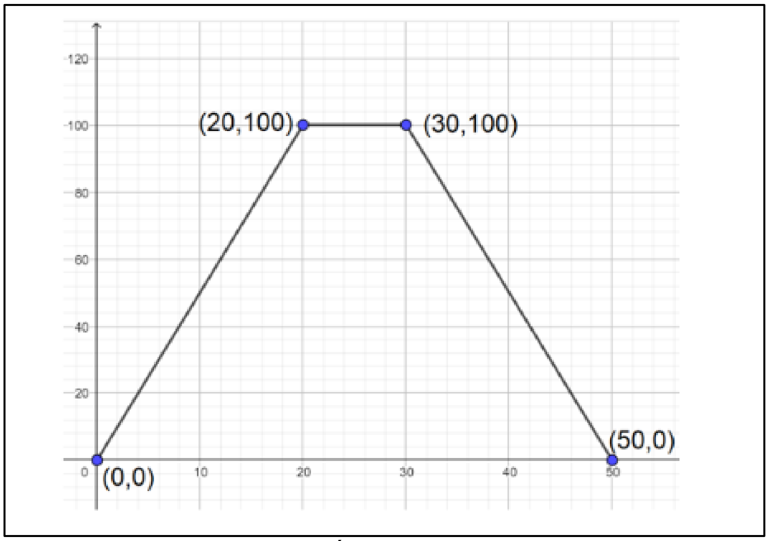


Figura 3. 5 - Área do triângulo ADF

É fácil ver, pelo gráfico mostrado na Figura 3. 5, que o valor máximo da área S é igual a 100, e será alcançado quando a formiga estiver em qualquer ponto do contorno $ABCD$ situado entre as distâncias 20cm e 30 cm, isto é, em qualquer ponto do lado BC. Este é um exemplo de problema que possui uma infinidade de soluções, além de envolver uma função afim por partes.

A representação gráfica da função área resolveu o problema, que também poderia ter sido resolvido sem conhecer a representação algébrica apresentada no item a, pois o *software* GeoGebra possibilita uma simulação dinâmica da situação representada apenas de forma estática na Figura 3. 5. Utilizando um recurso poderoso, o “controle deslizante” para modificar a posição F da formiga ao longo do contorno $ABCD$, por raciocínio lógico a partir do conceito de área de triângulo, é possível chegar ao resultado correto.

Os dois problemas anteriores tiveram o mesmo objetivo: determinar o **máximo global (ou absoluto)**, dados um domínio X e uma função f para um problema contextualizado, que é o maior valor real M do conjunto imagem da função neste domínio. Se o objetivo fosse obter o **mínimo global (ou absoluto)** de f no domínio X, este seria o menor valor real m do conjunto imagem da função no domínio considerado.

No problema 3.1 o domínio da função quadrática era o conjunto discreto de números inteiros não negativos $\{0,1,2,\ldots,200\}$ e o maior valor M do conjunto imagem (também discreto, com número finito de números naturais) foi igual a 202496, valor da função quando $x = 87$ e quando $x = 88$.

O domínio da função poligonal do problema 3.2 é formado pelos números reais do intervalo $[0,50]$ e o maior valor M do conjunto imagem (também um intervalo da reta) é igual a 100, valor da função quando $x \in [20,30]$. Podemos notar que as funções dos dois problemas não são injetoras nos domínios considerados. O problema 3.1 teve 2 soluções e o problema 3.2 teve uma infinidade de soluções.

Um problema de máximo/mínimo global ou absoluto envolve sempre uma função e um domínio fixado para o problema (em geral contextualizado). Isto significa que, se o domínio fixado mudar, o máximo/mínimo da função no domínio modificado pode se alterar. Isto será explorado em detalhe nos problemas 3.6 e 3.7, mais adiante neste capítulo. Dependendo do domínio considerado pode haver **solução única**, **número finito ou infinito de soluções** (como os dois primeiros problemas) ou mesmo **não existir solução** para esse tipo de problema.

No problema a seguir também não é necessário conhecer a representação algébrica nem a gráfica da função envolvida, para resolver um problema de otimização associado a ela. A utilização de comandos do GeoGebra permite aos alunos compreenderem o comportamento da função e os ajuda a determinar a solução do problema.

Problema 3.3: *Numa circunferência de 4 cm de raio, está inscrito um triângulo ABC, conforme mostra a Figura 3. 6 a seguir. O lado BC é um diâmetro para a circunferência.*
a) Utilize os comandos do GeoGebra para reproduzir a Figura 3. 6.

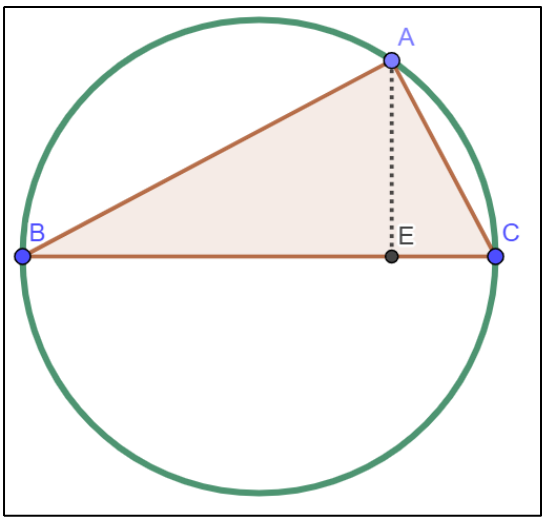


Figura 3. 6 - Triângulo inscrito

b) Suponha que o ponto A possa se deslocar ao longo da semicircunferência entre B e C, de modo que a medida do lado AB varie. Designe por $\boldsymbol{c}$ *em cm a medida de AB. Estude o comportamento do triângulo ABC quando mover o ponto A.*
c) Designe por $S(c)$ o valor da área do triângulo ABC, para uma determinada medida $\boldsymbol{c}$ *do lado AB. S é uma função de* $\boldsymbol{c}$*? Por quê? Qual o domínio de S? Para que valor(es) de* $\boldsymbol{c}$ *o valor de S é mínimo? E máximo?*
d) Use recursos do GeoGebra para esboçar o gráfico de S. Examine o gráfico: a curva obtida é uma parábola? Por quê?
e) Determine uma expressão analítica para S e o seu valor máximo (Adaptado de Silva (2016) por Biazutti, Vaz e Andrade (2021)).

Este problema é bastante simples quando analisado geometricamente. Ao seguir os passos indicados nos itens a e b, utilizando o "controle deslizante" do *software* GeoGebra no item b, o caminho para resolver o item c será facilitado.

Pode-se concluir que o menor valor de $\boldsymbol{c}$ é zero, quando não haverá um triângulo (pode ser considerado um "triângulo degenerado" com área $S(\boldsymbol{c}) = 0$). Teremos esta mesma área nula se $\boldsymbol{c} = AB = BC = 8$ cm, que é a medida do diâmetro da circunferência. Os valores possíveis de $\boldsymbol{c}$ então pertencem ao intervalo $[0,8]$, que é, portanto, o domínio da função S. Então a área S será mínima quando $\boldsymbol{c}$ for igual a 0 ou 8.

Com a ajuda do controle deslizante pode ser estabelecido que a área cresce, atinge um valor máximo e depois decresce, portanto tem um máximo, para um certo valor de $\boldsymbol{c} \in [0,8]$. Neste ponto foi obtida uma associação intuitiva entre um máximo de função onde ela para de crescer e começa a decrescer.

Para determinar $\boldsymbol{c}$, tal que $S(\boldsymbol{c})$ seja máxima, as possibilidades dinâmicas do GeoGebra permitem explorações por parte dos alunos, importantes para que visualizem a associação entre o crescimento da área e o crescimento da altura $(h = AE)$ do triângulo, em relação ao lado BC. A área será máxima, portanto, quando a altura for máxima, o que ocorrerá quanto h for igual ao raio. Nesse caso os triângulos AEB e AEC serão congruentes, isósceles e retângulos. A hipotenusa de AEB será o valor de $\boldsymbol{c}$, os catetos serão raios e, usando o teorema de Pitágoras, teremos $\boldsymbol{c} = r\sqrt{2}$, isto é, $\boldsymbol{c} = 4\sqrt{2}$, como mostrado na Figura 3. 7 a seguir.

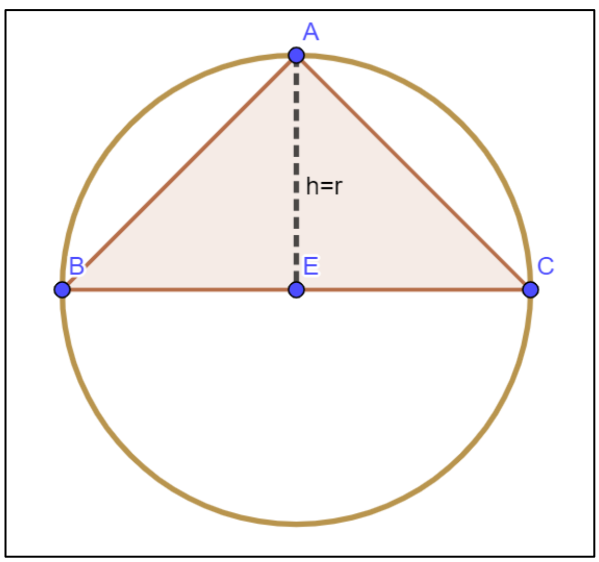


Figura 3. 7 - Posição do triângulo de área máxima

O item d é resolvido utilizando outros recursos do GeoGebra, conforme explicado em exemplos no Apêndice A1 deste livro, gerando o gráfico apresentado na Figura 3. 8.

Alguns alunos talvez respondam que se trata de uma parábola. Outros poderão responder que não. A resposta justificada pode ser elaborada revisando as propriedades de uma parábola, já estudadas no capítulo anterior. Outra forma de responder pode ser obtida após resolver o último item.

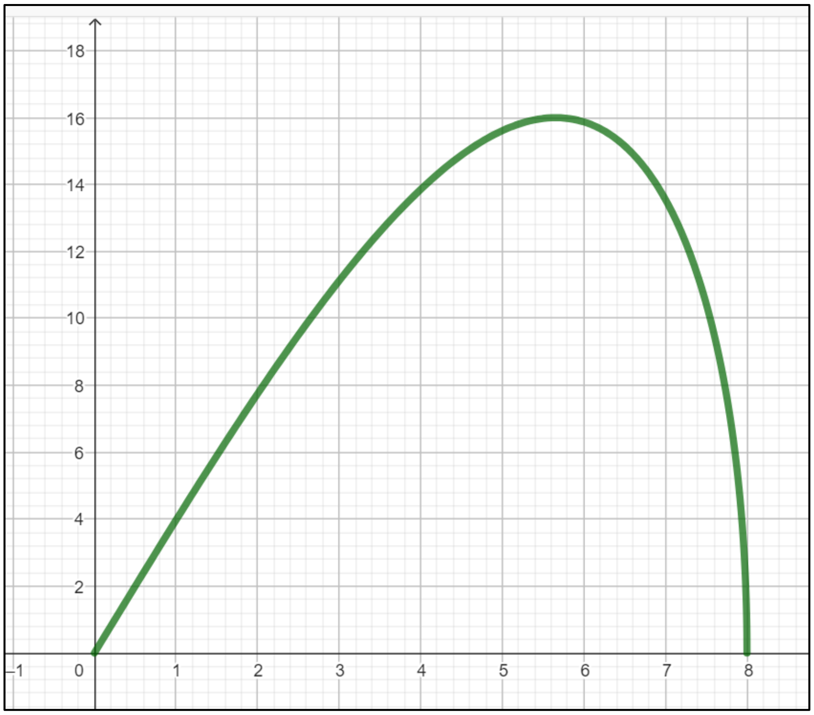


Figura 3. 8 - Área do triângulo inscrito

Utilizando a fórmula da área de um triângulo, aqui com a base sendo o lado BC, que é o diâmetro da circunferência (8 cm), teremos S definida como função de h. Então torna-se necessário obter uma expressão de h como função de $\boldsymbol{c}$. Com as relações métricas no triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em A obtemos que $a.h = b.c$, isto é, $BC.h = AC.\boldsymbol{c}$, então $h = \frac{AC\,.\,\boldsymbol{c}}{8}$. Com o teorema de Pitágoras teremos $BC^2 = c^2 + AC^2$, ou seja, $AC = \sqrt{64 - c^2}$.

Concluímos então que $h = \frac{c\sqrt{64-c^2}}{8}$. Assim $S = \frac{BC.h}{2} = 4.h = \frac{c\sqrt{64-c^2}}{2}$. Fica justificada então a reposta “não” ao item d, e respondido também o item e. O valor máximo de S poderia ter sido respondido antes, uma vez que ele ocorre quando a altura h é igual ao raio, logo S máxima será 16 cm^2.

O problema apresentado ilustra como a utilização do GeoGebra pode contribuir para a compreensão dos conceitos de máximo e mínimo, associados às propriedades de função crescente e decrescente e a atenção que deve ser dada ao conjunto de valores possíveis para a variável. O mais importante, talvez, seja levar o aluno a distinguir o objeto (função) de suas representações (algébrica ou geométrica).

Outro conceito importante que pôde ser explorado aqui é o de função composta, que já foi revisado na seção 2 do capítulo 2, pois aparece de modo muito mais natural a dependência de S com respeito à variável h (altura do triângulo retângulo com respeito ao lado BC). O problema pode ser resolvido de forma mais fácil observando como h depende de $\boldsymbol{c}$, sem que seja necessário obter a expressão analítica da função h. Cabe ressaltar aqui que foi resolvido um problema de otimização envolvendo uma função bem mais complicada que uma função quadrática, sem que fosse necessário utilizar conceitos e propriedades só estudadas em CDI.

Na verdade, como será visto pelo estudante mais tarde, na primeira disciplina de CDI, o problema não será fácil de ser resolvido, mesmo utilizando derivadas e suas propriedades, dada a natureza da função S. A expressão de S como função composta, $S = S(h(\boldsymbol{c}))$ facilitou a compreensão do problema e levou à simplificação do processo de resolvê-lo. É importante chamar atenção dos alunos para funções compostas como facilitadoras e não conceitos puramente abstratos, como estão mais habituados a enxergá-las.

O próximo problema pretende explorar novamente a função quadrática, com o objetivo de tirar os alunos da zona de conforto deles, ou seja, pensar erroneamente que, sempre que o problema requer maximizar ou minimizar uma função quadrática, basta obter as coordenadas do vértice da parábola.

Problema 3.4: *Um barco possui uma vela branca quadrada de 4m de lado, presa ao barco de modo que um dos lados do quadrado $ABCD$ fique paralelo à água. Deseja-se pintar de vermelho uma região triangular na vela com um dos vértices sobre o ponto médio do lado mais alto da vela CD, o segundo vértice no lado inferior AB, paralelo a esse e o terceiro sobre o lado BC entre os dois. A distância do vértice superior direito da vela até o terceiro vértice do triângulo deverá ser a mesma que a do vértice inferior direito da vela até o segundo vértice.*

a) Utilize o GeoGebra para esboçar a vela e a região triangular a ser pintada de vermelho, conforme a Figura 3. 9.

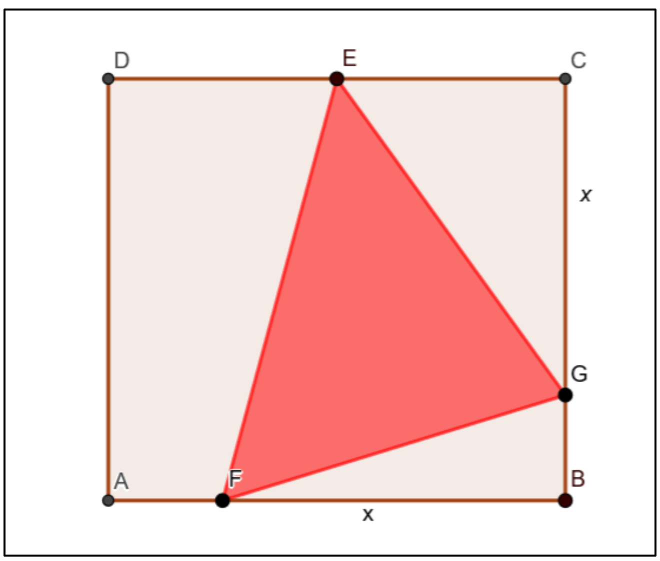


Figura 3. 9 - Região triangular EFG na vela quadrada $ABCD$

b) Utilize o GeoGebra para fazer simulações da área da região triangular EFG, para diferentes valores de x, onde x é o comprimento dos segmentos FB e CG apontados na Figura 3. 9, de modo a determinar o intervalo de valores possíveis para x.

c) Uma vez que a cor vermelha aparece mais que a branca, para que o barco tenha mais visibilidade, a área da região triangular EFG deve ser maximizada. Determine uma expressão para a área da região triangular EFG em função de x.

d) Determine onde devem ficar os vértices F e G de modo que o barco tenha máxima visibilidade. (adaptado de AZEVEDO (2009))

Movendo-se os pontos F e G, para obter diferentes valores para x, podemos assumir que $x \in [0,4]$, o que responde ao item b.

Os vértices F e G podem assumir diferentes posições, logo a região triangular EFG pode ter diferentes formatos, mas os triângulos ECG e FBG sempre serão retângulos e $ADEF$ sempre será um trapézio com dois lados paralelos, DE e AF.

Portanto a área do triângulo EFG pode ser encontrada retirando-se da área do quadrado $ABCD$ as áreas dos triângulos ECG e FBG e a área do trapézio $ADEF$.

Os dados numéricos do problema são os seguintes: $AB = BC = CD = DA =$ 4m; $DE = CE =$ 2m. Sabemos do enunciado também que $CG = BF = x$.

Tem-se então o seguinte: a área do quadrado $ABCD$ será igual a 16 m^2; a área do triângulo ECG será igual a $\frac{EC.CG}{2} = \frac{2x}{2} = x$; *a* área do triângulo FBG será igual a $\frac{BF.BG}{2} = \frac{x.(4-x)}{2}$ e a área do trapézio $ADEF$ será igual a $\frac{(DE+AF)AD}{2} = \frac{\left(2+(4-x)\right)4}{2}$.

Portanto, a área do triângulo EFG será $S = f(x) = 16 - x - \frac{x.(4-x)}{2} - \frac{\left(2+(4-x)\right)4}{2}$, isto é, $S = 4 - x + \frac{x^2}{2}$. Como S é uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola, calculando as coordenadas do vértice teremos $V\left(x, f(x)\right) = (1; 3{,}5)$, logo $f(1) = 3{,}5m^2$.

Entretanto, o valor $x = 1$ não determina de forma alguma o triângulo de área máxima, e sim, o de área mínima. Utilizando o gráfico da parábola e o fato de $a = \frac{1}{2} > 0$ resultar na concavidade para cima, além do conjunto de valores possíveis para x, isto é, $0 \leq x \leq 4$, ou utilizando diretamente o GeoGebra, chegaremos ao gráfico da função S, apresentado na Figura 3. 10.

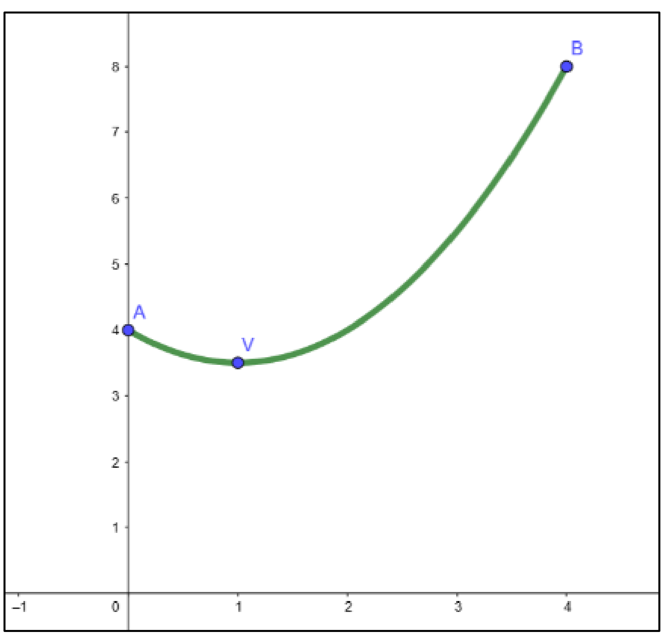


Figura 3. 10 - Gráfico da função S

Portanto, o valor máximo da área será obtido quando $x = 4$, isto é, quando o vértice G do triângulo coincidir com o vértice B do quadrado e quando o vértice F do triângulo coincidir com o vértice A do quadrado. Deve-se sempre dar a resposta de acordo com a situação-problema real. A pergunta do item d não fala em x e sim em vértices da vela triangular.

Após a resolução deste problema, poderia ser proposto outro, com o mesmo contexto, mas no qual a pergunta fosse onde deveriam estar os vértices do triângulo, se quisermos usar a menor quantidade de tinta vermelha. Neste caso deseja-se achar x de modo a minimizar a área do triângulo.

Utilizando o mesmo gráfico já obtido na Figura 3. 10, pode-se observar que a área mínima será obtida quando x for a abscissa do vértice da parábola. Como vimos anteriormente, $x = 1$. Ou seja, a área será mínima se o vértice G do triângulo estiver a 1m de distância do vértice C do quadrado e o vértice F do triângulo estiver a 1m de distância do vértice B do quadrado. Quando houver uma fórmula que possa ser utilizada para resolver o problema da forma mais simples possível, não há problema em utilizá-la. Mas a questão é saber quando e onde....

O próximo problema terá sua modelagem facilitada com auxílio de uma tabela para padronizar os dados relevantes. Assim será possível notar que, inicialmente, podem ser estudados dois problemas distintos separados, antes do problema original.

Este tipo de estratégia facilitadora já foi descrito no capítulo 1. Além disso, as expressões “maior lucro” e “número mínimo” devem ser bem compreendidas no contexto, assim como o domínio das funções envolvidas. A conversão entre duas representações, a algébrica e a geométrica também auxilia a resolver o problema.

Problema 3.5: *Um criador de gado leiteiro necessita de um hectare de área de pasto para cada vaca. Cada uma produz 4500 litros de leite por ano, em média, que é vendido a R$0,20 o litro. Este produtor tem um gasto anual fixo de R$ 20.000,00 com a manutenção do processo de coleta e transporte de leite. Um criador de gado de corte produz 250 kg de carne de gado (peso médio de 1 vaca por ocasião do abate) por hectare necessário a ela, por ano, e vende a R$0,80 o quilo, sem custos adicionais.*

a) Utilize o GeoGebra para determinar a função maior lucro (em gado de corte ou leiteiro), correspondente à área destinada ao gado.

b) Qual o número mínimo de vacas que ele deve possuir, para que o maior lucro anual seja obtido com gado leiteiro? (adaptado de Backes, 2008)

Como já mencionado, para facilitar a modelagem como primeira etapa apresentaremos os dados relevantes do problema com auxílio da tabela 3.1 a seguir:

Tabela 3. 1 - Dados da produção do fazendeiro

Tipo (Gado)	Quantidade (unidades)	Área (hectares)	Rendimento (ano)	Preço (reais)
Leiteiro	1	1	4500 l/ano	0,20/l
De corte	1	1	250 kg/ano	0,80/kg

Para determinar a função maior lucro, será utilizada a estratégia de separar o problema em partes, no caso, determinar o lucro com gado leiteiro e depois o lucro com gado de corte. Em seguida, pode-se fazer o gráfico de cada função e depois utilizar os resultados combinados para obter o gráfico da função “maior lucro”.

A variável que corresponde à área destinada ao gado será o número x de hectares. O modelo para o lucro é simples: $L = R - C$, onde L representa o lucro, R a receita (ou seja, o preço de venda) e C o custo.

Considerando a criação de gado leiteiro, teremos, observando os dados da primeira linha da tabela 3.1, que $R = 0{,}20 \cdot 4500\,x = 900\,x$. Dos dados do enunciado, $C = 20000$. Então $L_1 = 900x - 20000$.

Escolhendo a criação de gado de corte, teremos, a partir dos dados da segunda linha da tabela 3.1, que $R = 0{,}80 \cdot 250\,x = 200\,x$. Do enunciado sabemos que $C = 0$. Logo $L_2 = 200x$.

Para fazer o esboço dos dois gráficos, lembremos que a equação $y = ax + b$ é representada geometricamente por uma reta e, para traçá-la, basta conhecer dois de seus pontos. Também podemos utilizar o GeoGebra para traçar os dois gráficos.

No caso da função lucro com vaca leiteira, a reta passa nos pontos $(0, -20000)$ e $\left(\frac{20000}{9}, 0\right)$. E, no caso da função lucro com vaca de corte, a reta passa nos pontos $(0{,}0)$ e $(1{,}200)$.

O item a pede que seja obtido o gráfico da função “maior lucro”, ou seja, para cada valor para área destinada ao gado, qual será o tipo de gado que renderá o maior lucro. Neste caso, serão esboçadas as duas retas, correspondentes ao lucro com cada tipo de gado, no mesmo sistema de coordenadas, para possibilitar comparação entre os lucros, conforme mostra a Figura 3. 11.

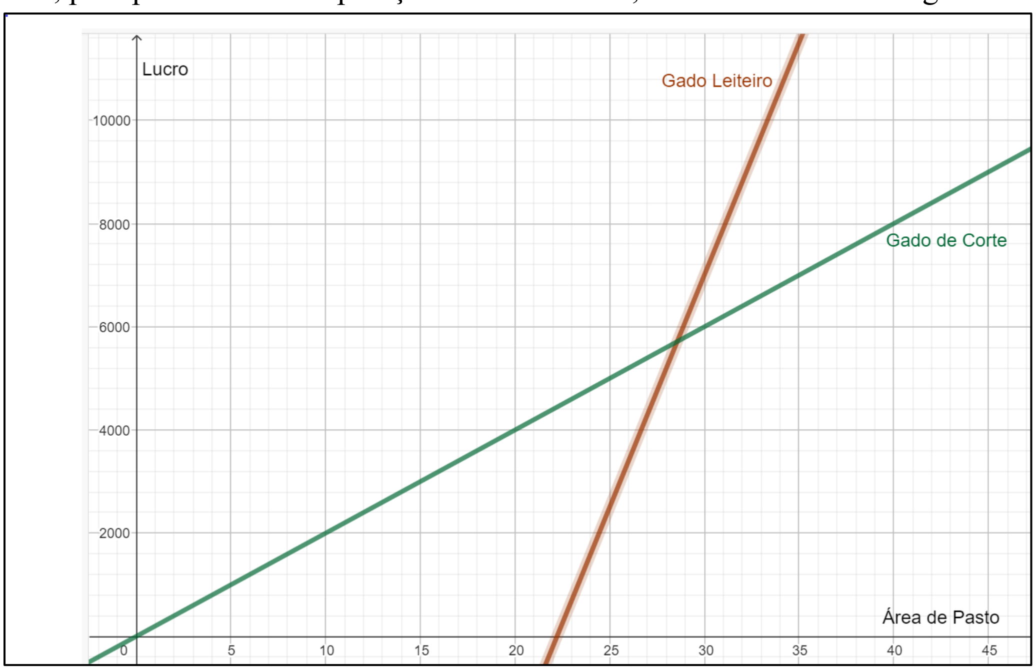


Figura 3. 11 - Gráfico do lucro com cada tipo de gado

Conclui-se então, como mostra a Figura 3. 12 a seguir, que, se a área de pasto for $x \in [0, x^*[$, o lucro será maior com gado de corte e, se $x > x^*$, o lucro será maior com gado leiteiro. Se $x = x^*$ hectares de área de pasto, o lucro será o mesmo, com os dois tipos de gado. Para encontrar a expressão algébrica ou geométrica completa da função maior lucro, é necessário obter x^*.

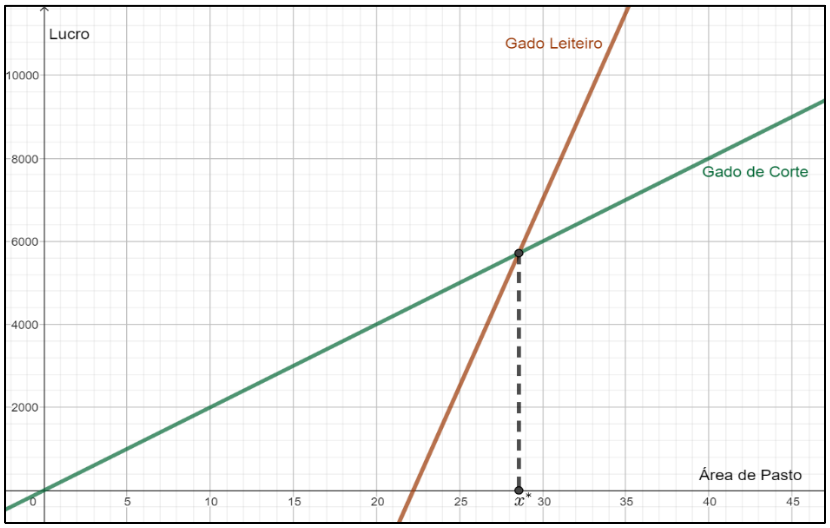


Figura 3. 12 - Lucro igual com os dois tipos de gado

Como o lucro será o mesmo quando $x = x^*$, igualando as duas funções lucro, obtemos então $x_* = \frac{200}{7} \cong 28{,}6$ hectares. Então $L = f(x) = \begin{cases} 200x, & se\ 0 \leq x \leq \frac{200}{7} \\ 900x - 20.000, & se\ \ x > \frac{200}{7} \end{cases}$

Utilizando novamente o GeoGebra, determinamos o gráfico de L, a função "maior lucro" com gado, dependendo da área de pasto destinada ao gado, conforme mostra a Figura 3. 13.

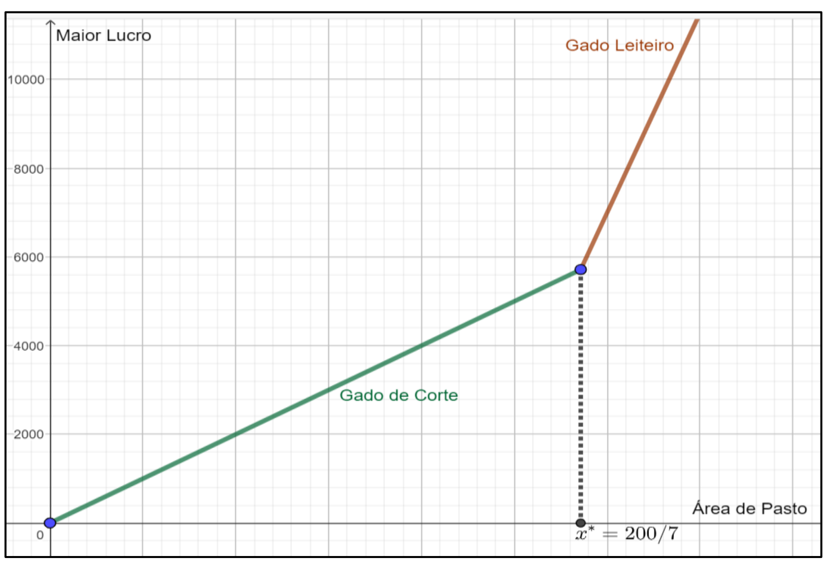


Figura 3. 13 - Função "maior lucro"

Para resolver o item b, deve-se prestar atenção ao fato de que as duas funções (maior lucro, com $x =$ área de pasto e maior lucro, com $x =$ número de vacas) podem atender à mesma lei, mas não têm o mesmo domínio, o gráfico da segunda função é composto por pontos isolados.

O domínio da segunda função é o número de vacas $x \in \{0, 1, \dots, 28, 29, 30, \dots\}$. Portanto, a menor quantidade de vacas para que o maior lucro seja com gado leiteiro é $x = 29$ vacas.

Uma variante deste problema poderia ser proposta pelo professor, neste caso seriam fornecidos os gráficos das funções L_1 e L_2 para que, a partir deles, os alunos descobrissem o gráfico da função "maior lucro". A representação algébrica das funções L_1, L_2 e da função "maior lucro" poderia ser também solicitada. Nesta outra formulação os alunos estariam trabalhando a passagem da representação geométrica para representação algébrica das funções, o que não é comum nos problemas.

A função escolhida para os problemas 3.6 e 3.7 já apareceu antes, na seção 4 do capítulo 2, associada a um fenômeno físico, como exemplo de função com descontinuidade (para mais detalhes, consultar solução do problema 2.24).

O problema a seguir pode ser utilizado para motivar o conceito de limite de uma função, além de reta assíntota ao seu gráfico. Também explora os conceitos de domínio e imagem de função, de função não limitada e da relação entre máximo/mínimo global com o domínio de definição considerado.

Problema 3.6: *Observe a tabela a seguir.*

Tabela 3. 2 - Problema das assíntotas

x	1	2	3	4	5	6	7	...	10.000
y	4	2	4/3	1	4/5	2/3	4/7	...	a

a) O que podemos concluir sobre o número a?

b) Qual é relação algébrica entre y e x? Justifique porque o valor de y é função de x.

c) Considere agora que os pontos (x, y) determinam uma função f, onde $y = f(x)$, com o maior conjunto de valores reais possíveis para x. Qual será este conjunto? O gráfico desta função poderá interceptar o eixo das abscissas?

d) O que acontece com o gráfico da função f enquanto x cresce mais e mais, ou seja, o que acontece quando x tende ao infinito por valores positivos? E por valores negativos? (explore diferentes possibilidades com GeoGebra para responder esta pergunta) O que acontece com o gráfico quando x tende ao valor zero por valores positivos? E por valores negativos? (explore diferentes possibilidades com GeoGebra para responder estas perguntas)

e) Represente a função f no plano cartesiano utilizando o GeoGebra. O que se pode concluir sobre o valor máximo e sobre o valor mínimo da função? (Adaptado de Biazutti, Vaz e Andrade, 2021)

Uma análise da tabela 3.2 leva a concluir que $a = \frac{4}{10\,000}$ e $xy = 4$, sendo que para cada número real $x \neq 0$ existe um único y, respondendo aos itens a, b e c, pois sendo $x \neq 0$, então também $y \neq 0$, o que acarreta que o gráfico da função f, onde $y = f(x) = 4/x$, não intersecta a reta horizontal $y = 0$ (eixo das abscissas).

Devido à restrição de que $xy = 4$, quanto maior o valor positivo (negativo) de x, mais próximo de zero (tende ao valor zero) por valores positivos (negativos) será o valor de y (a reta horizontal $y = 0$ é denominada assíntota horizontal).

Da mesma forma, quanto mais próximo de zero por valores positivos (negativos) for x, maior deve ser o valor positivo (negativo) de y (a reta vertical $x = 0$ é denominada assíntota vertical).

Utilizando simulações com o GeoGebra é fácil constatar estas conclusões geometricamente, como mostra a Figura 3.14.

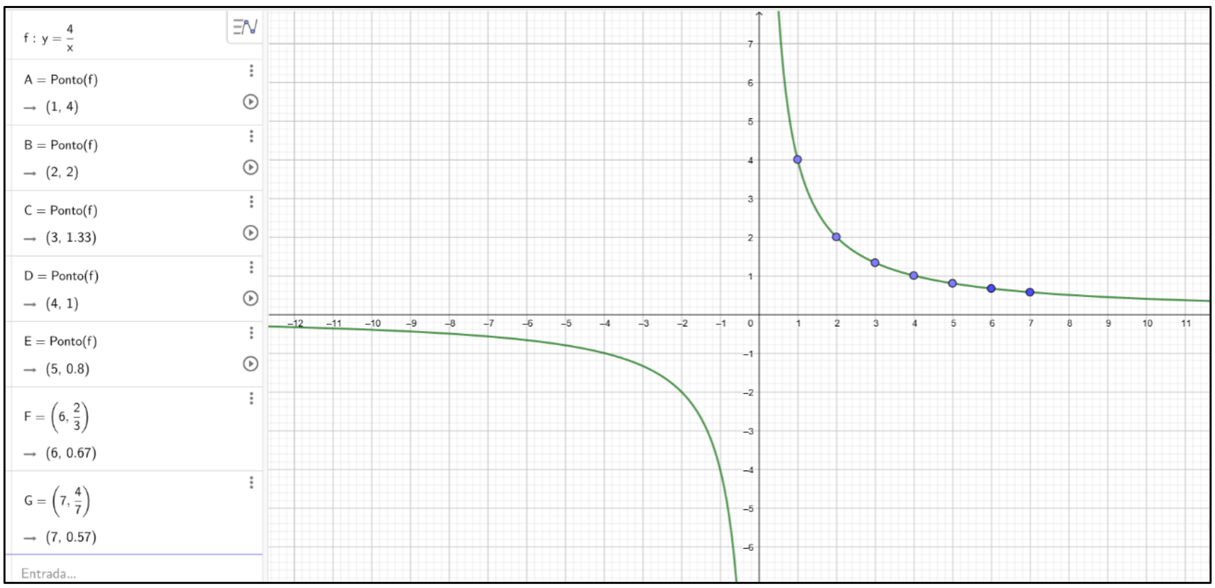


Figura 3.14 - Gráfico de $y = 1/x$

A conclusão final, bem mais simples de ser obtida com a análise geométrica, é que a função não tem valor máximo, nem mínimo global, se o domínio considerado for o conjunto dos números reais não nulos, respondendo ao item d e ao item e.

O professor poderá utilizar ainda o gráfico obtido na figura 3. 14, para explorar mais os conceitos de máximo e mínimo global em um intervalo, como será visto a seguir.

Problema 3.7: *Considere a função associada à tabela 3.2., mas com restrição de domínio.*
a) Suponha que o domínio da função seja $I_1 = [1,10]$. *Qual será o conjunto imagem? O que se pode concluir sobre o valor máximo e sobre o valor mínimo da função? Responda as mesmas perguntas mudando o domínio para* $I_2 =]0,10]$, $I_3 = [-10,0[\cup]0,10]$, $I_4 =]1,10[$ *e* $I_5 = [2,7]$.

b) Considere a seguinte afirmação (verdadeira): Se f é uma função definida num intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$ contínua, então f tem valor máximo e valor mínimo. Faça simulações de esboço de gráficos utilizando o GeoGebra que mostrem que a recíproca desta afirmação é falsa.

Utilizando os recursos do GeoGebra para restringir o gráfico, com respeito à variável x, aos intervalos apontados, pode-se obter as respostas ao item a.

A figura 3. 15 mostra o valor máximo de f, que é $f(1) = 4$, e o valor mínimo de f, que é $f(10) = \frac{2}{5}$ no intervalo I_1. A figura 3. 16 mostra o valor mínimo de f, que é $f(10) = \frac{2}{5}$, mas não há valor máximo de f em I_2.

Observando o gráfico da Figura 3.14, é possível verificar que a função f não tem valor máximo nem mínimo global no intervalo I_3 nem no intervalo I_4.

Já no intervalo I_5, como comprovam a Figura 3.15 e a Figura 3.16, a função é contínua e o intervalo é fechado e limitado, além disso a função é decrescente, logo o máximo e mínimo global ocorrerão nos extremos do intervalo, isto é, o valor máximo será $f(2) = 2$ e o valor mínimo será $f(7) = \frac{4}{7}$.

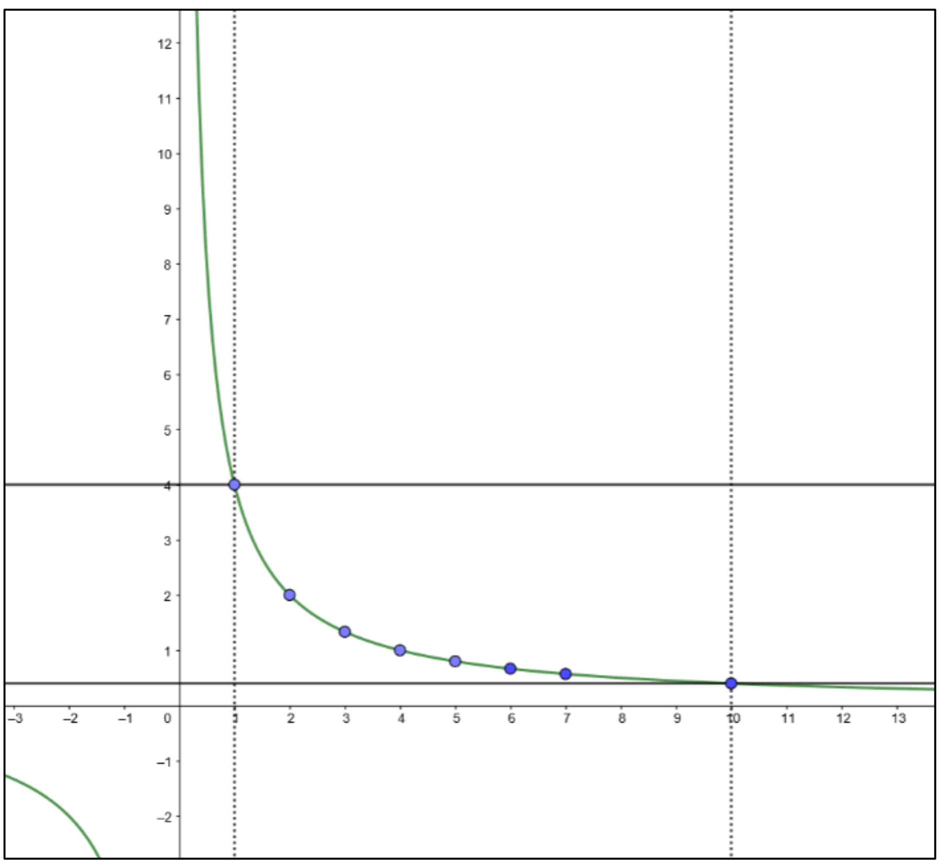


Figura 3.15 - Função com domínio I_1

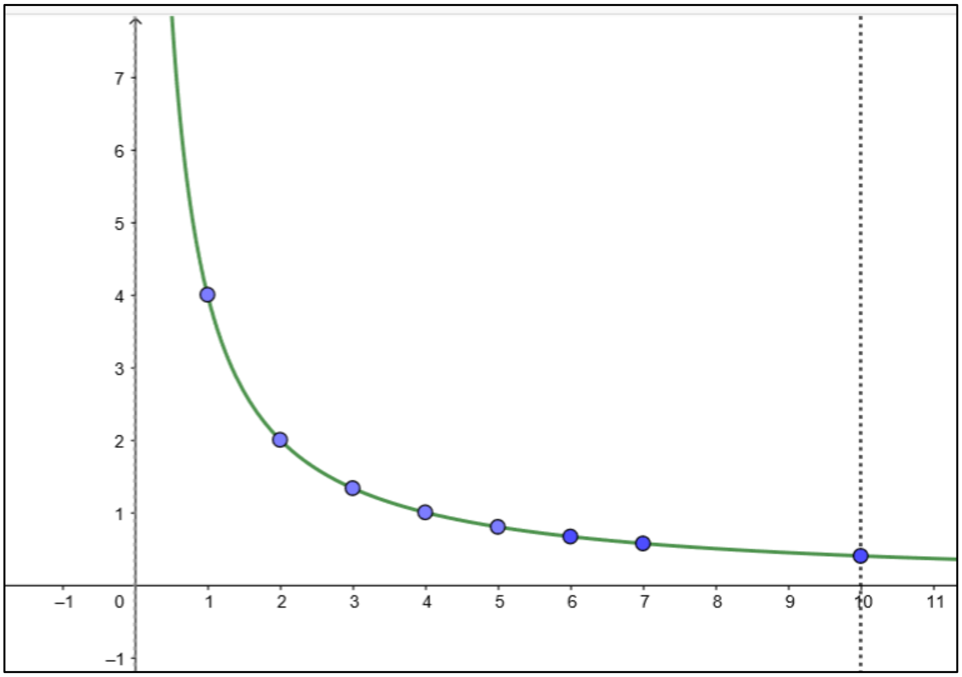


Figura 3.16 - Função com domínio I_2

Este problema é bastante rico, pois, com diferentes simulações é possível mostrar que mudanças de intervalo fechado para não fechado, ou de intervalo não limitado para limitado, além de descontinuidades da função, podem influir no máximo/mínimo global de uma função.

3.2 Relação entre Valor Máximo/Mínimo e Reta Tangente ao Gráfico da Função

Na Educação Básica geralmente a definição de reta tangente aparece no estudo de circunferências, distinguindo reta secante (que intersecta a circunferência em 2 pontos) de uma reta tangente (que intersecta a circunferência em 1 ponto).

Por esta razão surgem muitas dúvidas, quando o conceito aparece de forma mais geral, reta tangente ao gráfico de uma função, ou, de modo ainda mais geral, reta tangente a uma curva.

É importante neste momento formalizar este conceito, indicando que a definição mais geral recai na definição mais simples de tangente a um círculo (mas a mais simples não generaliza para outras curvas).

Então temos que uma reta tangente a uma curva em um ponto P pode sim, interceptar a curva em mais de um ponto, como na Figura 3. 17. Além disso uma reta que intersecta uma curva somente em um ponto P pode não ser uma reta tangente à curva naquele ponto, como mostra a Figura 3. 18.

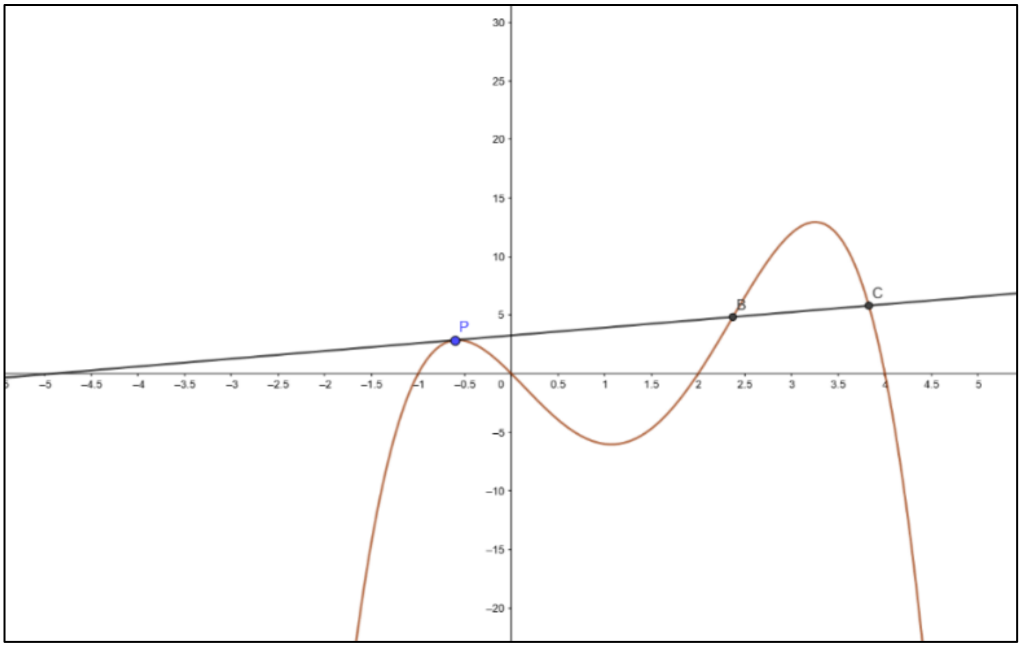


Figura 3. 17 - Reta tangente a uma curva no ponto *P*

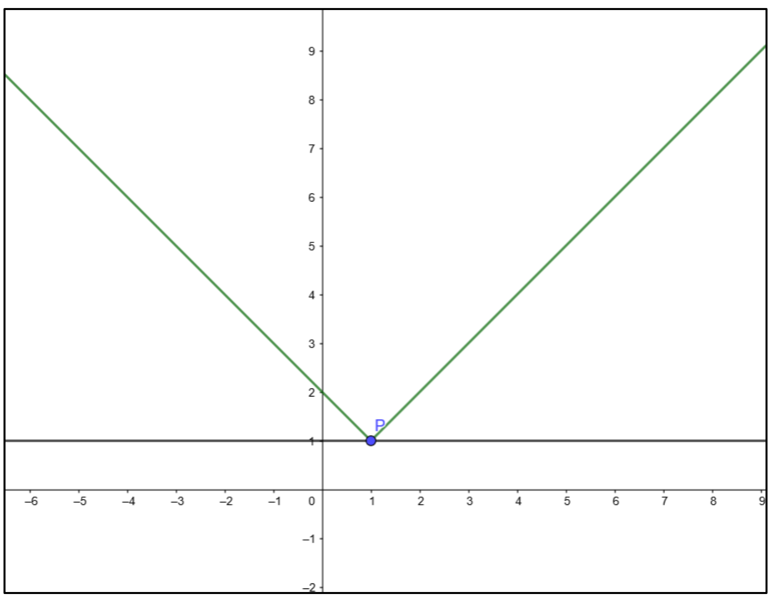


Figura 3. 18 - Reta que intersecta uma curva no único ponto *P*

A partir destes exemplos, e de outros que podem ser apresentados aos alunos ou criados por eles, pode-se chegar ao momento de apresentar a definição de que uma **reta é tangente a uma curva $\boldsymbol{C}$, num ponto $\boldsymbol{P(a, b)}$,** quando a reta intersecta a curva neste ponto e, além disso, para pontos $Q(x, y)$ pertencentes à curva C, com abscissa x suficientemente próxima de a ($x < a$ ou $x > a$), os valores das ordenadas y correspondentes aos pontos $Q(x, y)$ da curva serão muito próximos dos valores das ordenadas $\overline{y}$ dos pontos de mesma abscissa, mas sobre a reta tangente, $\overline{Q}(x, \overline{y})$. Em outras palavras, a curva C e sua reta tangente em P "praticamente se confundem", para pontos da curva próximos ao ponto de tangência P.

No caso da definição de reta tangente a uma circunferência apresentada na Educação Básica, nota-se que ela cumpre as condições da definição utilizada no Ensino Superior.

Pode-se concluir que a curva da Figura 3. 18 não possui reta tangente no ponto P, porque qualquer reta que passe ali não preencherá a exigência que aparece na definição.

A maioria dos problemas selecionados para esta seção vai explorar como a reta tangente ao gráfico de uma função pode estar relacionada ao valor máximo ou mínimo dela.

Outro auxílio importante na resolução de vários dos problemas desta seção e da seguinte, é fornecido pela **desigualdade das médias**, que compara a média aritmética e a média geométrica (além de outras médias) de números positivos.

Esta propriedade estabelece que, dados n números reais positivos $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, sendo $A = \frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}$, $G = \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}$, $Q = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}{n}}$ e $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}}$, respectivamente, as **médias aritmética** (A), **geométrica** (G), **quadrática** (Q) e **harmônica** (H) entre eles, então temos sempre que vale a seguinte relação: $a_1 \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq a_n$. Além disso, a igualdade entre todos os membros é verdadeira se e somente se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

No caso particular da desigualdade que será utilizada neste capítulo, $G \leq A$, existem várias demonstrações para n natural, por argumentos de indução, ou outros. As obtidas por Cauchy, MacLaurin, Steffensen e Polya podem ser consultadas em Fonte (2013). Aqui apresentaremos somente o caso mais simples, quando $n = 2$.

Sabemos que $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$, para cada a_1, a_2 números reais positivos e a igualdade é verdadeira se e somente se $a_1 = a_2$. Desenvolvendo o quadrado teremos então $a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0$, ou, de modo equivalente, $2a_1a_2 \leq a_1^2 + a_2^2$. Somando dos dois lados a quantidade $2a_1a_2$ teremos $4a_1a_2 \leq a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 = (a_1 + a_2)^2$. Dividindo a desigualdade pela constante 4 e aplicando a raiz quadrada dos dois lados, lembrando que a função raiz quadrada é crescente, obtemos a desigualdade pretendida.

O próximo problema envolve otimização de uma função que não é polinomial de grau inferior a três. Ele poderá ser resolvido algebricamente utilizando a Desigualdade entre a média aritmética e a geométrica. O *software* GeoGebra também pode ser utilizado para estimar graficamente a solução explorando operações com funções. A sequência de itens proposta para discutir o problema utiliza a conversão entre os registros de representação algébrica e geométrica para facilitar a compreensão e solução do problema por parte dos alunos.

Este problema também pode ser utilizado para introduzir, de modo intuitivo, o conceito de **derivada**, associado a uma reta tangente ao gráfico da função em um ponto, e como a existência desta reta específica pode estar relacionada ao máximo ou mínimo dessa função.

Problema 3.8: *Deseja-se construir uma piscina com fundo horizontal e quatro paredes verticais, de modo que cada seção horizontal seja formada por dois lados opostos retos e paralelos de mesmo comprimento* ***b*** *e por outros dois que têm formato de semicircunferências, de mesmo raio* ***r****, ambas côncavas para o mesmo lado, conforme mostra a Figura 3.19. Sabe-se que cada seção horizontal da piscina precisa ter 200 m² de área.*

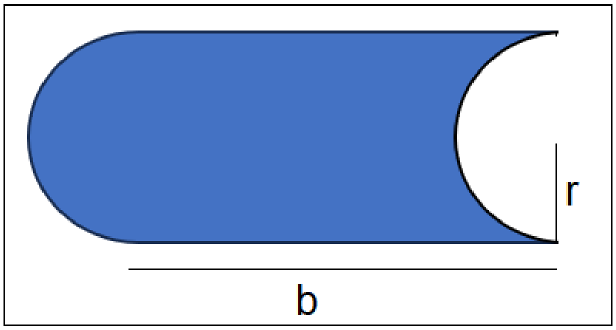


Figura 3.19 - Seção horizontal da piscina (Fonte: Biazutti, Vaz e Andrade (2020))

a) Determine a relação entre a base $\boldsymbol{b}$ *e o raio* $\boldsymbol{r}$ *em cada seção da piscina.*
b) Utilize o GeoGebra para reproduzir a Figura 3.19 e crie controles deslizantes para variar o comprimento da base $\boldsymbol{b}$ *ou do raio* $\boldsymbol{r}$ *e observar o que ocorre com o perímetro da seção, mantida sua área.*
c) Determine uma expressão algébrica para o perímetro da seção da piscina, como função do raio das semicircunferências.
d) Determine as dimensões da piscina de perímetro mínimo e qual será a medida deste perímetro, utilizando o resultado obtido no item anterior e a desigualdade das médias.
e) Utilize o GeoGebra para obter o gráfico da função do item c e, com auxílio dele e de retas tangentes ao gráfico, estimar o perímetro mínimo. Sugira uma relação entre o ponto onde ocorre o mínimo e a reta tangente ao gráfico neste ponto. Compare o valor de $\boldsymbol{r}$ *para o perímetro ser mínimo obtido pelo GeoGebra com o valor obtido no item d. Explique a discrepância* (Fonte: Biazutti, Vaz e Andrade (2020)).

A desigualdade das médias que será utilizada estabelece que, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números positivos, então $\frac{a_1+a_2+..a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 .. a_n}$, e a igualdade só ocorre quando $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Isto significa que a média aritmética entre n números positivos é sempre um valor maior do que a média geométrica entre eles, exceto quando todos os números são iguais.

A área da piscina é dada por $A = b \cdot 2r$, ou seja $b \cdot 2r = 200$, de onde segue que $b = \frac{100}{r}$, o que resolve o item a do problema. O perímetro da piscina é dado por $p = 2b + 2\pi r$. Substituindo o valor de b, em termos de r, já obtido no item a, obtemos a solução do item c, representada por $p(r) = \frac{2(100+\pi r^2)}{r}$, com $r > 0$.

Utilizaremos a desigualdade das médias $A \geq G$, com $a_1 = \frac{100}{r}$ e $a_2 = \pi r$. Nesse caso teremos $\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{\frac{100}{r}+\pi r}{2} = \frac{100+\pi r^2}{2r} \geq \sqrt{a_1 a_2} = \sqrt{100\pi}$, ou seja, $\frac{p}{4} \geq \sqrt{100\pi}$. Logo p $\geq 4\sqrt{100\pi}$ e a igualdade só é atingida (ou seja, o perímetro será mínimo, igual a $40\sqrt{\pi}$) quando $a_1 = a_2$, isto é, quando $r = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$. Assim, utilizando o resultado do item a, teremos $b = 10\sqrt{\pi}$.

Os elementos a_1 e a_2 foram escolhidos de modo a obter um valor constante para a média geométrica para comparar com p ou com um múltiplo de p. Não existe uma regra para esta escolha. Pode ser necessária a utilização da estratégia de tentativa e erro.

Utilizando o GeoGebra, pode-se obter diretamente o gráfico da função p, apresentado na Figura 3. 20. Entretanto, não há como determinar visualmente, de modo preciso, o valor de 'r' para que o perímetro seja mínimo (com uma certa paciência encontramos $5{,}6 < r < 5{,}7$) porque o valor é um número irracional.

Um estudo geométrico das retas tangentes ao gráfico em pontos próximos do ponto de mínimo mostrará que a reta tangente no ponto de mínimo deve ser horizontal, como mostra a Figura 3. 20.

Ao observar a janela de álgebra correspondente a esta reta, verifica-se que o valor de 'r' procurado aparenta ser um número racional, por conta das aproximações nos cálculos realizados pelo *software*. É importante apresentar aos alunos, além das vantagens, as limitações que um *software* pode apresentar.

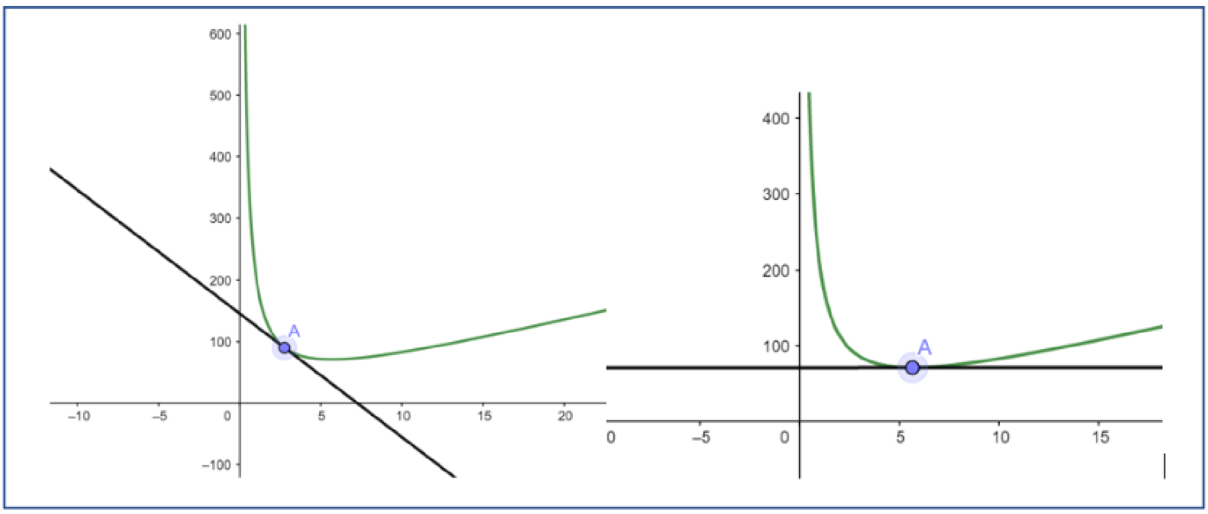


Figura 3. 20 - Representações gráficas da função e de retas tangentes ao gráfico
Fonte: Biazutti, Vaz e Andrade (2020)

Cabe ressaltar que um ponto de uma curva em que a reta tangente é horizontal nem sempre determina um valor mínimo (ou máximo) da função cujo gráfico é a curva, num certo intervalo de definição I. Observando a Figura 3. 21 a seguir, podemos notar que as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos A, B e C são retas horizontais, isto é, com coeficiente angular igual a zero.

Os pontos A e C são denominados **pontos de máximo local (ou relativo) de $\boldsymbol{f}$** e o ponto B é denominado **ponto de mínimo local (ou relativo) de $\boldsymbol{f}$**. O adjetivo local (ou relativo) aqui significa que o ponto de máximo local "domina" superiormente, mas somente em relação aos pontos próximos da curva. No caso do ponto de mínimo local, ele "domina" inferiormente, mas também somente em relação aos pontos próximos da curva.

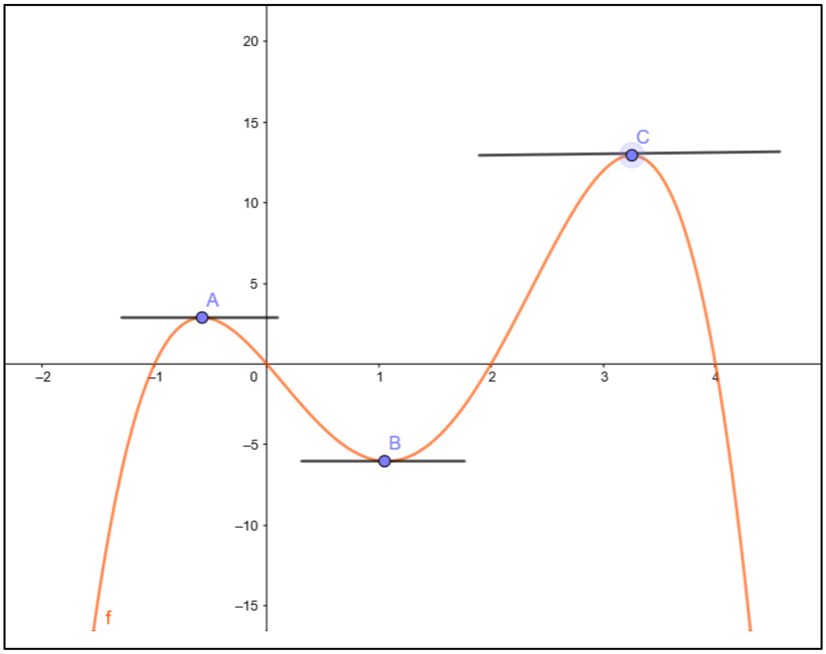


Figura 3. 21 - Retas tangentes ao gráfico da função f nos pontos A, B e C

O *software* GeoGebra possui uma ferramenta, disponível no menu inicial, específica para determinar pontos de máximo ou mínimo locais de funções, denominada "Otimização". Cabe lembrar mais uma vez que o *software* utiliza arredondamento e/ou truncamento, no caso de soluções não inteiras, portanto nem sempre vai fornecer dados exatos.

Considerando f definida no intervalo I_1 sendo o conjunto dos reais, f tem máximo global em I_1 no ponto C e não tem mínimo global. Considerando um outro intervalo I_2, o máximo/mínimo globais mudarão. Por exemplo, se $I_2 = [-3/2, -1]$, supondo que $f(-3/2) = -15$, teremos -15 o valor mínimo de f e 0 será o valor máximo de f em I_2. Nenhum deles ocorreu num ponto em que a reta tangente foi horizontal (ocorreram nos extremos do intervalo).

Com base no gráfico da função da Figura 3. 21, poderíamos ser levados a concluir que o máximo e o mínimo global de uma função contínua em I podem não existir, ou podem ocorrer nos extremos do intervalo, ou serão obrigatoriamente em pontos onde a reta tangente é horizontal. No caso do exemplo mostrado na Figura 3. 21, os pontos A, B e C são pontos onde a reta tangente é horizontal e onde a função tem máximo local (A e C) e mínimo local (B), conforme o que foi definido antes.

O professor pode aproveitar para rever os problemas 3.6 e 3.7, já que eles também estão relacionados a estes conceitos.

O próximo problema fornecerá outros dados para chegar a conclusões mais seguras e permitirá que seja explorada, num problema contextualizado simples, uma função que aparece em geral em problemas abstratos na Educação Básica. Esta função já apareceu na seção 4 do capítulo 2, como exemplo de função definida por várias sentenças.

Problema 3.9: *Um posto de gasolina encontra-se localizado no km 100 de uma estrada retilínea. Um carro com o tanque de gasolina cheio, parte do km 0 desta estrada em direção a uma cidade situada a 250km do ponto de partida, conforme a Figura 3. 22.*

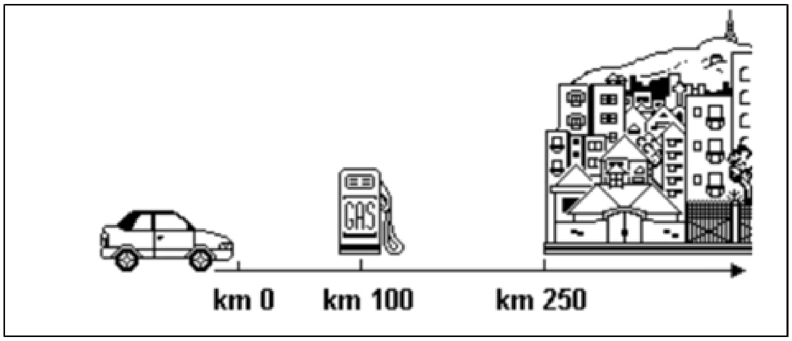


Figura 3. 22 - Posição do carro, posto e cidade
Fonte: UFRN, questões do vestibular, 2000

a) Num dado instante sabe-se que o carro está a 10 km do posto, em frente a uma placa indicando a quilometragem da estrada. Indique as possíveis posições do carro (quilometragem da estrada indicada na placa).
b) Determine a expressão algébrica da função que associa a posição x do carro na estrada em cada instante do seu deslocamento desde a partida até chegar à cidade, à distância y deste carro ao posto; determine também o domínio desta função. É possível representar a função algebricamente de forma mais simples?
c) Utilize o GeoGebra para determinar o gráfico da função do item b.
*d) Determine as distâncias máxima e mínima que o carro poderá estar do posto, e a posição do carro, nestes momentos (quilometragem da estrada). (*Adaptado de UFRN, questões do vestibular, 2000, APUD Projeto Medicina)

Se o carro estiver na estrada, a 10 km do posto, antes de chegar nele, como o posto está no km 100, o carro estará no km 90 da estrada. Se o carro estiver a 10km do posto, depois de passar por ele, o carro estará no km 110 da estrada. Estas são as duas posições possíveis para o carro em relação ao posto, segundo a quilometragem na estrada.

Se x representar a posição do carro na estrada (quilometragem indicada na placa) e y representar a distância do carro ao posto, teremos que, quando $0 \leq x \leq 100$, então $y = 100 - x$. Quando $100 \leq x \leq 250$, teremos $y = x - 100$. Assim a expressão da função que associa x a y será $F(x) = \begin{cases} 100 - x, & 0 \leq \mathrm{x} \leq 100 \\ x - 100, & 100 \leq \mathrm{x} \leq 250 \end{cases}$ e o domínio de F será o intervalo $I = [0{,}250]$. Uma representação mais simples de F pode ser obtida utilizando a função modular, então teremos $F(x) = |100 - x|$, para $x \in I$ e o gráfico de F será como na Figura 3. 23 a seguir.

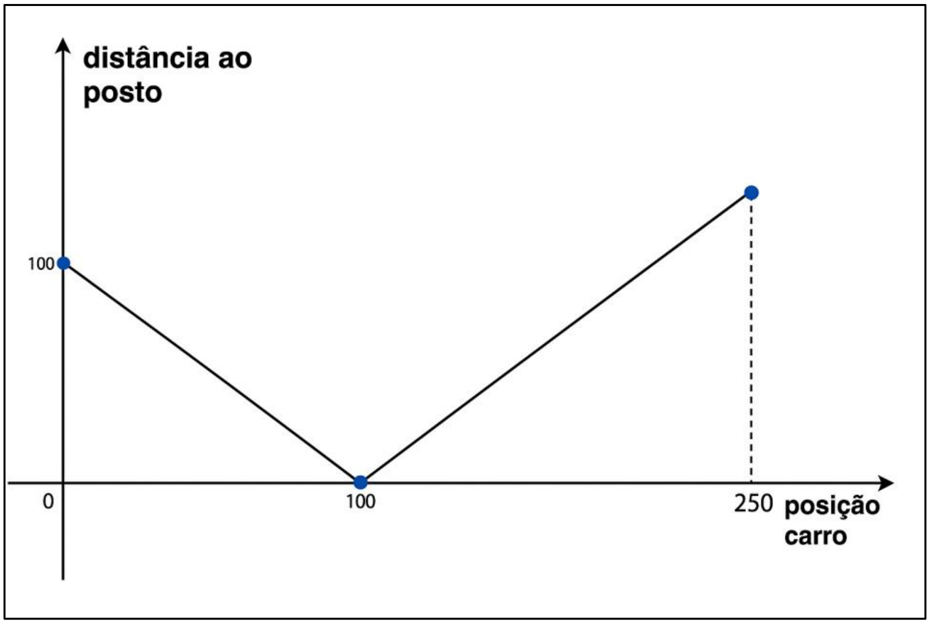


Figura 3. 23 - Gráfico da função distância do carro ao posto

Pelo gráfico e pela expressão algébrica de F é fácil ver que a distância máxima do carro ao posto será de 150 km, quando o carro estiver no km 250 da estrada (isto e, tendo chegado à cidade) e a distância mínima do carro ao posto será nula, quando o carro estiver no km 100 da estrada.

Voltando às nossas hipóteses sobre máximo ou mínimo (global) de uma função contínua definida num intervalo, o ponto onde o gráfico de f atinge o máximo (global), supondo que I seja o domínio, ocorre, de fato, num dos extremos de I.

Entretanto o mínimo (global) não ocorre num ponto onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal. Como já vimos anteriormente neste capítulo, em um gráfico similar, não existe uma reta tangente ao gráfico de f no ponto $(100, 0)$, onde ocorre o mínimo global.

Este exemplo torna imperativo que nossa hipótese seja reformulada, incluindo os extremos do intervalo, os pontos onde a reta tangente é horizontal e os pontos onde a reta tangente não existe, onde poderão ocorrer os pontos de máximo e de mínimo (global) de uma função contínua em um intervalo I.

Já vimos que, dependendo do intervalo, eles podem não existir. A afirmação (teorema) que foi incluída no item g do problema 3.7 pelo menos nos ajuda no caso de várias funções.

Ainda há um tipo de comportamento que não apareceu antes neste capítulo. Trata-se do gráfico da função f tal que $f(x) = x^3$, que já foi comentado no capítulo 2, seção 3.

Ele será justificado de forma mais precisa mais tarde, com propriedades de um objeto matemático, a derivada, que será estudada no Ensino Superior, geralmente numa disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Mas podemos determinar agora utilizando o *software* GeoGebra, como mostra a Figura 3. 24.

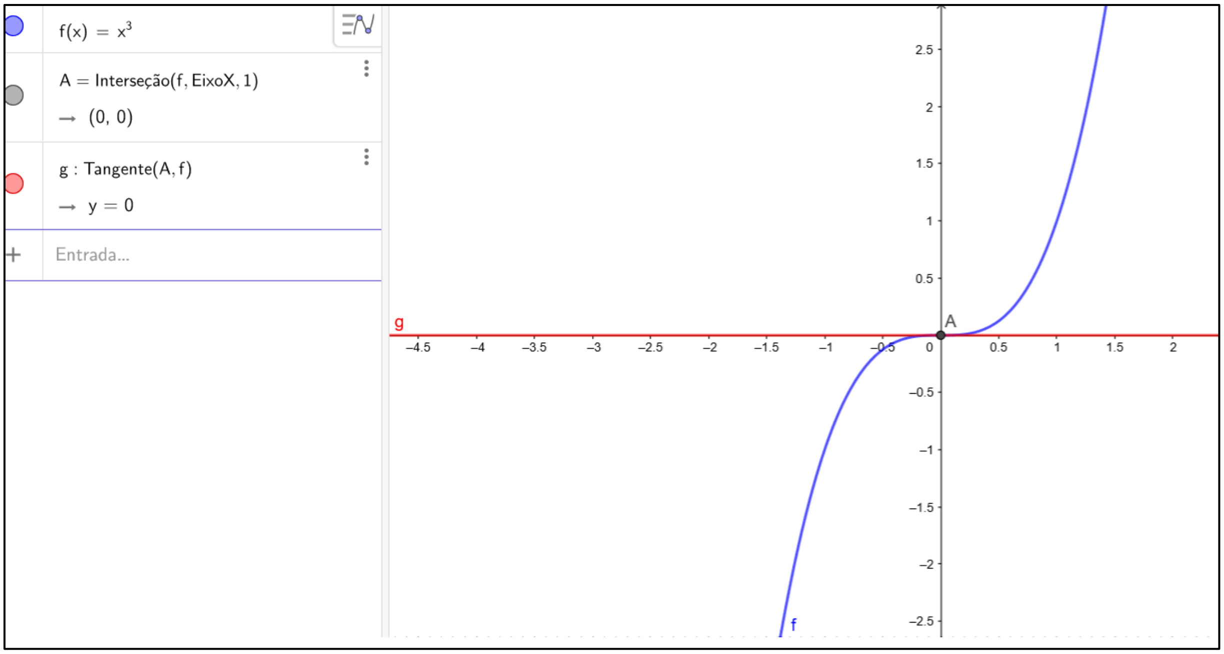


Figura 3. 24 - Reta tangente ao gráfico de f tal que $f(x) = x^3$ no ponto $A(0,0)$

Pode-se notar que a reta tangente ao gráfico da função f no ponto $A(0,0)$ é horizontal. No entanto f não tem máximo nem mínimo (local) em A.

Este tipo de ponto é denominado **ponto de inflexão de f**, ou seja, onde houve uma mudança de concavidade da curva, para $x < 0$ a curva é côncava para baixo e para $x > 0$ a curva é côncava para cima.

Entretanto cabe ressaltar que existem pontos de inflexão em que a reta tangente não é horizontal, como é o caso da reta tangente ao gráfico da função tangente, no ponto (0,0), revisada na seção 2.3 do capítulo anterior. Este conceito vai ser estudado mais tarde, em CDI.

O próximo problema, embora não aparente, guarda algumas similaridades com o problema 3.8 e também poderá ser resolvido utilizando de forma inteligente a mesma desigualdade das Médias. O GeoGebra pode ser utilizado novamente para determinar uma solução aproximada.

Problema 3.10: *Uma lata cilíndrica circular é construída para receber 1 litro de óleo.*
a) Determine a relação entre altura h e o raio da base r.
b) Determine a função que representa a área total em função do raio da base r.
c) Construa, utilizando o software GeoGebra, o gráfico da função área total.
d) Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata, supondo o custo de p reais por m^2 de material (Adaptado de Stewart (2013)).

Utilizando a expressão para o volume de um cilindro circular reto, de altura h e raio da base r e a informação sobre a capacidade da lata, chegamos à equação $\pi r^2 h = 1$. A área total da lata será a soma das áreas da base e tampa, isto é, $2\pi r^2$, com a área lateral, $2\pi rh$. Substituindo h em função de r na expressão da área total chegamos a $S = f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$, com $r > 0$.

Neste problema temos uma situação de volume fixado e a área variando. Mais adiante, o problema 3.13 também envolverá um sólido cilíndrico. Entretanto a área estará fixa e o volume é que vai variar. É interessante comparar os dois problemas, porque essa “pequena” mudança realmente altera bastante a solução.

Comparando com a expressão do perímetro da seção da piscina, no problema 3.8, verificamos que lá tínhamos a soma de uma função linear com uma função $2/r$. Aqui a função linear foi substituída por uma função quadrática. Utilizando o GeoGebra para determinar o gráfico de S, poderemos comparar os gráficos nos dois problemas, para visualizar a alteração causada pela mudança numa das funções, como mostra a Figura 3. 25.

Pode-se notar que os valores da função, no problema 3.8, decrescem mais lentamente antes do ponto de mínimo e crescem também mais lentamente depois dele, do que o que ocorre no problema da lata.

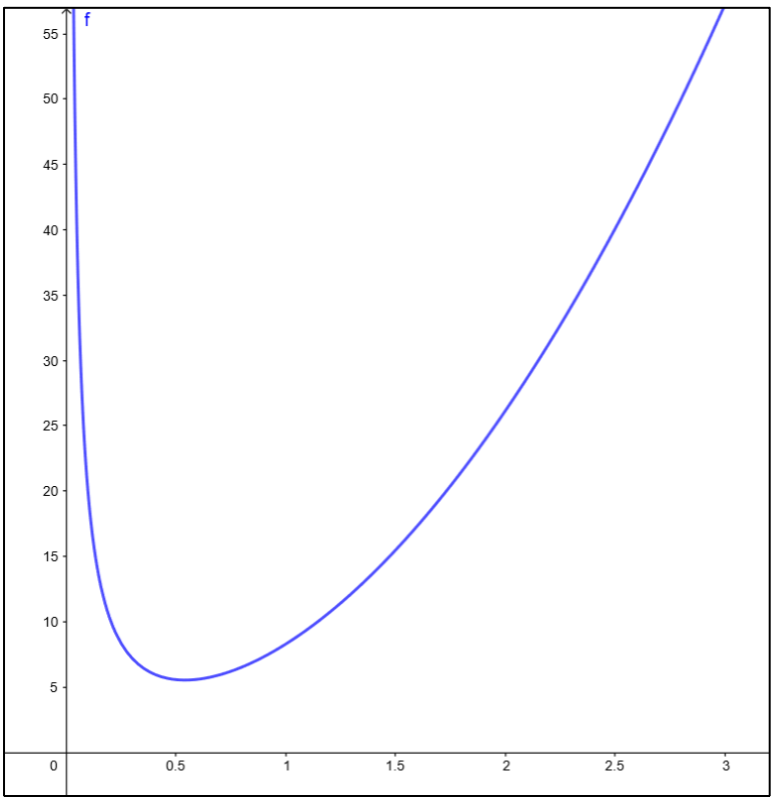


Figura 3. 25 - Gráfico da área de uma lata cilíndrica

Para determinar as dimensões da lata de custo mínimo, supondo que o custo do metal seja p reais por m^2, o custo total será $C = p.S$. Sendo p uma constante, o custo será mínimo quando a área total S for mínima. Para determinar de forma exata qual o valor de r que implica na área mínima novamente será utilizada a desigualdade das médias.

Entretanto, se for utilizada a mesma ideia, de média entre dois números, não chegaremos a um resultado positivo (porque ao transformar soma em produto, o produto continuará dependente da variável r). Vamos utilizar então a desigualdade com três números, $a_1 = 2\pi r^2$, $a_2 = 1/r$ e $a_3 = 1/r$, porque o objetivo é obter uma constante no segundo membro da desigualdade a seguir.

Nesse caso teremos o seguinte: $\frac{2\pi r^2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi r^2 . \frac{1}{r} . \frac{1}{r}} = \sqrt[3]{2\pi}$.

Assim $S = f(r) \geq 3\sqrt[3]{2\pi}$, e o valor mínimo de S será obtido quando $a_1 = a_2 = a_3$, ou seja, $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\ m$. Por conseguinte, $h = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}\ m$.

Como os valores encontrados são números irracionais, ao utilizar o GeoGebra para tentar obter a solução, devido às limitações do *software*, só será possível encontrar uma aproximação racional, como o valor $r \cong 0{,}54$ obtido na Figura 3. 26, que é abscissa do ponto A, onde a reta tangente ao gráfico de f é "aproximadamente" horizontal.

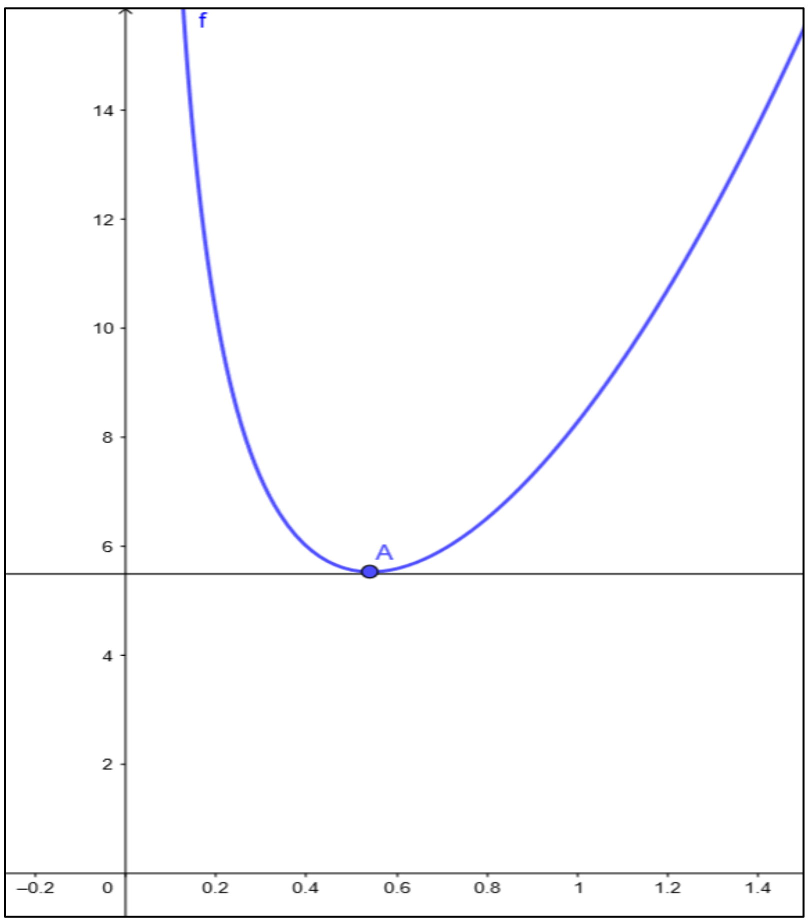


Figura 3. 26 - Reta tangente horizontal no ponto de mínimo

O próximo problema pode ser resolvido algebricamente, utilizando desigualdade das médias, mas também pode ser resolvido geometricamente, com auxílio do GeoGebra.

Um outro problema de volume, também envolvendo caixas, foi apresentado na seção 3 do capítulo 2 (consultar problema 2.19). Num dos itens foi pedida uma estimativa sobre o volume máximo, só utilizando o gráfico da função. Agora, com mais recursos algébricos e geométricos, é possível obter resultados mais precisos.

Entretanto, o recurso mais poderoso para este tipo de problema continua sendo a utilização de conceito e propriedades de derivada, que será estudada em CDI.

Problema 3.11: *Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 metros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima as partes laterais que sobram.*

a) Utilizando o GeoGebra, represente a Figura 3. 27 a seguir, que descreve a situação do problema.

b) Utilize o GeoGebra para representar geometricamente a caixa sem tampa pronta. Utilize um controle deslizante para x, para simular diversas caixas e obter o intervalo de variação possível para x.

c) Determine a função volume, da variável x e esboce seu gráfico utilizando o GeoGebra.

d) Determine o volume máximo que esta caixa poderá ter e quais serão suas dimensões. (Adaptado de Stewart, 2013, p.300)

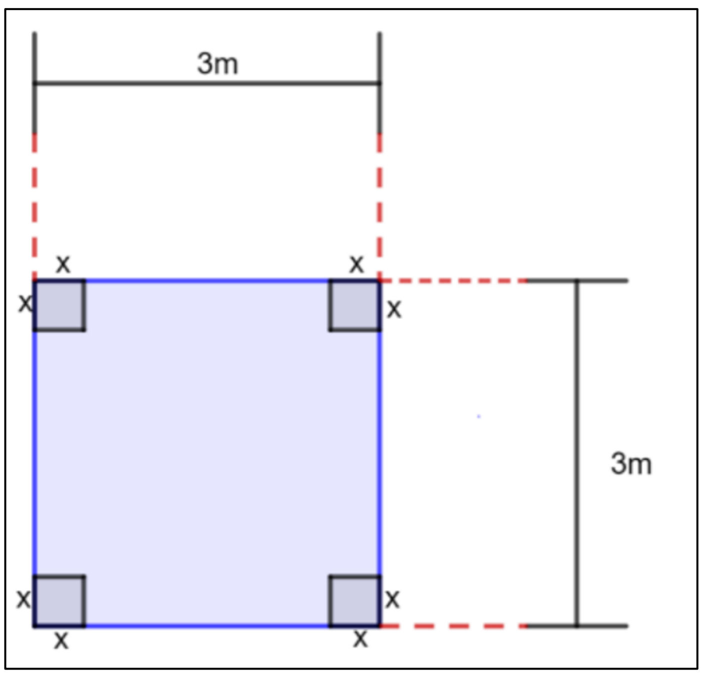


Figura 3. 27 - Papelão para montar a caixa

A caixa sem tampa está representada na Figura 3. 28 (a), com comprimento $c = 3 - 2x$, largura $l = 3 - 2x$ e altura $h = x$, o que implica num volume $V = (3 - 2x)(3 - 2x)x$. Utilizando o controle deslizante para x, chega-se ao intervalo $I = [0, 3/2]$ para valores possíveis para x, sendo que o volume $V = f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ é o volume mínimo. O gráfico da função volume está representado na Figura 3. 28 (b), na cor vermelha.

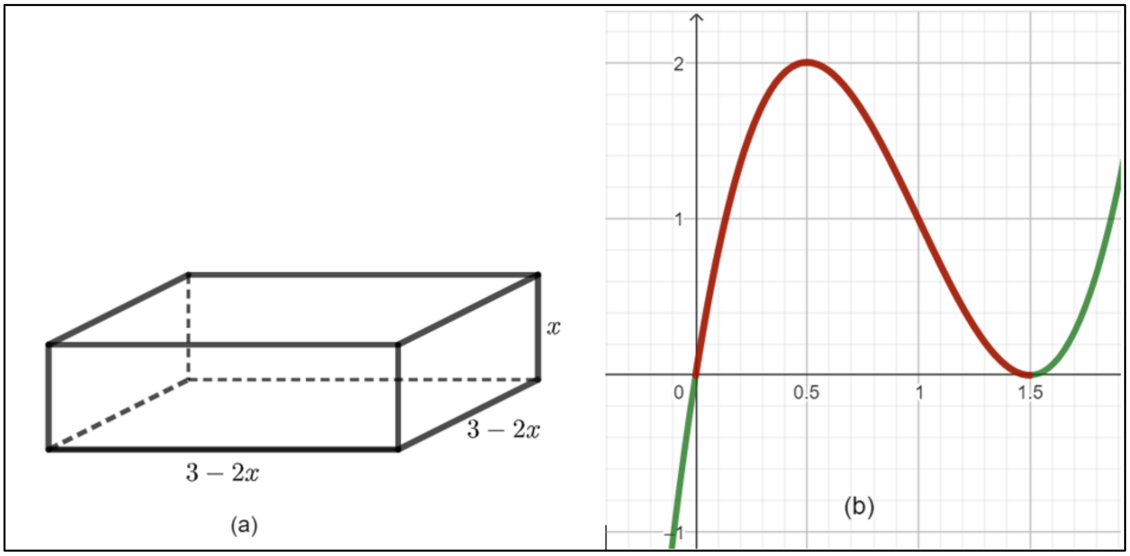


Figura 3. 28 - (a) Caixa pronta e (b) Função volume

Neste problema, como o valor máximo de V ocorre para um número racional x, pode-se determinar a solução apenas analisando o gráfico, a partir das ferramentas da janela de visualização do GeoGebra e, neste caso, ocorrerá onde a tangente ao gráfico é horizontal.

Mas, num problema mais geral em que a solução não fosse tão simples de ser obtida graficamente, outra estratégia nos leva à solução, utilizando a desigualdade das médias, comparando a média geométrica com a aritmética entre três números positivos, $a_1 = a_2 = 3 - 2x$ e $a_3 = 4x$ (este último foi escolhido para que obter um limitante superior independente de x). Assim teremos $\sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{(3-2x)(3-2x)4x} \leq \frac{(3-2x)+(3-2x)+4x}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

Da desigualdade das médias sabemos que a igualdade se verifica quando os três números coincidirem, isto é, $3 - 2x = 4x$, logo $x = 1/2$ m(altura) e $3 - 2x = 2$ m (comprimento e altura). Como $\sqrt[3]{4V} = 2 \Leftrightarrow 4V = 8 \Leftrightarrow V = 2$, logo o volume máximo será de 2 m^3.

O próximo problema foi selecionado porque apresenta uma situação problema que pode ser representada por duas funções distintas. É importante para que os alunos tenham confiança em suas formas de resolver que não se preocupem demais em comparar a sua forma de pensar com a de outros colegas ou do professor. O GeoGebra é perfeito aqui para representar a situação problema geometricamente e de forma dinâmica, de modo a compreender o problema e procurar a melhor forma de obter a solução procurada.

Problema 3.12: *Numa cidade vai ser construído um túnel no qual cada seção transversal será limitada pelo semicírculo $x^2 + y^2 = a^2$, sendo $a > 0$, e pela reta $y = 0$. A área destinada aos* *veículos ocupará uma seção transversal retangular, com um lado sobre a reta $y = 0$ e inscrita na seção transversal do túnel, conforme a Figura 3. 29.*

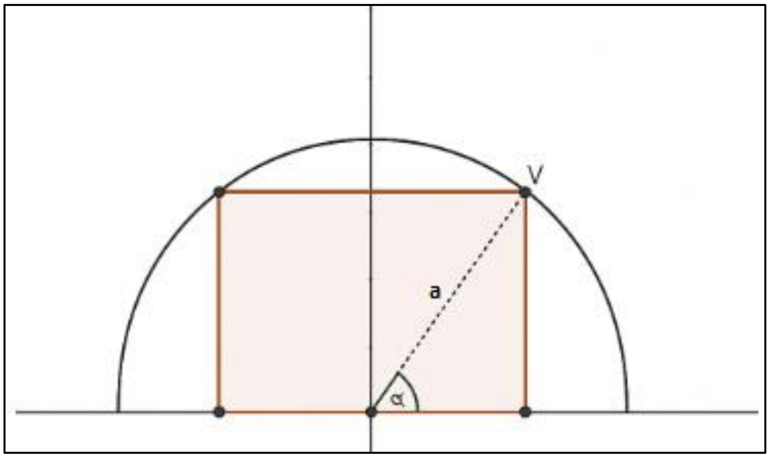


Figura 3. 29 - Seção transversal do túnel com o retângulo inscrito, vértice V, raio a e ângulo α
Fonte: Biazutti, Vaz e Andrade (2020)

a) Utilize os comandos dinâmicos do GeoGebra para reproduzir a Figura 3. 29 e estudar as alterações no retângulo quando o vértice V se move ao longo do semicírculo, desde o ponto $(a, 0)$ até o ponto $(0, a)$.
b) Utilize os comandos dinâmicos do GeoGebra para estudar as alterações no ângulo α quando o vértice V se move.
c) Designe por x a abscissa do vértice V. Determine uma expressão algébrica para a área do retângulo como função de V.
d) Determine uma expressão algébrica para a área do retângulo como função de α.
e) Determine o retângulo de área máxima (de modo a ter uma boa ventilação), possível de ser inscrito no semicírculo de raio a, e qual será a medida de sua base e altura.
(Fonte: Biazutti, Vaz e Andrade (2020))

A área do retângulo, definida por $A = b.h$, pode ser representada pela imagem da função $A = f(x)$, onde a variável x representa a metade da base b, ou seja $b = 2|x|$ e a altura h é o valor da ordenada do ponto de abscissa x que intercepta o semicírculo de raio a, isto é, $h = \sqrt{a^2 - x^2}$. Assim a função será $A = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$, sendo $x \in [0, a]$. Desta forma o problema de otimização pode ser resolvido utilizando a desigualdade das médias.

Por outro lado, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo com hipotenusa a, temos $b = 2x = 2\text{a} \cos(\alpha)$ e $h = y = a\,\text{sen}(\alpha)$, logo $A = 2\,a^2\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$. A área A é um produto de funções, uma delas crescente e outra decrescente, no intervalo de variação de α, ou seja, no primeiro quadrante. Logo o problema parece ter novamente um certo nível de dificuldade.

Mas, utilizando propriedades do seno do arco duplo, conseguimos expressar A de forma ainda mais simples, $A = a^2\,\text{sen}(2\,\alpha)$. Como α pertence ao primeiro quadrante, automaticamente

2α pertence ao intervalo $[0, \pi]$. Um exame do gráfico da função seno neste intervalo, apresentado na Figura 3. 30, comprova que o máximo ocorrerá no ponto B, quando $2\alpha = \frac{\pi}{2}$.

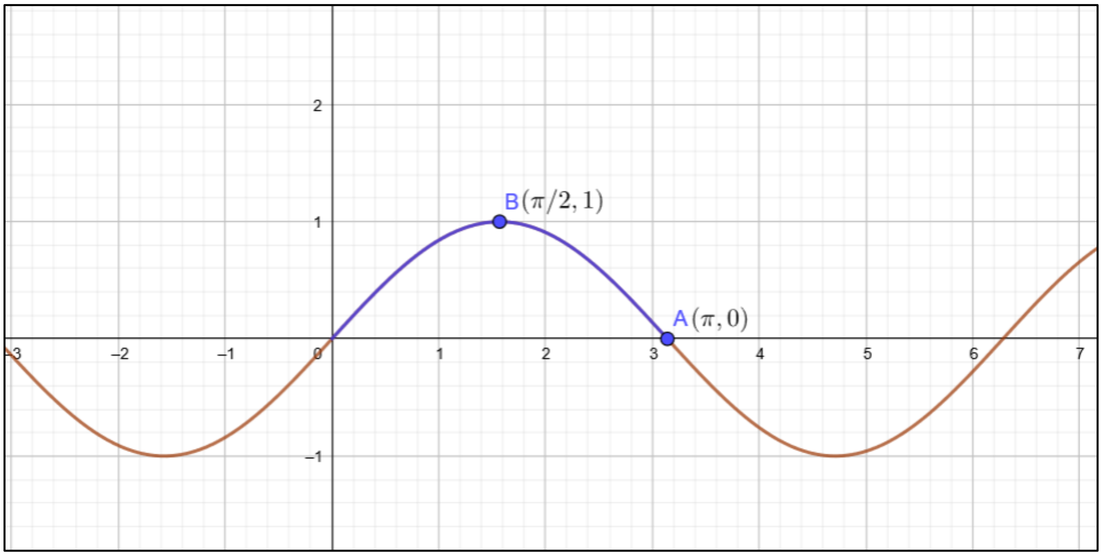


Figura 3. 30 - Função seno

Assim, α deve ser igual a $\frac{\pi}{4}$. Chegamos logo a uma solução, pois $b = 2\,\text{a}\cos(\alpha) = a\sqrt{2}$ e $h = a\ \text{sen}(\alpha) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Serão estas as dimensões do retângulo de área máxima.

A solução obtida de forma mais simples para o problema anterior vem comprovar que fórmulas trigonométricas aparentemente inúteis, que frequentemente são utilizadas somente em problemas abstratos envolvendo manipulação de equações, podem ser muito úteis. Problemas podem ser transformados em outros equivalentes, mas bem mais simples, como o problema 3.25, mais adiante neste capítulo.

O próximo problema lida com conceitos de Geometria Espacial. A função que representa a situação problema é polinomial, com grau igual a três. Neste caso o problema de otimização será resolvido geometricamente, de forma aproximada, utilizando os recursos do GeoGebra. É possível determinar solução exata utilizando desigualdade das médias, mas não é simples como em problemas anteriores. De fato, a forma mais simples de resolver utiliza conteúdo a ser estudado em CDI.

Problema 3.13: *Um fazendeiro deseja construir um silo de madeira no formato de um cilindro circular reto de raio r e altura h, conforme a Figura 3. 31 a seguir. A quantidade de madeira disponível para a construção (das paredes e do teto) é de 300 m^2.*

a) Determine uma relação entre o raio r e a altura h, no silo, e utilize para determinar uma expressão algébrica para a função $V = f(r)$, que representa o volume do silo, em função da variável r, e o conjunto de valores possíveis para r.

b) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico de f.

c) Utilize o GeoGebra para obter uma estimativa aproximada para as dimensões r e h do silo, para que este tenha volume máximo.
d) Utilize a desigualdade entre a média aritmética e a geométrica para determinar a solução exata para o volume máximo.

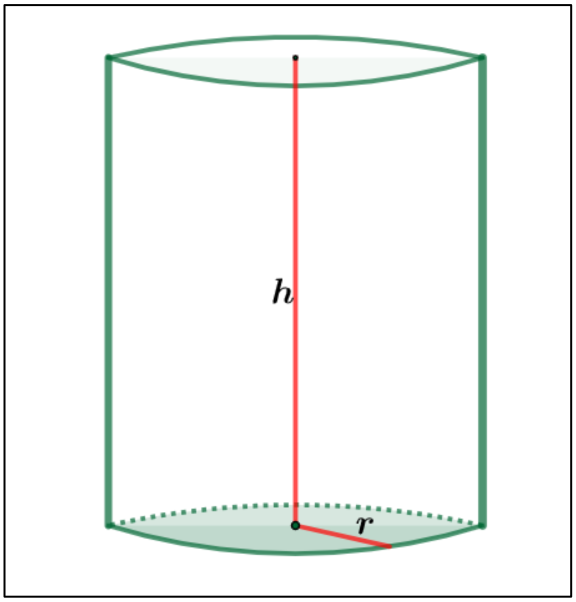


Figura 3. 31 - Silo do fazendeiro

Sabemos que a área total do silo cilíndrico, incluindo paredes e teto, é dada pela expressão $A = 2\pi rh + \pi r^2$. Como $A = 300$, temos 300 = $2\pi rh + \pi r^2$, de onde conseguimos $h = \frac{300-\pi r^2}{2\pi r}$. O volume do silo cilíndrico é $V = \pi r^2 h$. Substituindo o valor de h, chegamos finalmente à expressão $V = f(r) = \frac{1}{2}r(300 - \pi r^2)$. Como r e $h > 0$, determinamos que $r \in I = \left]0, \sqrt{\frac{300}{\pi}}\right[$.

O gráfico de f neste intervalo está na Figura 3. 32 (correspondente à parte da curva na cor verde), juntamente com o ponto A, em que a reta tangente ao gráfico é aproximadamente horizontal, onde, neste caso, está o máximo global de f no intervalo I.

Outra forma de determinar a localização aproximada do ponto A é utilizando a ferramenta de “Otimização” do GeoGebra, que determina os máximos/mínimo locais, pois, no nosso caso, o máximo global de f em I é também um máximo local da função f, atingido, aproximadamente no ponto $D(5{,}64; 564{,}19)$ do gráfico da Figura 3. 32. Precisamos ressaltar que os valores são aproximados, porque, sempre que os valores não são inteiros, o *software* faz arredondamentos e truncamentos.

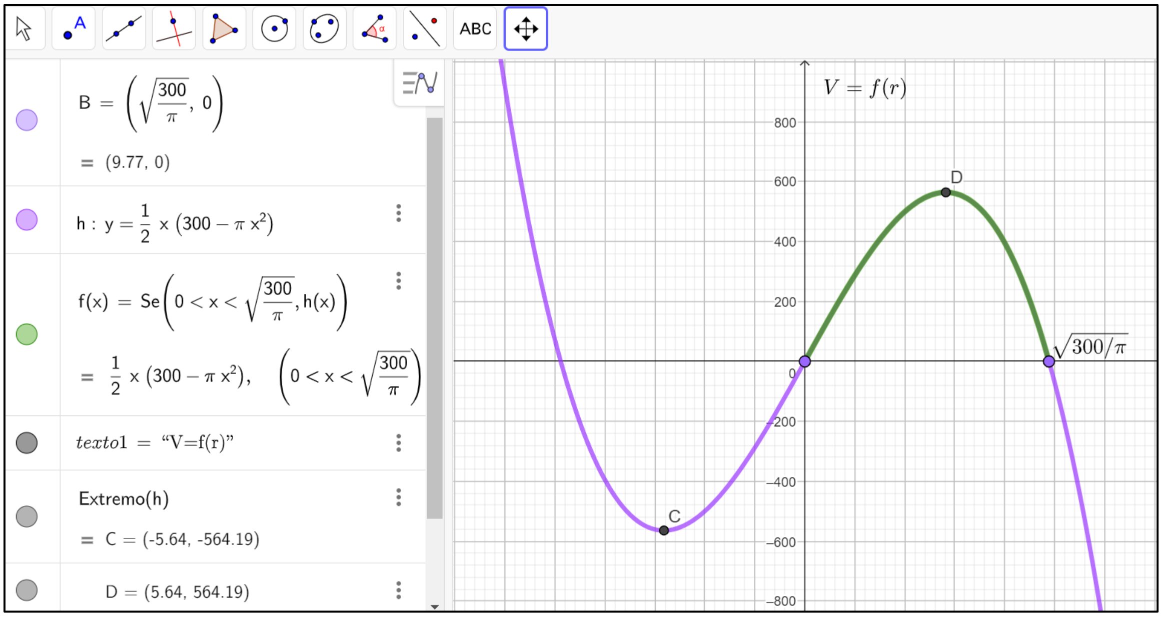


Figura 3. 32 - Gráfico da função volume e volume máximo

É possível também utilizar a desigualdade das médias, comparando a média geométrica de três números positivos com a média aritmética deles, para resolver este problema. Entretanto é necessário habilidade com cálculos algébricos. A função V pode ser escrita de modo equivalente, colocando π em evidência e fatorando, como $V = \frac{\pi}{2} r\left(10\sqrt{\frac{3}{\pi}} - r\right)\left(10\sqrt{\frac{3}{\pi}} + r\right)$. Lembrando que a média geométrica de três números envolve uma raiz cúbica, vamos considerar $\sqrt[3]{V}$ e escolher os três números da seguinte forma: $a_1 = r$, $a_2 = c\left(10\sqrt{\frac{3}{\pi}} - r\right)$ e $a_3 = b\left(10\sqrt{\frac{3}{\pi}} + r\right)$, com as constantes c e b a serem escolhidas para que a média aritmética dos três seja uma constante independente de r, só assim poderemos tirar conclusões. Comparando então as médias teremos:

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2cb}}.\sqrt[3]{a_1.a_2.a_3} \leq \sqrt[3]{\frac{\pi}{2cb}}\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2cb}}\left((1-c+b)r + (c+b)10\sqrt{\frac{3}{\pi}}\right)\frac{1}{3}.$$

Basta escolher c e b positivos tais que $1 - c + b = 0$, ou seja, $c - b = 1$. Então, para obter o valor máximo de V, a desigualdade se torna igualdade, e isto ocorre se e somente se os três números são iguais, $a_1 = a_2 = a_3$, ou seja, $r = c\left(10\sqrt{\frac{3}{\pi}} - r\right) = b\left(10\sqrt{\frac{3}{\pi}} + r\right)$, o que acarreta $c = \frac{r}{10\sqrt{\frac{3}{\pi}} - r}$ e $b = \frac{r}{10\sqrt{\frac{3}{\pi}} + r}$. Como $c - b = 1$, obtemos $r = \frac{10}{\sqrt{\pi}} \cong 5{,}64$ metros, logo $h = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ metros e, substituindo na função V, teremos o volume máximo $\frac{1000}{\sqrt{\pi}} \cong 564{,}19\ m^3$.

Quando este problema for estudado na primeira disciplina de CDI, utilizando o conceito de derivada será possível determinar também o valor exato de r, e, por conseguinte, o de h, de modo bem mais simples do que utilizando a desigualdade das médias, com auxílio de derivada de função, como também ocorre para o problema 3.26, mais adiante neste capítulo.

Um outro problema, cujo objetivo é comparar dois modelos de silos, um cilíndrico e outro cônico, está proposto no final deste capítulo. A solução do problema 3.13 é uma parte da solução do problema 3.37 e as técnicas são similares, mas os cálculos algébricos são mais trabalhosos.

Problema 3.14: *A quantidade de iluminação* (I) *de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte* (P) *e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte ao objeto* (s)*, sendo* λ *a constante de proporcionalidade.*
a) Determine uma expressão algébrica para a quantidade de iluminação do objeto I*.*
b) Duas fontes de luz constantes, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 4 m de distância uma da outra, em linha reta. Suponha que x *seja a distância entre o objeto e a fonte de maior potência e que a fonte de menor potência tenha potência igual à constante* k*. Represente esta situação por meio de uma figura.*
c) Determine a expressão algébrica da função I, dependendo da variável x *e o intervalo de variação de* x*.*
d) Determine onde deve ser colocado o objeto, sobre a reta entre as fontes de luz, de forma a receber o mínimo de iluminação (Adaptado de Stewart, 2013, p.301)

Temos que $I = \lambda \cdot P \cdot \frac{1}{s^2}$, sendo I: Quantidade de iluminação recebida pelo objeto; P: Potência da fonte de Luz; s: Distância entre a fonte de luz e o objeto iluminado; λ: A constante de proporcionalidade.

Seja x a distância entre o objeto e a fonte de maior potência e k a intensidade de luz da fonte de menor potência, dessa forma a potência da fonte de maior potência será igual a $3k$. A distância entre o objeto e a fonte de menor potência é igual a $(4 - x)$, conforme a Figura 3.33.

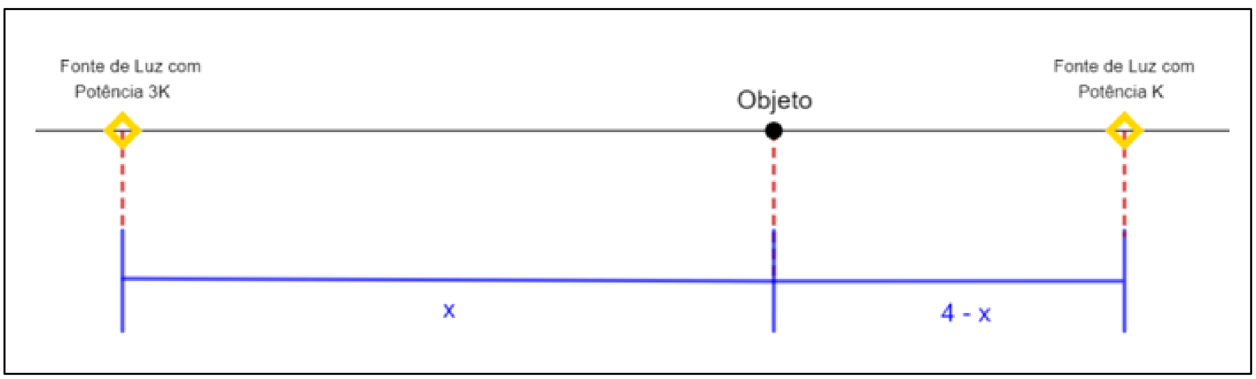


Figura 3.33 - Fontes de Luz

Podemos definir a função $I = f(x)$ que nos permite observar a quantidade de luz que um objeto colocado entre as fontes recebe como

$I = \ f(x) = \lambda \cdot 3k \cdot \frac{1}{x^2} + \lambda \cdot k \cdot \frac{1}{(4-x)^2} = \lambda . k . \left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(4-x)^2} \right), \ 0 < x < 4.$

A desigualdade das Médias não ajuda neste caso, porque ao transformar a soma em raiz do produto será obtida uma expressão que ainda depende de x. O *software* GeoGebra pode ser utilizado para esboçar o gráfico da função auxiliar $g(x) = \left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(4-x)^2} \right), 0 < x < 4,$ como mostra a Figura 3. 34 (o gráfico, no intervalo considerado, está na cor vermelha). O mínimo de f e de g ocorrerá para os mesmos valores de x, já que $\lambda \cdot k$ é constante.

Com o auxílio do gráfico e da ferramenta de reta tangente do GeoGebra poderemos estimar qual será o valor de x procurado ($x \cong 2{,}36$). O valor exato, que pode ser obtido utilizando tópicos da primeira disciplina de CDI, é $x = \frac{4\sqrt[3]{3}}{1+\sqrt[3]{3}}$.

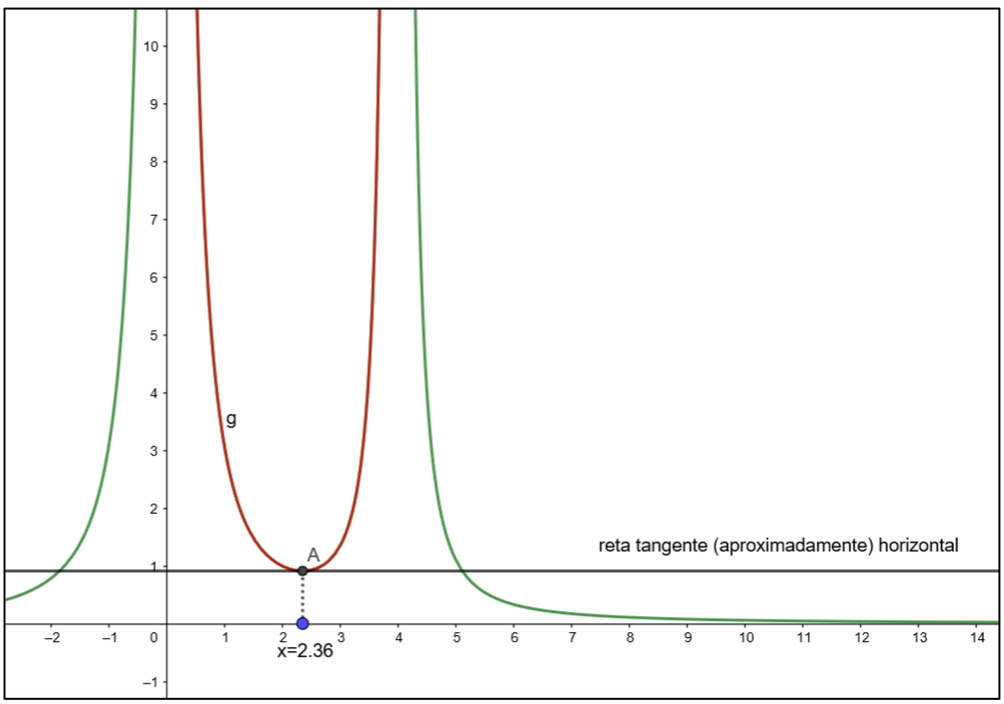


Figura 3. 34 - Mínimo da quantidade de luz

No gráfico da Figura 3. 34 pode-se observar que $2 < x < 3.$ Mas utilizando os parâmetros do GeoGebra e a ferramenta de reta tangente pode-se chegar a um valor aproximado bem próximo do valor exato (que é um número irracional).

O *software* GeoGebra possui um recurso importante, acessível a partir do menu inicial (botão Ponto), a ferramenta de Otimização. Ela serve para localizar os pontos de máximo e de mínimo local de uma função, que ocorrem em pontos onde a reta tangente é horizontal ou não existe. Cabe ressaltar que, se ocorrerem em números irracionais, o *software* vai fornecer um valor aproximado racional**,** somente um método algébrico vai fornecer solução exata.

Além disso, se o objetivo é determinar máximo/mínimo global (ou absoluto) em um certo domínio contextualizado, ele nem sempre coincidirá com máximo/mínimo local (ou relativo), como já vimos em vários problemas deste capítulo. Este último ocorre em um ponto P do gráfico de uma função onde, para os pontos Q do gráfico (bem) próximos de P, o ponto P se comporta como máximo/mínimo global. Ou seja, máximo/mínimo local "parece" máximo/mínimo global quando visto "bem de perto" (com *zoom)*. Na Figura 3. 34, a função f tem um mínimo local em A, que é mínimo global de f, considerando o domínio do problema contextualizado, que é o intervalo $]0,4[$. Mas, considerando um intervalo de visualização mais amplo para o gráfico, por exemplo considerando como domínio [-3,6], o mínimo local em A não é mais mínimo global ou absoluto.

Conhecendo o gráfico da função e o domínio do problema contextualizado, as ferramentas do GeoGebra podem ajudar a resolver de forma exata vários problemas de máximo/mínimo global. No caso de soluções irracionais, entretanto, a solução exata precisa ser obtida algebricamente.

Para concluir esta seção, podemos resumir as **conclusões sobre máximo/mínimo global,** obtidas a partir da investigação realizada por meio dos problemas das seções 3.1 e 3.2, a seguir.

Temos um **teorema**: uma função contínua f num intervalo $[a, b]$ da reta, fechado e limitado, sempre tem valor máximo global M e valor mínimo global m.

O valor M poderá ser $M = f(\alpha)$, onde $\alpha \in [a, b]$ pode ser único, pode haver um número finito de números possíveis α, ou até um número infinito de números possíveis α. Depende da função e do intervalo escolhido.

Para encontrar o(s) número(s) α, determinam-se os pontos do gráfico de f, com abscissa em $[a, b]$, onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal ou não existe, eles são candidatos a ponto de máximo/mínimo local de f em $[a, b]$ ou podem ser também pontos de inflexão, ou seja, de mudança de concavidade do gráfico.

Também devem ser obtidos os pontos extremos do gráfico da função no intervalo escolhido, ou seja $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

Com os dados anteriores, utilizando o gráfico da função numa janela do GeoGebra adequada, se pode visualizar onde estarão o(s) número(s) α tais que $f(\alpha) = M$. Este mesmo processo também permite achar o(s) número(s) $\beta \in [a, b]$ tais que $f(\beta) = m$, valor mínimo de f.

Supondo que o gráfico da função não seja conhecido, também é possível chegar ao objetivo utilizando o conceito e propriedades de **derivada,** que serão estudados em CDI.

3.3 Problemas Instigantes de Máximo ou Mínimo de Funções

Os problemas desta seção são mais instigantes do que os abordados nas seções anteriores e utilizam, na sua resolução, além das estratégias apresentadas anteriormente, argumentos de geometria plana e espacial, semelhança de triângulos, trigonometria e relações trigonométricas, propriedades de funções crescentes e decrescentes, funções inversas e compostas, além de conceitos de Física, de Economia e de Geometria Analítica.

No próximo problema a função a minimizar é a soma de duas raízes quadradas. Entretanto, por simetria de pontos em relação a uma reta e propriedade de reta conclui-se o teorema de Heron e, a partir daí, utilizando semelhança de triângulos ou a relação trigonométrica da tangente, chega-se à solução sem precisar utilizar a função complicada, dada pela soma de duas raízes quadradas. Este problema pode ser utilizado pelo professor para propor aos alunos que procurem outras formas de chegar à solução.

Problema 3.15: *Antônia está no ponto A, que é o vértice superior esquerdo de uma praça retangular $ABCD$ (no sentido anti-horário) e vai se deslocar em linha reta até um ponto P, do lado oposto BC da praça, para comprar pipocas (há pipoqueiros em todo o lado BC). Depois, sempre em linha reta, vai atravessar a praça até o ponto E situado no lado CD da praça, onde está parada esperando, a amiga Elisa, conforme a Figura 3. 35.*
a) Utilize o GeoGebra para reproduzir Figura 3. 35.
b) Simule posições diferentes para o ponto P usando ferramentas do GeoGebra.
c) Seja x a distância do ponto P até o vértice C, $AB = CD = a, BC = AD = b$ e $EC = c$. *Determine uma função que represente a distância, dependendo de x, percorrida por Antônia para se encontrar com Elisa.*
d) Determine a posição de P que fará com que Antônia siga o caminho mais curto possível para encontrar Elisa. (Adaptado de Ferreira (2012))

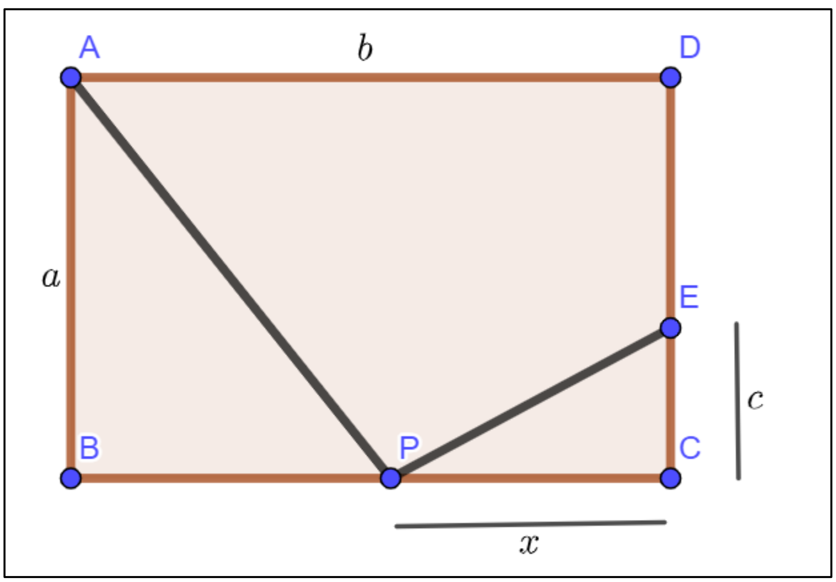


Figura 3. 35 – Praça

Como os triângulos APB e EPC são retângulos, utilizando o teorema de Pitágoras calculamos o comprimento dos segmentos AP e PE, obtendo assim a distância percorrida por Antônia para encontrar Elisa, $d = f(x) = AP + PE = \sqrt{a^2 + (b-x)^2} + \sqrt{x^2 + c^2}$, sendo a distância possível $0 \leq x \leq b$.

Ao invés de trabalhar com a função f, consideremos uma outra forma de calcular d, usando reflexão do segmento EC com respeito à reta que contém o segmento BC.

Observando a Figura 3.36(a), concluímos que $PE = PE'$, logo $d = AP + PE'$. Então, para que a distância percorrida se A até E seja mínima, basta que ela seja uma reta, isto é, o ponto P deve pertencer ao segmento AE', como mostra a Figura 3.36(b) (deve coincidir com o ponto O). Neste caso os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{COE'}$ serão opostos pelo vértice, logo iguais ao valor α . Por conta da simetria em relação à reta que contém o segmento BC, o ângulo $\widehat{EOC}$ também terá o valor α. Portanto os triângulos ABO e ECO serão semelhantes, assim $\frac{AB}{BO} = \frac{EC}{CO}$ (também se chega à mesma igualdade utilizando as duas formas de obter $tg(\alpha)$) . Substituindo o valor das medidas, temos que $\frac{a}{b-x} = \frac{c}{x}$. Daí se chega ao valor de $x = \frac{bc}{a+c}$, que é a distância entre o ponto P e o vértice C, onde Antônia deve comprar pipocas, para depois encontrar Elisa, percorrendo o caminho mais curto.

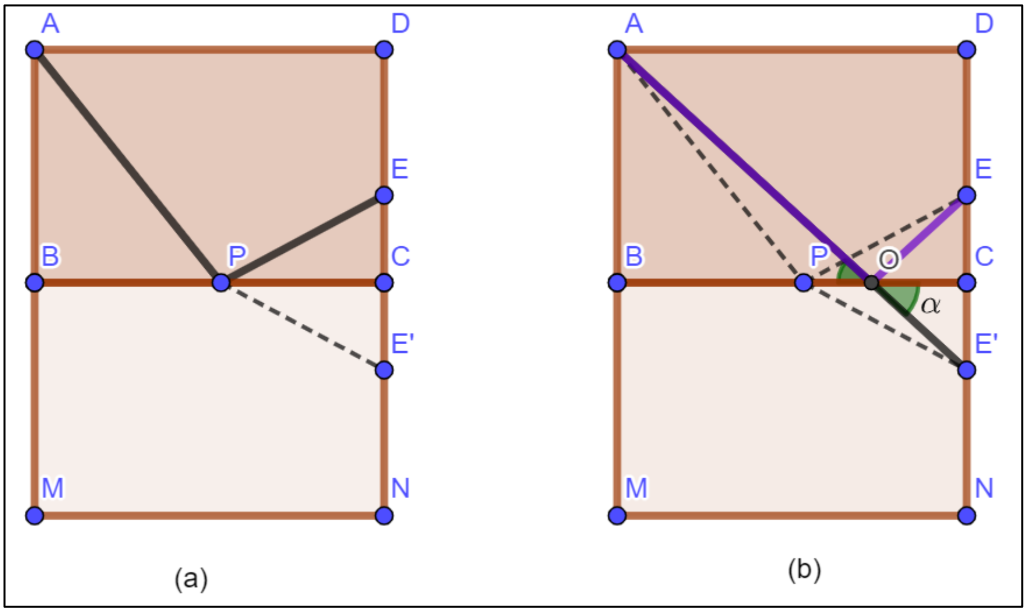


Figura 3.36 - (a) Segmento refletido e (b) Distância mínima

Um outro enunciado possível para este problema, num contexto de Física, seria supor um facho de luz no ponto A, dirigido para o ponto P em um espelho situado entre os pontos B e C. Neste caso, a pergunta seria em que ponto E deveria estar um observador, para receber o facho de luz.

O próximo problema explora uma função exponencial, num contexto realista, ao mesmo tempo que utiliza propriedades de função inversa para chegar à solução, com o auxílio de raciocínio algébrico ou geométrico. A modelagem matemática do problema é realizada utilizando uma estratégia bastante útil em problemas onde a variável é o tempo, o método do eixo das setas, que já foi utilizada para resolver problemas na seção 2 do capítulo anterior (consulte problemas 2.9 e 2.11).

Problema 3.16: *Suponha que o preço inicial D reais de um automóvel novo (no momento da venda) tenha desvalorização de* 19% *após o primeiro ano de uso e de* 5% *ao ano, em relação ao preço do ano anterior, nos anos seguintes.*
a) Determine a expressão algébrica da função $\mathrm{p} = f(t)$, *que representa o preço do carro após* t *anos de uso.*
b) Utilize o GeoGebra para representar graficamente a função f.
c) Determine o tempo mínimo necessário (em número inteiro de anos), após a saída da fábrica, para que o automóvel tenha valor menor que 50% *do seu valor inicial.* (Adaptado de problema do vestibular UNICAMP, apud BACKES (2008)).

Consideraremos inicialmente, com auxílio do método do eixo das setas, uma versão mais simples do problema, que seria obter o preço do carro após 3 anos de uso.

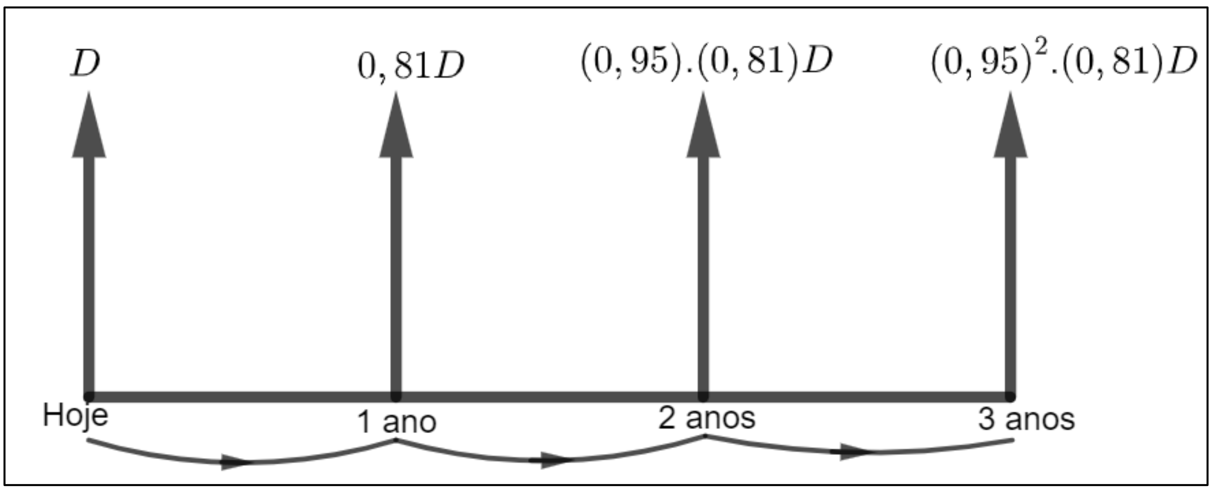


Figura 3. 37 - Evolução do preço do carro

De acordo com o diagrama da Figura 3. 37, temos que $f(0) = D$ e $f(1) = (1 - 0{,}19).f(0) = 0{,}81D$. Assim $f(2) = (1 - 0{,}05).f(1) = (0{,}95).(0{,}81)D$, $f(3) = (0{,}95)^2.(0{,}81)D$. Podemos então generalizar de modo a obter uma expressão para o preço após t anos, representada pela função $f(t) = (0{,}95)^{(t-1)}.(0{,}81)D$, para $t \geq 1$; $f(0) = D$.

Utilizando o GeoGebra podemos obter um esboço do gráfico de f, conforme mostra a Figura 3.38 (um controle deslizante para o preço inicial D permite uma simulação dinâmica do gráfico do preço, para diferentes valores do preço inicial).

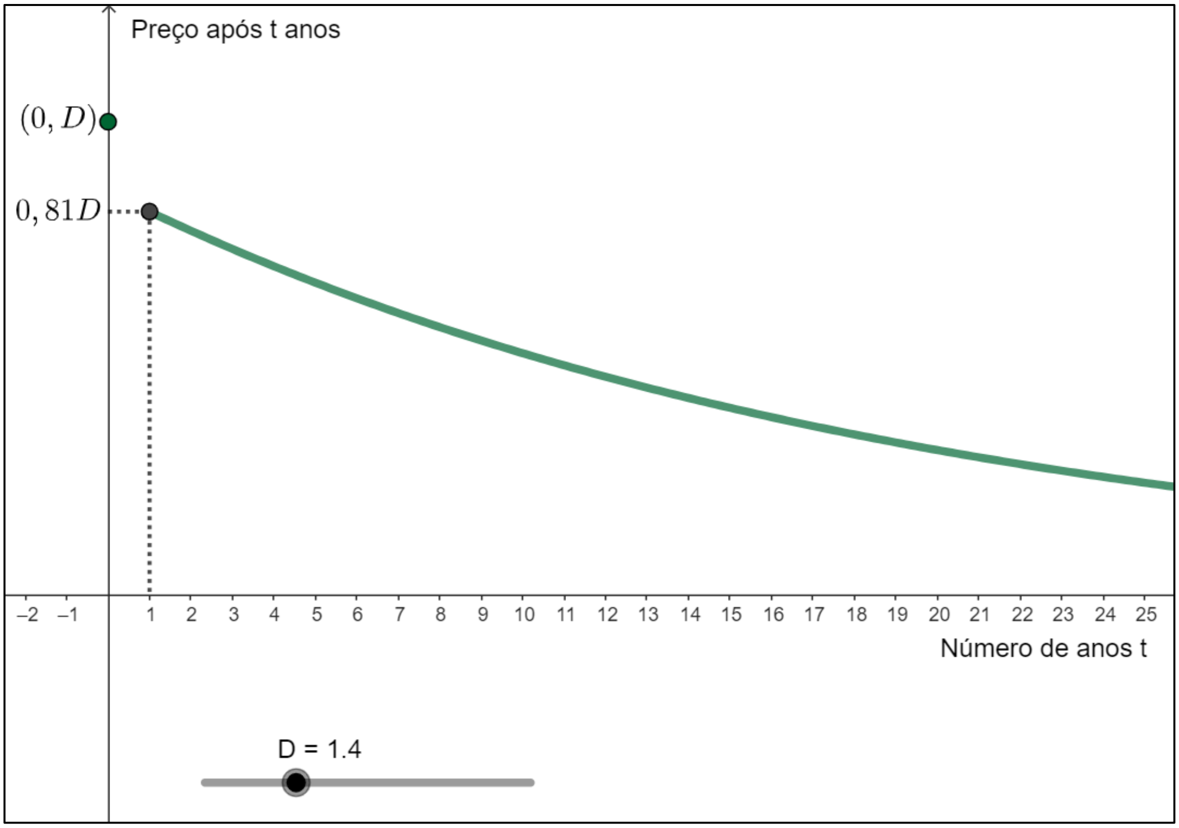


Figura 3.38 - Preço do carro após t anos

Para determinar uma solução geométrica para o problema do item c basta considerar a reta $y = D/2$, paralela ao eixo x, que passa no ponto médio entre a origem e o ponto $(0, D)$. O ponto de interseção B, desta reta com o gráfico da função f, terá como abscissa o tempo mínimo t_{min} onde o valor do carro será reduzido à metade, $t_{min} = f^{-1}(D/2)$. Como foi pedido um valor inteiro para t, basta determinar geometricamente o valor do primeiro inteiro T após t_{min} que será $T = 11$ anos, conforme mostra a Figura 3. 39.

Uma outra forma de resolver o problema seria por meio de cálculos algébricos. Queremos encontrar t_{min} tal que $f(t_{min}) = 0{,}5D$ para, a partir dele, obter o menor T número inteiro de anos tal que $f(T) < 0{,}5D$, sendo $T > t_{min}$, uma vez que a função f é decrescente, conforme o gráfico obtido na Figura 3. 39.

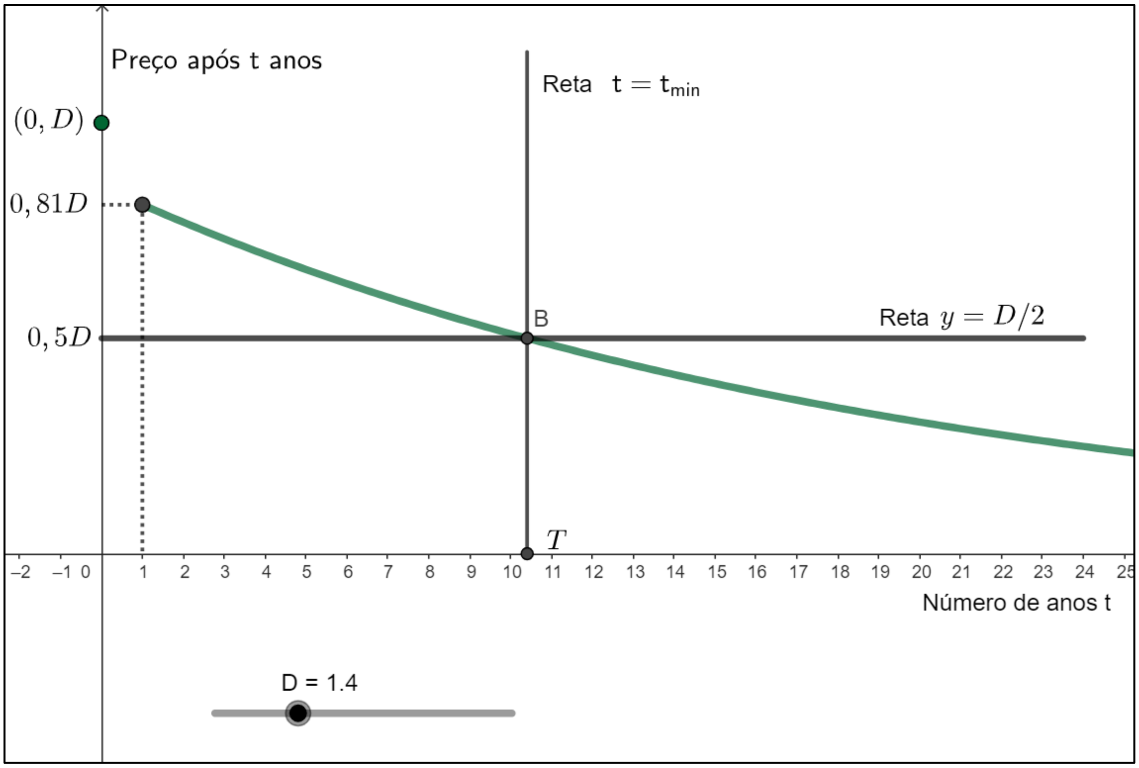


Figura 3. 39 - Tempo mínimo para o valor do carro diminuir pela metade

Utilizando o resultado do item (a), teremos a equação $0{,}95^{t-1}(0{,}81)D = 0{,}5D$. Assim $0{,}95^{t-1} = \frac{0{,}5}{0{,}81}$. Para encontrar um valor para o expoente, utilizaremos, por exemplo, a função logaritmo neperiano (poderia ser com outra base), logo $\ln(0{,}95^{t-1}) = \ln(\frac{0{,}5}{0{,}81})$. Segue-se de outra propriedade do logaritmo que $(\mathrm{t}-1)\ln(0{,}95) = \ln(\frac{0{,}5}{0{,}81})$, logo $t - 1 = \frac{\ln(\frac{0{,}5}{0{,}81})}{\ln(0{,}95)} \cong 9{,}40$. Desta forma teremos $t_{min} \cong 10{,}4$ anos. Logo o primeiro número inteiro de anos (mínimo) será $T = 11$ anos.

O próximo problema explora conceitos de física, além de utilizar uma fórmula poderosa (a lei dos cossenos) para chegar à função que deve ser minimizada. Esta função é uma combinação de três outras, uma função linear, uma função trigonométrica e a função modular.

Problema 3.17: *Uma mulher está no ponto A da margem de um lago circular, com raio* 2 *km. Ela deseja ir para o ponto C, diametralmente oposto a A, do outro lado do lago. Ela consegue andar a uma velocidade de 4 km por hora e consegue remar a 2 km por hora. Ela pretende remar até um ponto B da margem do lago e depois andar ao longo da margem, até o ponto C desejado. Considere θ o ângulo entre os segmentos AC e AB, conforme a Figura 3. 40.*

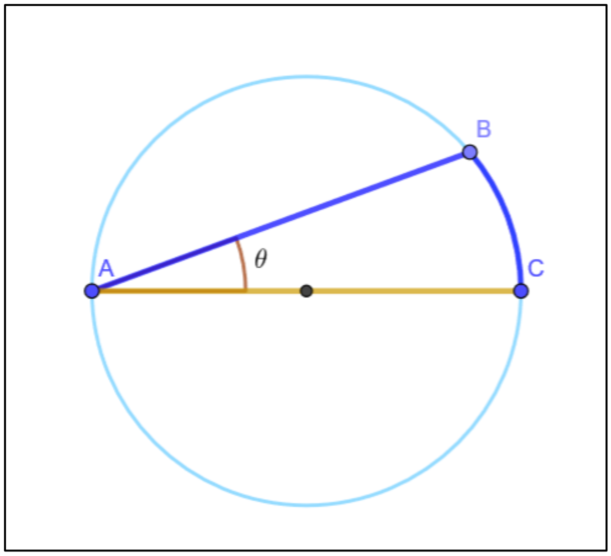


Figura 3. 40 - Posição A da mulher na margem do lago

a) Utilize os recursos do GeoGebra para esboçar a Figura 3. 40 simular o trajeto da mulher para diferentes valores do ângulo θ e para determinar o intervalo possível de valores desse ângulo.
b) Determine uma expressão para a função $t = f(\theta)$, onde t é o tempo que a mulher vai necessitar para ir de A até C.
c) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função f, no intervalo de valores possíveis para θ, de acordo com o item a.
d) Mostre que a reta tangente ao gráfico, no ponto de abscissa $\frac{\pi}{6}$, é horizontal.
e) Determine o valor de θ de forma que a mulher percorra o trajeto de A até C, no menor tempo possível. (Adaptado de Stewart (2013))

Supondo que a mulher pode escolher remar até o ponto C diretamente, o ângulo θ pode ser igual a zero. Simulações obtidas com um controle deslizante para o ângulo levam até, no máximo, $\theta = \frac{\pi}{2}$, correspondente à opção da mulher por andar pela margem do lago, do ponto inicial A até o ponto de chegada C. Então o conjunto de valores possíveis para o ângulo θ é o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Da Física sabemos que a velocidade (v) é o quociente entre a distância percorrida (d) e o tempo (t) utilizado para percorrer, logo $t = \frac{d}{v}$.

O tempo total será a soma de dois tempos, t_1, utilizado para remar, adicionado ao tempo t_2, utilizado para andar, cada um com sua velocidade.

Assim teremos $t = t_1 + t_2 = \frac{AB}{v_1} + \frac{\widehat{BC}}{v_2} = \frac{AB}{2} + \frac{\widehat{BC}}{4}$.

Agora precisamos obter o comprimento do segmento AB e do setor circular BC, em função do ângulo θ, com ajuda da Figura 3. 41.

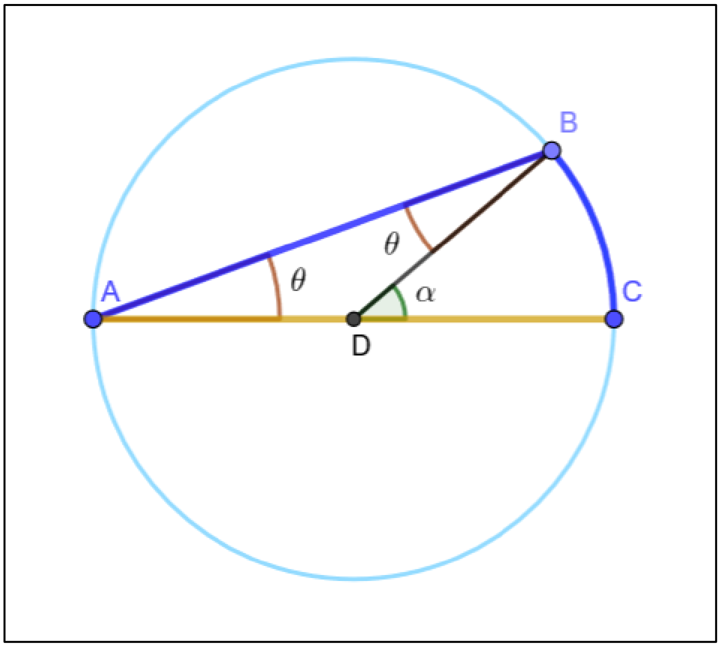


Figura 3. 41 - Triângulo ABD e Setor circular BDC

Para determinar o comprimento de AB, podemos utilizar a lei dos cossenos, observando que o triângulo ADB é isósceles, uma vez que a medida dos lados $AD = DB = 2$, por serem raios para o lago circular. Assim $AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD.DB.\cos(\pi - 2\theta) = 8(1 + \cos(2\theta)) = 8(2\cos^2(\theta))$. Portanto $AB = 4|\cos(\theta)| = 4\cos(\theta)$ no intervalo de variação de θ.

Outra forma de determinar o comprimento de AB é a seguinte: o triângulo ABC é retângulo em $\widehat{ABC}$, logo $\cos(\hat{A}) = \cos(\theta) = AB/4$.

No caso do comprimento do setor circular BC temos que ele mede o produto do ângulo α pela medida do raio do círculo, que é igual a 2, assim $\widehat{BC} = 2\,\alpha$. Mas $\alpha + (\pi - 2\theta) = \pi$, logo $\alpha = 2\theta$ então $\widehat{BC} = 4\theta$. Substituindo na expressão do tempo $t = f(\theta)$, encontramos finalmente a função $t = f(\theta) = \theta + 2\,|\cos(\theta)| = \theta + 2\cos(\theta)$ no intervalo $[0, \pi/2]$.

Assim, intuitivamente, o valor mínimo de t, neste intervalo de variação do ângulo, parece que vai ocorrer quando $\cos(\theta) = 0$, ou seja, quando $\theta = \frac{\pi}{2}$. Isto significaria que a mulher deve andar de A até o ponto desejado C, sem remar em nenhum trecho do percurso.

Utilizando GeoGebra podemos obter o gráfico de f e verificar que a intuição se comprova, como mostra a Figura 3. 42, isto é, o valor de $\theta = \frac{\pi}{2}$ leva ao tempo mínimo de percurso, resolvendo o item e do problema.

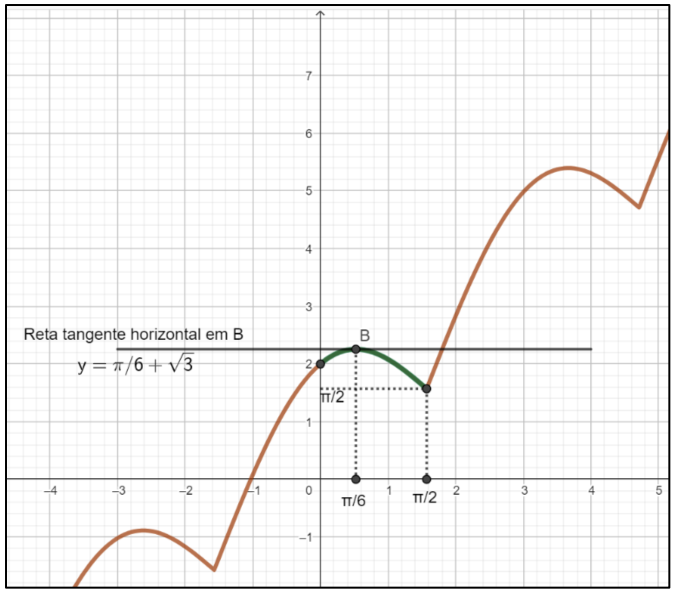


Figura 3. 42 - Gráfico da função tempo

A partir do gráfico da Figura 3. 42 junto com a ferramenta de reta tangente do GeoGebra, podemos observar também que a reta tangente em $\theta = \frac{\pi}{6}$ é horizontal e que a função f terá aí o valor máximo, dentro do intervalo considerado, ou seja, a mulher vai gastar o maior tempo possível (e não o menor tempo possível) para ir de A até C.

No processo de achar a solução foi possível constatar a importância de conhecer propriedades das funções trigonométricas para facilitar o processo.

Uma análise dos problemas apresentados neste capítulo mostra que a abordagem algébrica de alguns deles é mais complicada do que a geométrica, enquanto em outros é justamente o contrário. São dois registros de representação de funções que estão disponíveis para ajudar a compreensão e resolução de problemas.

No próximo problema, a função a ser otimizada já é fornecida, dado que o problema vem de um contexto de Física, onde modelos são frequentemente estabelecidos a partir de experiências práticas. O comportamento da solução quando um parâmetro varia pode ser muito bem compreendido, utilizando o recurso do controle deslizante do GeoGebra. Uma conjectura para a solução do problema de otimização também pode ser obtida utilizando recursos do GeoGebra. A solução exata, que comprova esta conjectura, é obtida utilizando a desigualdade das médias, combinada com propriedade de crescimento de outra função.

Problema 3.18: *Quando um resistor de R ohms é ligado aos terminais de uma bateria com uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de* r *ohms, uma corrente de I ampères atravessa o circuito e dissipa uma potência de P watts, sendo* $I = \frac{E}{R+r}$ *e* $P = R.I^2$.

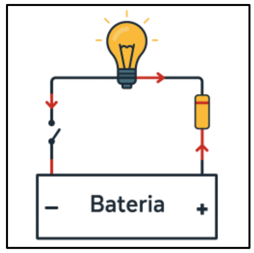


Figura 3. 43 – Bateria
Fonte: https://aedmoodle.ufpa.br/course/view.php?id=4005

a) Escreva a função P em função da variável R, supondo r e E constantes.
b) Construa, utilizando o GeoGebra, o gráfico da função $P(R)$, supondo $E = 1$, para alguns valores de $r > 0$ fixados.
c) Utilizando o controle deslizante para o valor de r, avalie o comportamento do gráfico da função P, no GeoGebra, supondo $E = 1$.
d) Supondo r e E constantes, determine o valor de R para o qual a potência dissipada será máxima (Adaptado de Diniz, Neri, Almeida, Veiga e Coelho (2013)).

Substituindo a expressão de I na expressão de P, fornecidas no enunciado, obtemos P dada por $P = R\left(\frac{E}{R+r}\right)^2$.

Supondo $E = 1$, o gráfico da função P satisfazendo $P(R) = \frac{R}{(R+r)^2}$, para alguns valores de $r > 0$ fixados, está representado na figura 3. 44 a seguir, onde se pode observar também que o máximo absoluto de P ocorre sempre num ponto onde a reta tangente ao gráfico é horizontal.

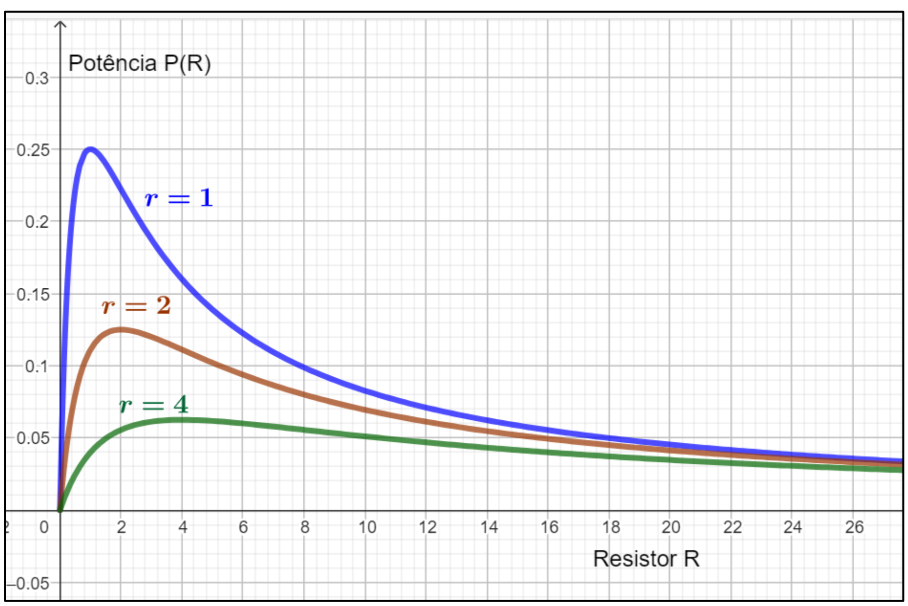


Figura 3. 44 - Gráfico da Potência, para diferentes valores da resistência interna r

Utilizando controle deslizante para $r > 0$ é possível perceber que o ponto onde ocorre o máximo de P parece ter abscissa coincidindo com o valor de r. Fixando-se no gráfico o ponto $A(r, P(r))$ e comparando a reta horizontal passando em A, com a reta tangente ao gráfico no ponto A, visualmente e na janela de álgebra elas parecem sempre coincidir (é preciso cuidado ao tirar conclusões, visto que se estivermos trabalhando com números não inteiros, o *software* pode realizar arredondamentos), como mostra a Figura 3. 45.

Utilizando a desigualdade das médias, comparando a aritmética com a geométrica, é possível mostrar que realmente P será máxima quando $R = r$. Uma vez que $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1.a_2}$, como os dois lados da desigualdade são positivos, e a função quadrática é crescente para valores positivos, teremos $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \geq a_1.a_2$, com a igualdade ocorrendo se e somente se $a_1 = a_2$. Consideremos $a_1 = \frac{R}{R+r}$ e $a_2 = \frac{r}{R+r}$. Então teremos $r.P(R) = a_1.a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, ou $P(R) \leq \frac{1}{4r}$, com o máximo de $P(R)$ sendo atingido quando $a_1 = a_2$, isto é, quando $R = r$.

Utilizando derivada, conceito estudado em CDI, também é possível provar que P será máxima quando $R = r$.

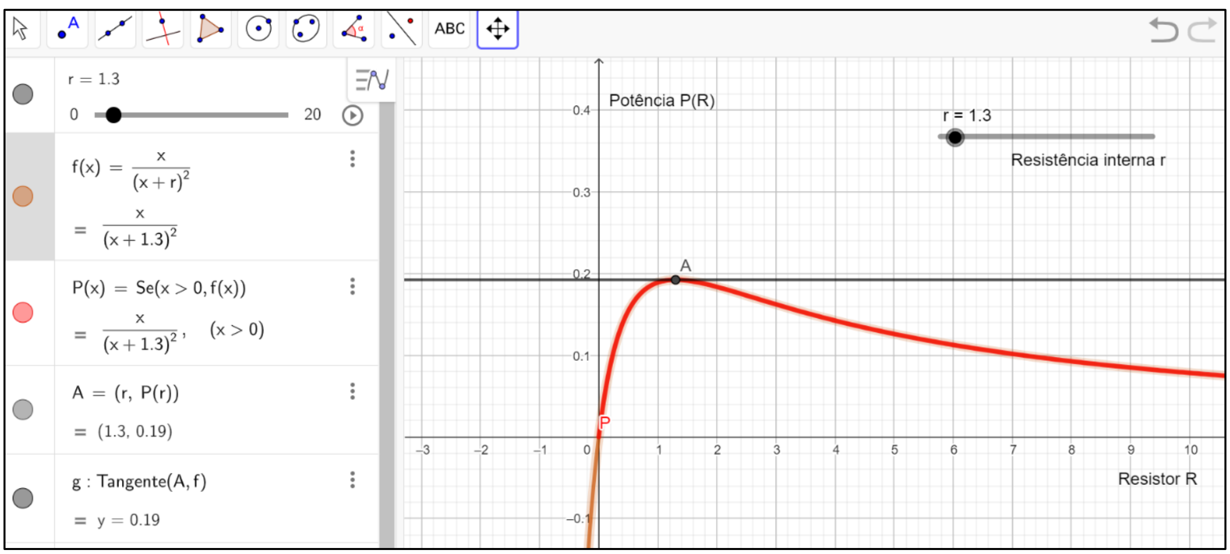


Figura 3. 45 - Ponto de máximo absoluto de $P(R)$

Para o próximo problema, o auxílio do GeoGebra parece ter menos importância do que a desigualdade das Médias. Entretanto, o conjunto de valores possíveis para a variável, é, na verdade, decisivo para escolher a forma mais simples de obter a solução. O problema tem bastante interesse também, por vir da área de Economia.

Problema 3.19: *Um fabricante de molduras usa mogno reflorestado para produzir cinco peças por dia. Cada entrega de um contêiner de madeira custa R\$ 5 000,00, enquanto sua armazenagem custa R\$ 10,00 por dia, por unidade (uma unidade é a quantidade de matéria-prima necessária* *para produzir uma peça). O fabricante espera receber matéria-prima suficiente para produzir molduras por x dias, de modo a zerar o estoque no final deste período (ciclo de produção). A quantidade média de matéria-prima armazenada é aproximadamente a metade da recebida em cada entrega.*

a) Determine a expressão algébrica do custo total de armazenagem C_a durante um ciclo, sabendo-se que é o produto entre a quantidade média armazenada, pelo custo de armazenagem de uma unidade, durante x dias.

b) Determine a expressão algébrica da função custo total por ciclo, C_t, que é a soma do custo de entrega C_e somado ao custo de armazenagem.

c) Determine a expressão algébrica da função custo médio diário $C_m = f(x)$, que é obtida dividindo o custo total por ciclo C_t pelo número de dias de um ciclo (x) e esboce o gráfico de f, utilizando o GeoGebra e supondo $x > 0$.

d) Quantas unidades de matéria-prima devem ser encomendadas de cada vez e com que frequência (o número de dias x), de modo a minimizar o custo médio diário? (Adaptado de Thomas (2009)).

O fabricante consegue produzir 5 molduras por dia. Se for produzir molduras por x dias, durante um ciclo, precisará encomendar $5x$ unidades para receber em uma entrega. Então a quantidade média de matéria-prima em estoque será, aproximadamente, $5x/2$.

Portanto, o custo total de armazenagem $C_a = \frac{5x}{2} \cdot 10 \cdot x$. O custo de entrega é fixo, do enunciado $C_e = 5000$. Logo, o custo total será a soma dos dois custos, $C_t = 5000 + 25x^2$ completando o item a e o item b. Podemos responder então o item c, obtendo $C_m = f(x) = \frac{C_t}{x} = \frac{5000}{x} + 25x,\ x > 0$. O gráfico de f, produzido pelo GeoGebra, está apresentado na Figura 3. 46 a seguir.

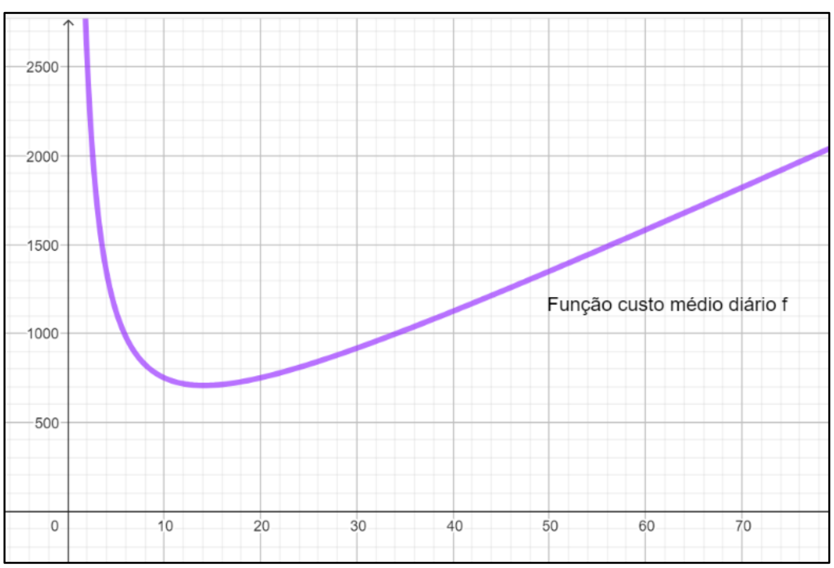


Figura 3. 46 – Função custo médio diário

Da Figura 3. 46 podemos verificar que existe um valor de $x > 0$ para que o valor de f seja o mínimo possível, que ocorre no ponto do gráfico onde a reta tangente é horizontal.

Utilizando a ferramenta de reta tangente do GeoGebra podemos estimar que este ponto é próximo do ponto $A(14{,}16; 707{,}11)$ como mostra a Figura 3. 47 a seguir.

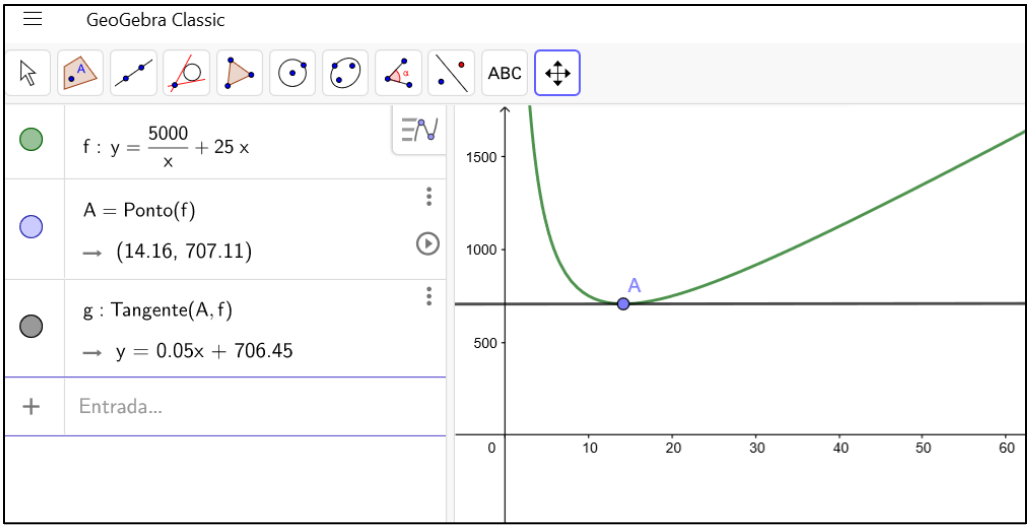


Figura 3. 47 - Reta tangente horizontal ao gráfico de f

Podemos determinar as coordenadas exatas de $A(x, f(x))$ utilizando a desigualdade que relaciona a média aritmética e a geométrica de dois números positivos $a_1 = \frac{5000}{x}$ e $a_2 = 25x$.

Teremos $\sqrt{\frac{5000}{x}.25x} \leq \frac{\frac{5000}{x}+25x}{2}$, acarretando que

$$C_m = f(x) \geq 2\sqrt{5000.25} = 500\sqrt{2}.$$

A igualdade entre as duas médias será atingida se e somente se $a_1 = \frac{5000}{x} = a_2 = 25x$, isto é, $x = 10\sqrt{2} \cong 14{,}1421$. Então o valor mínimo possível de f será $f(10\sqrt{2}) = 500\sqrt{2}$. Entretanto, para o nosso problema, x representa o número de dias, portanto é esperado que seja um número inteiro. Calculando os valores de $C(14) = \frac{4950}{7} \cong 707{,}1428$ e $C(15) = C(15) = \frac{2125}{3} \cong 708{,}3333$, concluímos que o custo médio diário mínimo será de aproximadamente R\$ 707,14, obtido quando a frequência de entregas for de $x = 14$ dias. Neste caso, a quantidade de unidades de matéria-prima, que corresponde à quantidade de molduras que serão produzidas em 14 dias (como são produzidas 5 por dia), será de $14 \times 5 = 70$ unidades. Está então respondido o item d.

Podemos ter ainda mais informações para ajudar o fabricante. Se quisermos o custo médio total (mínimo), basta multiplicar o custo médio diário mínimo por 14 (número de dias) e obteremos, aproximadamente, R\$ 9 900,38. A partir deste valor teremos o custo mínimo aproximado de cada uma das 70 molduras produzidos neste ciclo, com estas condições, que será de, aproximadamente, R\$ 141,43.

O próximo problema pretende explorar uma função trigonométrica e, mais do que isto, uma fórmula trigonométrica, numa situação contextualizada, diferente do que ocorre na Educação Básica. A obtenção da solução se desdobra em várias etapas, com a utilização de função inversa, função composta e permite verificar se os alunos realmente compreendem o significado de função crescente e decrescente. A desigualdade das Médias, já utilizada anteriormente, também é crucial para resolver o problema sem utilizar conteúdo específicos de uma disciplina de Cálculo.

Problema 3.20: *Suponha uma estátua de altura h sobre um pedestal de altura p. Um observador de altura m $(m < p)$ enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo α, que varia de acordo com a distância d entre o observador e a base do pedestal, conforme a Figura 3. 48.*

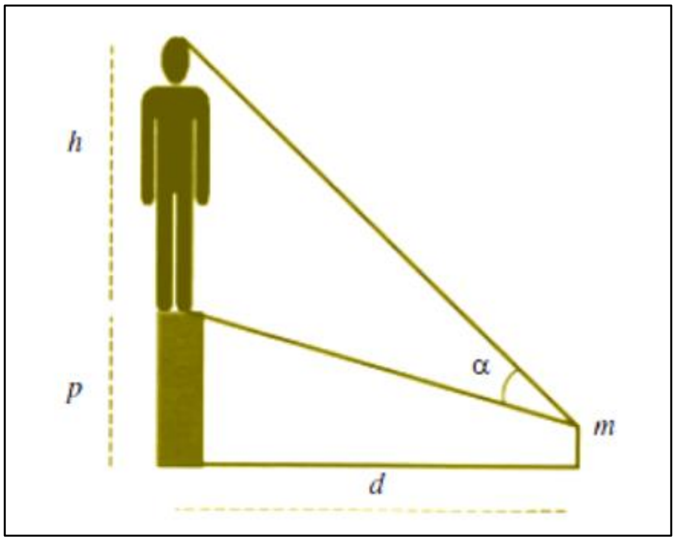


Figura 3. 48 - Posição do observador e da estátua
Fonte: Mello (2004)

a) Expresse o ângulo α em função dos ângulos β e θ, onde β e θ são os ângulos entre a horizontal à altura do observador e os segmentos que ligam ao topo e ao pé da estátua, respectivamente.
b) Represente uma figura similar à Figura 3. 48 no GeoGebra e crie controles deslizantes para variar o ângulo de visão α, quando a distância d variar.
c) Determine a distância d para que o ângulo de visão seja o maior possível. (Adaptado de Müller apud Mello, 2004).

Neste problema o observador vê a estátua sob o ângulo α, que pode ser representado pela diferença $\beta - \theta$. Como os dados relevantes do problema, em relação aos triângulos retângulos que aparecem na Figura 3. 48, estão relacionados aos catetos, a ideia que surge é utilizar a função tangente. Tem-se $\mathrm{tg}(\propto) = \mathrm{tg}(\beta - \theta) = \frac{\mathrm{tg}(\beta) - \mathrm{tg}(\theta)}{1 + \mathrm{tg}(\beta).\mathrm{tg}(\theta)}$.

Da Figura 3. 48 podemos obter que $\operatorname{tg}(\beta) = \frac{h+p-m}{d}$ e que $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{p-m}{d}$. Chamaremos $T_1 = h + p - m$; $T_2 = p - m$, porque estas quantidades permanecem fixas, de modo a simplificar a relação de dependência entre o ângulo de visão α e a distância d.

Substituindo na expressão da tangente da diferença e multiplicando numerador e denominador da fração por d teremos $f(d) = \operatorname{tg}(\propto (d)) = \frac{T_1 - T_2}{d + \frac{T_1 T_2}{d}}$, sendo $d > 0$. Daqui obtemos que $\propto (d) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{T_1 - T_2}{d + \frac{T_1 T_2}{d}}\right)$, que é a função inversa da tangente. Com base no que já foi estudado na seção 2 do capítulo anterior, a inversa da função f só pode ser definida restringindo a função f a um domínio onde ela seja bijetora, neste caso foi escolhido o intervalo $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Temos que a imagem da restrição de f será todo o conjunto dos reais. Assim, a inversa, denotada por h, será definida como $h: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, com $h(y) = \operatorname{arc\,tg}(y)$.

Podemos utilizar o GeoGebra para obter o gráfico da função h, como mostra a Figura 3. 49.

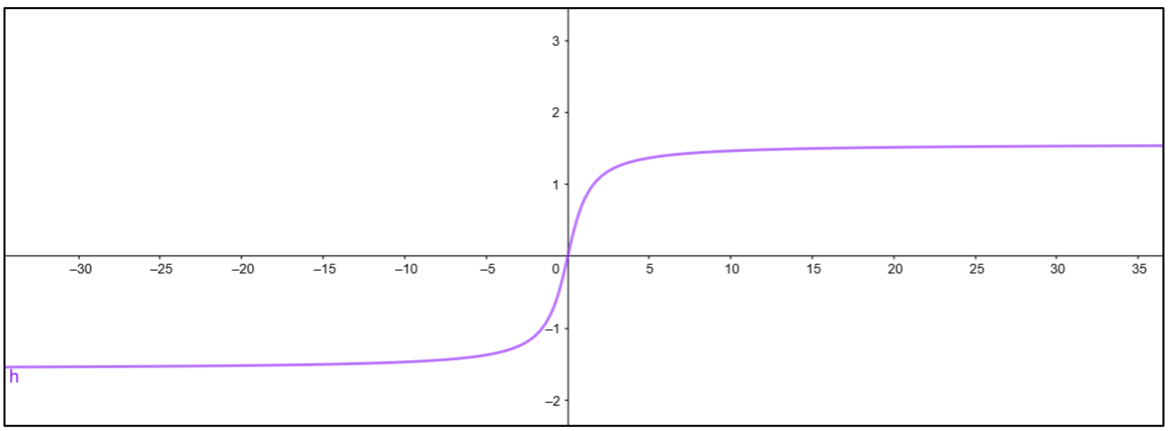


Figura 3. 49 - Gráfico da função inversa da tangente

A função h é sempre crescente, com respeito à sua variável (y), logo quando $y = f(d)$ tiver valor máximo, então $h(y)$ também terá valor máximo.

Chamando $T_3 = T_1 - T_2 > 0$, então a função $y = f(d) = \frac{T_3}{g(d)}$, onde g também é uma função positiva da variável d, pois $g(d) = d + \frac{T_1 T_2}{d}$. Assim, quando g for crescente, teremos f decrescente, e vice-versa. Ou seja, ao determinarmos o mínimo para a função g, teremos o máximo para a função f.

Para minimizar a função g pode ser utilizada a desigualdade das Médias, que relaciona a média aritmética com a geométrica, com os números $a_1 = d$ e $a_2 = \frac{T_1 T_2}{d}$. Teremos $g(d) \geq 2\sqrt{T_1 T_2}$ e o valor mínimo de g ocorrerá quando houver a igualdade $a_1 = a_2$, ou seja, $d = \sqrt{T_1 T_2}$. Substituindo os valores das duas constantes T_1 e T_2 teremos que $f(d) = \operatorname{tg}(\alpha)$ será máxima quando a distância $d = \sqrt{(h - p - m).(p - m)}$.

Como explicado antes, para esta distância d, que corresponde ao máximo de $y = f(d)$, a inversa de f, denotada por h, tal que $\alpha = h(y) = \text{arc tg}(y)$ também terá valor máximo.

O problema a seguir apresenta uma investigação sobre função bem diferente do que é feito, em geral, na Educação Básica. Numa disciplina de CDI ele seria resolvido utilizando derivada e suas propriedades. Ao excluir esta ferramenta matemática e utilizar o MERP, este problema permite explorar de forma intuitiva os conceitos de máximos e mínimos (locais/relativos e globais/absolutos em um intervalo).

É possível explorar em profundidade funções crescentes e decrescentes e abordar a associação entre máximos e mínimos (locais/relativos) de uma função com seus intervalos de crescimento e decrescimento e também a relação entre o máximo e mínimo (global/absoluto) com o intervalo de definição da função considerada. A compreensão destes conceitos é importante para um bom resultado dos alunos, mais tarde, em disciplina de CDI.

O problema também permite revisar conceitos geométricos de retas paralelas e perpendiculares vistos na Educação Básica, ao mesmo tempo que explora o conceito de reta tangente a uma curva em um ponto dado, associado à possível existência de máximo/mínimo local ou mesmo global de uma função. Reforça a observação de que a mudança no intervalo de definição de uma função pode acarretar alteração nos máximos/mínimos globais. Chama atenção para a possibilidade de o gráfico de uma função ter assíntotas.

Problema 3.21: *Considere a função polinomial g tal que $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.*
a) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico de g em $I_1 = [-2, 5]$ e determinar os valores de x onde g atinge seu mínimo e seu máximo (globais/absolutos) em I_1.
b) Utilize a ferramenta de reta tangente do GeoGebra para verificar que a reta tangente ao gráfico de g no ponto C, de abscissa $x = -1/3$, é uma reta horizontal.
c) Especifique cada intervalo de variação de x, dentro do intervalo I_1, em que a função g é crescente e onde g é decrescente e relacione com o mínimo (local/relativo) e com o máximo (local/relativo) de g em I_1.
d) Considere agora o intervalo $I_2 = [-1, 2]$. Investigue os valores máximo/mínimo local e global de g neste intervalo e determine se os valores de g em I_2 são sempre positivos, utilizando as informações dos itens anteriores.
e) Seja $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, com $x \in I_2$. Utilize as informações sobre g obtidas nos itens anteriores para determinar os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente, dentro do intervalo I_2, e para determinar os valores máximo/mínimo global e local de f neste intervalo.
*f) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico de f em I_2 observando as informações sobre f obtidas na solução do item e. (*Fonte: Biazutti, Vaz e Andrade (2020))

Utilizando o GeoGebra podemos traçar o gráfico de g no intervalo I_1, representado na Figura 3. 50 na cor vermelha, entre os pontos $E(-2{,}0)$ e $B(5{,}28)$.

A determinação dos máximos/mínimos locais de g poderia ser realizada diretamente com o recurso do “Botão de Otimização” do GeoGebra, disponível a partir do botão “Ponto” no menu da tela inicial. Uma vez que o objetivo principal do problema é trabalhar os conceitos, a solução a seguir não utiliza este recurso. Mas ele pode ser utilizado depois e analisados os resultados encontrados, levando em conta que o *software* trabalha com arredondamentos.

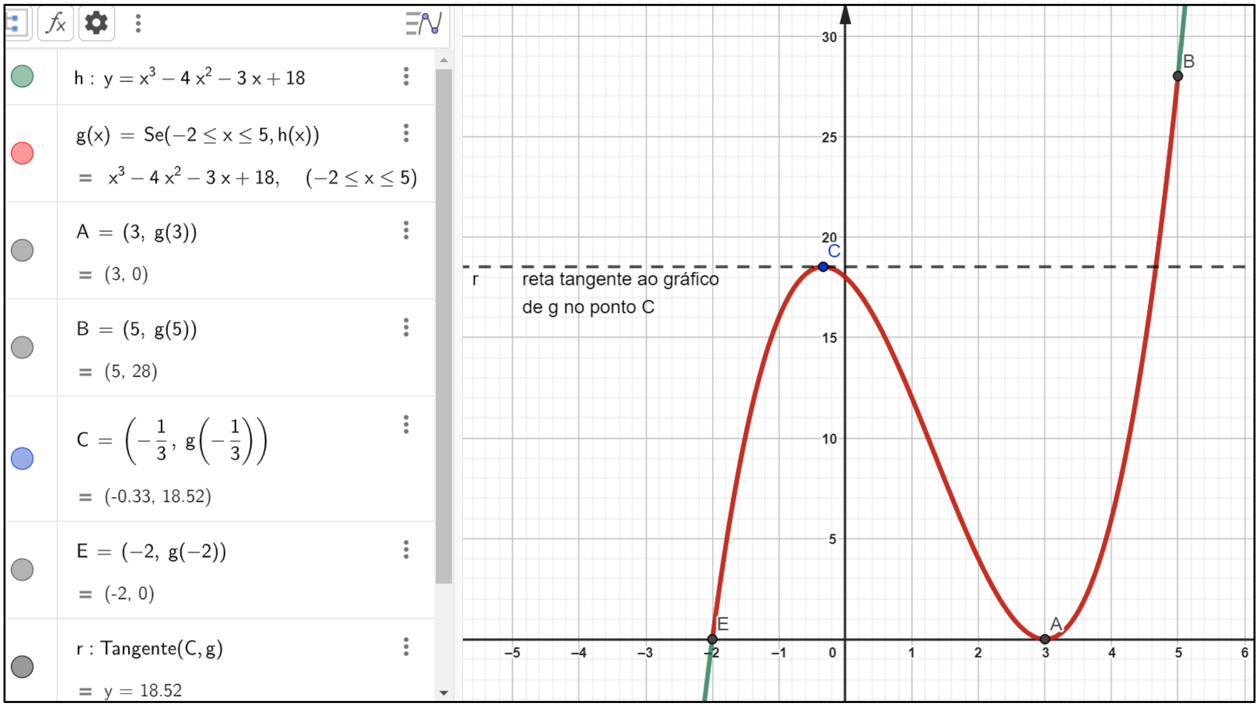


Figura 3. 50 - Gráfico da função g em I_1

Observando o gráfico da Figura 3. 50, é possível concluir que o valor máximo absoluto (ou global) de g em I_1 é $28 = g(5)$, obtido quando a variável $x = 5$ e que o valor mínimo absoluto (ou global) de g em I_1 é $0 = g(-2) = g(3)$, obtido quando a variável $x = -2$ e quando $x = 3$.

Usando a ferramenta do GeoGebra de reta tangente, escolhendo como ponto de tangência o ponto $C(-1/3, g(-1/3)) = (-1/3, 500/27) \cong (-0{,}33; 18{,}52)$ e observando a equação desta reta, que aparece na figura 3. 50, na janela de álgebra, na última linha, nota-se que é uma reta horizontal (também poderia comparar o ângulo entre esta reta e a reta vertical $x = -1/3$, usando a ferramenta de ângulos do GeoGebra).

Pelo mesmo gráfico da Figura 3. 50, também podemos concluir que a função g é crescente quando -2$\leq x \leq -\frac{1}{3}$, decrescente quando $-\frac{1}{3} \leq x \leq 3$ e crescente quando 3$\leq x \leq 5$. Assim g tem um máximo local no ponto C e um mínimo local no ponto $A(3{,}0)$. Ficam resolvidos então os itens a, b e c do problema.

Com auxílio do GeoGebra podemos obter o gráfico de g no intervalo $I_2 = [-1, 2]$, apresentado na Figura 3. 51 na cor laranja, entre os pontos $P(-1{,}16)$ e $Q(2{,}4)$. Podemos concluir que g tem um máximo local em C, que também é o máximo global de g em I_2, então o valor máximo de g neste intervalo é $500/27 \cong 18{,}52$, quando $x = -1/3$ e g tem mínimo global em Q, sendo o valor mínimo global igual a 4, quando $x = 2$.

Logo $g(x) \geq 4$, para cada $x \in I_2$ e, por conseguinte os valores de g neste intervalo são sempre positivos. Além disso, ainda da Figura 3. 51 podemos apontar que g é crescente quando $-1 \leq x \leq -1/3,$ e é decrescente se $\frac{-1}{3} \leq x \leq 2$, concluindo assim a solução do item d.

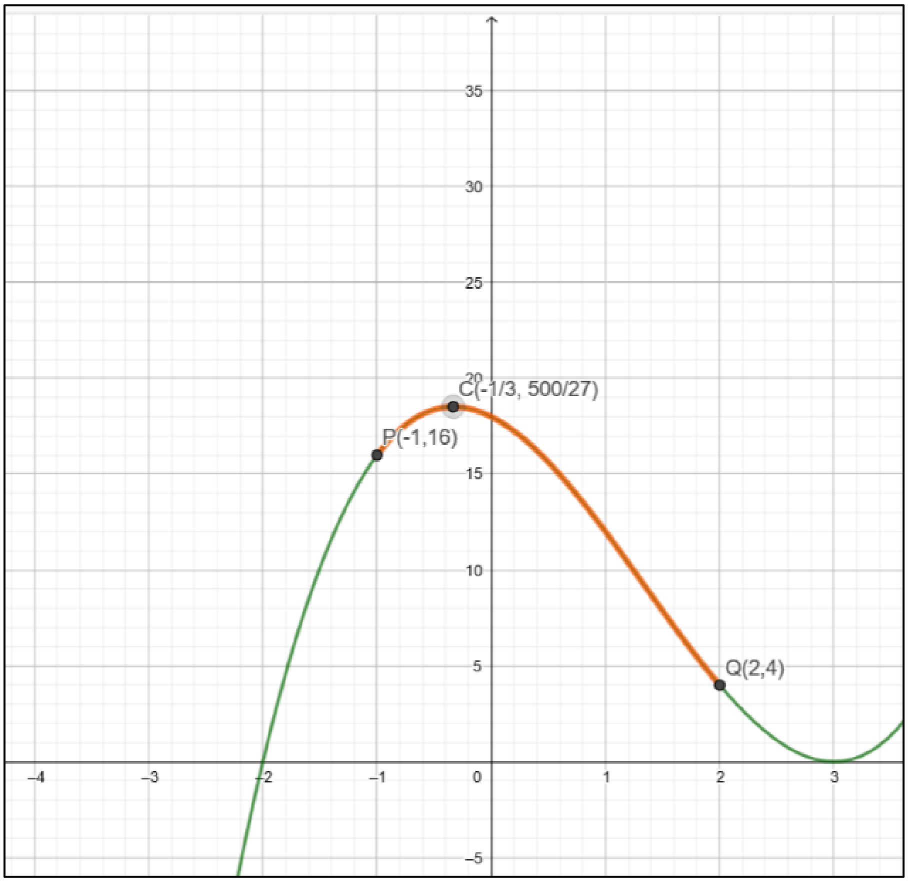


Figura 3. 51 - Gráfico da função g em I_2

Consideremos agora $f = 1/g$, supondo $x \in I_2 = [-1, 2]$. Como g assume sempre valores positivos, sendo g crescente, isto é, $g(a) \leq g(b)$ se $a \leq b$, tem-se $f(a) = \frac{1}{g(a)} \geq \frac{1}{g(b)} = f(b)$, isto é, f será decrescente, e vice-versa.

Assim podemos concluir da resposta ao item d que f é decrescente se $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$ e f é crescente se $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$.

Da mesma forma podemos concluir que f tem um mínimo local quando $x = -1/3$, onde também é o mínimo global de g em I_2, o valor mínimo de f neste intervalo é $27/500 \cong 0{,}054$ e f tem máximo global quando $x = 2$, sendo o valor máximo global igual a $1/4 = 0{,}25$.

O gráfico de f, no intervalo I_2 está representado na Figura 3. 52 (a) e na Figura 3. 52 (b). A Figura 3. 52 (a) mostra o gráfico obtido digitando na janela de entrada do GeoGebra apenas a expressão algébrica de f e o intervalo I_2. A Figura 3. 52 (b) apresenta o gráfico entre os pontos

$P'(-1, 1/16)$ e $Q'(2, 1/4)$, com ponto de mínimo local/global em $C'(-1/3, 27/500)$, após manipulações na janela de visualização do GeoGebra.

Há necessidade de mais conhecimento teórico para realmente esboçar um gráfico da forma mais clara possível.

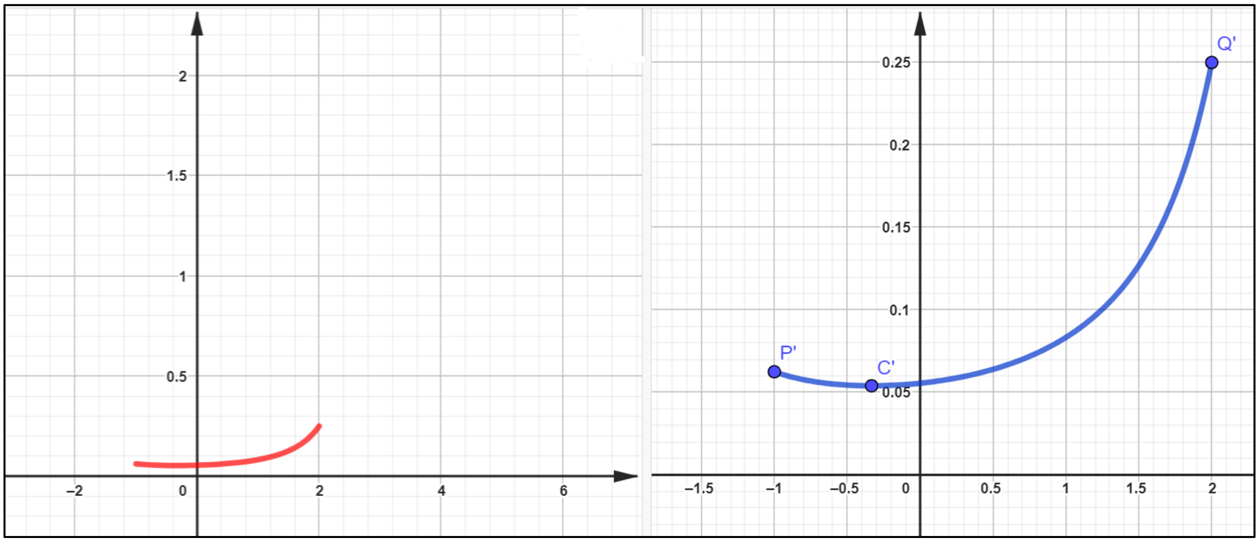


Figura 3. 52 - (a) Gráfico de f (b) Gráfico de f em nova escala

Conhecer os intervalos de crescimento/decrescimento, quando existe máximo/mínimo local e global são informações importantes que tornaram possível alterar a janela de visualização com o *zoom*, no *software*, para produzir o gráfico com melhor clareza.

Cabe observar que o gráfico da função f, sem restrição de domínio, tem várias características importantes, como assíntotas verticais (retas $x = -2$ e $x = 3$), porque a função polinomial g tem três raízes reais, sendo uma delas ($x = 3$) dupla. Também possui uma assíntota horizontal (reta $y = 0$), além de outros pontos de máximo/mínimo local. Este problema pode proporcionar várias atividades adicionais em sala de aula.

Para encerrar esta seção, foram selecionados mais alguns problemas, envolvendo tópicos de Geometria Analítica, Física, Trigonometria e Geometria Espacial.

O problema a seguir explora diversos conceitos, como funções, máximos e mínimos e também distância de um ponto a uma reta, que faz parte do conteúdo de Geometria Analítica. Por esta razão a fórmula para distância de um ponto a uma reta não vai ser utilizada agora, e a distância procurada será obtida primeiro determinando a equação da reta perpendicular à reta dada, e que passa no ponto dado, depois determinando o ponto de interseção entre as duas retas e finalmente usando a fórmula da distância entre dois pontos.

A fórmula que estamos evitando usar realmente facilita muito os cálculos algébricos. Como se pode constatar, ao trabalhar com o conteúdo de funções, podem ser utilizados conteúdos de Álgebra, Geometria Plana e Espacial, Geometria Analítica, além de conceitos de outras áreas afins, como Física.

É importante um período de "adaptação" dos alunos, antes de introduzir conceitos como limite e derivada de modo mais formal, numa disciplina de CDI junto com todo o conteúdo de funções misturado com outros conteúdos da Educação Básica.

Problema 3.22: *Considere um triângulo cujos vértices são a origem $A(0,0)$, o ponto $B(1,1)$ e o ponto C, situado sobre gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.*

a) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função f e do triângulo ABC.

b) Usando ferramenta de ponto em objeto do GeoGebra é possível deslizar C ao longo do gráfico da função f de modo a observar o que acontece com a área do triângulo ABC quando a abscissa de C, denominada c, percorre o intervalo $[0,1]$.

c) Determine uma expressão algébrica para a distância entre o ponto C e a reta que passa nos pontos A e B.

d) Determine uma expressão algébrica para a área do triângulo ABC.

e) Utilize o GeoGebra para obter uma estimativa aproximada para o ponto C, de modo que a área do triângulo ABC seja máxima.

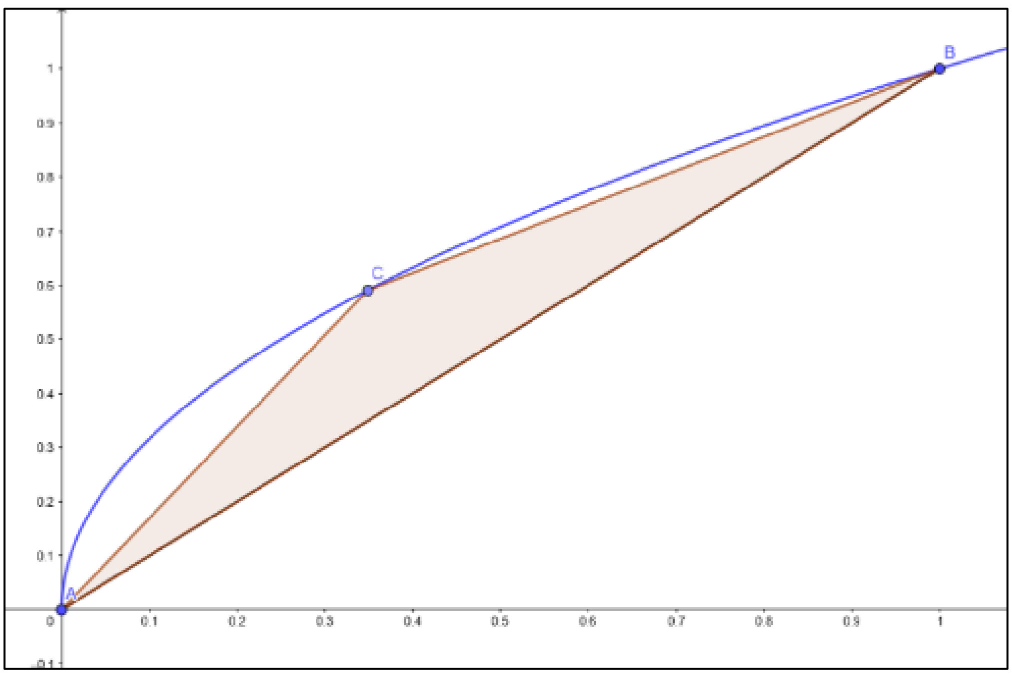


Figura 3. 53 - Função f e triângulo ABC

A Figura 3. 53 mostra o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ e o triângulo ABC. A função f já apareceu na seção 2 do capítulo anterior (consultar problema 2.8), ao estudar funções inversas. Movimentando o ponto C (ponto sobre objeto) ao longo do gráfico de f, é possível verificar que a área do triângulo ABC é nula quando $C(0,0)$, depois vai aumentando, depois volta a diminuir até voltar a ser nula quando $C(1,1)$, porque o triângulo tem sempre a mesma base $b = AB = \sqrt{2}$ e a altura h é que varia, onde h é a distância entre o ponto $C(c, \sqrt{c})$ e a reta que contém o segmento AB.

A área do triângulo ABC é dada por $S = h\sqrt{2}/2$. Para achar uma expressão para h, e, portanto, para S, precisamos determinar a equação da reta s, perpendicular à reta r que contém o segmento AB, conforme mostra a Figura 3. 54 a seguir.

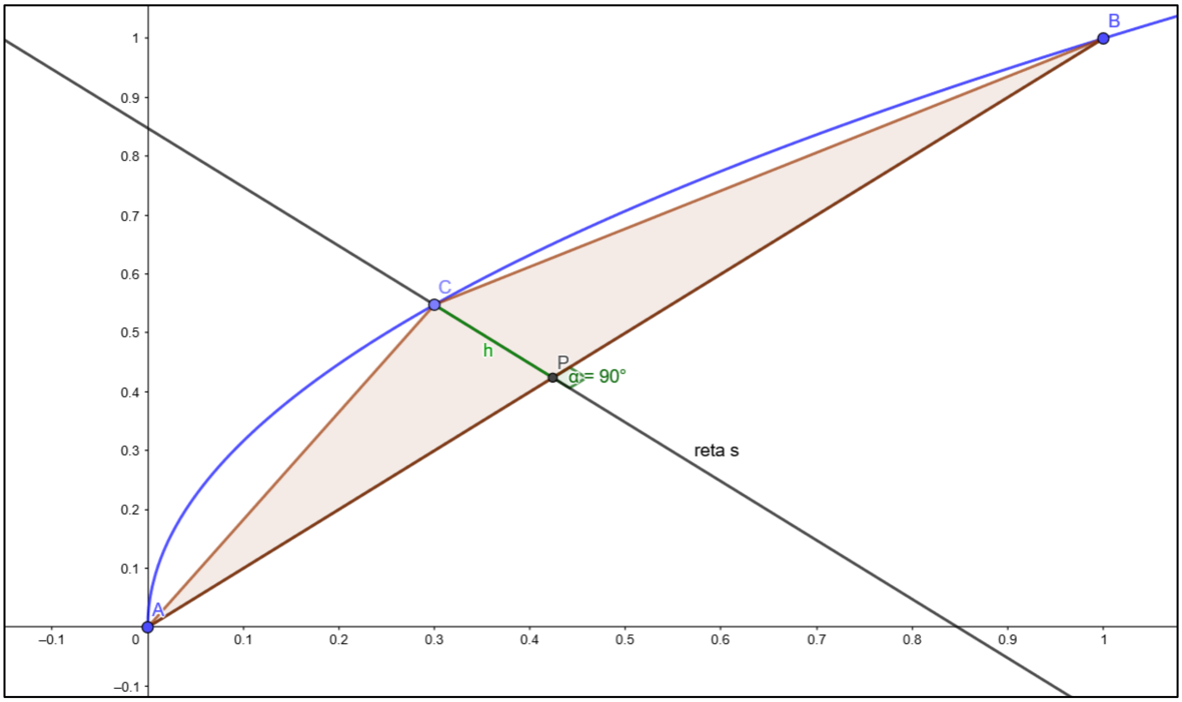


Figura 3. 54 - Altura h do triângulo ABC, relativa ao lado AB

A reta r tem equação $y = x$, logo seu coeficiente angular é igual a 1. A reta s tem coeficiente angular igual a -1, logo sua equação é $y = (-1)x + n$. Como ela passa no ponto $C(c, \sqrt{c})$ tem-se então $\sqrt{c} = (-1)c + n$ portanto $n = c + \sqrt{c}$ e a equação de s será $y = (-1)x + (c + \sqrt{c})$.

O ponto de interseção P entre a reta r e a reta s será a solução do sistema linear $y = x$ e $y = (-1)x + (c + \sqrt{c})$. A abscissa deste ponto será $\frac{c+\sqrt{c}}{2}$ e sua ordenada terá o mesmo valor. O valor de h será então a distância entre $C(c, \sqrt{c})$ e $P\left(\frac{c+\sqrt{c}}{2}, \frac{c+\sqrt{c}}{2}\right)$. Usando a fórmula da distância entre dois pontos obtemos finalmente que $h = \frac{\sqrt{c}-c}{\sqrt{2}}$. Podemos concluir então que o valor da área do triângulo $S = \frac{1}{2}(\sqrt{c} - c)$.

Utilizando o GeoGebra podemos determinar o gráfico da função área S, como mostra a Figura 3. 55 a seguir. Manipulando a ferramenta de visualização podemos chegar a um valor aproximado para c (e, portanto, para a posição do ponto C) para que a área S seja máxima. Do gráfico da figura podemos notar que o máximo de S é atingido no ponto Q, onde a reta tangente ao gráfico é horizontal, então a abscissa do ponto Q é o valor de c procurado $(0{,}2 < c < 0{,}3)$. Usando a ferramenta de *zoom* do GeoGebra e a de reta tangente, obtém-se o valor de $c = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Como o ponto Q é um ponto de máximo local, também pode ser usado o recurso de "Otimização" do GeoGebra, com o mesmo resultado, neste caso, a partir do gráfico da função S.

Para saber se este valor encontrado para c é uma aproximação (no caso da solução ser um racional com número infinito de termos ou um irracional) ou o valor exato, utilizamos a representação algébrica de S.

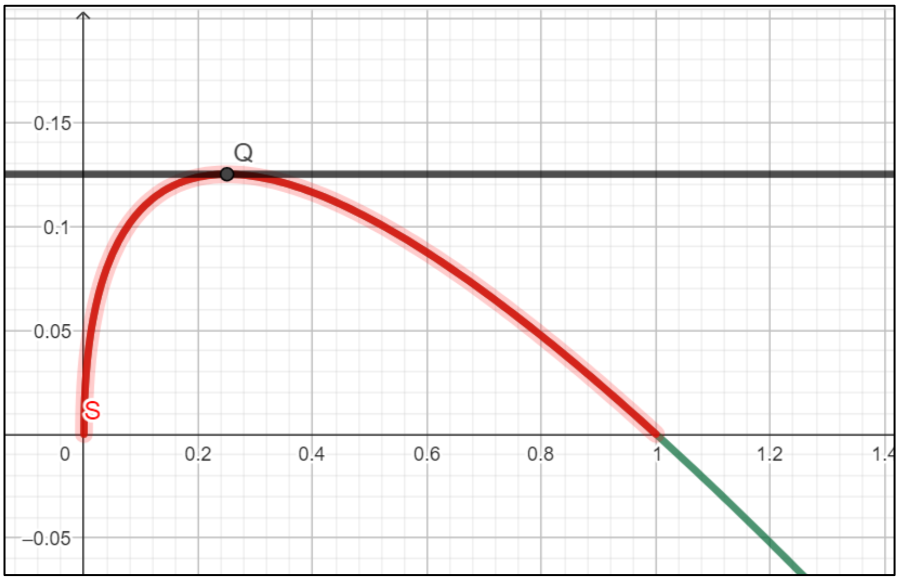


Figura 3. 55 - Gráfico da função área *S*

Da desigualdade das médias, comparando a média aritmética com a geométrica entre dois números positivos, temos $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1.a_2}$, logo, como já foi justificado anteriormente em outro problema deste capítulo, $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \geq a_1.a_2$, com a igualdade ocorrendo se e somente se $a_1 = a_2$. Escolhendo $a_1 = \sqrt{c}$ e $a_2 = 1 - \sqrt{c}$, teremos então $S = \frac{1}{2}\sqrt{c}\,(1 - \sqrt{c}\,) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Logo o valor máximo de S será o valor do lado direito da igualdade, ou seja $S = \frac{1}{8}$, quando $a_1 = a_2$, isto é, quando $c = 1/4$.

No próximo problema vamos abordar novamente um tópico de geometria analítica, a elipse, seus vértices e gráfico.

Problema 3.23: *Foi construído um estádio gramado, limitado pela elipse* $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{36} = 1$, *onde* x *e* y *são medidas em metros. Suponha que um retângulo está inscrito nesta elipse, com lados paralelos aos eixos coordenados, simétrico em relação aos eixos, conforme a Figura 3. 56.*

a) Utilize o GeoGebra para reproduzir a Figura 3. 56.

b) Faça simulações de diferentes retângulos inscritos, utilizando GeoGebra, para determinar o domínio da função área do retângulo inscrito.
c) Determine a expressão algébrica da função área, as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser construído neste estádio, e qual será a área máxima.
d) Dentro deste retângulo será possível construir uma quadra de tênis com medidas oficiais para jogos individuais ($c = 23{,}77\ m$ *e* $l = 8{,}23\ m$) *ou de duplas* ($c = 23{,}77\ m$ *e* $l = 10{,}97\ m$)*?*
(Adaptado do problema 10 da seção 2.1 de Fonte (2013))

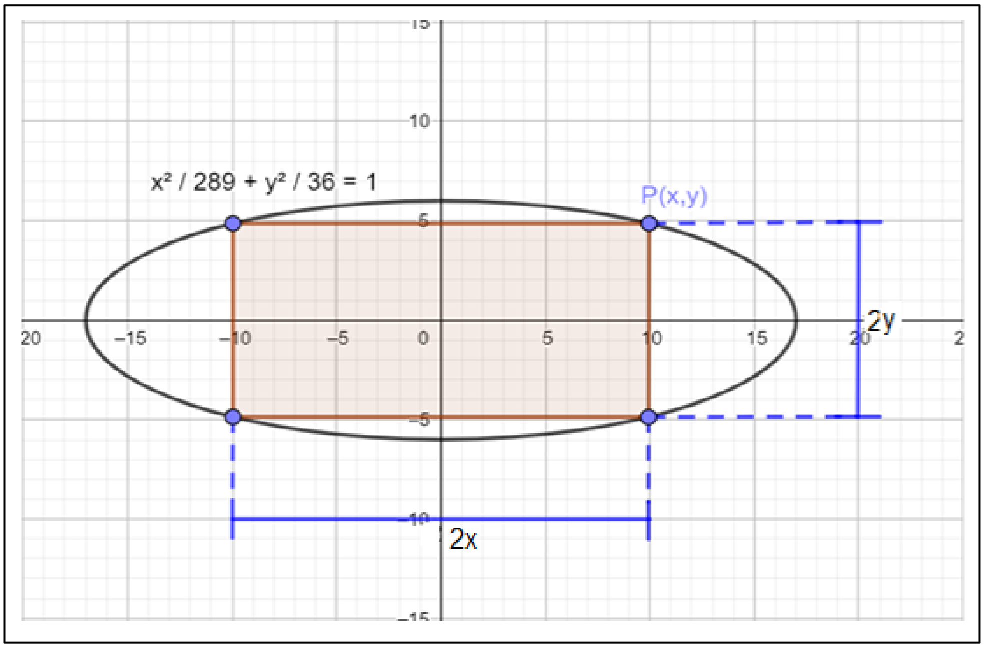


Figura 3. 56 - Retângulo inscrito na elipse

Cabe lembrar aos alunos que uma **elipse** é uma curva plana, conhecida deste o século IV a.C., formada por todos os pontos P tais que a soma das distâncias de cada P a dois pontos fixos (denominados focos) F_1 e F_2 é igual a uma constante real positiva k (isto é, $dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = k$).

No contexto mais recente de Geometria Analítica, a equação geral da elipse é dada por $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0$, com $B^2 - AC < 0$ e todos os coeficientes reais. Mais detalhes sobre cônicas estão disponíveis em Medeiros, Andrade e Wanderley (1980).

Voltando ao problema 3.23, as coordenadas do retângulo estão associadas às coordenadas da elipse. Para facilitar, devido à simetria dos pontos da elipse, é possível analisar somente um dos quadrantes da elipse para determinar as possíveis dimensões do retângulo ($c =$ comprimento e $l =$ largura), como mostra a figura 3. 56, onde utilizando um ponto qualquer da elipse no primeiro quadrante determinamos suas dimensões, $c = 2x$ e $l = 2y$ e sua área $A = 4xy$.

Temos que $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow y = \pm 6\sqrt{1 - \frac{x^2}{289}}$, logo $A = 24x\sqrt{1 - \frac{x^2}{289}}$, com $0 \leq x \leq 17$.

A Desigualdade de Médias, onde a média geométrica é sempre menor ou igual que a média aritmética de dois números positivos a_1 e a_2, só ocorrendo igualdade entre as duas médias quando $a_1 = a_2$, pode ser utilizada aqui, escolhendo adequadamente os termos de modo a obter um limitante superior independente de x.

Temos que a área $A = \frac{24x}{17}\sqrt{17^2 - x^2} = \frac{24}{17}\sqrt{x^2(17^2 - x^2)}$. Escolhemos então $a_1 = x^2$ e $a_2 = 17^2 - x^2$. Assim a área $A \leq \frac{24}{17}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) = \frac{24}{17}.\left(\frac{17^2}{2}\right) = 12.17.$

Logo a área máxima é de $204\, m^2$, quando $a_1 = x^2 = a_2 = 17^2 - x^2$, ou seja, quando $x = \frac{17}{\sqrt{2}}$. Neste caso teremos $y = \frac{6.}{\sqrt{2}}$. Assim, as dimensões do retângulo de área máxima serão comprimento $c = 17\sqrt{2}$ e largura $l = 6\sqrt{2}$. Como $c \cong 24{,}04\, m$ e $l \cong 8{,}48\, m$, poderá ser construída uma quadra de tênis oficial para jogos individuais, mas não para jogos de duplas.

O próximo problema tem sua origem num problema da Física, de dinâmica de fluidos. Sua solução combina conceitos de Física com tópicos de Matemática da Educação Básica. O GeoGebra ajuda na visualização e interpretação e também possibilita obter uma solução (gráfica) aproximada. Mais tarde, utilizando conceitos de CDI também é possível obter a solução exata.

Problema 3.24*: Uma lata cheia de água até uma altura H tem um furo situado a uma altura y de sua base, conforme mostrado na Figura 3. 57.*

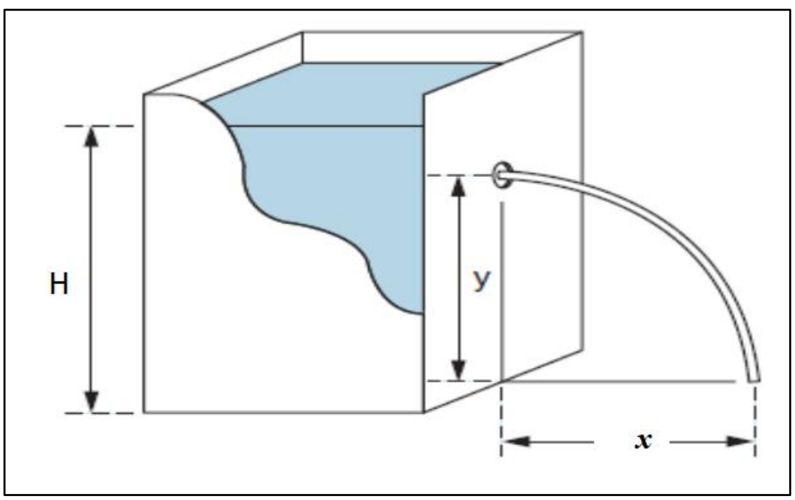


Figura 3. 57 - Lata de água
Fonte: Dornelles Filho (1996)

A água que sai pelo furo sofre queda livre (despreza-se a resistência do ar), num lançamento horizontal, sob ação da gravidade g. Portanto $y = \frac{1}{2}gt^2$ e o alcance horizontal do jato de água $x = vt$, onde v é a velocidade de lançamento da água e t é o tempo de queda.
a) Utilize a equação de Bernoulli para o fluxo de fluidos incompressíveis sob um campo gravitacional uniforme ($\frac{1}{2}\mu\, v^2 + \mu\, g\, h + p = constante$), onde μ é a massa específica do

fluido, p a pressão e h a altura em relação a um referencial, para mostrar que a velocidade de lançamento $v = \sqrt{2g(H-y)}$.
b) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função $v = F(y)$.
c) A partir das informações do enunciado e do item a, determine uma expressão algébrica para o alcance do jato de água $x = G(y)$.
d) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico de G.
e) Determine a altura do furo y para que o alcance x seja máximo (considerar a força de gravidade $g \cong 10\ m/s^2$) (adaptado de Dornelles Filho (1996)).

Para resolver o item a consideremos dois pontos quaisquer do fluido do problema (água), sendo um deles na superfície da lata (ou seja, situado na altura H) e outro na saída pelo furo (situado na altura y). Com respeito ao primeiro ponto temos velocidade $v = 0$, e, no segundo ponto, v é a velocidade de lançamento do jato de água.

Da equação de Bernoulli obtemos então o seguinte: $p + 0 + \mu g H = p + \frac{1}{2}\mu v^2 + \mu g y$. Simplificando encontramos $v = \sqrt{2g(H-y)}$ onde vamos considerar $g \cong 10$. Podemos observar que o intervalo possível para a altura do furo $y \in [0, H]$.

Para resolver o item b, o gráfico de $v = F(y) = \sqrt{20(H-y)}$, esboçado na Figura 3. 58 utilizando o GeoGebra, foi criado um controle deslizante para o valor da altura da água H.

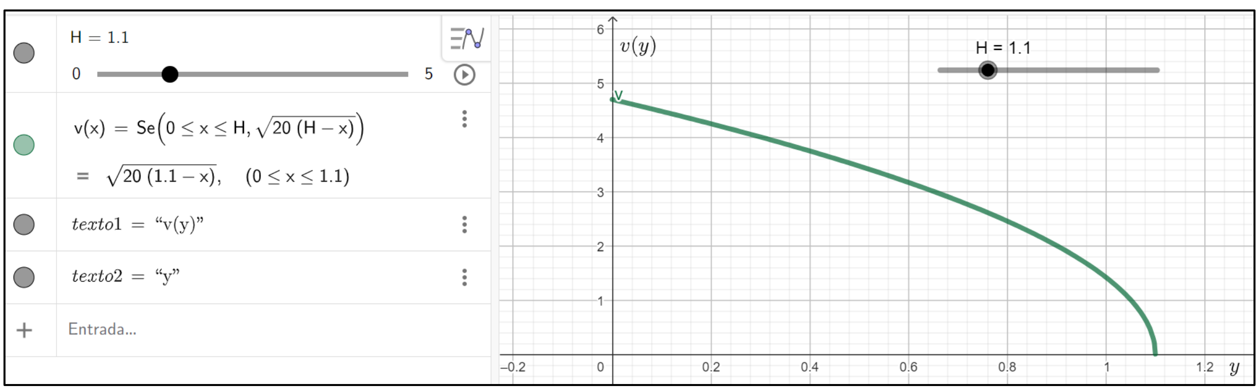


Figura 3. 58 - Velocidade de lançamento em função da altura do furo

No que se refere ao item c, das informações do enunciado temos que $x = vt = v.\sqrt{\frac{2y}{g}}$. Substituindo a expressão da velocidade de lançamento, obtida no item a, determinamos que o alcance $x = G(y) = 2\sqrt{y(H-y)}$, onde $y \in [0, H]$.

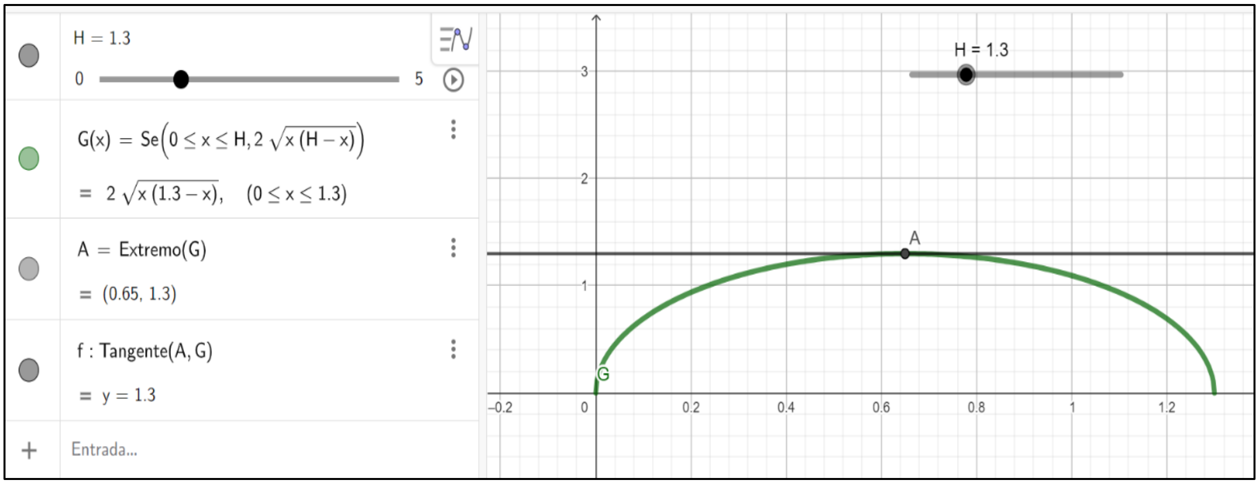


Figura 3. 59 - Alcance do jato de água

A solução do item d, utilizando o GeoGebra é apresentada na Figura 3. 59. Com a ferramenta de reta tangente do *software* também podemos obter uma solução aproximada (ou conjecturar uma solução exata) graficamente para o item e, conforme também mostrado na Figura 3. 59.

Observando que o ponto A é onde ocorre um máximo local da função G, também pode ser utilizada a ferramenta "Otimização" do GeoGebra. Entretanto os valores para as coordenadas de A são numéricos, variando o valor de H com a utilização do controle deslizante, podemos observar que existe uma relação entre a abscissa do ponto A e o valor de H.

Para determinar algebricamente y, de modo que o alcance x seja máximo, basta utilizar a desigualdade $A \leq G$, que compara a média aritmética com a geométrica de dois números positivos, $a_1 = y$ e $a_2 = H - y$.

Teremos então $\frac{x}{2} = \frac{G(y)}{2} = \sqrt{y(H-y)} \leq \frac{y+(H-y)}{2} = \frac{H}{2}$,

logo o alcance máximo $x = H$, quando $a_1 = y = a_2 = H - y$, isto é, quando $y = \frac{H}{2}$.

Então o alcance horizontal do jato será máximo quando o furo estiver situado na metade da altura da água na lata o que soluciona o item e. O gráfico da função alcance combinado com a ferramenta da reta tangente, apresentado na Figura 3. 59, nos levou a acreditar que a solução seria essa, agora comprovada formalmente.

3.4 Problemas Propostos

Esta seção contém uma lista de problemas envolvendo diversas funções, várias delas já abordadas no capítulo 2 ou em outras seções deste capítulo.

Na próxima seção estão incluídas respostas e sugestões para chegar à solução dos problemas selecionados. Tentamos colocar os problemas em ordem crescente de dificuldade.

Problema 3.25: *Na Figura 3. 60 está representado o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau f.*

a) Utilize o software GeoGebra para obter o gráfico que melhor representa a função h_1, tal que $h_1(x) = |f(x)| - 3$.

b) Suponha que o domínio de f é o intervalo $I = [-3,4]$, determine o domínio e a imagem de h_1.

c) Determine a expressão algébrica de h_1.

d) Utilize um dos recursos de simetrias do software GeoGebra para determinar o gráfico que melhor representa a função h_2, tal que $h_2(x) = -h_1(x)$.

e) Determine o máximo e o mínimo da função h_2, no intervalo I(Adaptado de Vestibular CESGRANRIO, *apud* Projeto Medicina).

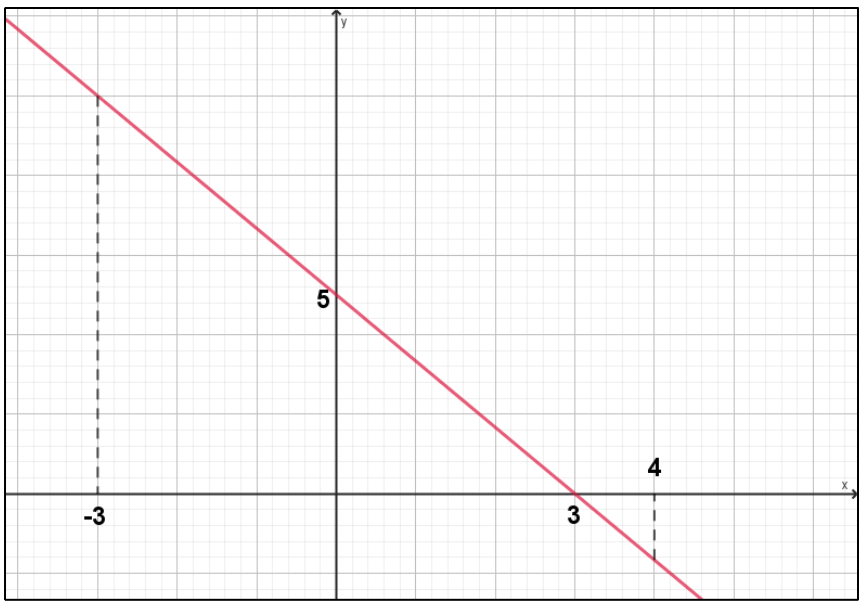


Figura 3. 60 - Gráfico da função f

Problema 3.26: *No hemocentro de um certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. De acordo com os registros disponíveis no hemocentro, no ano de 2017, este número (contado em milhares), de janeiro a dezembro, pode ser aproximado pelo modelo matemático* $S(t) = A - \cos\left[\frac{\pi}{6}(t-1)\right]$*, onde A é uma constante positiva e* t *é o tempo (contado em meses),* $0 \leq t \leq 11$.

a) Determine o valor de A, sabendo que no mês de fevereiro houve 2 mil doações.

b) Obtenha um esboço do gráfico da função S, utilizando o software GeoGebra.

c) Encontre quais os meses em que houve 3 mil doações de sangue.

d) Determine o maior e o menor número de doações de sangue nesse hemocentro no ano de 2017 e quais os meses em que isso ocorreu. (Adaptado do vestibular da UNESP- 2003, APUD Projeto Medicina)

Problema 3.27: *O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte expressão* $V(t) = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$. *Nela,* V *é o volume medido em* m^3 *após* t *horas, contadas a partir de 8h de uma manhã.*
a) Determine o domínio da função f *que associa* t *ao valor* $V(t)$.
b) Obtenha a expressão algébrica da função V *e utilize o GeoGebra para esboçar seu gráfico.*
c) Encontre o volume máximo de água no tanque e quando ocorrerá (adaptado do vestibular da UERJ, APUD Projeto Medicina).

Problema 3.28: Os proprietários de *uma loja de capas para celulares compram cada capa por R$ 25,00. Com base nas vendas anteriores eles esperam que, se venderem cada capa por* x *reais, eles conseguirão vender* $300 - 2x$ *capas por mês.*
a) Determine uma expressão algébrica para o lucro mensal, em função do preço de venda x *de cada capa e utilize o GeoGebra para determinar o gráfico da função.*
b) Encontre o intervalo dos valores dos preços de venda x *tais que a loja conseguirá lucrar com a venda de capas em cada mês.*
c) Qual deve ser o preço de venda de uma capa para que o lucro seja máximo?
d) Encontre o número de capas que será vendido por mês quando o lucro for máximo e qual será o valor do lucro (Adaptado de Souza, vestibular da FGV- SP, 2010).

Problema 3.29: *Uma marmoraria possui uma placa de granito na forma de um triângulo retângulo* OAB, *de lados medindo* $OA = 80$ *cm,* $OB = 60$ *cm e* $AB = 1$ *m, de comprimento. A marmoraria recebeu uma encomenda daquele granito, na forma de um retângulo, com a maior área possível, para servir de tampo de uma mesinha decorativa. Para economizar corte, os funcionários decidiram que, pelo menos um dos lados do retângulo, deveria ficar sobre um lado do triângulo. Neste caso ficaram com duas possibilidades para cortar, como mostram as Figura 3. 61 (a) e (b) a seguir.*

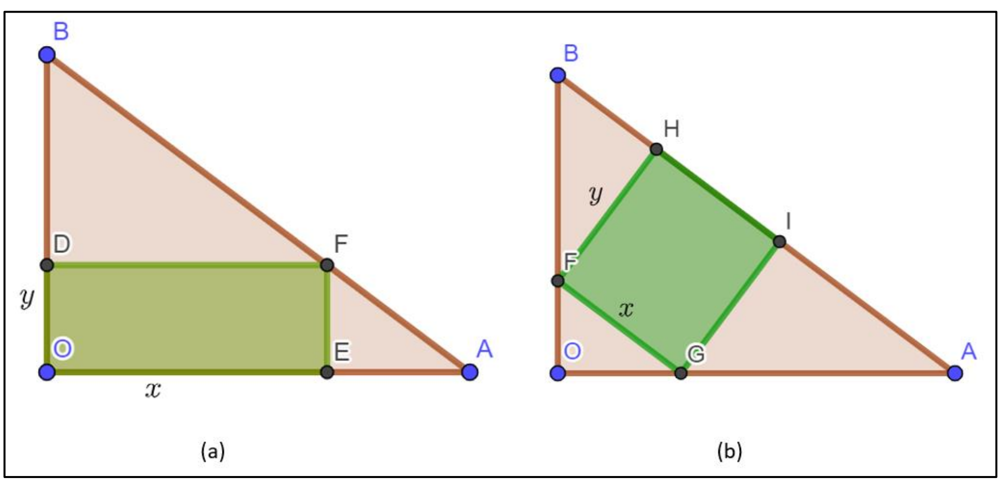


Figura 3. 61 - Retângulo com 2 lados sobre 2 lados do triângulo (a) e com 1 lado sobre um lado (b)

a) Se for escolhido o corte com dois lados do retângulo sobre dois lados do triângulo, utilize o GeoGebra com duas janelas de visualização para associar a Figura 3. 61 (a) ao gráfico da função área do retângulo e faça simulações dinâmicas para estimar quando a área será máxima.
b) Na situação descrita na Figura 3. 61 (a), determine a função área da placa retangular, como função de 1 variável, esboce seu gráfico utilizando GeoGebra e determine quais serão as dimensões da placa retangular de maior área possível e qual será esta área.
c) Se for escolhido o corte com somente um lado do retângulo sobre um lado do triângulo, utilize o GeoGebra com duas janelas de visualização para associar a Figura 3. 61 (b) ao gráfico da função área do retângulo e faça simulações dinâmicas para estimar quando a área será máxima.
d) Na situação descrita na Figura 3. 61 (b), determine a função área da placa retangular, como função de 1 variável, esboce seu gráfico utilizando GeoGebra e determine algebricamente qual será a placa retangular de maior área possível e qual será esta área.
e) Comparando os dois resultados, qual tipo de corte deve ser escolhido? (Adaptado de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado, 2000)

Problema 3.30: *Uma janela normanda tem a forma de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo, como mostra a Figura 3. 62 e seu perímetro mede 9m.*
a) Utilize recursos do GeoGebra para estimar as dimensões da janela que deixa passar a maior quantidade de luz.
b) Expresse algebricamente a área da janela (em metro quadrado) em função de sua largura x(medida em metros) e esboce o gráfico desta função utilizando o GeoGebra.
c) Determine a solução algébrica exata do problema descrito no item a (Adaptado de Stewart, 2013).

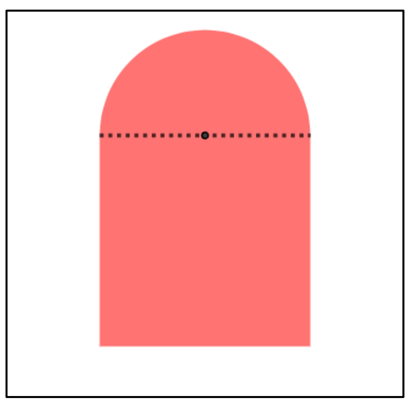


Figura 3. 62 - Janela normanda

Problema 3.31: *O volume de água V, medido em m³, que vazou de um reservatório, foi calculado, após t horas, contadas a partir de 8h da manhã de um certo dia, e foi estabelecido que satisfazia a equação* $V = \frac{1}{\sqrt{7+6t-t^2}}$, $1 \leq t \leq 6$.

a) Utilize o GeoGebra para obter o gráfico da função volume V e obter uma solução (aproximada ou exata) para o volume mínimo.

b) Determine algebricamente quando o volume de água que vazou foi mínimo, e qual foi este volume mínimo.

Problema 3.32: *Uma bióloga quer que seja instalado no seu laboratório um aquário sem tampa em forma de paralelepípedo com arestas medindo x, y e z (em metros) e, devido aos objetivos científicos pretendidos, o aquário deverá ter volume fixo de 32 m^3.*
a) Determine a expressão algébrica para o volume e a expressão para a área do aquário, em função de x, y e z.
b) Utilizando a desigualdade das médias, determine algebricamente as medidas das arestas do aquário de área mínima possível e qual será esta área.
c) Considere agora um caso particular deste problema, em que o comprimento e a largura do aquário têm a mesma medida. Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função área e, utilizando a ferramenta de reta tangente, determine a área mínima (exata ou aproximada) e as medidas das arestas do aquário de área mínima (Adaptado de Fonte, 2013).

Problema 3.33*:* *Deseja-se construir uma placa de trânsito em forma de triângulo isósceles, com os dois lados congruentes medindo 5 dm e formando ângulo θ e a base sendo o lado não congruente.*
a) Utilize o GeoGebra para simular vários triângulos, mudando o ângulo e a medida do lado não congruente de modo a observar como varia a medida da área da placa.
b) Determine a expressão da área da placa em função do ângulo θ, esboce o gráfico da função área e encontre a medida do ângulo para que a área seja máxima, de modo a ter a melhor visibilidade. (Adaptado de Sousa, Torraca, Nasser, Silva e Barbosa, 2022 Apud Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994)).

Problema 3.34: *Um arquiteto pensou em criar uma luminária formada por uma esfera de raio 4 dm inscrita num cone circular reto de altura h e raio da base r.*
a) Encontre uma expressão para o volume do cone dependendo somente da altura h e obtenha o gráfico da função V utilizando GeoGebra.
b) Utilize a ferramenta da tangente no GeoGebra para determinar h de modo que o volume do cone seja mínimo (importante por necessidades de ordem prática).
c) Faça simulação com outras medidas do raio da esfera. O método utilizado no item b sempre poderá ser utilizado? (Adaptado de Nasser, Sousa e Torraca (2012) Apud Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994)).

Problema 3.35: *O triângulo da Figura 3. 63 é equilátero e seus lados medem 10cm com os vértices situados nos pontos A, B e C. Os pontos A', B' e C', inicialmente nos vértices do triângulo, deslocam-se sobre os seus lados, de um vértice a outro, com a mesma velocidade, como mostra a Figura 3. 63. Os pontos A' e C' deslocam-se no sentido horário e o ponto B' se move no sentido* *anti-horário. Seja* x *a distância em centímetros percorrida pelos pontos* A', B' *e* C' *, no intervalo* $0 \leq x \leq 10$. *Considere* $f(x)$ *a área do triângulo* $A'B'C'$ *quando* A', B' *e* C' *formam um triângulo e defina que* $f(x) = 0$ *caso contrário.*

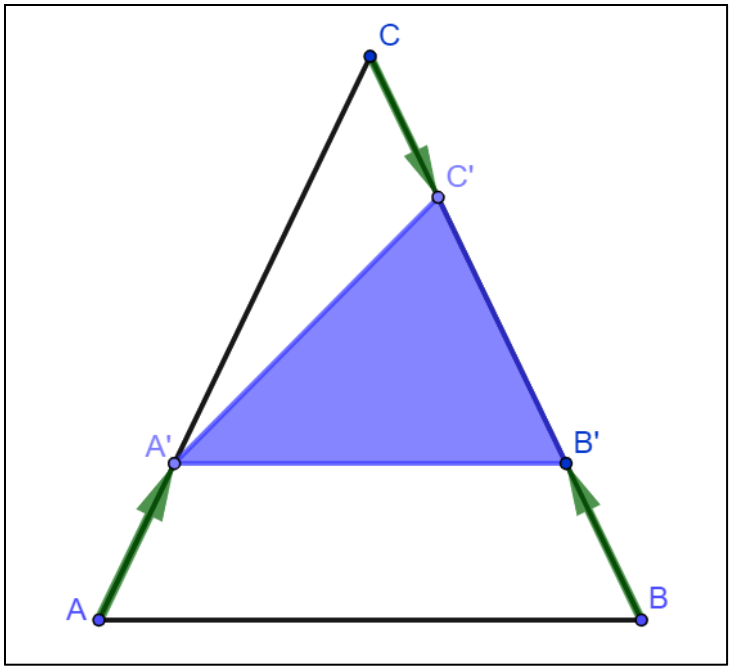


Figura 3. 63 - Triângulo ABC e triângulo $A'B'C'$
Fonte: OBMEP 2017

a) Calcule $f(2)$.
b) Calcule $f(7)$.
c) Determine uma lei de formação para a função f.
d) Utilizando o GeoGebra, esboce o gráfico de f.
e) Determine os valores de x *para os quais* f *possui máximo local ou global.* (Adaptado da OBMEP 2017, questão 3, fase 2/nível 3, Apud Barbosa, 2023)

Problema 3.36: *Uma lata medindo* $20cm \times 10cm \times 10cm$*, sem tampa, é sustentada por um suporte, de modo que uma de suas arestas mais curtas fique apoiada no plano horizontal e as arestas mais longas formem um ângulo de 45° com o plano horizontal, conforme mostra a Figura 3. 64. Suponha que um líquido seja colocado na lata, até a altura* h *em relação ao plano horizontal, também como indicado na Figura 3. 64, de modo que o líquido não transborde.*
a) Qual o volume de líquido na lata quando h é igual a 5cm? E quando h é igual a 11cm?
b) Determine uma lei de formação para a função V*, que fornece o volume* $V(h)$ *de líquido na lata, em cm³, quando sua superfície está na altura h, em cm. Apresente também seu domínio.*
c) Utilize o GeoGebra para esboçar o gráfico da função V.
d) Para qual valor de h, no domínio encontrado no item b, V *possui valor máximo?*
(Adaptado da OBMEP 2021, questão 4, fase 2/nível 3, Apud Barbosa, 2023)

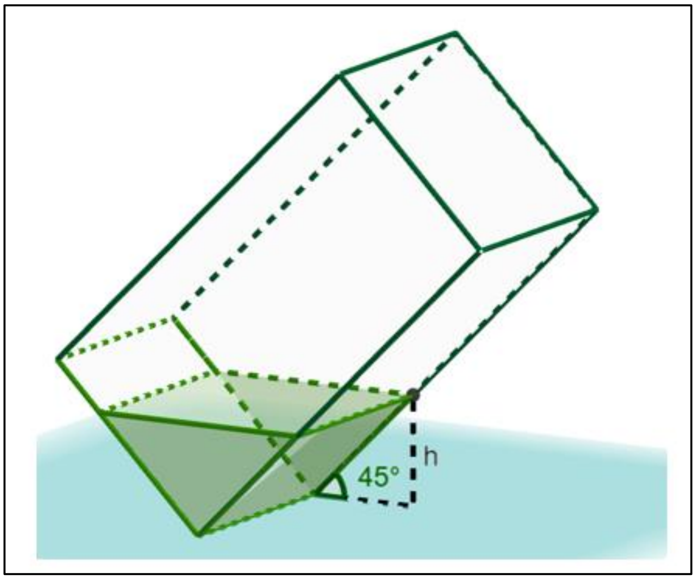


Figura 3. 64 - Lata com líquido
Fonte: OBMEP

Problema 3.37: *Um fazendeiro deseja construir um silo de madeira, no formato de um cilindro circular reto, de altura* h *e raio* r *ou no formato de um cone circular reto, de altura* h*, raio* r *e geratriz* g*, conforme a Figura 3. 65 a seguir. A quantidade de madeira disponível para a construção (das paredes e teto, se for cilíndrico, ou só das paredes, se for cônico) é de* $300\ m^2$.

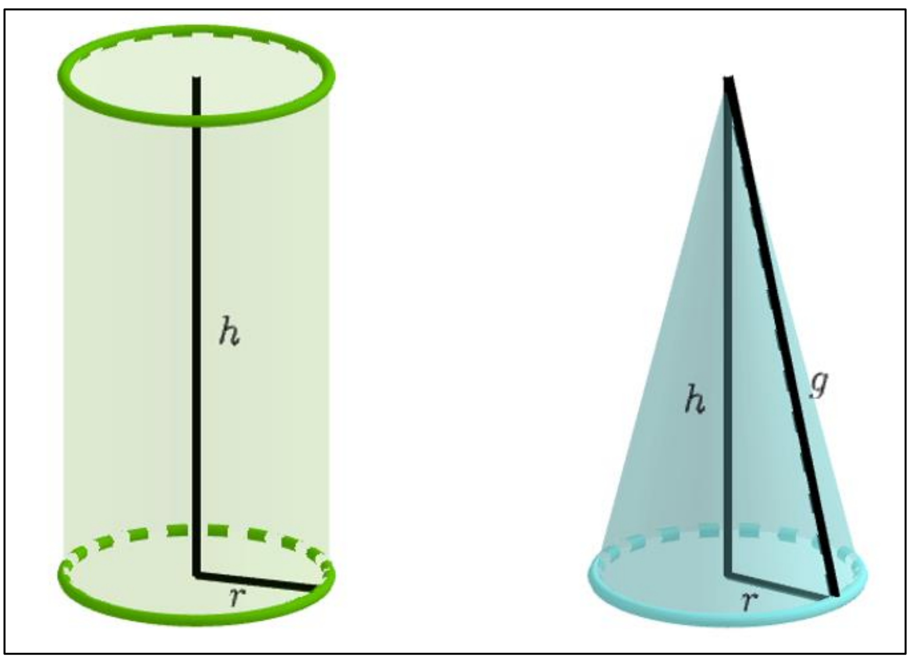


Figura 3. 65 - Possíveis silos para o fazendeiro

a) Determine uma relação entre o raio r e a altura h, num silo cilíndrico, e utilize para determinar uma expressão algébrica para a função $V_1 = f(r)$, que representa o volume do silo cilíndrico, em função da variável r, e o conjunto de valores possíveis para r.
b) Determine uma relação entre o raio r e a altura h e entre o raio r e a geratriz g, num silo cônico, e utilize para determinar uma expressão algébrica para a função $V_2 = g(r)$, que representa o volume do silo cônico, em função da variável r, e o conjunto de valores possíveis para r.
c) Utilizando o GeoGebra, obtenha o esboço do gráfico das funções f e g, para o conjunto de valores possíveis de r.
d) Utilizando recursos do GeoGebra, determine qual tipo de silo, cilíndrico ou cônico, o fazendeiro deve escolher de modo que o volume disponível para armazenagem seja máximo.
e) Utilize a desigualdade entre a média aritmética e geométrica para obter o valor exato para as dimensões do silo de volume máximo, e qual será o volume exato deste silo.

3.5 Comentários e Respostas dos Problemas

Problema 3.25: Chamando $g = |f|$, usando a definição da função modular, o gráfico de g coincide com o de f onde $f \geq 0$ e coincide com o gráfico de $-g$, onde $g \leq 0$, ou seja, será simétrico ao gráfico de f em relação ao eixo x. Como $h_1 = g - 3$, teremos que transladar o gráfico de g de 3 unidades para baixo, em relação ao eixo y, para obter o gráfico de h_1. As etapas para construção do gráfico de h_1 estão apresentadas na Figura 3. 66 a seguir.

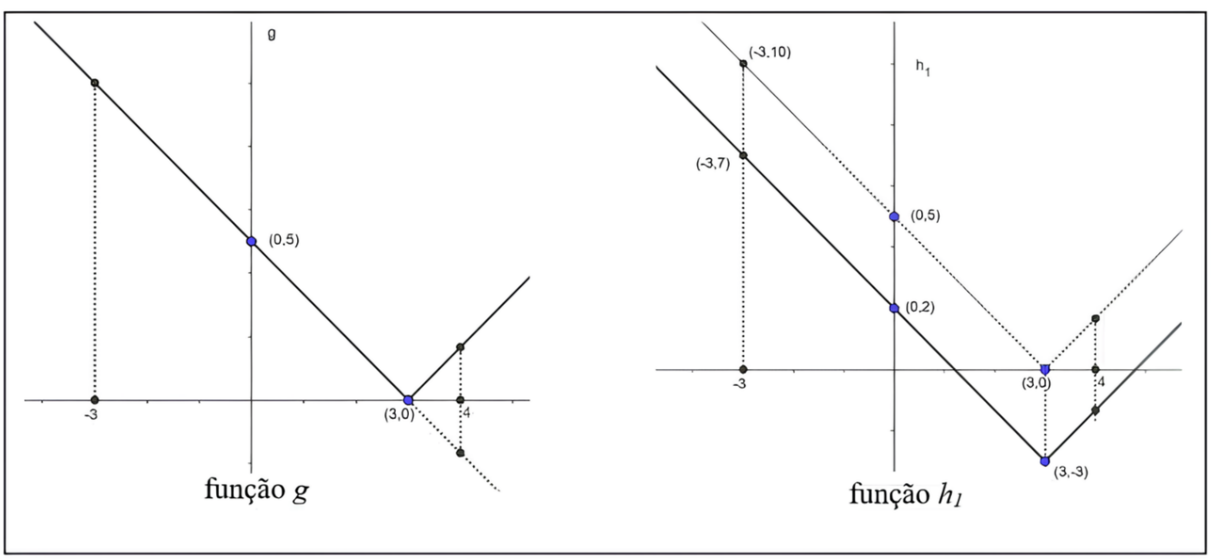


Figura 3. 66 - Função g e função h_1

Do gráfico de h_1 temos que o domínio de $h_1 = I$ e a imagem de h_1 é o intervalo $[-3,7]$. Sabendo-se que o gráfico de f é uma reta que passa nos pontos $(0,5)$ e $(3,0)$, temos que sua equação será $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$, logo $y=f(x)=5-\frac{5}{3}\,x$. Chamando $g=|f|$, teremos que a função $g(x)=\left|5-\frac{5}{3}\,x\right|$.

Assim $h_1(x)=g(x)-3=\left|5-\frac{5}{3}\,x\right|-3$, ou, de forma equivalente, usando a função modular, $h_1(x)=\begin{cases}2-\frac{5x}{3}, se -3\le x\le 3\\ \frac{5x}{3}-8,\ se\ 3\le x\le 4\end{cases}$.

O gráfico de h_2 é obtido utilizando-se o recurso de reflexão em relação a uma reta do GeoGebra, no nosso caso o gráfico de h_1 refletido em relação ao eixo x, como mostra a Figura 3. 67.

Observando o gráfico de h_2, na Figura 3. 67 temos que o valor máximo desta função no intervalo I é o valor $h(3)=3$, e o valor mínimo é $h(-3)=-7$.

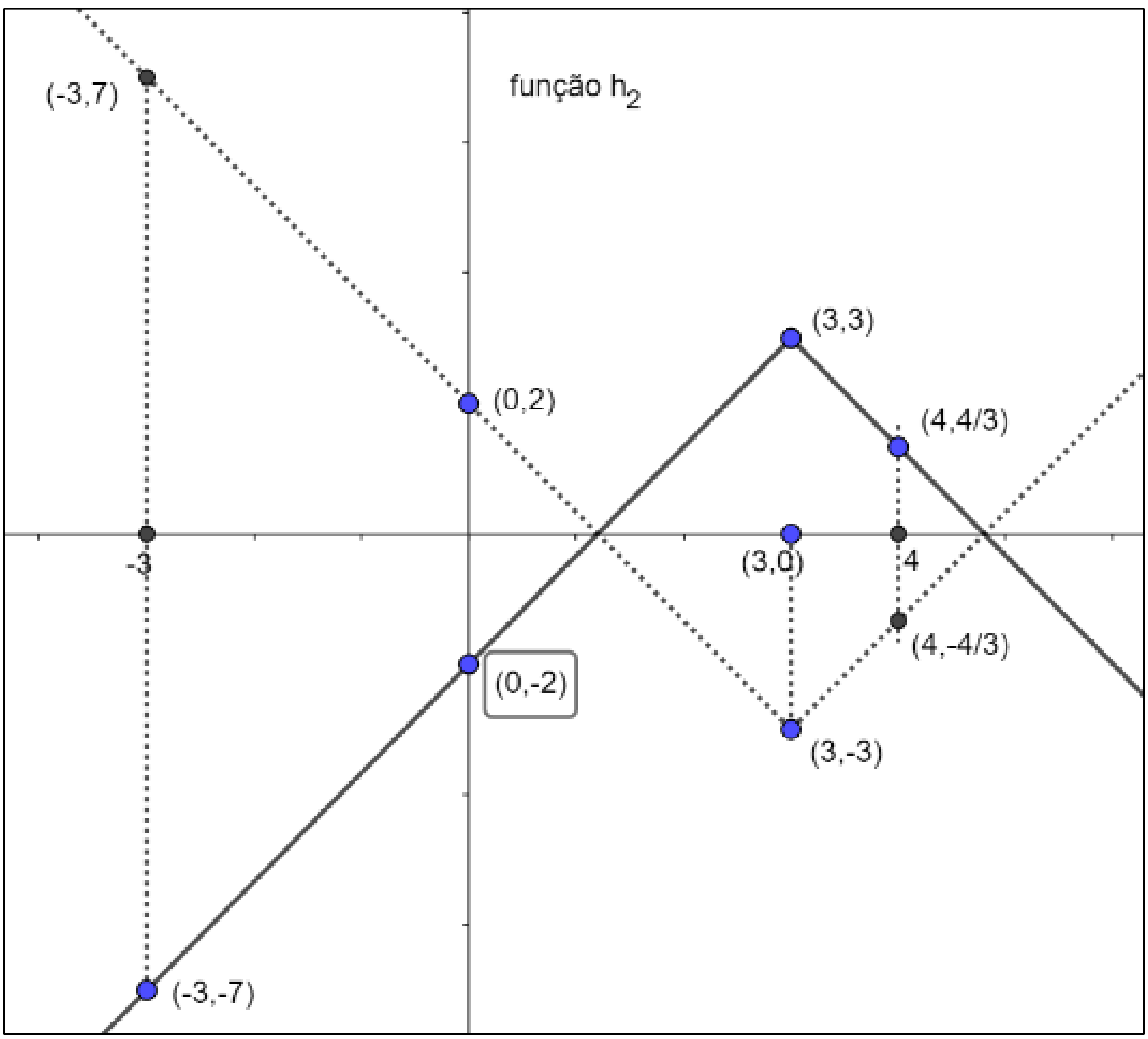


Figura 3. 67 - Gráfico da função h_2

Problema 3.26: $S(1) = 2 = A - \cos(0) = A - 1$, logo $A = 3$. Assim encontramos a expressão algébrica $S(t) = 3 - \cos\left[\frac{\pi}{6}(t-1)\right]$, $0 \leq t \leq 11$. Utilizando o recurso do comando sequência do GeoGebra teremos o gráfico de S, representado na Figura 3. 68.

Observando o gráfico da Figura 3. 68, encontramos que $S(t) = 3$ quando $t = 4$ (maio) e quando $t = 10$ (novembro). Da mesma forma encontraremos que o número máximo de doações será de 4000, em agosto, porque $S(7) = 4$ e o número mínimo de doações será de 2000, em fevereiro, porque $S(1) = 2$.

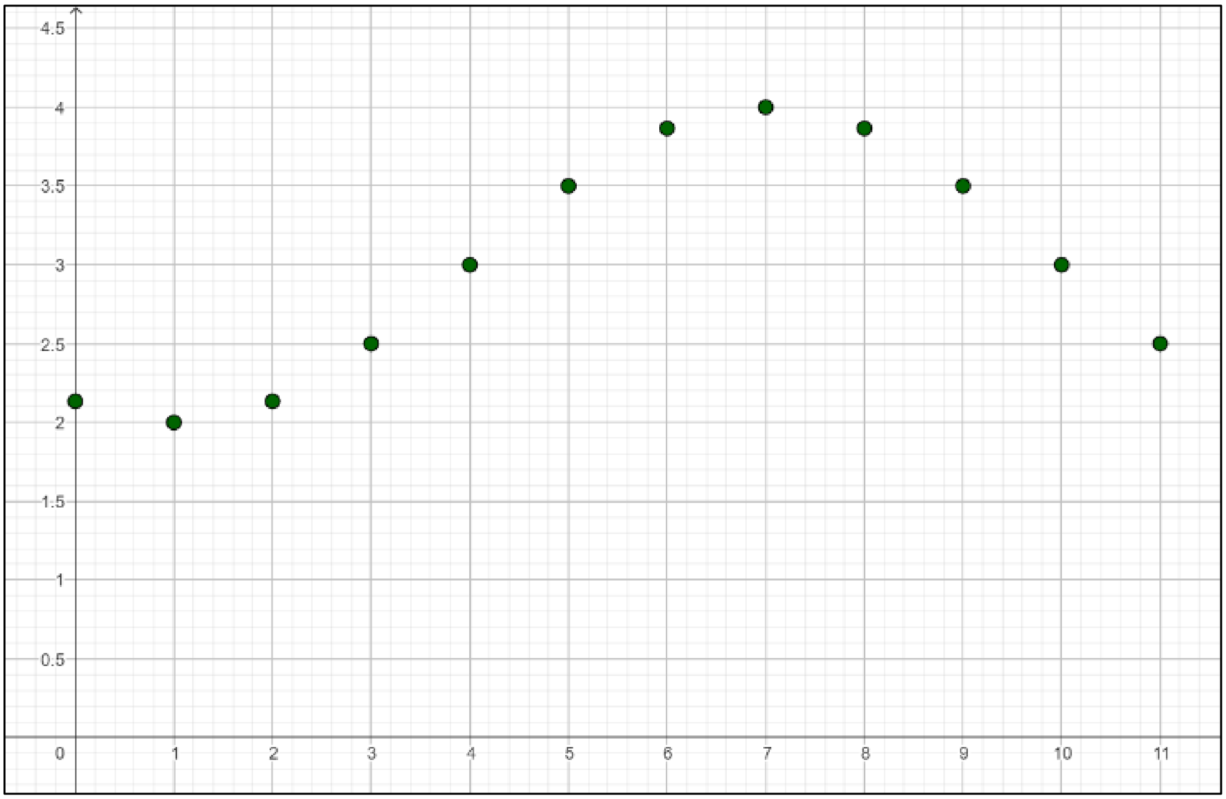


Figura 3. 68 - Gráfico da função S (milhares de doações) em cada mês de um ano

Problema 3.27: A solução dos itens a e b faz parte do problema 2.27 do capítulo 2. Observando o gráfico da função volume, encontramos o volume máximo no tanque, que é $8\,m^3$, e que acontecerá para $2 \leq t \leq 3$, ou seja, entre $10\ e\ 11h$.

Problema 3.28: O Lucro mensal (L) satisfaz a equação $L = V - C$, onde V é o preço de venda das capas em um mês subtraído do preço de compra delas. O preço de venda satisfaz a expressão $V(x) = x.(300 - 2x)$ que é o produto do preço de venda de uma capa pelo número de capas vendidas em um mês. O preço de compra satisfaz a expressão $C(x) = 25.(300 - 2x)$, que é o produto do preço de compra de uma capa pelo número de capas compradas em um mês. Assim, encontramos $L(x) = (x - 25)(300 - 2x) = -2x^2 + 350x - 7500$. O gráfico da função lucro está representado na Figura 3. 69.

Observando o gráfico da Figura 3. 69 encontramos que o conjunto de valores de x para os quais haverá lucro é o intervalo da reta $I =]25,150[$ e que o lucro máximo será a ordenada do vértice da parábola e o preço de venda de cada capa para que isto aconteça será a abscissa do vértice, logo $x = -\frac{b}{2a} = 87{,}5$ reais e $L(87{,}5) = 7812{,}50$ reais. O número de capas que precisam ser vendidas por mês para que haja lucro máximo será $n = 300 - 2x = 300 - 2(87{,}5) = 125$ capas.

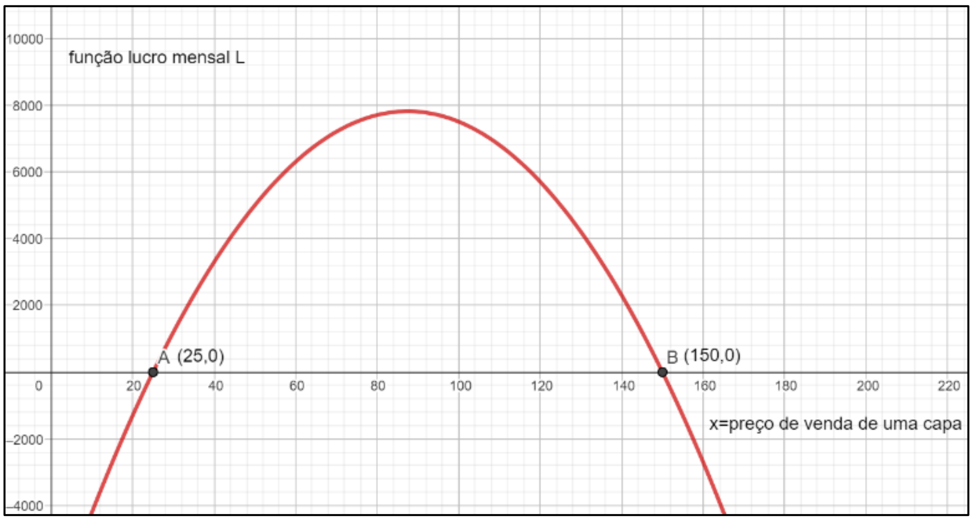


Figura 3. 69 - Gráfico da função lucro mensal

Problema 3.29: Para o item a, a Figura 3. 61 (a) mostra que as coordenadas do ponto $F(x, y)$ sobre o segmento de reta AB que é a hipotenusa do triângulo determinam as dimensões do retângulo. As simulações dinâmicas vão ocorrer deslizando o ponto F ao longo do segmento AB e usando os recursos adequados do GeoGebra (controle deslizante para o comprimento do retângulo, coordenadas dos outros vértices dependendo do controle deslizante). Para estimar as áreas, clicar no retângulo e no recurso área do GeoGebra.

Como F satisfaz a equação da reta, encontramos $\frac{x}{0{,}8} + \frac{y}{0{,}6} = 1$, de onde $y = 0{,}6(1 - \frac{x}{0{,}8})$. Substituindo na expressão da área do retângulo ($A = x.y$) obtemos a função quadrática f de uma variável x, cujos valores são $f(x) = 0{,}6x(1 - \frac{x}{0{,}8})$, cujo gráfico está representado na Figura 3. 70.

Observando o esboço do gráfico e calculando as coordenadas do vértice temos $x = 0{,}4$m comprimento da placa, $y = 0{,}3$m, largura da placa e área máxima $A = 0{,}12$ m^2, completando o item b.

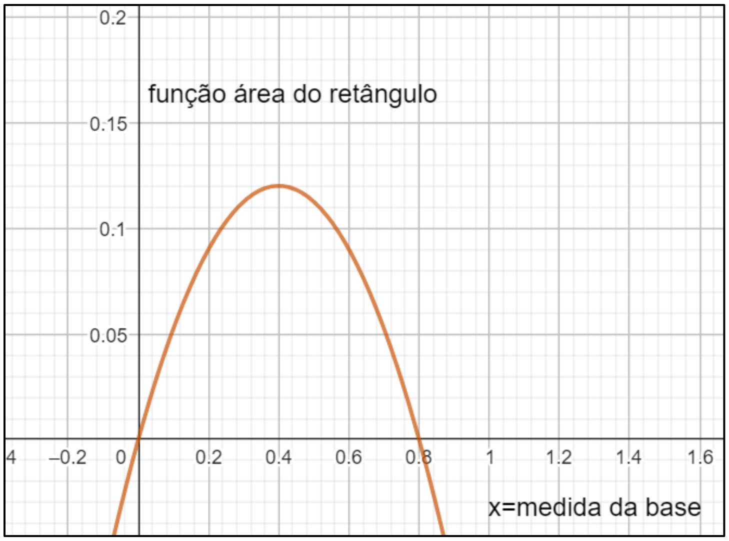


Figura 3. 70 - Gráfico da função f, que representa a área do retângulo no caso (a) do problema 3.29

Para o item c, a Figura 3. 61 (b) mostra que o segmento FG, paralelo ao lado AB é que determina as dimensões do retângulo. As simulações dinâmicas vão ocorrer deslizando o segmento FG paralelo ao segmento AB e usando os recursos adequados do GeoGebra (controle deslizante para o comprimento do retângulo de vértices F e G, vértices H, I obtidos utilizando recursos do GeoGebra, de reta perpendicular e de interseção de retas). Para estimar as áreas, clicar no retângulo e no recurso área do GeoGebra.

Pode-se observar da Figura 3. 61 (b), que os triângulos OGF e OAB são semelhantes (caso AA), logo $\frac{x}{1} = \frac{OF}{0,6}$. Assim $OF = 0,6x$. Observando o lado OB, tem-se $BF = 0,6 - 0F = 0,6 - 0,6x$. Os triângulos HBF e OAB também são semelhantes (caso de semelhança AA), então $\frac{BF}{1} = \frac{y}{0,8}$. Assim encontramos $y = 0,8BF = 0,8.0,6x = 0,48x$. Substituindo na expressão da área do retângulo ($A = x.y$) obtemos a função g de uma variável x, cujos valores são $g(x) = 0,48x(1 - x)$, cujo gráfico está representado na Figura 3. 71.

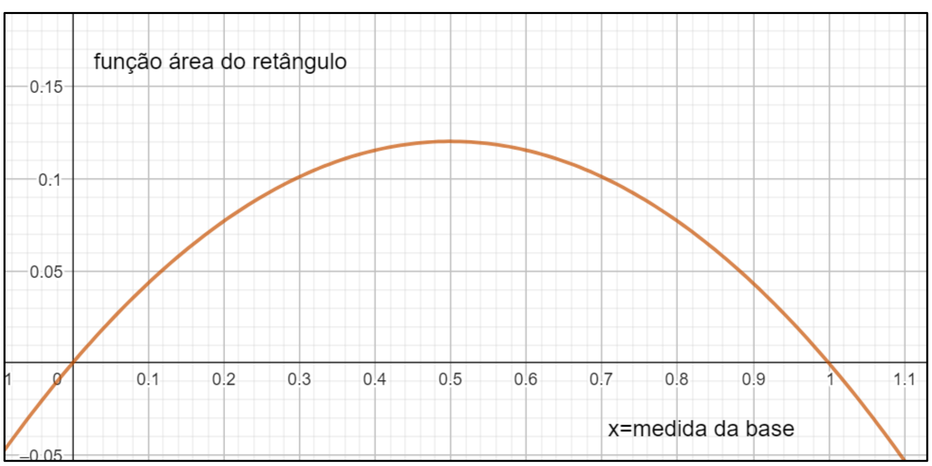


Figura 3. 71 - Gráfico da função f, que representa a área do retângulo no caso (b) do problema 3.29

Observando o esboço e calculando as coordenadas do vértice obtemos $x = 0{,}5$m comprimento da placa, $y = 0{,}24$m, largura da placa e área máxima $A = 0{,}12$ m^2, completando o item d.

Comparando os dois resultados, temos que a área máxima será a mesma, embora com dimensões distintas para a placa retangular, a escolha vai ser do cliente que for comprar a mesinha decorativa com este tampo, respondendo ao item e e finalizando a solução.

Problema 3.30: Utilizar a ferramenta de controle deslizante do GeoGebra e dupla janela de visualização para simulação dinâmica de diversas possibilidades de janelas, de modo a analisar as áreas correspondentes e estimar as dimensões da janela de área máxima.

A área da janela será, a princípio, dependente de três variáveis, o comprimento x, a largura y da parte retangular e o raio r da parte semicircular, dada pela expressão $A = x.y + \frac{\pi r^2}{2}$. Observando a figura 3. 63 encontramos $r = \frac{x}{2}$.

O perímetro total externo da janela satisfaz a equação $x + 2y + \pi r = 9$. Substituindo o valor de r nesta equação conseguimos $y = \frac{9}{2} - \left(\frac{2+\pi}{4}\right)x$. Assim a área é uma função f da variável x, de modo que $f(x) = x\left(\frac{9}{2} - \left(\frac{4+\pi}{8}\right)x\right)$. O gráfico de f, usando GeoGebra está na Figura 3. 72.

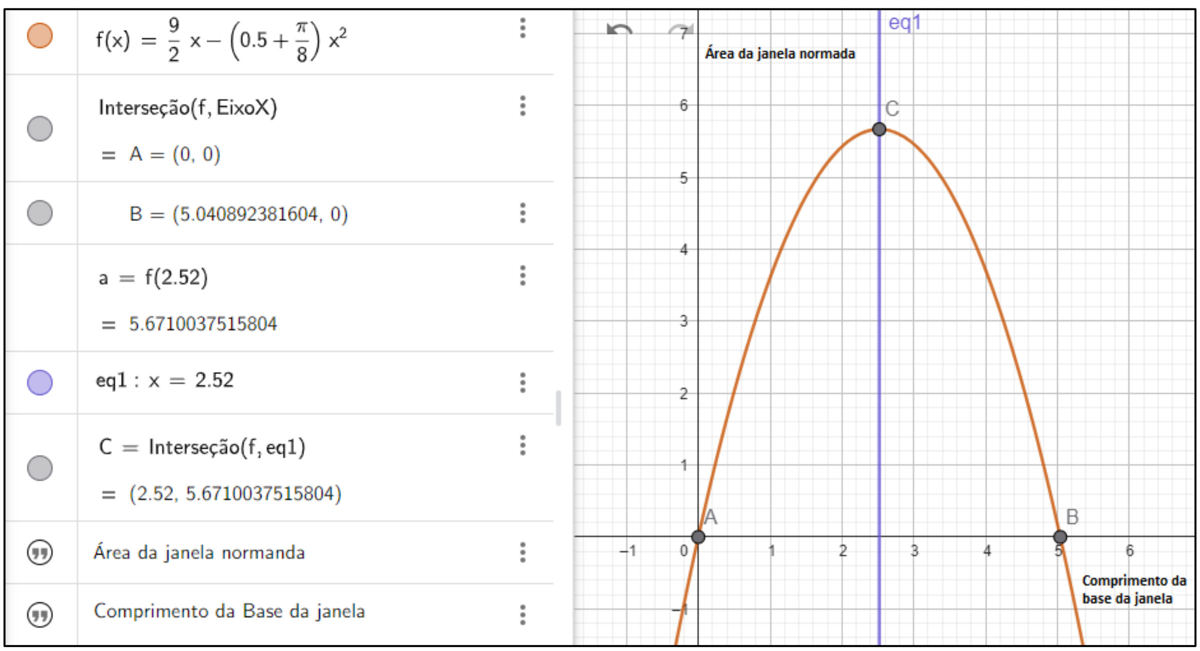


Figura 3. 72 - Gráfico da função f, que expressa a área da janela normanda

A partir do gráfico e do vértice da parábola, ou usando a ferramenta da reta tangente (horizontal) do GeoGebra, encontramos as dimensões da janela normanda de área máxima, que será a janela com comprimento $x = \frac{18}{4+\pi}$ m, largura $y = \frac{9}{4+\pi}$ m e raio do semicírculo $r = \frac{9}{4+\pi}$ m.

Dito de forma mais simples, o raio é igual à largura, de aproximadamente 1,26m e o comprimento é o dobro da largura, de aproximadamente 2,52m. Esta janela terá área máxima, ou seja, deixará entrar mais luz. Esta área será $A = \frac{81}{2(4+\pi)}$ m^2, aproximadamente 5,67 m^2.

Seria interessante que o professor pedisse aos alunos para tentar achar uma função área dependendo só de r, por exemplo, para verificar se ela seria mais simples.

Problema 3.31: Este problema, aparentemente complicado, consegue ser resolvido de forma rápida utilizando funções compostas e propriedades de funções crescentes/decrescentes. Deve-se dar um tempo para que os alunos tentem resolver, sem sugestão; caso os alunos não pensem em funções compostas e propriedades de crescimento/decrescimento de funções, o professor pode sugerir que os alunos usem estes conceitos. Se a dificuldade deles persistir, estes conceitos devem ser abordados pelo professor, e, em seguida, ele deve deixar os alunos tentarem novamente.

Considere a função $f(x) = x$, cujo gráfico é uma reta passando pela origem, com coeficiente angular $m = 1$. É importante chamar atenção para a relação entre $m > 0$ e f crescente e $m < 0$ e f decrescente, relembrando a definição de função crescente e função decrescente.

A seguir, considere a função $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$. Observe que, quando x cresce, $f(x) = x$ também cresce, logo $g(x)$ decresce. Portanto, quando f atinge valor máximo, g deverá atingir valor mínimo (supondo f e g funções com valores positivos).

Considere agora a função $h(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x}$. Observe que, quando x cresce $f(x) = x$ também cresce. O gráfico da função $\sqrt{x}$ já foi apresentado no capítulo anterior, trata-se de uma função também crescente, logo, se f cresce, teremos $h(x)$ também crescendo. Assim, quando f atinge o valor máximo, h também deverá atingir seu valor máximo. (supondo f e h funções com valores positivos). A partir daí, os alunos devem conseguir resolver o problema sem dificuldade.

Considera-se a função auxiliar $f(t) = 7 + 6t - t^2$. Logo o gráfico é uma parábola com concavidade para baixo, pois $a = -1 < 0$. As raízes da equação $f(t) = 0$ são $t = -1$ e $t = 7$ e o vértice da parábola é $V(3{,}16)$. O esboço da parábola é dado pela Figura 3. 73 a seguir.

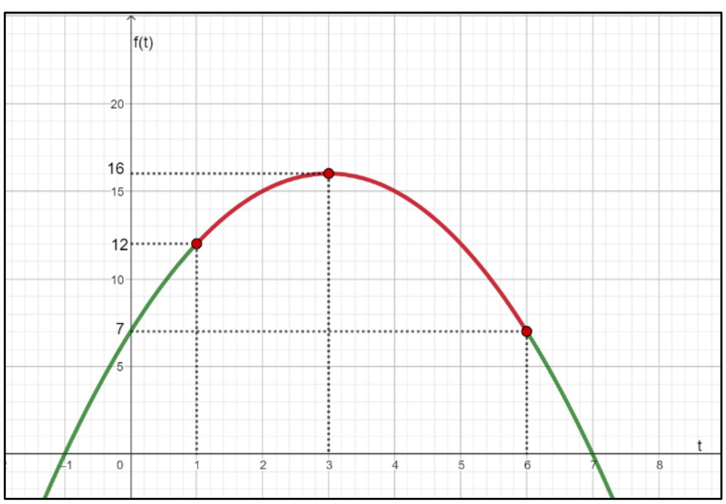


Figura 3. 73 - Gráfico da função auxiliar

O volume de água V que vazou, é dado por $V = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$, para$1 \leq t \leq 6$. Note que o valor máximo de f ocorre quando $t = 3$, e será igual a $f(3) = 16$. Logo o valor máximo da função crescente $g(t) = \sqrt{f(t)}$ também ocorrerá quando $t = 3$, e será igual a $g(3) = \sqrt{16} = 4$. Assim, o valor mínimo da função V será obtido também quando $t = 3$ horas, e será igual a V(3) = $\frac{1}{4}$ m^3. Como o vazamento começou às 8h, este vazamento mínimo ocorrerá às 11h, isto é, 3h depois de iniciado. O gráfico da função $V = \frac{1}{g} = \frac{1}{\sqrt{f}}$ está na Figura 3. 74, junto com o ponto $A(3; 0{,}25)$, obtido com o recurso "Otimização", que fornece máximos/mínimos locais. Neste problema, o GeoGebra forneceu a solução exata, uma vez que os dados ou são inteiros (t=3) ou são racionais com número finito de dígitos $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Caso contrário o GeoGebra forneceria apenas solução aproximada. Note que, devido às raízes da equação $f(t) = 0$, o gráfico de V possui assíntotas verticais e, como a constante $a = -1 < 0$ na expressão de f, temos que $f(t) < 0$ fora do intervalo $[-1{,}7]$, portanto o domínio da função V é o intervalo $]-1{,}7[$.

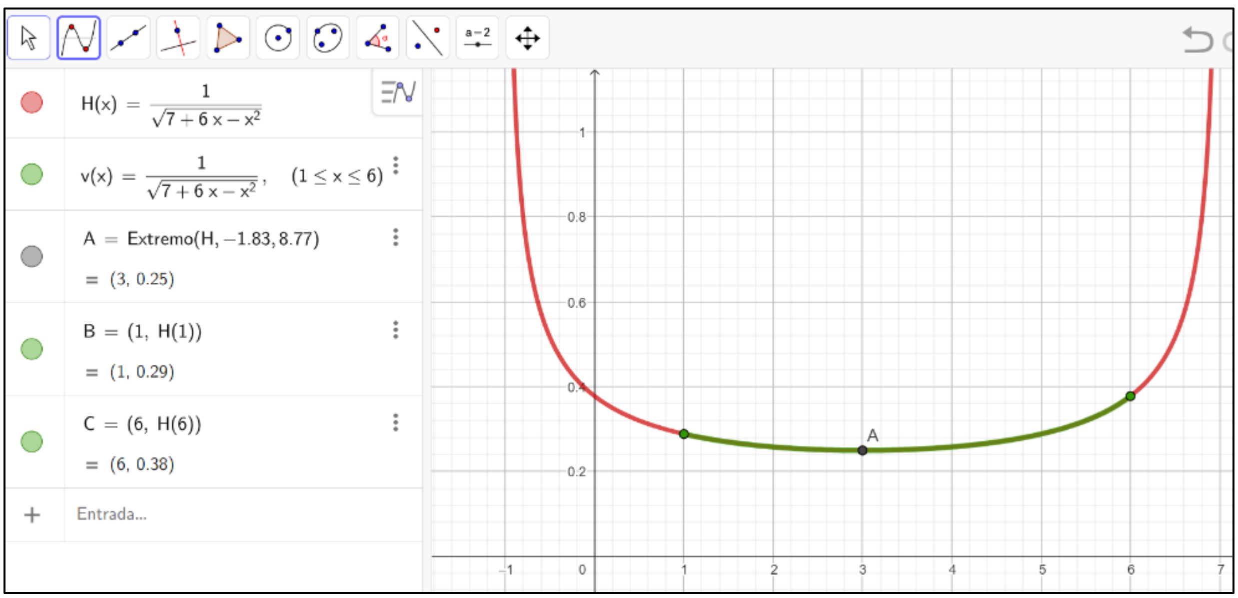


Figura 3. 74 - gráfico da função volume, com o volume mínimo

Problema 3.32: A área do aquário (que não tem tampa) é expressa por $S = xy + 2yz + 2xz$. O objetivo é determinar as dimensões do aquário que pode ser construído com a menor quantidade de material, isto é, que tenha a menor área possível. O volume é constante, $V = xyz = 32$.

Segundo a desigualdade das médias, a média aritmética $A = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ e a média geométrica $G = \sqrt[3]{a_1.a_2.a_3}$ satisfazem a desigualdade $A \geq G$, sempre que os números a_1, a_2, a_3 forem positivos, e será uma igualdade se e somente se os três números forem iguais.

Supondo então $a_1 = xy$, $a_2 = 2yz$ e $a_3 = 2xz$ teremos que $A = \frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{4V^2}$. Como $V = 32$, teremos que $S \geq 48$ e que a igualdade $S = 48$ ocorre, se e somente se, $xy = 2yz = 2xz$.

Sendo $x, y, z > 0$, podemos simplificar esta identidade obtendo $x = y = 2z$. Da expressão do volume teremos $z = 2m$, e, em seguida, conseguimos $x = y = 4$m. Então as dimensões do aquário de área mínima igual a 48 m^2.

Considerando o caso particular em que o comprimento coincide com a largura, ou seja, $x = y$, da expressão do volume teremos $x = \frac{32}{x^2}$. A função área será $S = f(x) = x^2 + \frac{128}{x}, x > 0$. O gráfico da função f está apresentado na Figura 3. 75.

Fazendo simulações com a reta tangente ao gráfico, parece que o mínimo de f ocorre quando $x = 4$. Obtendo em seguida a reta tangente no ponto $P(4, f(4))$, o GeoGebra verifica que esta reta tangente é de fato horizontal, então o mínimo local, que, neste caso, também é o mínimo (global) no domínio de definição para o problema contextualizado, $x > 0$, de fato ocorre no ponto P.

Como os dados são inteiros temos solução exata para o caso particular do problema utilizando GeoGebra. O caso geral do problema é estudado em uma disciplina mais avançada de CDI, que aborda funções de mais de uma variável.

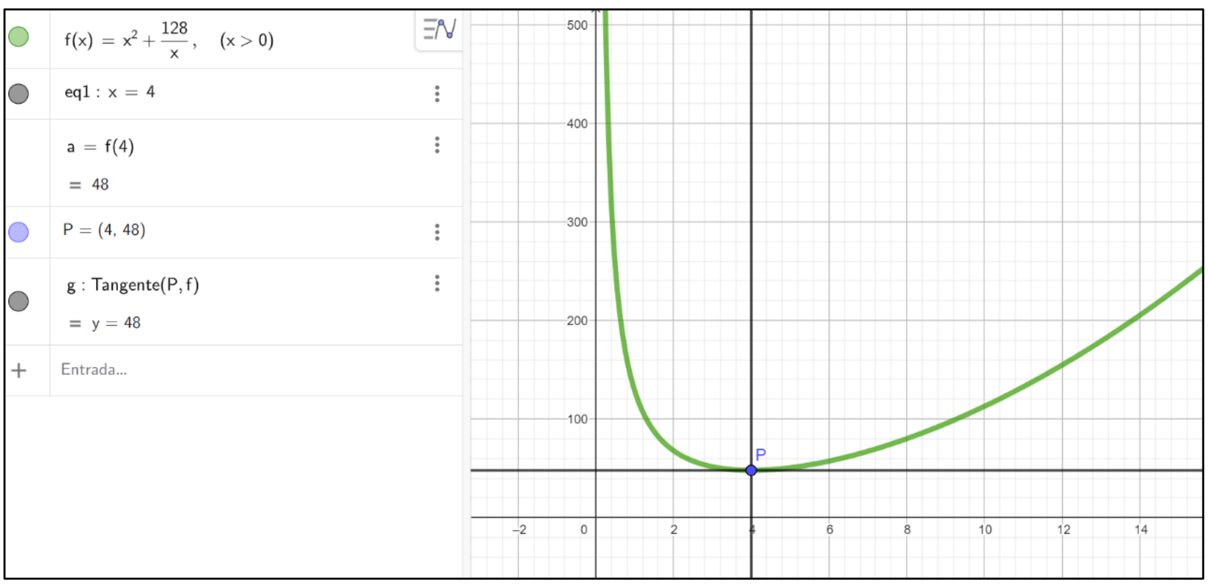


Figura 3. 75 - Área do aquário no caso particular

Problema 3.33: A utilização de conceitos de Geometria e Trigonometria facilita a obtenção da solução deste problema de otimização, de modo que não se necessite usar nem a desigualdade das médias nem recursos de CDI.

Como a medida de cada lado de um triângulo tem que ser menor que a soma das medidas dos outros dois, a medida da base do triângulo deve ser maior que 0 e menor que 5 dm. Como já vimos em outra seção deste capítulo, neste caso o valor máximo (exato) pode não existir.

Utilizando o controle deslizante do GeoGebra, pode-se observar que, conforme o ângulo aumenta, a área também aumenta, mas depois passa a diminuir ao se aproximar do valor π. Portanto podemos concluir que o valor máximo para a área vai existir.

Para determinar a expressão da área, a medida da base B pode ser obtida utilizando a Lei dos Cossenos, depois simplificando teremos $B = 10\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Já a expressão da altura H decorre do Teorema de Pitágoras, junto com a relação fundamental, encontrando-se assim $H = 5\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

A partir daí, utilizando a relação trigonométrica para o seno do arco duplo, chegaremos a uma expressão simples para a área, dada por $S = 25\ \text{sen}(\theta)$ e, conhecendo o comportamento da função seno no intervalo entre 0 e π, que pode ser conferido na Figura 3. 30, a solução para o problema é muito simples de ser obtida, o ângulo θ deve ser reto, e a área máxima será de 12,5 dm^2.

Problema 3.34: Este problema explora conceitos de Geometria Espacial. O raio da esfera foi escolhido de modo que pode ser resolvido de forma completamente justificada sem usar conteúdo da disciplina CDI, como a derivada.

Modificando-se adequadamente o valor do raio, torna-se necessária a utilização da derivada da função volume, assim justificando a aquisição de mais ferramentas matemáticas para resolver problemas de máximo e mínimo mais sofisticados.

Utilizando semelhança de triângulos pode-se descobrir que $r^2 = 16\,h/(h-8)$ (cuidado ao esboçar para não comparar triângulos erradamente).

Desta forma encontra-se $V = 16\frac{\pi}{3}\left(\frac{h^2}{h-8}\right)$.

A partir do gráfico da função volume, apresentado na Figura 3. 76, obtido utilizando-se o GeoGebra, empregando a ferramenta da tangente ou a ferramenta de otimização, chega-se ao valor exato, $h = 16$ dm para que o volume seja mínimo.

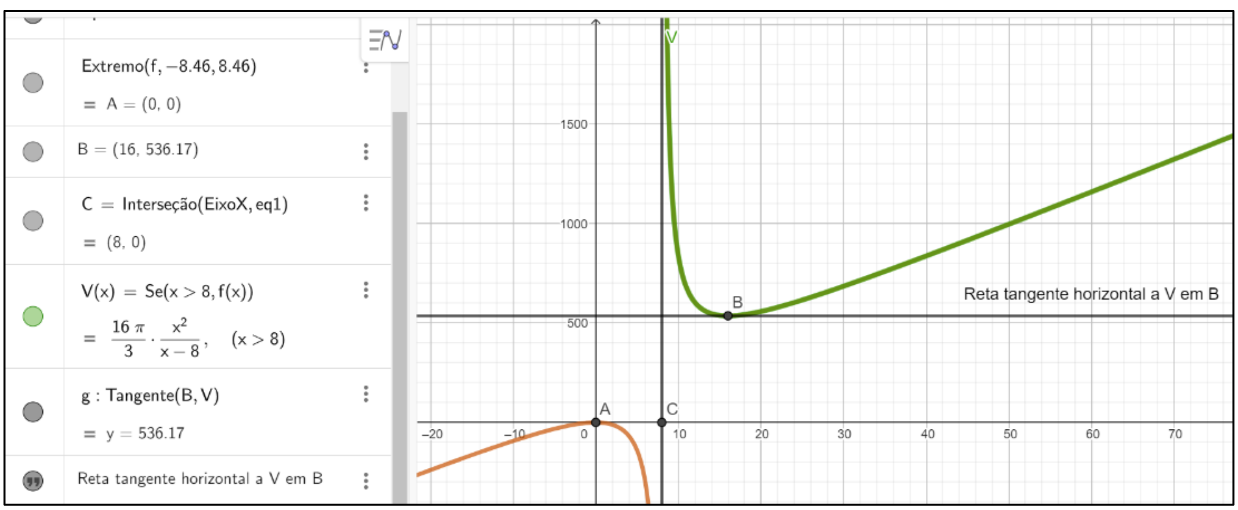


Figura 3. 76 - Gráfico da função volume da luminária

Mas fica bem claro que, dependendo do valor do raio da esfera, a solução poderá não ser um número inteiro, ficando bem mais difícil obter uma solução gráfica via GeoGebra totalmente exata e justificada. Entretanto, usando derivada, é fácil determinar solução exata, para qualquer escolha de raio da esfera.

Problema 3.35: $f(2) = 12\sqrt{3}$, $f(7) = 3\sqrt{3}$, $f(x) = \left|\frac{(10-x)(10-2x)\sqrt{3}}{4}\right|$, com $x \in I = [0,10]$.

O esboço do gráfico está representado na Figura 3. 77. Utilizando o recurso de Otimização do GeoGebra é possível determinar que f tem mínimo local no ponto $(5,0)$ e o mínimo global é o valor zero, quando $x = 5$ e $x = 10$.

O máximo global e o máximo local podem ter solução aproximada determinada geometricamente, mas somente obtendo a solução algebricamente se garante que o máximo global em I é exatamente $25\sqrt{3} = f(0)$ e que o máximo local ocorre precisamente no ponto $\left(\frac{15}{2}, \frac{75}{4}\right)$.

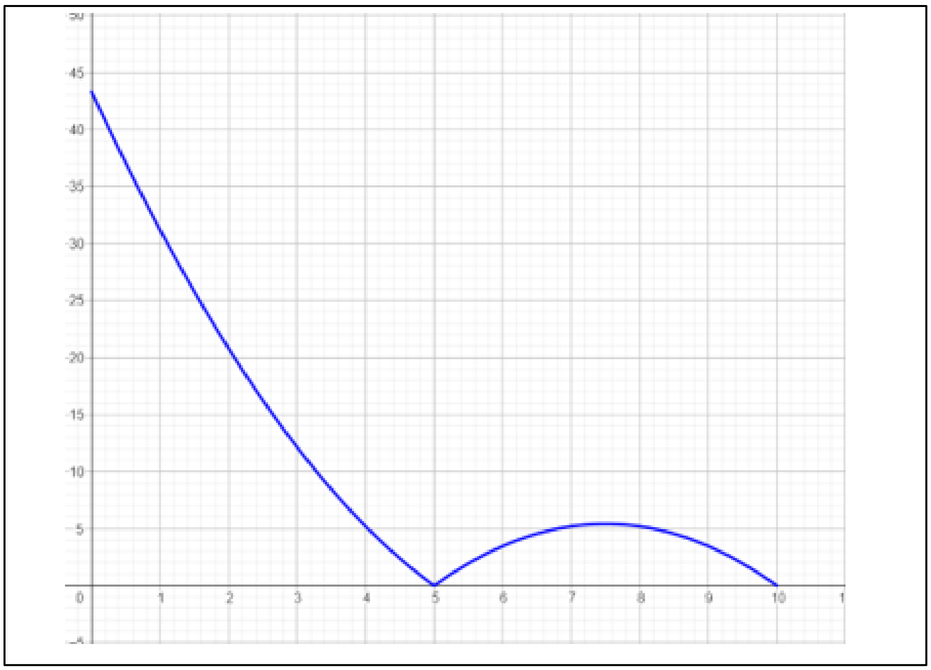


Figura 3. 77 - Gráfico da função f do problema 3.35

Problema 3.36: $V(5) = 250\ cm^3$, $V(11) = (1100\sqrt{2} - 500)\ cm^3$. O domínio de função V é o intervalo $[0,10\sqrt{2}]$. A função $V = \begin{cases} 10h^2, se\ 0 \leq h \leq 5\sqrt{2} \\ 100h\sqrt{2} - 500,\ se\ 5\sqrt{2} < h \leq 10\sqrt{2} \end{cases}$. O máximo absoluto de V ocorre quando $h = 10\sqrt{2}$, $V = 1500\ cm^3$. O gráfico da função V está representado na Figura 3. 78 a seguir.

Note que o gráfico é uma parte de uma parábola entre os pontos O e A e um segmento de reta entre A e B.

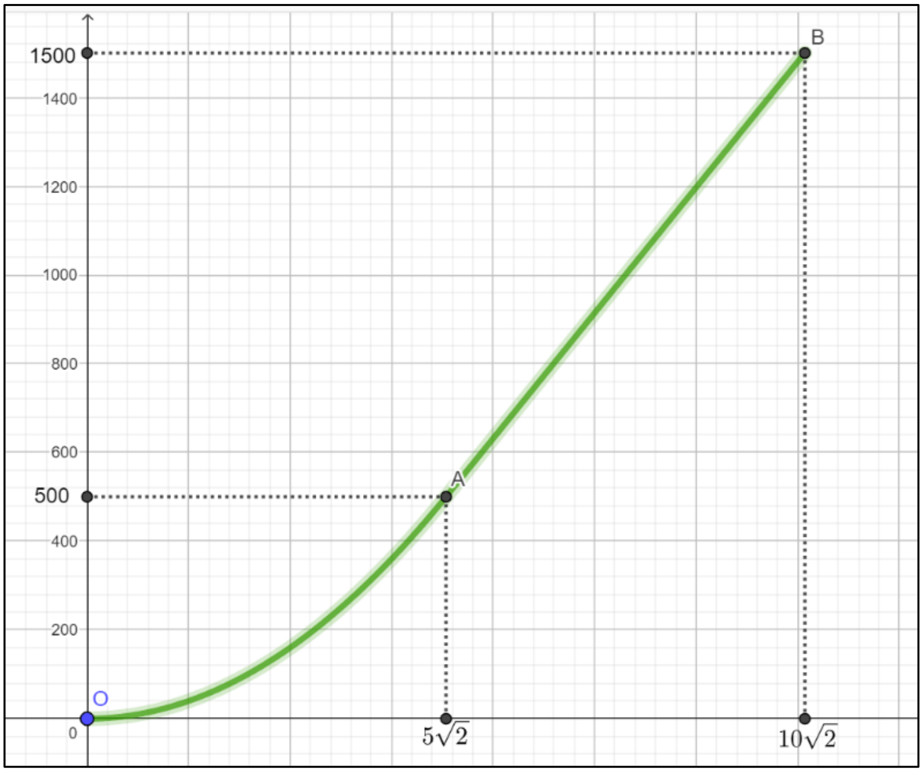


Figura 3. 78 - Gráfico da função V do problema 3.36

Problema 3.37: O item a e metade do item c já foram resolvidos no problema 3.13. A área das paredes do silo cônico (área lateral), é dada pela expressão $A = \pi r g$.

Como $A = 300$, teremos $300 = \pi r g$ de onde conseguimos $g = \frac{300}{\pi r}$.

Por outro lado, observando o triângulo retângulo no cone da Figura 3. 63 , segue do teorema de Pitágoras que $g^2 = h^2 + r^2$, logo, substituindo a expressão de g, teremos $h = \frac{\sqrt{300^2 - \pi^2 r^4}}{\pi r}$.

O volume do silo cônico é dado pela fórmula $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Substituindo o valor de h, chegamos à expressão $V_2 = \frac{1}{3} r\sqrt{300^2 - \pi^2 r^4}$. Como $r > 0$ e $h = \frac{\sqrt{300^2 - \pi^2 r^4}}{\pi r} > 0$, teremos a desigualdade $0 < r < \sqrt{\frac{300}{\pi}}$, completando a solução do item b.

O gráfico da função $V_2 = g(r)$ no intervalo I está representado na Figura 3. 79 a seguir, completando o item c.

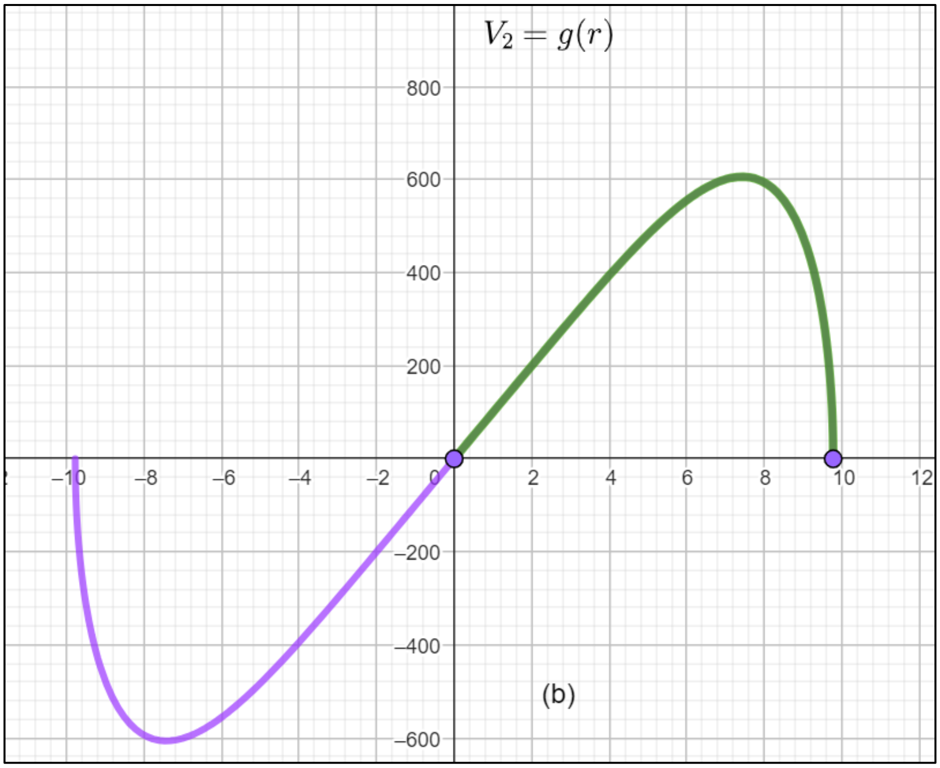


Figura 3. 79 - Volume do cilindro cônico

Para comparar os volumes dos dois tipos de silo, a Figura 3. 80 a seguir representa os dois gráficos no mesmo sistema cartesiano. Utilizando a ferramenta de "Otimização" do GeoGebra poderemos determinar a localização aproximada do ponto de máximo local/global em I em cada curva e assim poderemos comparar as ordenadas para descobrir qual o volume máximo, se o silo for cilíndrico (função f) e se o silo for cônico (função g).

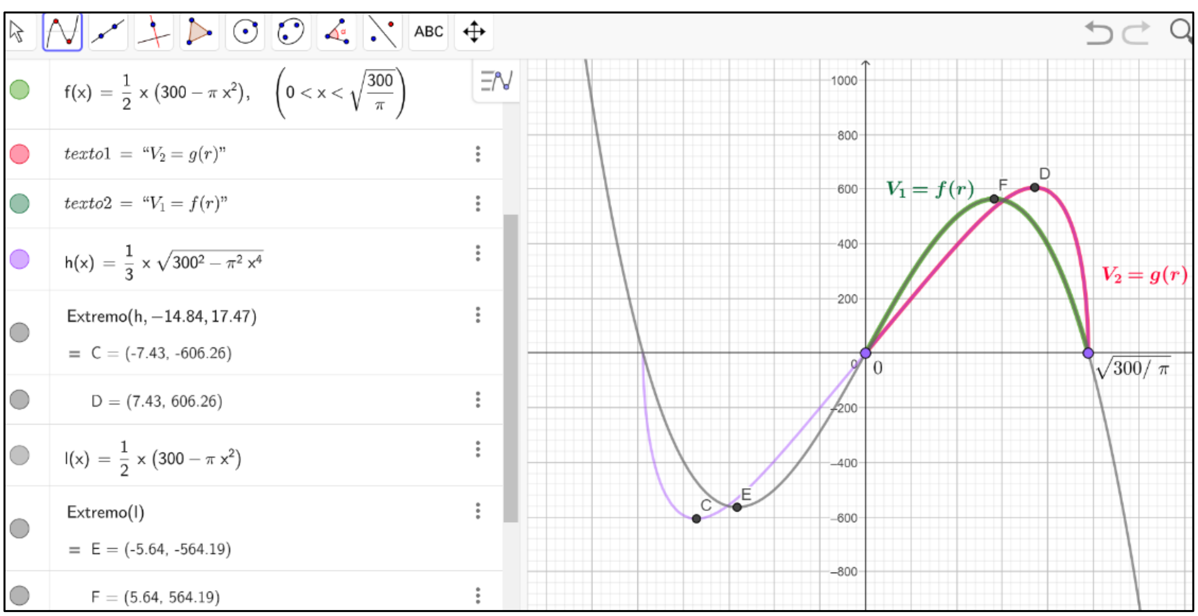


Figura 3. 80 - Comparação entre os volumes dos silos

Observando a janela de álgebra do GeoGebra na Figura 3. 80, encontramos que o máximo global da função f no intervalo I ocorre no ponto $F(5{,}64; 564{,}19)$ e o máximo global da função g no intervalo I é atingido no ponto $D(7{,}43; 606{,}26)$, isto é, o volume máximo se for escolhido o silo cilíndrico será, aproximadamente, $V_1 = f(5{,}64) = 564{,}19\ m^3$. Já o volume máximo se for escolhido o silo cônico será, aproximadamente, $V_2 = g(7{,}43) = 606{,}26\ m^3$. Precisamos ressaltar que os valores são aproximados, porque, sempre que os valores não são inteiros, o *software* faz arredondamentos e truncamentos. Comparando os dois volumes, o maior volume será se for escolhido o silo cônico, construído com raio $r \cong 7{,}43\ m$. Substituindo nas expressões da altura e da geratriz encontramos $h = \frac{\sqrt{300^2 - \pi^2 r^4}}{\pi r} \cong 10{,}49$ e $g = \frac{300}{\pi r} \cong 12{,}85$.

Para resolver o item e, o procedimento é similar ao utilizado na solução do problema 3.13, e encontra-se $r = \frac{\sqrt{300}}{\sqrt{\pi}\ \sqrt[4]{3}} \cong 7{,}425$ metros, $h = \frac{(\sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{300})}{\sqrt{\pi}}$ metros, $g = \frac{(\sqrt{300}\ \sqrt[4]{3})}{\sqrt{\pi}}$ metros e V_2 máximo igual a $\frac{(1000\sqrt{2})}{(\sqrt[4]{3}\sqrt{\pi})} \cong 606{,}26\ m^3$.

Apêndice A1 – Utilização do software GeoGebra

Neste apêndice apresentamos somente os comandos do GeoGebra que foram utilizados em cada capítulo para a criação de figuras, gráficos de função e simulações dinâmicas. Estão incluídos exemplos de utilização de cada comando. Incluímos no final do livro referências sobre GeoGebra para iniciantes.

A1.1 Comandos para Esboçar Regiões do Plano

Regiões do plano limitadas por polígonos, circunferências ou elipses são simples de serem esboçadas utilizando o GeoGebra, uma vez que aparecem explicitamente em alguma das **opções do menu inicial** do *software,* no canto superior esquerdo da página inicial, como mostra a Figura A1. 1.

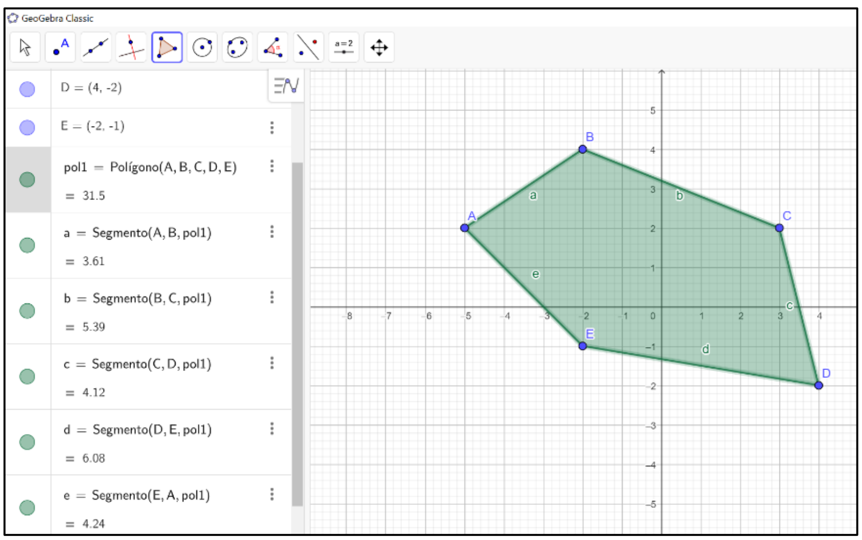


Figura A1. 1 - Região poligonal

Para esboçar outros tipos de região do plano usando GeoGebra é necessário descrever esta região utilizando inequações algébricas, com auxílio, se necessário, dos conectivos de união e de interseção.

Por exemplo, o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 9\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq x\}$ ou então o conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\}$.

A caixa de entrada do GeoGebra é utilizada, juntamente com o teclado virtual, com suas variadas opções, para descrever a região desejada. Detalhes são resolvidos usando o menu de propriedades.

Vamos então apresentar a seguir, nos exemplos A1.1 e A1.2, os passos necessários para produzir os esboços das regiões A e B.

Exemplo A1.1: *Esboce a região* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 9\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq x\}$.

O primeiro passo é digitar na caixa de entrada do GeoGebra, usando o teclado virtual, a região $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 9\}$, seguida do comando *enter*. Depois, de forma equivalente, digitar a região A_2=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y >= x\}$, seguida do comando *enter*, como mostram as Figura A1. 2 e Figura A1. 3.

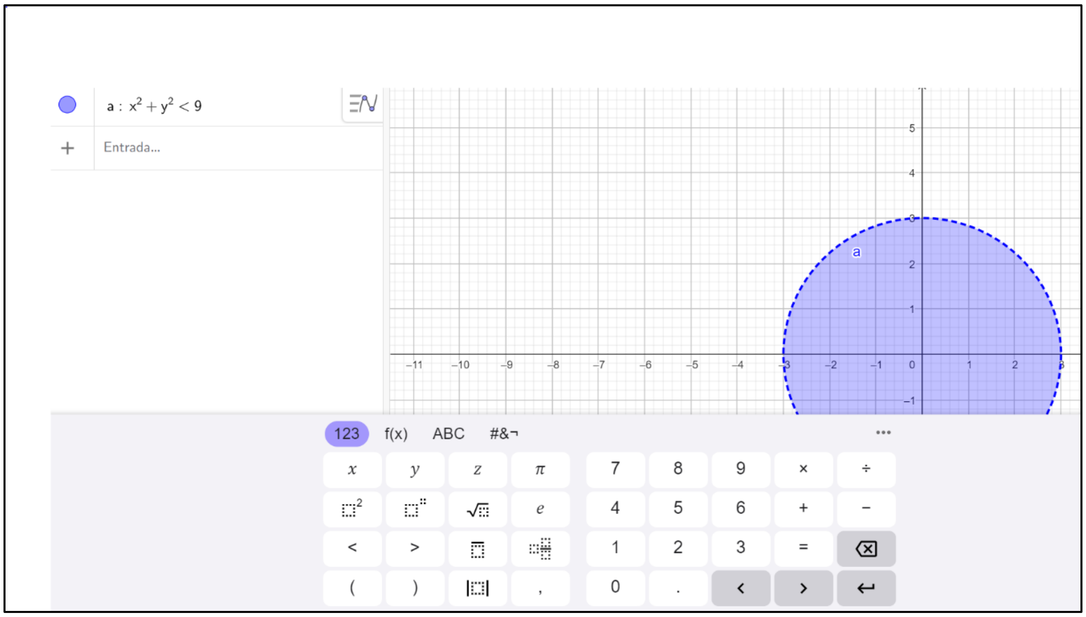


Figura A1. 2 - Tela do GeoGebra com região A_1

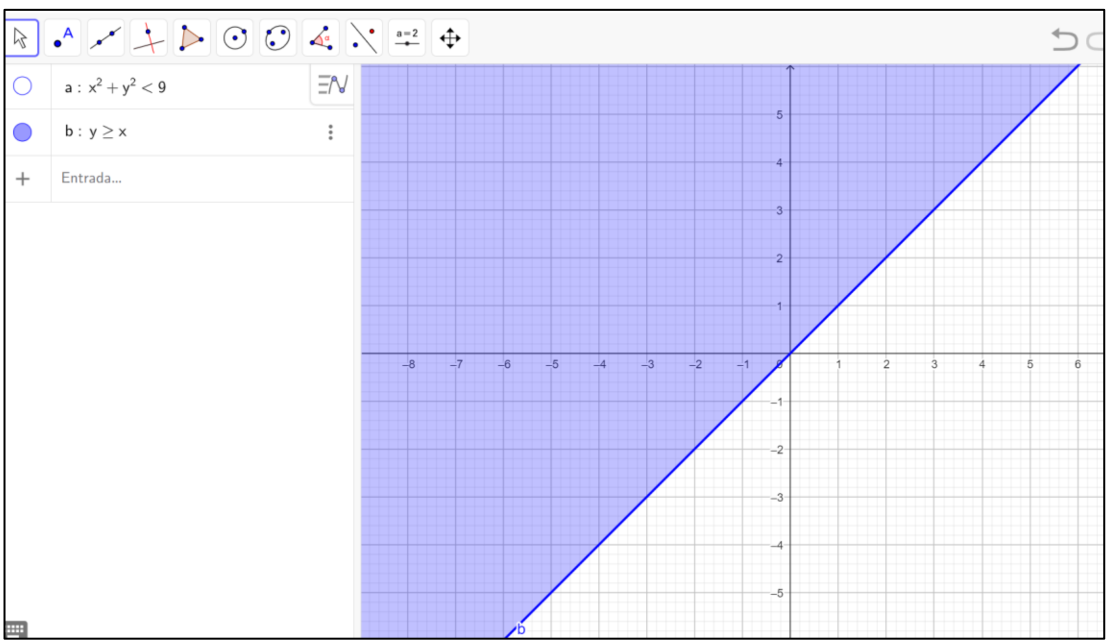


Figura A1. 3 - Tela do GeoGebra com região A_2

Depois, utilizando o teclado virtual para operadores (no nosso caso será o operador de interseção do teclado virtual) digitamos $a \wedge b$, obtendo o resultado apresentado na Figura A1. 4.

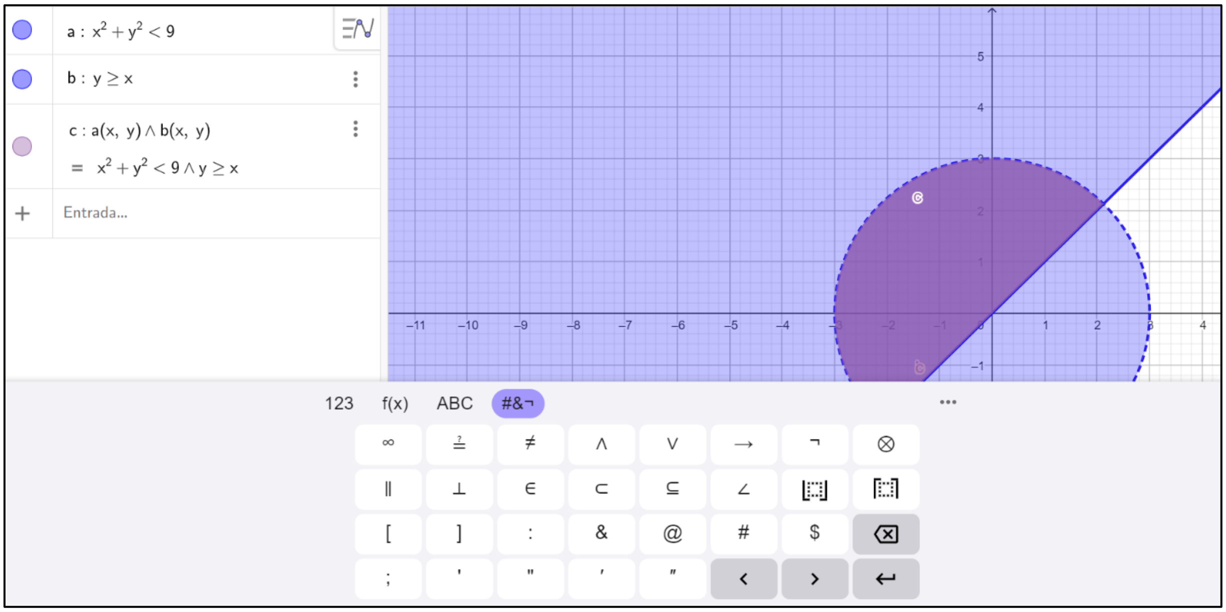


Figura A1. 4 - Tela do GeoGebra com região A interseção das regiões A_1 e A_2.

Em seguida utilizamos a **ferramenta de esconder objeto** (ou seja, na coluna esquerda clique nas bolinhas coloridas correspondentes ao que se deseja esconder, para deixar em branco) para esconder as regiões a e b, obtendo somente o esboço do conjunto A, como mostra a Figura A1. 5.

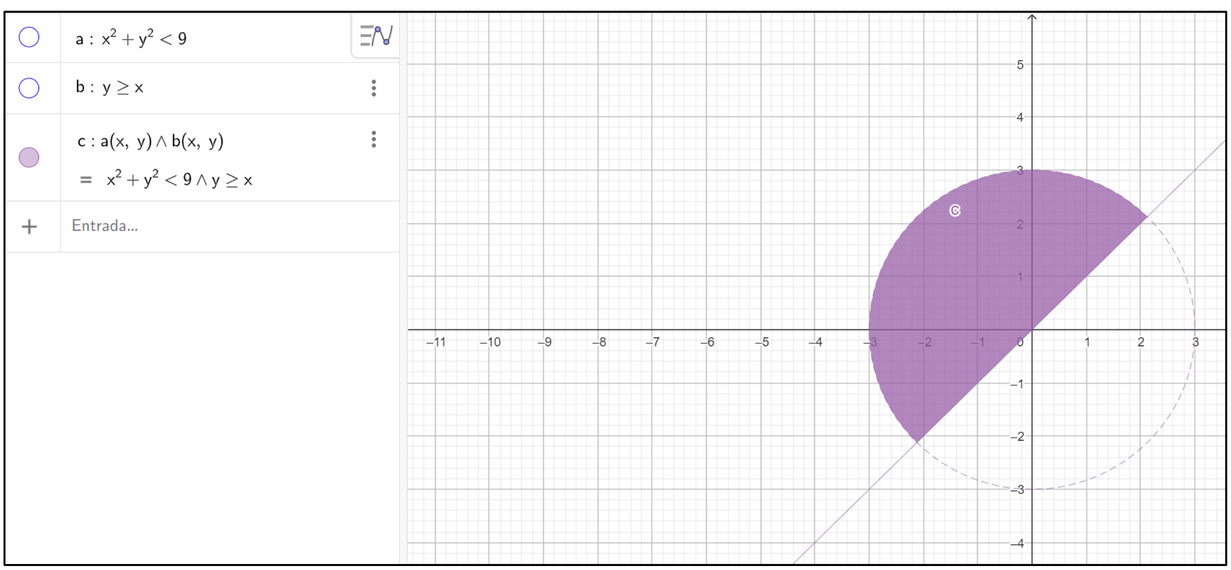


Figura A1. 5 - Tela do GeoGebra, escondendo A_1 (notação a) e A_2 (notação b), na coluna esquerda da tela

Finalmente clicamos na janela de visualização, fora da figura, na barra de opções no lado superior esquerdo, para escolher no menu que aparece em seguida, as opções esconder malha e esconder eixos, obtendo a figura procurada, de acordo com a Figura A1. 6.

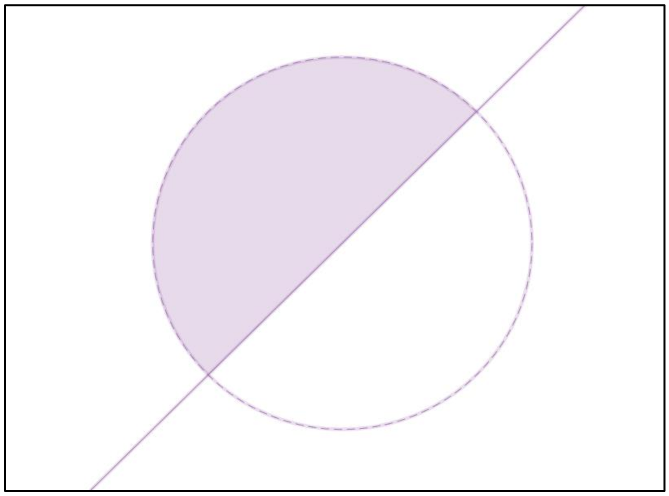


Figura A1. 6 - Figura pronta, sem os eixos e malha da figura A1.5

Exemplo A1.2: *Esboce a região* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\}$.

Teremos que digitar, na janela de entrada, separadas as inequações $x \geq 0$, $x \leq 1$, $y \geq 0$ e $y \leq e^x$, depois reunir as inequações utilizando o conectivo de interseção (∧ no teclado virtual do GeoGebra), depois esconder as regiões das etapas iniciais (clicando na bolinha colorida para ficar transparente) até sobrar só a região final. Por último, tornar invisível os eixos e a malha.

A seguir, a Figura A1. 7 mostra na coluna da esquerda, todos os comandos que foram digitados separadamente de modo a obter a região B, que é a única visível.

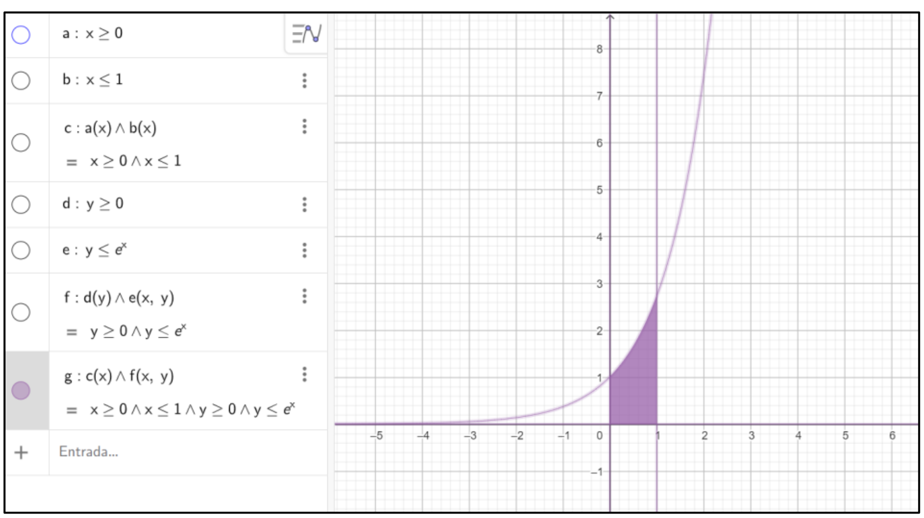


Figura A1. 7 - Região B do exemplo A1.2, ainda com eixos e malha

Finalmente escondemos também a malha e os eixos, deixando somente a Figura A1. 8 com a região B.

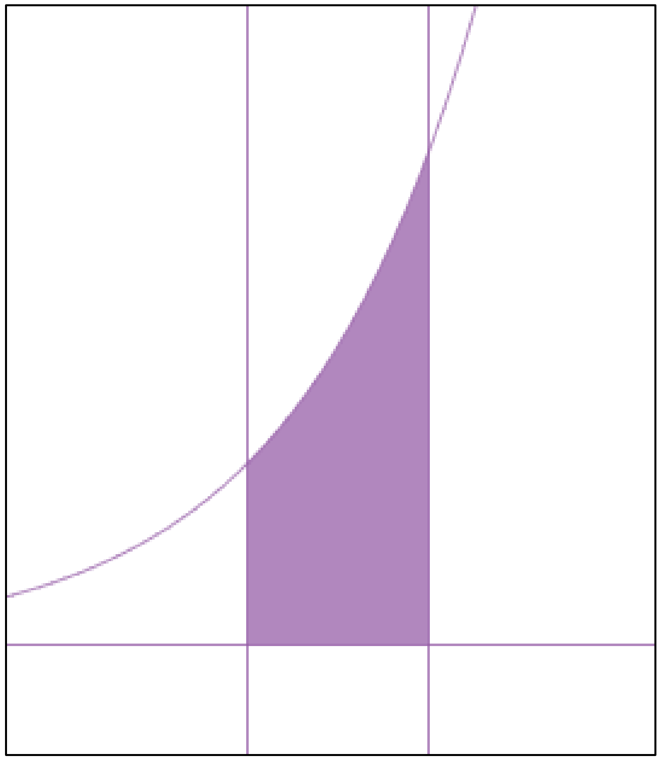


Figura A1. 8 - Representação geométrica da região *B*

A1.2 Comando “Se”

É utilizado para construir gráficos de função contínua e também descontínua, definida por várias sentenças e domínio contínuo. O comando a ser utilizado, na janela de entrada, com ajuda do teclado virtual, no caso em que sejam duas sentenças é o seguinte: $\boldsymbol{Se(domínio, valor, Se(domínio, valor))}$ **.**

Veremos a seguir os exemplos A1.3 e A1.4, o primeiro sendo uma função contínua e a segunda uma função descontínua.

Exemplo A1.3: *Esboce o gráfico da função G, contínua, definida no intervalo* $[0,50]$, cujos valores $G(x) = \begin{cases} 5x, & se\ \ 0 \leq x \leq 20 \\ 100, & se\ \ 20 \leq x \leq 30 \\ 250 - 5x, & se\ 30 \leq x \leq 50 \end{cases}$.

Para obter o esboço do gráfico de G, utilizando a janela de entrada de comando e o teclado virtual, digite $\boldsymbol{G(x) = Se\left(0 \leq x \leq 20, 5x, Se\left(20 \leq x \leq 30, 100, Se(30 \leq x \leq 50, 250 - 5 \times x)\right)\right)}$, de modo a obter o esboço na Figura A1. 9.

Figura A1. 9 - Gráfico da função contínua G do exemplo A1.3

Exemplo A1.4: *Esboce o gráfico da função descontínua F, definida em $\mathbb{R}^+$, de modo que $F(x)$* satisfaça o seguinte: $F(x) = \begin{cases} 6, \; se \;\; 0 < x \leq 1 \\ 9, \; se \; 1 < x \leq 2 \\ 9 + 2(n-1), se \;\; n < x \leq n+1, \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Inicialmente procedemos da mesma forma que no exemplo A1.3, digitando na janela de entrada de comandos, o comando $F(x) = Se\big(0 < x \leq 1{,}6, Se(1 < x \leq 2{,}9, Se(2 < x \leq 3{,}11, Se(3 < x \leq 4{,}13)))\big)$, observando que o gráfico só vai mostrar a parte do gráfico correspondente ao intervalo $0 \leq x \leq 4$, e obtendo o resultado mostrado na Figura A1. 10.

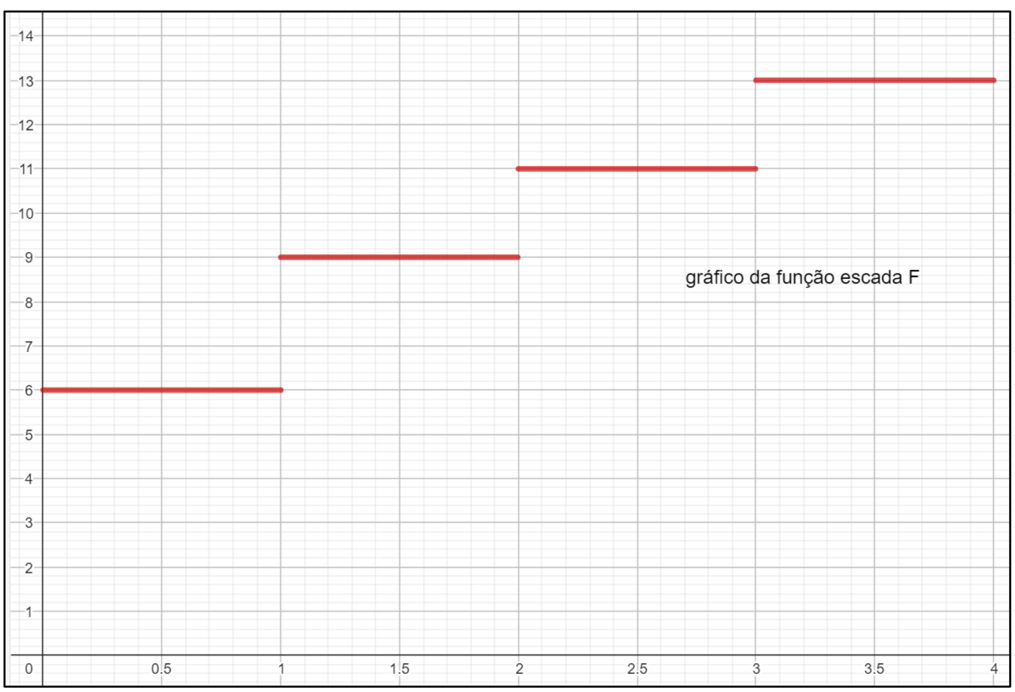


Figura A1. 10 - Primeira etapa do gráfico da função F do exemplo A1.4

Mas a função é definida nos valores $x = 1,2,3,4, \ldots,$ então, para obter o valor correto $F(x)$, correspondente a estes valores de x, é necessário colocar cor branca nos pontos "falsos" do gráfico e incluir, de forma "reforçada", os pontos "verdadeiros", como mostra a Figura A1. 11.

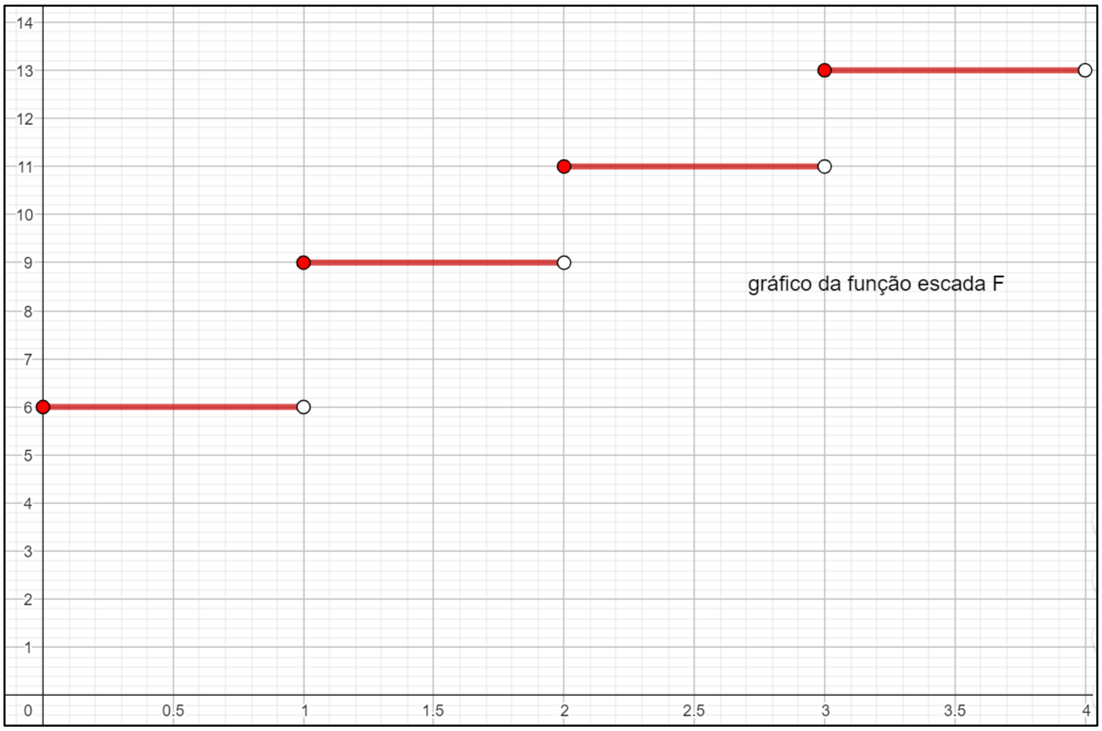


Figura A1. 11 - Gráfico correto da função descontínua F do exemploA1.4

A1.3 Comando "Sequência"

É utilizado para construir gráficos de função com domínio discreto. O comando a ser utilizado, na janela de entrada, com ajuda do teclado virtual, se necessário, é o seguinte: $\boldsymbol{Sequ\hat{e}ncia}((\boldsymbol{k}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k})), \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2})$, onde $f(k)$ é a expressão algébrica da imagem da função, com a variável $k \in \mathbb{N}, k_1 \leq k \leq k_2$.

Exemplo A1.5: *Esboce o gráfico da função* f*, com domínio* $\mathbb{N}$*, tal que* $f(x) = 200|x - 25| + 3000$*, supondo* $x = 1,2, \ldots, 30$.

Para obter o esboço do gráfico de f, utilizando a janela de entrada de comando e o teclado virtual, digite $Sequ\hat{e}ncia((k, 200.|k - 25| + 3000), k, 1,30)$, de modo a obter o esboço na Figura A1. 12.

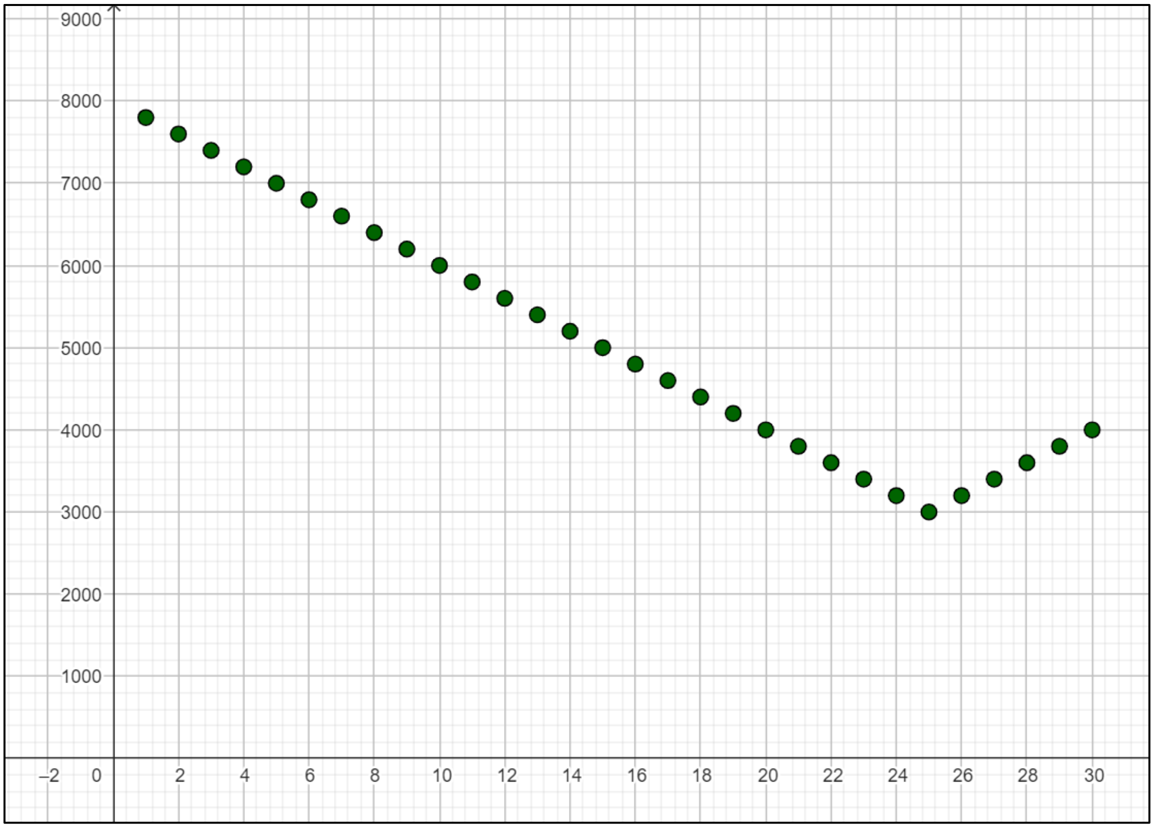


Figura A1. 12 - Gráfico da função f do exemplo A1.5, com domínio discreto

A1.4 Comando "Reta tangente" ao Gráfico de uma Função em um Ponto

Este comando é utilizado para exibir ou procurar máximos ou mínimos locais ou globais de uma função f. Nos candidatos a ponto de máximo/mínimo local P, quando a reta tangente ao gráfico de f em P existe, ela é uma reta horizontal.

No caso em que o ponto P (onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal) é conhecido, basta usar a **ferramenta reta tangente**, disponível no quarto botão do canto superior esquerdo do menu inicial do GeoGebra. O primeiro passo é esboçar o gráfico da função, o segundo passo é esboçar o ponto de tangência horizontal e o passo seguinte é clicar na ferramenta reta tangente, no quarto botão do canto esquerdo do menu inicial, no ponto de tangência e em algum outro ponto da curva que é gráfico da função, para que o *software* faça o esboço da reta tangente ao gráfico neste ponto.

Se for interessante obter uma simulação dinâmica, basta clicar no primeiro botão do menu inicial (o da **seta**) e escolher a opção "**Mover**". Em seguida, basta clicar no ponto de tangência, segurar o clique e mover com o *mouse* ao longo da curva, como veremos no exemplo A1.6.

Se não se conhece o ponto P onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal, o processo é similar, como veremos a seguir no exemplo A1.7. Escolhe-se um ponto Q do gráfico de f, próximo de onde se espera que esteja o ponto P procurado. Seguem-se os passos descritos anteriormente e depois é necessário utilizar a simulação dinâmica, movendo o ponto Q e observando a janela de álgebra do GeoGebra, onde a equação algébrica da reta tangente ao gráfico de f vai se modificando. Esta ação continua até aparecer uma equação de reta horizontal (este valor pode não ser exatamente correto, porque se o ponto P procurado tiver coordenadas irracionais, o GeoGebra vai fornecer aproximações racionais).

Exemplo A1.6: *Esboce, no mesmo sistema cartesiano, o gráfico da função f, tal que $f(x) = x^3$, e a reta tangente horizontal ao gráfico de f, no ponto $P(0{,}0)$.*

Para esboçar o gráfico da função f e o ponto P, utiliza-se a janela de entrada de comandos e o teclado virtual do GeoGebra. Em seguida utiliza-se o quarto botão do menu inicial, escolhendo o botão de reta tangente. Obtemos assim a Figura A1. 13.

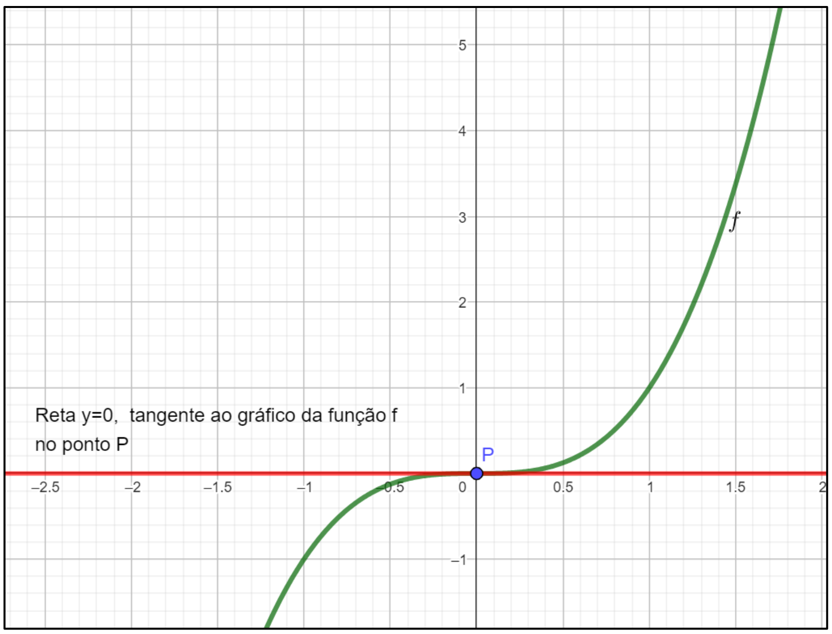


Figura A1. 13 - Gráfico da reta tangente horizontal ao gráfico da função f no ponto $P(0{,}0)$

Exemplo A1.7: *Esboce o gráfico da função f, definida para números reais não negativos, tal que $f(x) = 27x - \frac{1}{2}x^3$ e determine uma estimativa para o ponto P onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal.*

Após esboçar o gráfico da função f, por observação visual, é escolhido um ponto Q do gráfico que esteja próximo do ponto P, onde a reta tangente é horizontal. A inserção do ponto Q deve ser feita da forma $Q(a, b)$, onde $b = f(a)$. Atenção para não digitar na janela de entrada $(a, f(a))$, porque, neste último caso, não será possível obter a simulação dinâmica que conduzirá a uma estimativa razoável para o ponto P. Tendo o ponto de tangência Q e o gráfico de f, da mesma forma que foi feito no exemplo A1.6 obtém-se a reta tangente ao gráfico de f no ponto Q, como mostra a Figura A1. 14, onde foi escolhido $Q(4, 76)$, sendo $76 = f(4)$. Observe, na janela de álgebra na figura A1.14, que a reta tangente, que é o gráfico da função afim g, tem inclinação $m = 3$. Estamos procurando o ponto P, pertencente ao gráfico da função afim g, com inclinação correspondente $m = 0$ (ou bem próxima deste valor).

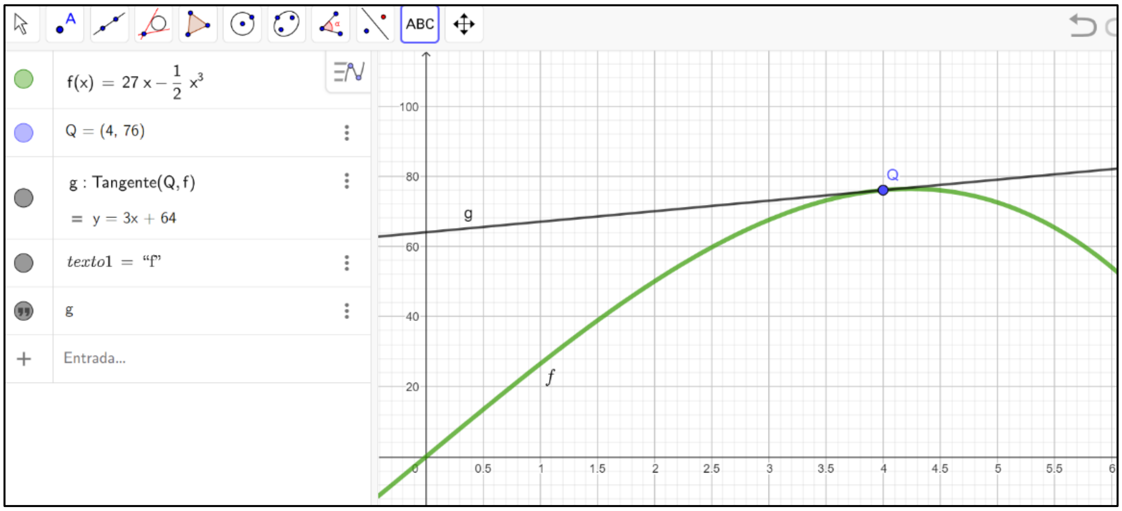


Figura A1. 14 - Reta tangente ao gráfico de f no ponto Q

Em seguida, clicando no botão da seta, no menu inicial, conseguimos mover o ponto Q (e a reta tangente acompanha a mudança nas coordenadas de Q) ao longo do gráfico de f.

Ao mesmo tempo, na janela de álgebra, a equação algébrica da reta tangente vai se modificando, de modo que conseguimos obter uma boa aproximação para uma reta tangente horizontal.

É possível então estimar que o ponto onde a reta tangente é horizontal é $P(a, f(a))$, com $4{,}2 < a < 4{,}3$, como mostra a Figura A1. 15. Na verdade, o ponto exato é $P(3\sqrt{2}, 80\sqrt{2}) \cong (4{,}23; 112{,}8)$.

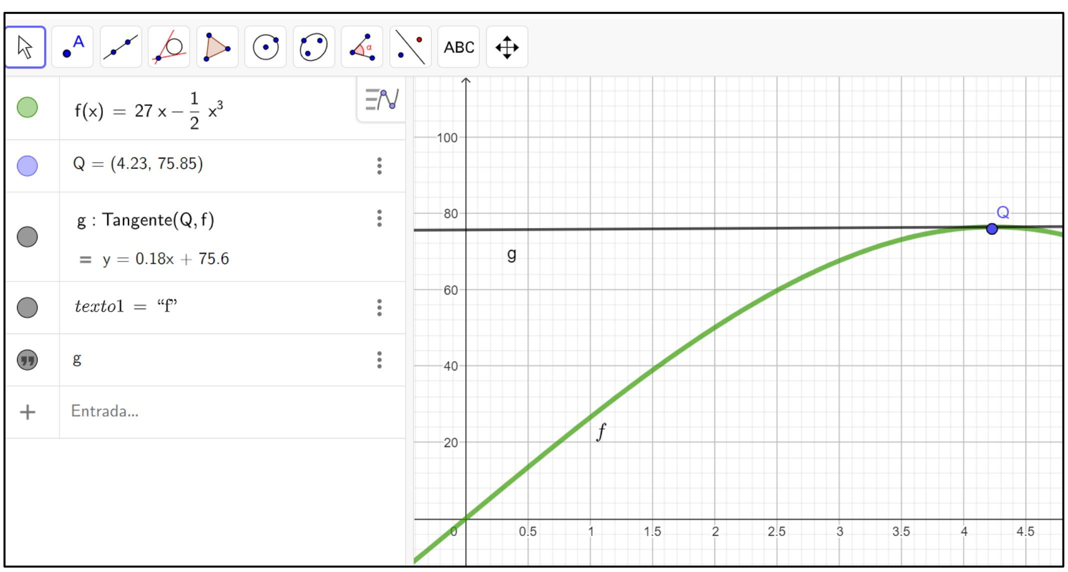


Figura A1. 15 - Ponto aproximado $Q(4{,}23; 75{,}85)$, onde a inclinação da reta tangente é $m = 0{,}18$

A1.5 Comando do GeoGebra para Máximo/Mínimo Local

O comando é o botão “**Otimização**” que está disponível no menu inicial do GeoGebra, conforme mostra a Figura A1. 16. Este comando é utilizado para obter pontos de máximo/mínimo local de funções, inclusive descontínuas.

Entretanto, deve-se levar em conta o fato do *software* realizar arredondamentos e truncamentos, portanto nem sempre determina coordenadas exatas. O *software* também tem problema com este comando quando a função é descontínua e ilimitada.

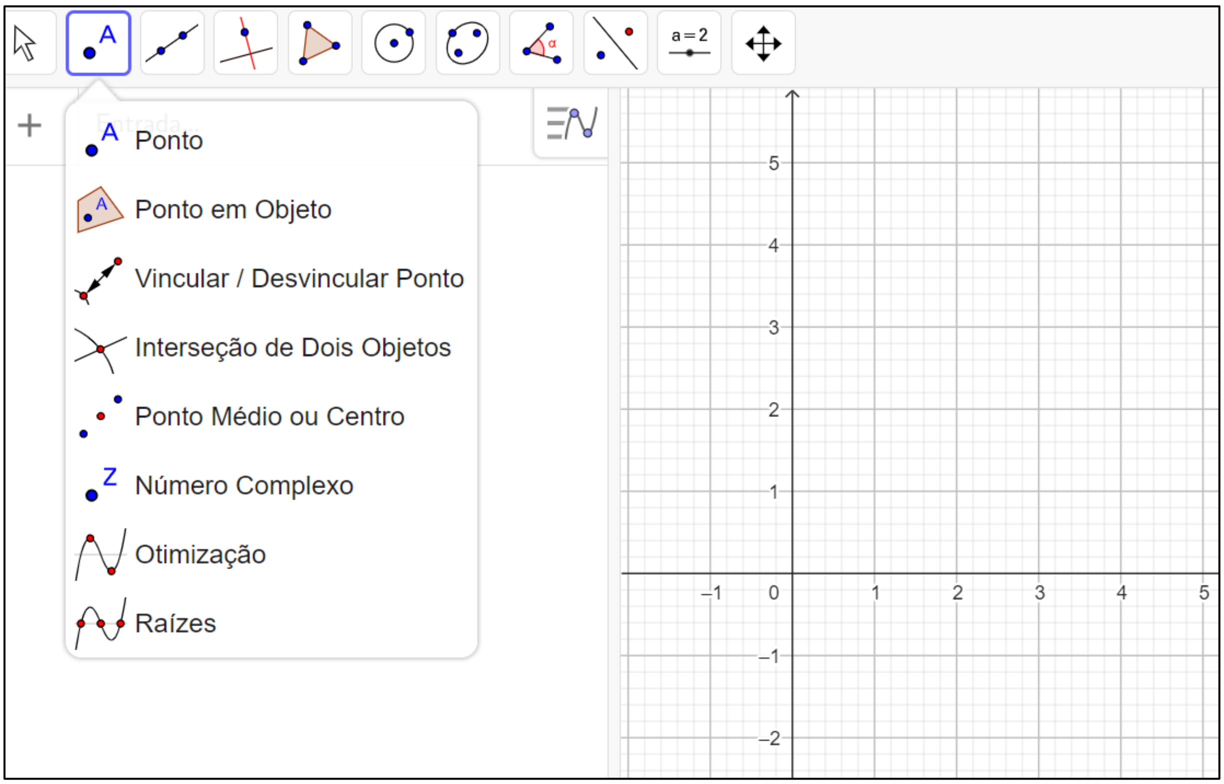


Figura A1. 16 - Comando Otimização no menu inicial do GeoGebra

Exemplo A1.8: *Determinar os pontos de máximo/mínimo local da função* f*, tal que* $f(x) = \sec x$.

O primeiro passo é esboçar o gráfico da função f, utilizando a janela de entrada e o teclado virtual, da forma $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Em seguida basta clicar no botão “Otimização” e, em seguida, em qualquer ponto do gráfico da função f, obtendo o resultado na Figura A1. 17.

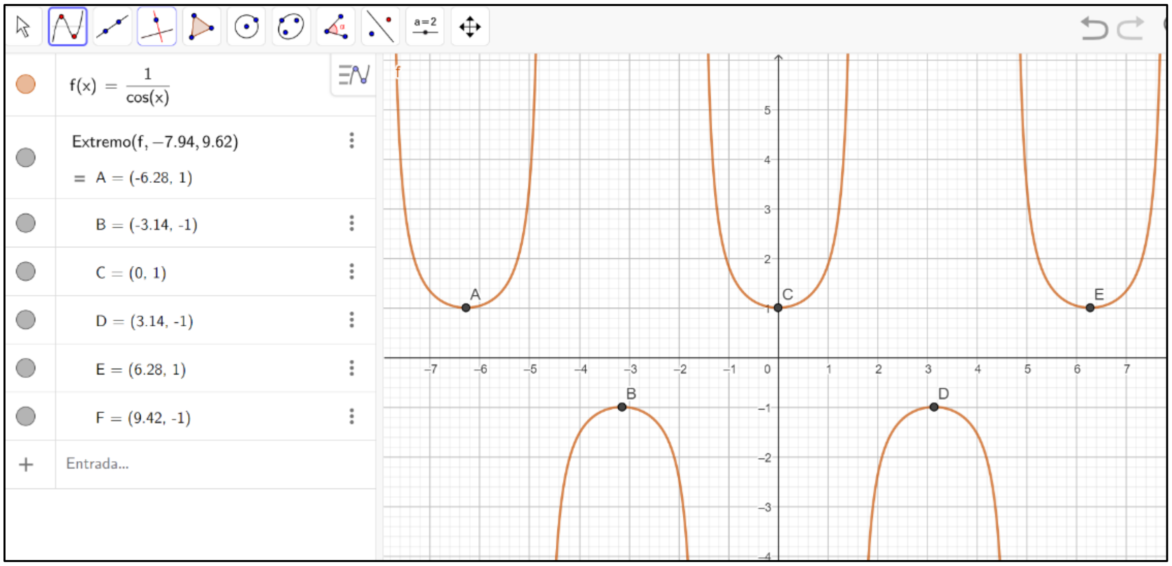


Figura A1. 17 - Pontos de máximo/mínimo local da função secante

A1.6 Comandos do GeoGebra para Simetrias (Reflexão, Inversão, Rotação, Translação)

São utilizados para esboçar gráficos de funções pares, ímpares, periódicas e inversas. Estão disponíveis no menu inicial do GeoGebra, como mostrado na Figura A1. 18.

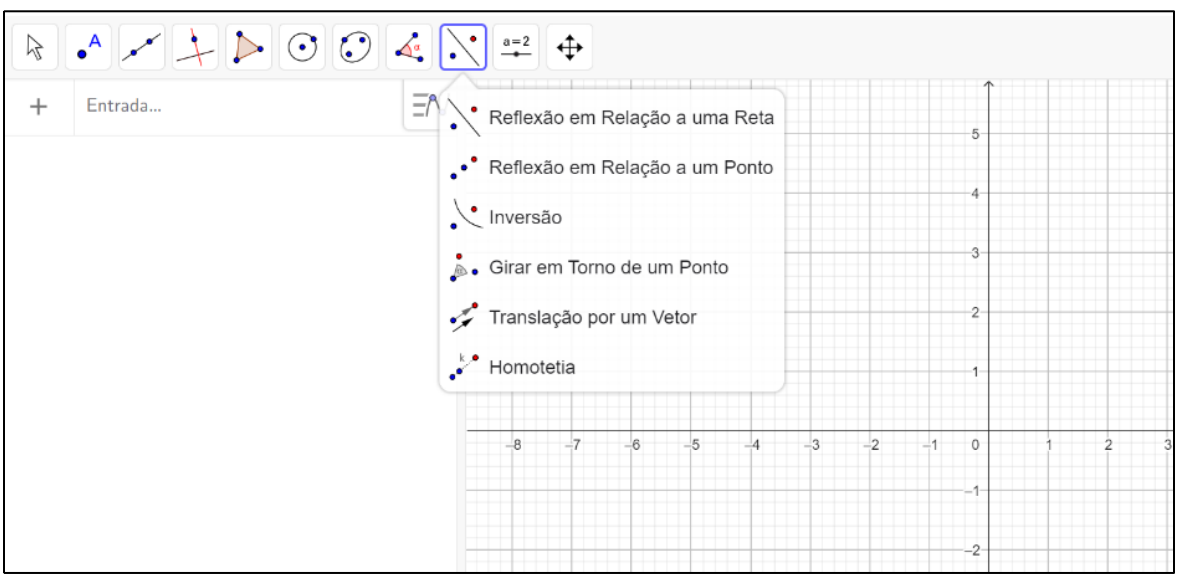


Figura A1. 18 - Comandos de simetria do GeoGebra

O exemplo a seguir apresenta o comando de **reflexão em relação a uma reta**.

Exemplo A1.9: *Esboce o gráfico de* $h: [0, +\infty[\to [10, +\infty[$, *tal que* $c = h(t) = 10 + 0{,}016t^2$ *e esboce o gráfico da função inversa,* h^{-1}.

Usando a janela de entrada, escolhemos a função e seu domínio. Em seguida, da mesma forma, esboçamos a reta $y = x$ e finalmente, usando a ferramenta de reflexão em relação a uma reta obtemos o gráfico da inversa, como mostra a Figura A1. 19.

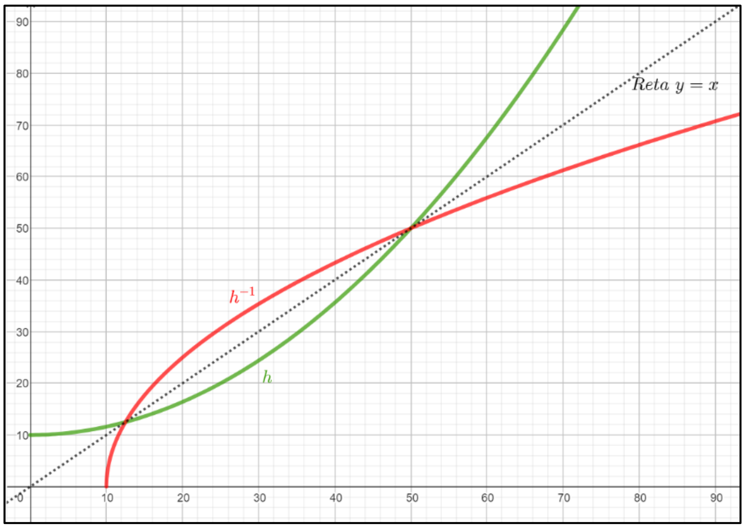


Figura A1. 19 - Reflexão em relação a uma reta

O exemplo A1.10, a seguir, apresenta o comando de **translação com respeito a um vetor**.

Exemplo A1.10: *Esboce o gráfico da função seno e utilize-o para obter o gráfico da função cosseno.*

Após obter o gráfico da função seno, utilizando a janela de entrada e o teclado virtual, basta utilizar o vetor $\vec{u}=(-\frac{\pi}{2}, 0)$ e a ferramenta de translação com respeito a um vetor, para obter o gráfico da função cosseno, como mostra a Figura A1. 20.

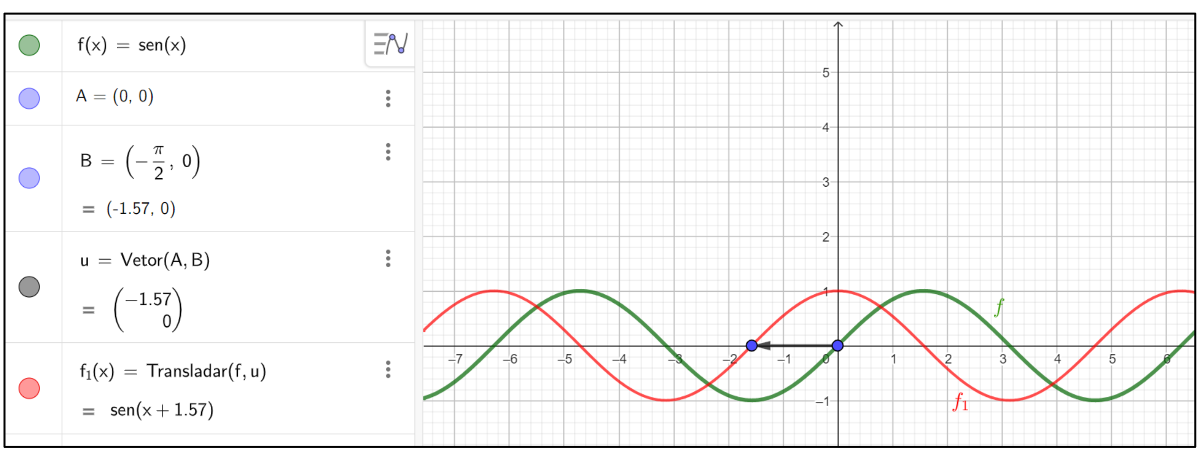


Figura A1. 20 - Translação de gráficos de função

A1.7 Comando "Movimento de um Ponto sobre um Objeto"

É utilizado para simulações dinâmicas. Basta ter um objeto (uma curva qualquer, por exemplo) e um ponto P sobre ela escolhido usando a opção **Ponto em Objeto**, no menu inicial do GeoGebra, canto superior esquerdo. Este ponto vai se movimentar ao movimentar o mouse, ou com animação com controle de velocidade escolhido.

Exemplo A1.11: *Esboce a parábola com foco no ponto* $F\ (4,1)$ *e diretriz sendo a reta cuja equação cartesiana é* $x = 2$, *escolha um ponto* A *sobre a parábola e movimente-o ao longo da curva.*

Utilizando a janela de entrada e o teclado virtual esboce o foco e a diretriz. Para esboçar a parábola é só utilizar o menu inicial do GeoGebra no canto superior esquerdo, o sétimo botão tem a opção desta curva. Depois é só escolher um ponto A sobre a parábola, utilizando a opção Ponto em Objeto. Ao lado das coordenadas do ponto escolhido, na janela de álgebra, vai aparecer um botão circular com uma seta no interior, conforme mostrado na Figura A1. 21, para usar a animação e controlar a velocidade.

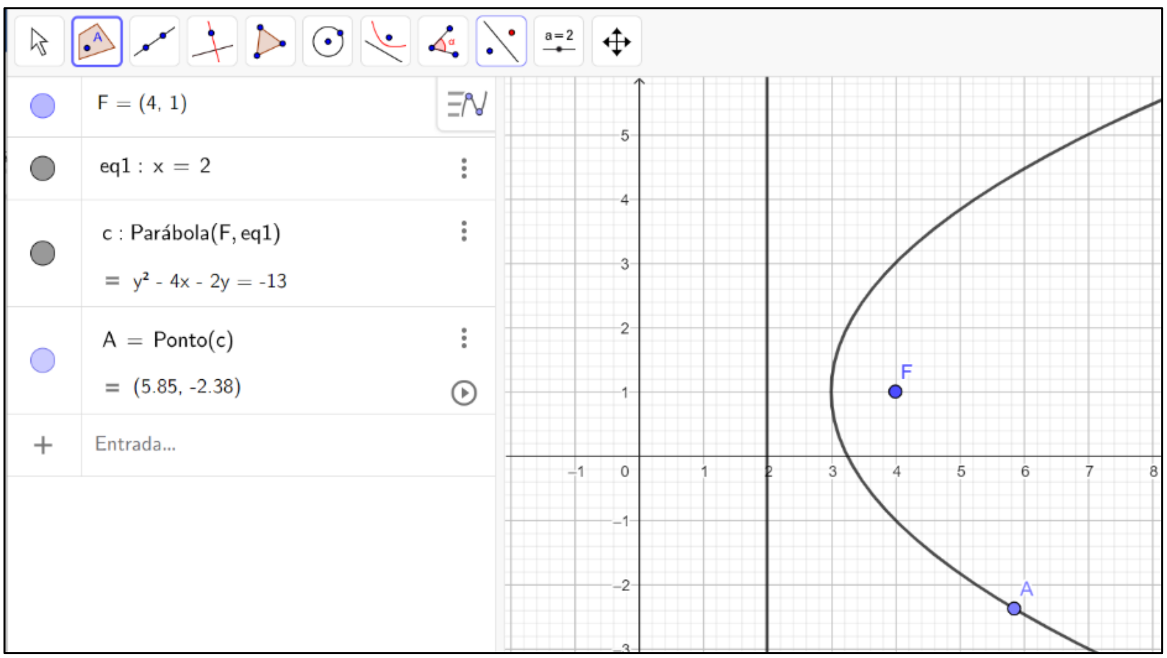


Figura A1. 21 - Parábola com ponto sobre objeto *A*

A1.8 Comando "Rastro"

É utilizado para simulações dinâmicas. Na janela de álgebra, no lado direito de pontos (de preferência que pertencem a curvas) existe um símbolo de três pontos. Ao clicar aí com o botão direito do *mouse*, no menu que surge existe a opção de **Rastro,** que pode ser habilitada para criar uma animação do ponto, cujo rastro forma os pontos da curva.

Exemplo A1.12: *Considere a parábola com foco no ponto F* $(4{,}1)$ *e diretriz sendo a reta cuja equação cartesiana é* $x = 2$. *Escolha um ponto A sobre a parábola e movimente-o de modo que o esboço da parábola apareça aos poucos (o rastro do ponto A).*

Segue-se inicialmente o procedimento do exemplo A1.10. Em seguida é usada a ferramenta de esconder objeto, já utilizada nos exemplos A1.1 e A1.2, ou seja, clica-se na bolinha colorida ao lado da parábola para escondê-la. Finalmente, ao lado do ponto *A* clica-se com o botão direito do *mouse* para acessar a opção de Rastro, como mostrado na Figura A1. 22. Assim o ponto *A* vai se movimentar de modo que onde ele passar vai surgir o seu rastro, ou seja, os outros pontos da parábola.

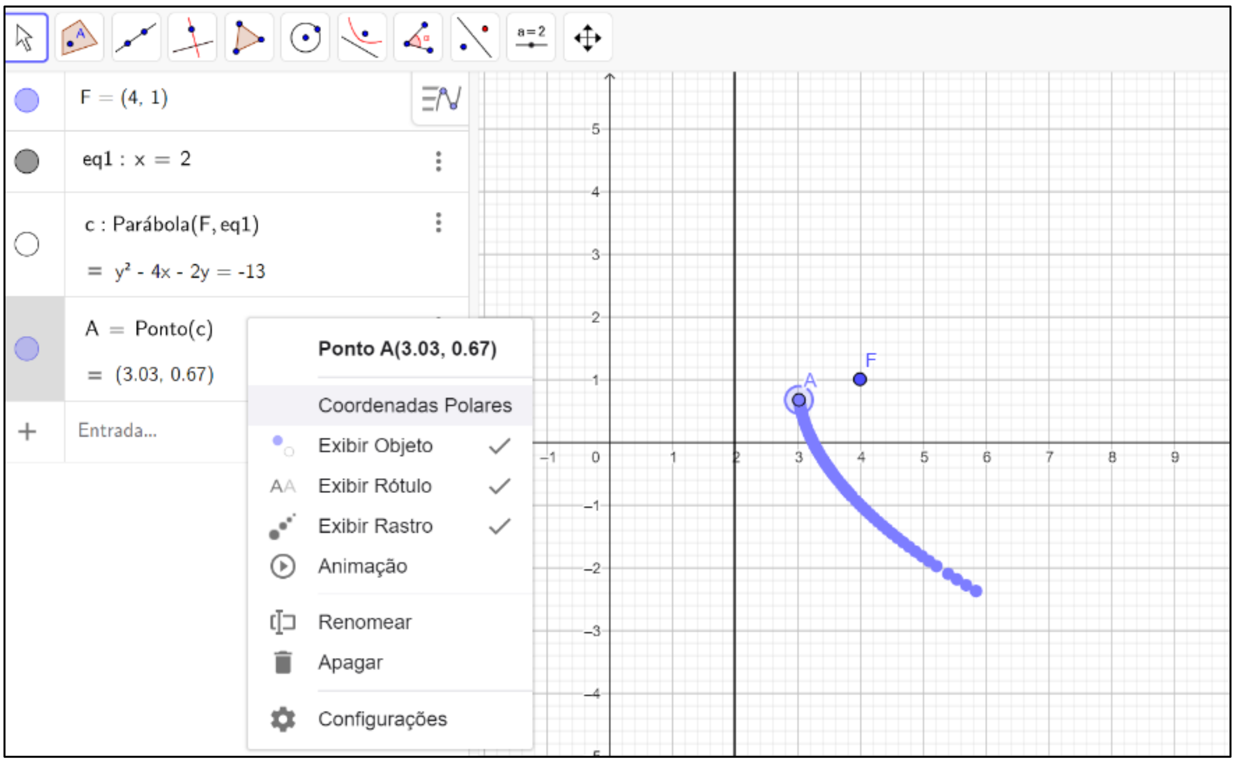


Figura A1. 22 - Esboço da parábola com animação usando comando Rastro

A1.9 Comando "Controle Deslizante"

É utilizado para simulações dinâmicas. Ao usar o controle deslizante é possível controlar objetos (números ou ângulos) de modo que eles possam assumir diferentes valores, com possibilidade de controle manual, ou animação automática.

Para criar um controle deslizante o primeiro passo é clicar no botão do menu inicial no canto superior esquerdo, indicado na Figura A1. 23 a seguir e escolher a opção **controle deslizante**.

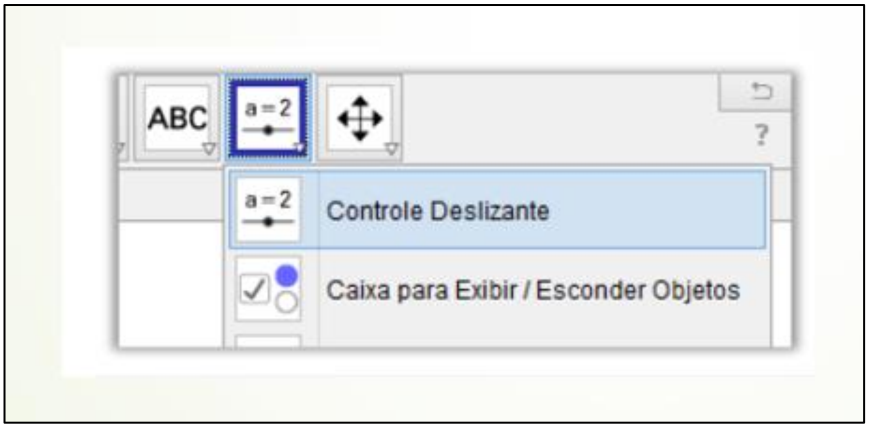


Figura A1. 23 - Passo 1: menu inicial, com botão onde tem a opção do controle deslizante

Com a ferramenta selecionada, o segundo passo é clicar no local da janela de visualização onde deve ficar o controle deslizante. Vai surgir uma caixa de diálogo com opções, apresentada na Figura A1. 24.

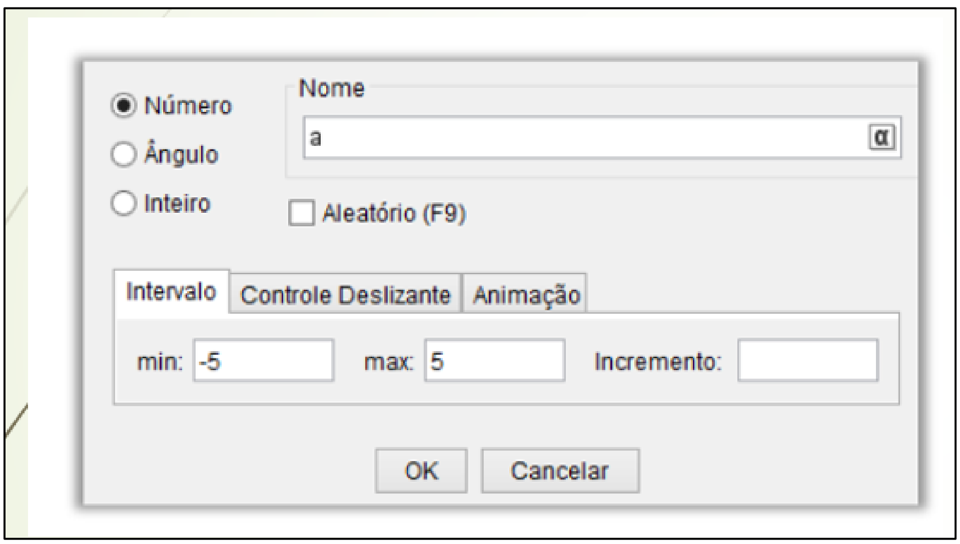


Figura A1. 24 - Passo 2: menu de opções do controle deslizante com primeira aba

Na parte superior esquerda da janela: definir **a variável**: um número qualquer, um ângulo ou ainda um número inteiro; definir **um nome**, esse nome será o mesmo que você usará para referenciar sua variável. Abaixo do nome: caixa de seleção que permite que você faça com que sua variável receba **um valor aleatório** cada vez que a construção é atualizada (pode ser forçada uma atualização pressionando a tecla F9). Na parte inferior você possui 3 abas. A primeira aba, mostrada na Figura A1. 24 trata do **intervalo** na qual sua variável será limitada e do **incremento** que ela receberá. Se você não definir um incremento o valor padrão será aplicado.

A segunda aba, apresentada na Figura A1. 25, trata de como o **controle deslizante** aparecerá na janela de visualização. Você definirá se ele será fixo, se será horizontal ou vertical e definirá a largura/altura em *pixels*.

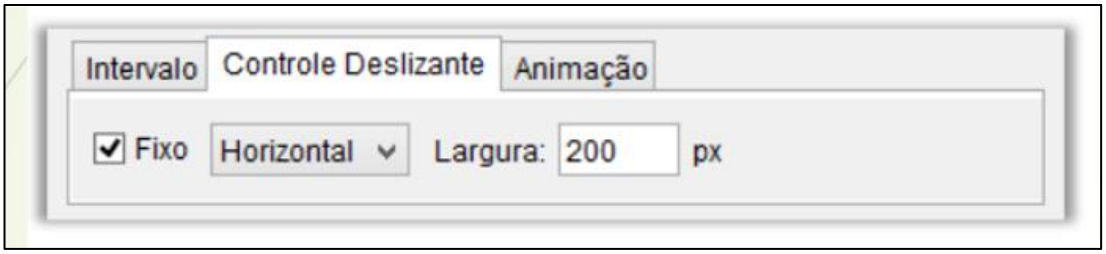


Figura A1. 25 - Passo 2: menu de opções do controle deslizante com segunda aba

A terceira aba diz respeito à **animação** que pode ser imposta sobre o controle deslizante: a **velocidade** e **o estilo de repetição (***Oscilando*, inicia no mínimo, é incrementado até o máximo e então passa a ser decrementado até o mínimo e então repete; *Crescente*, *Decrescente*, ambos repetindo; *Crescente (Uma Vez)* e então para. Para ativar a animação, basta você clicar com o botão direito no controle deslizante e então clicar em **Animar**. Para parar a animação basta desmarcar o "Animar".

Para escolher a variável que vai receber o controle deslizante, proceder da seguinte forma: quando for criar um objeto que necessita de um número, no lugar deste, inserir o nome atribuído ao controle deslizante.

Exemplo A1.13. *Crie 2 controles deslizantes a e b e utilize a caixa de entrada e o teclado virtual para construir o gráfico da função f, tal que $f(x) = ax + b$, na janela de visualização.*
a) Mova os controles e observe o aspecto do gráfico, como ele se modifica quando os valores dos controles são positivos, negativos, nulos e tire conclusões.
b) Verifique em que condições o gráfico é uma reta paralela ao eixo x.

Seguindo as instruções anteriores, podem ser criados os controles deslizantes a e b, números reais, com valores no intervalo $[-5, 5]$ e incremento 0.5, fixo, horizontal, largura $200px$, com estilo de animação "*Oscilando*".

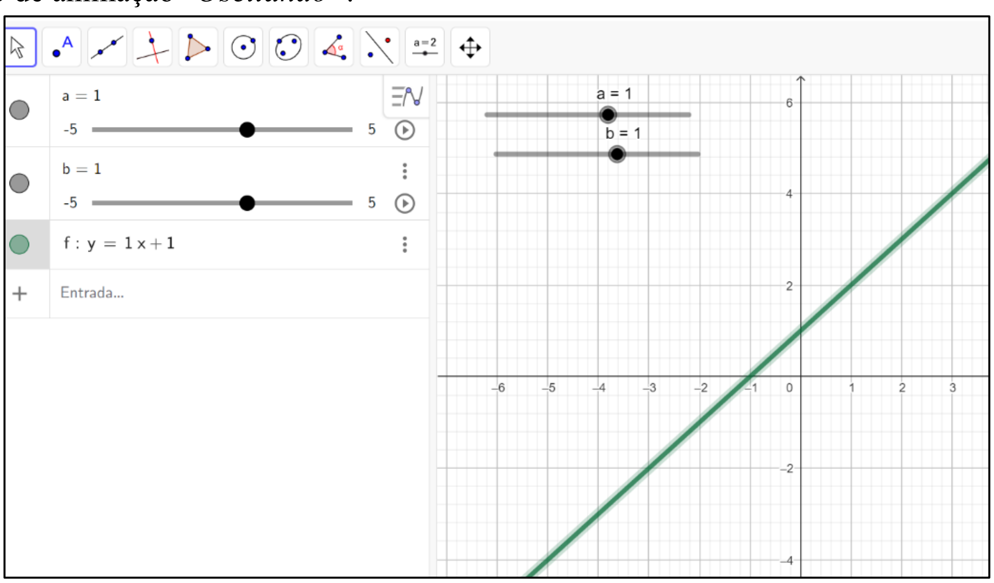


Figura A1. 26 - Controles Deslizantes para função afim

Completadas estas operações, na janela de entrada é só digitar a equação da reta, com os coeficientes substituídos pelos controles deslizantes a e b, e variar ou manualmente, ou com a opção "*Animar*", para observar o que ocorre com a reta e tirar conclusões.

A reta é paralela ao eixo x, quando a sua inclinação é nula, isto é, quando o controle deslizante a assume o valor zero, sendo o controle b qualquer valor. A Figura A1. 26. mostra que, se os controles deslizantes tiverem os valores $a = 1$ e $b = 1$ então a reta, gráfico da função f, terá o esboço da Figura A1. 26.

Exemplo A1.14. *Crie 3 controles deslizantes a, b, c e utilize a caixa de entrada e o teclado virtual para construir o gráfico da função f, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, na janela de visualização. Mova os controles e observe o aspecto do gráfico, como ele se modifica quando os valores dos controles são positivos, negativos, nulos e tire conclusões.*

Seguindo as instruções anteriores, podem ser criados os controles deslizantes a, b e c, números reais, com valores no intervalo $[-5, 5]$ e incremento 0.5, fixo, horizontal, largura $200px$, com estilo de animação *oscilando*. Completadas estas operações, na janela de entrada é só digitar a função quadrática, com os coeficientes substituídos pelos controles deslizantes a, b e c e variar ou manualmente, ou com a opção "Animar", para observar o que ocorre com o gráfico da função e tirar conclusões.

A Figura A1. 27 mostra que, se os controles têm valores $a = -0.5$, $b = 1{,}5$ e $c = 1$, então a parábola, gráfico da função f terá o esboço da figura.

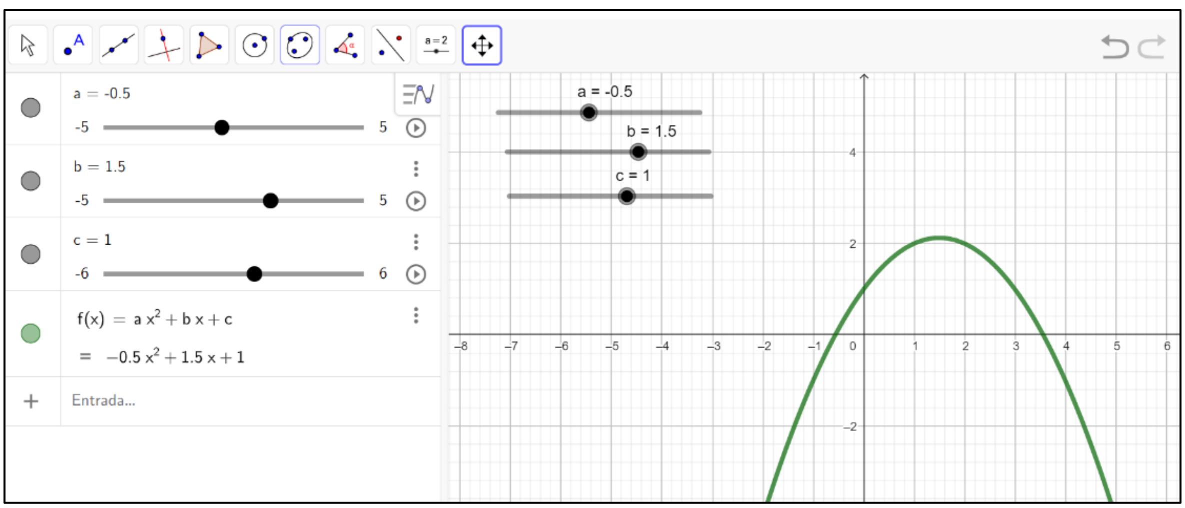


Figura A1. 27 - Controles Deslizantes para função quadrática

O próximo exemplo utiliza o controle deslizante e o comando para esboçar gráfico de uma função definida num intervalo fixado, já apresentado na seção A1.2. O exemplo foi utilizado no capítulo 2, seção 4, ao revisar funções definidas por várias sentenças cujos gráficos são formados por caminhos poligonais.

Exemplo A1.15. *Esboce o gráfico da função h, definida no intervalo* $[-1{,}3]$, *tal que* $h(x) = A + \left(\frac{7-2A}{8}\right)|x+1| - |x| + \frac{5}{4}|x-1| + \left(\frac{-3-2A}{8}\right)|x-3|$, *para cada valor real da constante* A (no intervalo $[-5{,}5]$).

Cria-se primeiro um controle deslizante para a constante A, variando entre -5 e 5, com incremento de 0,1. Depois é só seguir as instruções da seção A1.2, para o comando de gráfico de função definida apenas num intervalo fixado, de modo a obter o gráfico da Figura A1. 28 a seguir.

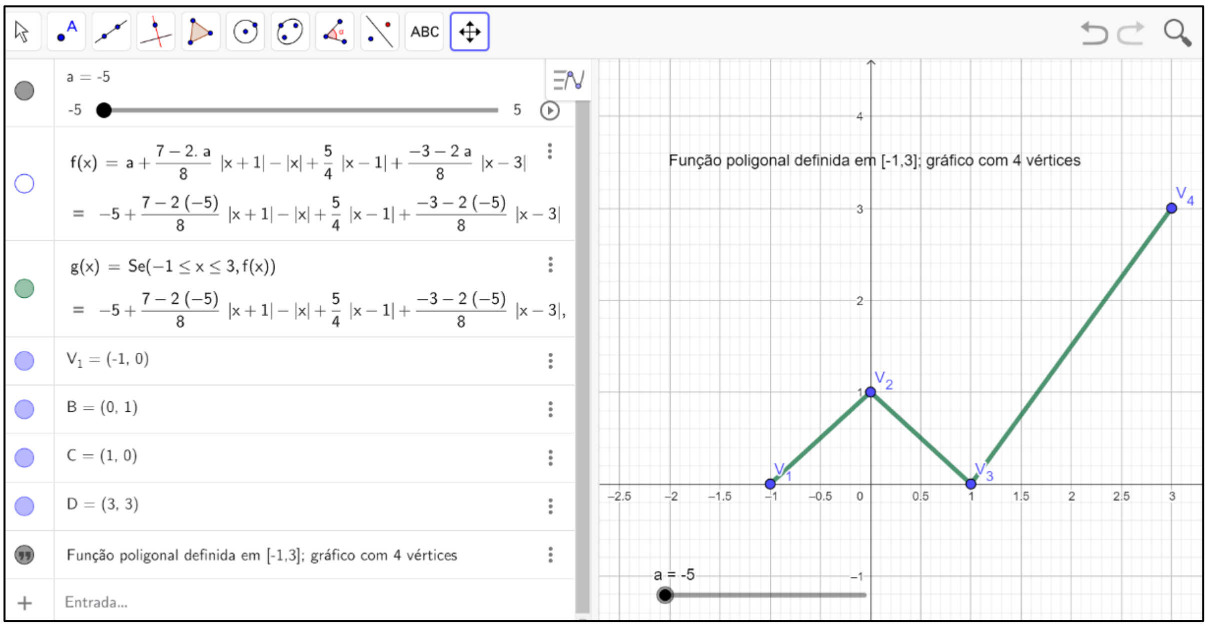


Figura A1. 28 -Função poligonal com parâmetro

A1.10 Comandos Associados “Controle Deslizante” e “Dupla Janela de Visualização”

São utilizados para simulações dinâmicas. São duas janelas de visualização. Para que apareça uma segunda janela de visualização basta clicar no menu do canto superior direito, na tela inicial, e escolher exibir. Aparece um novo menu, com esta opção, como mostra a Figura A1. 29.

Na primeira janela tem-se, em geral, uma figura, em que um parâmetro muda, seja uma medida (de comprimento, por exemplo- utilizando controle deslizante) ou uma posição (lugar de um ponto em um objeto, por exemplo). Na outra janela tem-se um gráfico de área ou volume associado à figura na primeira janela. Ao modificar o dado na primeira janela, o correspondente na segunda se modifica. A ferramenta rastro em geral é utilizada também.

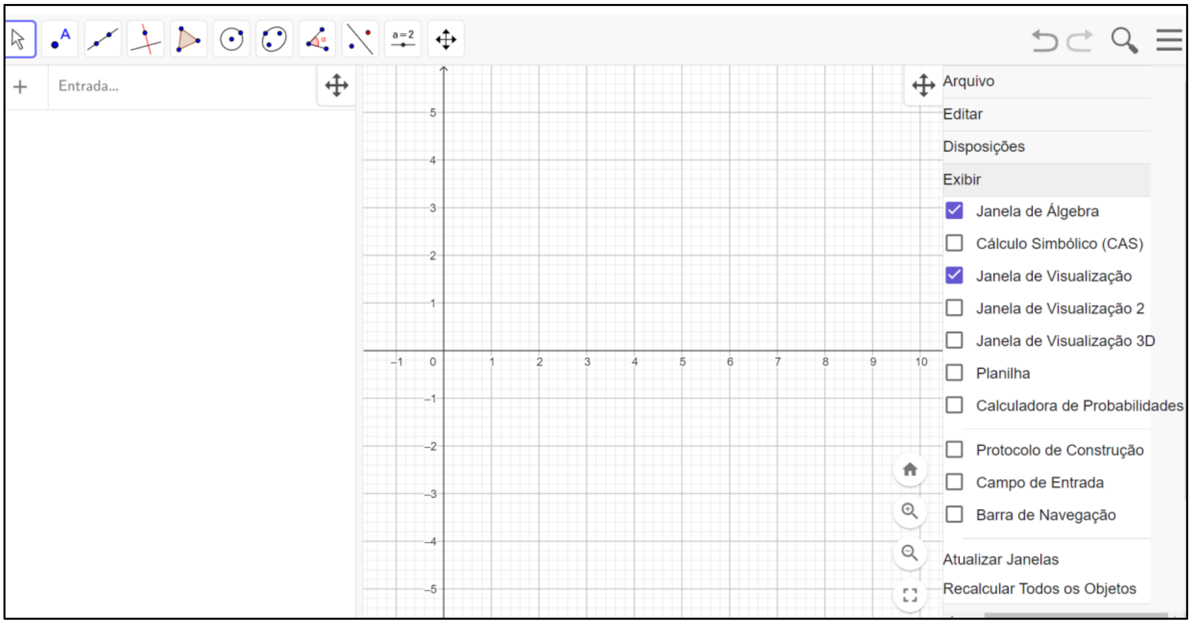


Figura A1. 29 - Menu para abrir segunda janela de visualização

Exemplo A1.16: *Um barco possui uma vela branca quadrada de 4m de lado, presa ao barco de modo que um dos lados do quadrado fique paralelo à água. Deseja-se pintar de vermelho uma região triangular na vela com um dos vértices sobre o ponto médio do lado mais alto da vela, o segundo vértice no lado inferior, paralelo a esse e o terceiro sobre um dos lados entre os dois. A distância do vértice superior direito da vela até o terceiro vértice do triângulo deverá ser a mesma que a do vértice inferior direito da vela até o segundo vértice (denote por x).*

a) Esboce a vela e a região triangular a ser pintada de vermelho e crie um controle deslizante para o segmento x.

b) Utilize uma segunda janela de visualização e a ferramenta rastro para fazer simulações da área da região triangular, para diferentes valores de x.

O primeiro passo é esboçar o quadrado na primeira janela de visualização, escolhendo os quatro vértices, em seguida o vértice da vela triangular no ponto médio do lado horizontal mais alto da vela.

A seguir é criado o controle deslizante (a para o GeoGebra, correspondente ao x do enunciado) e escolhidos os dois vértices do triângulo dependentes do valor do controle, que pode estar no intervalo $a \in [0,4]$. É esboçado o triângulo, escolhidas as cores, escondidos eixos e malha.

O passo seguinte é exibir a segunda janela de visualização, com a criação do ponto P, cuja abscissa é o valor a e a ordenada é o valor da área do triângulo (observar na janela de álgebra qual o símbolo escolhido para esta área). No sistema cartesiano da segunda janela deve aparecer o ponto P, com abscissa correspondente ao valor do controle deslizante.

O último passo é clicar no menu ao lado do ponto P, na janela de álgebra, para habilitar o rastro do ponto P.

Voltando ao controle deslizante, começando do valor mínimo e usando animação, vai sendo traçado o gráfico da função área do triângulo, como mostra a Figura A1. 30.

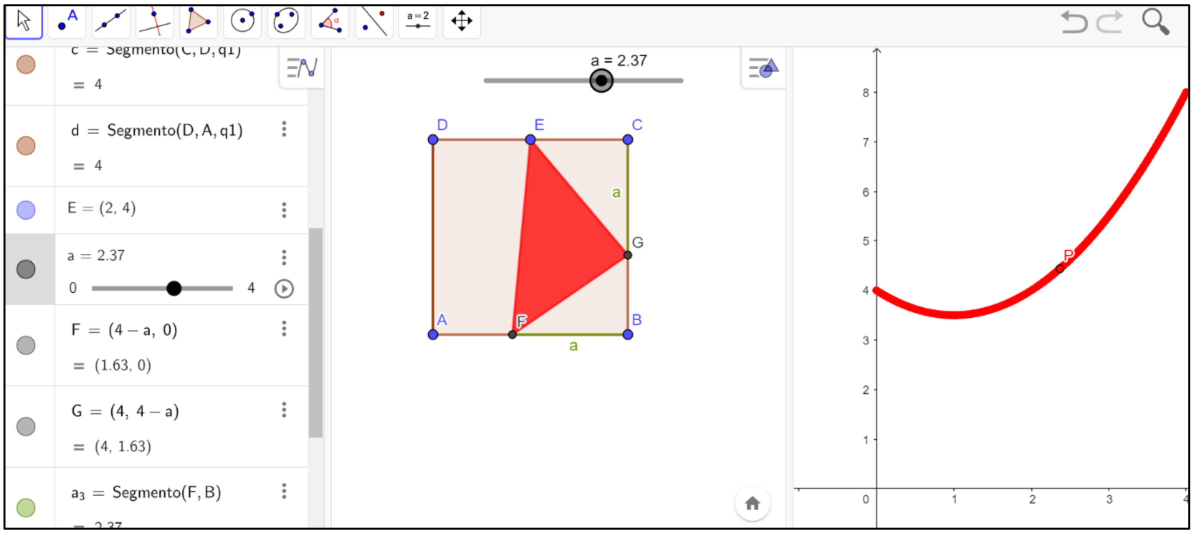


Figura A1. 30 - Dupla janela, controle deslizante e rastro

Apêndice A2: Evolução Histórica e uma Aplicação de Vetores

Até onde sabemos, o conteúdo relacionado a Vetores não faz parte (em geral) do currículo de Matemática na Educação Básica, no estado do Rio de Janeiro, mas somente da disciplina de Física. Nessa última disciplina, em geral, é ensinado rapidamente o que é um Vetor, somente de forma superficial, para utilização em problemas envolvendo decomposição dos movimentos de lançamento oblíquo nas duas direções do plano: horizontal e vertical. É importante passar para os alunos que os Vetores são muito importantes também para a Matemática.

A2.1 Um Pouco de História

A palavra Vetor significa portador ou ainda condutor e vem do latim *vector*, cujo significado original é “o que leva, o que transporta”, que, por sua vez, advém de *vehere*, de “levar”, “carregar”. O termo possui diversos significados, dependendo da área de conhecimento. Na Medicina, por exemplo, significa qualquer organismo que é capaz de transmitir um agente infeccioso (bactéria, parasita ou vírus). Na Matemática, num contexto mais geral, é qualquer elemento de um conjunto, denominado espaço vetorial, que possui determinadas propriedades. No Ensino Médio, em geral nas aulas de Física, temos o caso particular dos Vetores que são segmentos de reta orientados. Entretanto, os estudantes em geral enxergam Matemática e Física como desconectados e a estrutura de ensino torna difícil a colaboração entre os professores dessas duas disciplinas.

Algumas considerações sobre Vetores podem nos ajudar a compreender as dificuldades que os alunos apresentam com este tópico. Os vetores são entidades geométricas, com propriedades algébricas. O conceito (implícito) de quantidades vetoriais parece ser bem antigo, com a lei do paralelogramo para adição de vetores bem conhecida pela ciência de Aristóteles, desde o século IV a.C., e, mais tarde reaparecendo no *Principia*, de Newton.

Do que tem sido pesquisado até o presente momento, a história dos Vetores começa com a invenção da Geometria Analítica, por Descartes (1596-1650) e Fermat (1607-1665), de forma independente, e com ideias apresentadas por Leibniz (1646-1716).

Descartes, em 1637, propôs uma visão bem mais radical de vetores, como quantidades tais que “Assim como a Aritmética consiste em apenas quatro ou cinco operações, ou seja, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes.... em Geometria, para determinar algumas retas é somente necessário somar ou subtrair retas” (tradução nossa de texto de Chappell, Iqbal, Hartnett e Abott, p. 1, 2016).

Leibniz, numa carta para Huyghens (datada de 08/09/1679), apresenta a seguinte crítica:

> eu ainda não estou satisfeito com a Álgebra, porque ela não fornece os métodos mais rápidos ou as construções mais bonitas na Geometria. Por isso eu acredito que nós precisamos ainda de outra análise, que seja distintamente geométrica ou linear e que expressará localização de forma direta, como a Álgebra expressa magnitude de forma

> direta. E eu acredito que encontrei a forma de fazer isto e que nós possamos representar figuras e mesmo máquinas e movimentos por meio de caracteres, do jeito que a Álgebra representa números ou magnitudes. (tradução nossa, de texto de Crowe (1967, p. 3), obtido do original em francês publicado em Leibniz (1850, vol.1, p.382)).

Leibniz, entretanto, nunca levou em consideração a direção de uma reta. Desta forma, Leibniz não avançou, porque não introduziu o conceito de negativo em geometria. Muitos matemáticos, até o século XIX, tiveram problemas com quantidades negativas. O texto *Álgebra*, publicado em 1673, escrito por Wallis (1616-1703), foi um dos primeiros que associa negativo com sentido oposto, representando uma primeira conceitualização de vetores unidimensionais.

A ideia de segmentos de reta orientados foi desenvolvida mais tarde, a partir de representações geométricas de quantidades imaginárias no plano bidimensional. Um dos primeiros trabalhos nessa direção foi publicado por Argand (1768-1822), em 1806.

Hamilton (1805-1865), em 1833 comunicou à Academia irlandesa um artigo em que a álgebra dos números complexos era definida como uma álgebra de pares ordenados de números reais. Em suas pesquisas usou quádruplos ordenados (a, b, c, d) de números reais, tendo como casos particulares os números reais e os complexos. Ele os chamou de quatérnios. Definiu as operações algébricas de adição e multiplicação (não comutativa). Nasceu assim uma álgebra abstrata, a primeira não comutativa. Sua obra *Lectures on Quaternions* foi publicada em 1853.

Em 1844, com a publicação de *Die Lineale Ausdehnungslehre* por Grassmman (1809-1877), os vetores e a Álgebra Linear foram inventados. Na introdução do livro, Grassmman afirma que a sua inspiração foi justamente a ideia de negativo em Geometria. Entretanto este livro não foi compreendido na sua época e foi ignorado, sendo que as ideias de Hamilton foram difundidas e utilizadas amplamente nas descobertas da Física. Surgiram alguns problemas, devido à natureza não comutativa.

Gibbs (1839-1903) e Heaviside (1850-1925) consideraram que a álgebra dos quaternions não era a mais adequada para descrever de forma correta vetores cartesianos em 3 dimensões e desenvolveram, de forma independente, uma teoria de análise vetorial. Esta teoria, por sua vez, não possui operação de divisão e necessita de duas novas operações de multiplicação distintas, os produtos interno e vetorial, no lugar da multiplicação dos quaternions.

Travou-se uma "batalha dos físico-matemáticos" defendendo cada teoria. Acabou sendo adotada a teoria de Gibbs-Heaviside, embora tenha sido desenvolvida uma teoria que unifica as de Hamilton e Gibbs-Heaviside. Esta teoria compõe as Álgebras geométricas desenvolvidas por Clifford (1845-1879), a partir da generalização das ideias de Hamilton e Grassmamn. Para entender a importância destas álgebras, basta dizer que elas são essenciais para a formulação completa da Mecânica Quântica.

Em resumo, podemos dizer que os Vetores são, por natureza, objetos híbridos, com uma natureza dual algébrico-geométrica, a qual é um componente essencial no seu aprendizado. Os Vetores também estão ligados à história da Física, porque equações e teorias físicas puderam ser descritas utilizando vetores, provocando a evolução e ampliação da teoria. Além disso, os Vetores podem ser utilizados na Matemática, para resolver de forma mais direta e simples problemas diversos.

A2.2 Uma Aplicação de Vetores

A seguir é abordado um problema contextualizado, envolvendo conteúdos de Vetores e Geometria Analítica, que pode ser utilizado como disparador do estudo destes tópicos. Este tipo de problemas, se for incluído em uma disciplina de Pré-Cálculo, pode ser importante para melhorar a compreensão e o resultado acadêmico dos alunos do Ensino Superior, tanto na primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), como em Física e em Álgebra Linear.

Destacamos que eles também certamente podem ser explorados por alunos do Ensino Médio, tanto nas aulas de Matemática como de Física.

A resolução deste tipo de problemas deve envolver, sempre que for possível e desejável, a conversão entre diferentes registros de representação, além de utilizar recursos do *software* de geometria dinâmica GeoGebra como facilitadores para a visualização, compreensão ou solução dos problemas.

Sendo assim, será empregado o MERP, já comentado no capítulo 1 deste livro.

Problema A2.1: *Slackline é um esporte no qual o atleta deve se equilibrar e executar manobras estando sobre uma fita esticada. Para a prática do esporte as duas extremidades da fita são fixadas de forma que ela fique a alguns centímetros do solo. Quando uma atleta de massa igual a 80 kg está exatamente no meio da fita, está se desloca verticalmente, formando um ângulo de* 10^o *com a horizontal, como esquematizado na Figura A2.1. Sabe-se que a aceleração da gravidade é (aproximadamente) igual a* $10\ ms^{-2}$, $\cos(10^o) = 0{,}98$ *e* $\text{sen}(10^o) = 0{,}17$.

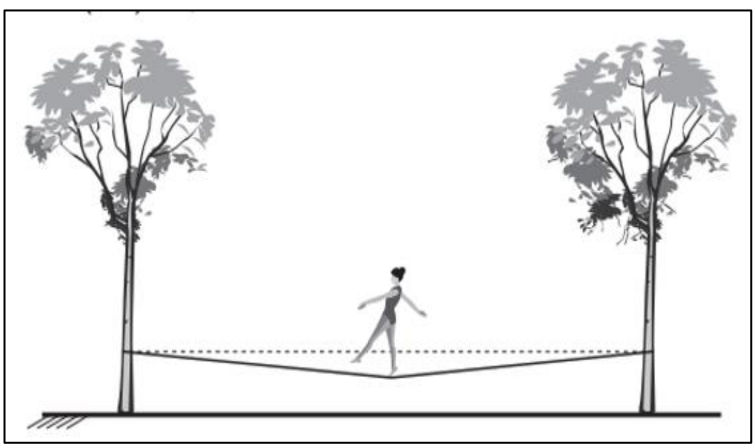


Figura A2.1 - Atleta praticando *slackline*
Fonte: ENEM (2019)

a) Utilize o GeoGebra para representar graficamente um esquema das forças atuando no ponto da fita onde a atleta se encontra.
b) Determine a força (em Newtons) que a fita exerce em cada uma das árvores, por causa da presença da atleta naquele ponto.

c) Suponha agora que a atleta esteja em um outro ponto da fita, de modo que o ângulo da fita com a horizontal, no lado esquerdo, seja 30^o *e no lado direito seja* 20^o. *Represente graficamente o esquema de forças neste caso.*
d) Determine a força (em Newtons) que a fita exerce em cada uma das árvores, neste caso. (Adaptado da questão 117, caderno amarelo, ENEM (2019)).

Antes de resolver o problema A2.1, será apresentado o conceito de vetor, motivado por conta de as forças estarem claramente associadas tanto à intensidade quanto à direção e sentido (representados pelos ângulos).

Denomina-se **vetor** ao conjunto de todos os segmentos orientados que forem **equipolentes**, isto é, que tenham o mesmo módulo, direção e sentido. Para reconhecer um vetor, introduzimos um referencial para comparação dos segmentos, por meio de um sistema de coordenadas cartesianas. A Figura A2.2 mostra um vetor $\vec{u}$, representado por 3 segmentos orientados equipolentes, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$.

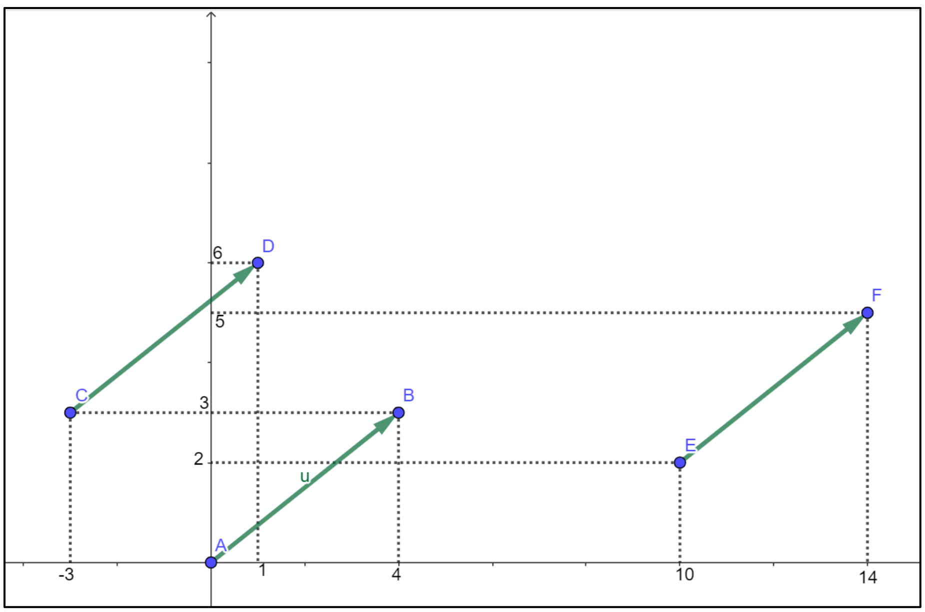


Figura A2.2 - Vetor $\vec{u}$

Podemos dizer que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ se inicia no ponto A (denominado origem) e termina no ponto B (denominado extremidade). De modo similar, os pontos C e E são origem, e D e F são extremidades, respectivamente, dos segmentos orientados $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$. O **sentido** destes segmentos é "para onde apontam", portanto de A para B, de C para D, de E para F.

O **módulo** de um segmento orientado é o comprimento do segmento, no caso de $\overrightarrow{AB}$ é a distância entre os pontos A e B. É representado da forma $|\overrightarrow{AB}|$.

A **direção** do segmento é a inclinação da reta suporte dele em relação a um referencial (no caso do vetor $\vec{u}$, a direção de todos os segmentos orientados equipolentes tem que ser a inclinação com respeito a um mesmo referencial), no caso da Figura A2.3, uma semirreta horizontal.

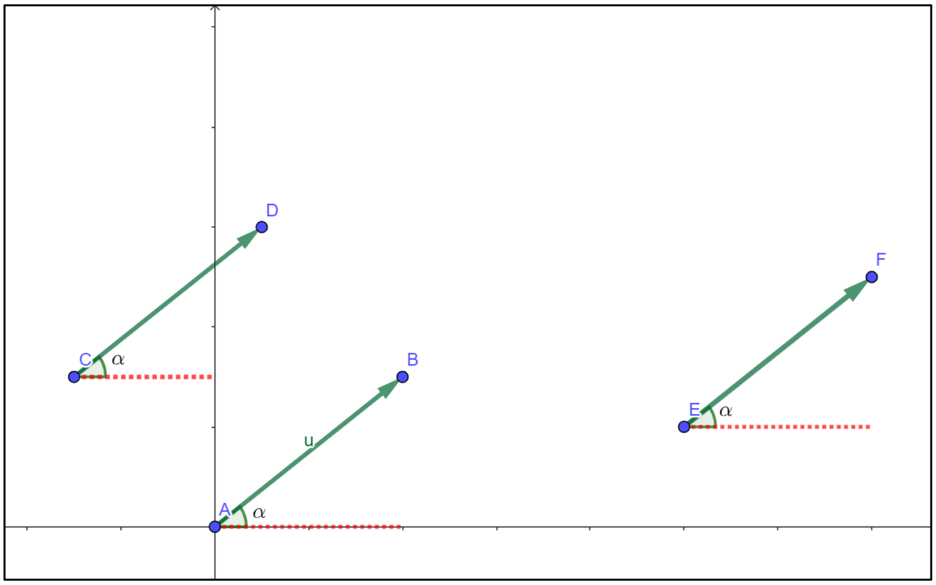


Figura A2.3 - Módulo, direção e sentido

Podemos observar que um vetor (no nosso caso, o vetor $\vec{u}$) não está fixo no plano cartesiano, enquanto cada segmento orientado sim, por ser determinado pelos seus pontos origem e extremidade que estão fixos. Importante notar que $\overrightarrow{AB}$ é a única representação do vetor $\vec{u}$ cuja origem é a origem do sistema cartesiano. É chamada **forma canônica do vetor.**

Num abuso de notação, imaginando que o vetor $\vec{u}$ leve o ponto A até o ponto B, poderemos escrever $A + \overrightarrow{AB} = B$, ou $\overrightarrow{AB} = B - A$. Teremos então $\overrightarrow{AB} = (4,3) - (0,0) = (4,3)$. De forma similar, $\overrightarrow{EF} = F - E = (14,5) - (10,2) = (4,3)$ e $\overrightarrow{CD} = D - C = (1,6) - (-3,3) = (4,3)$.

Concluímos, justificando via semelhança de triângulos, que todos os segmentos orientados equipolentes (isto é, que representam o mesmo vetor), têm a mesma **representação numérica**.

É necessário cuidado para não confundir, pois, por exemplo, $(1,2)$ pode representar um ponto do plano cartesiano, a forma canônica de um vetor que tem extremidade no ponto $(1,2)$ e um intervalo aberto com extremidade esquerda em 1 e direita em 2 (nesse último caso, pode-se evitar confusão usando a notação $]1,2[$). Tem que ter atenção ao contexto em que aparece a expressão, para determinar o significado correto.

Voltando à representação numérica de $\vec{u} = (4,3)$, neste referencial cartesiano podemos determinar o módulo do vetor utilizando o teorema de Pitágoras, no triângulo ABN da Figura A2.4, por exemplo. Teremos então $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

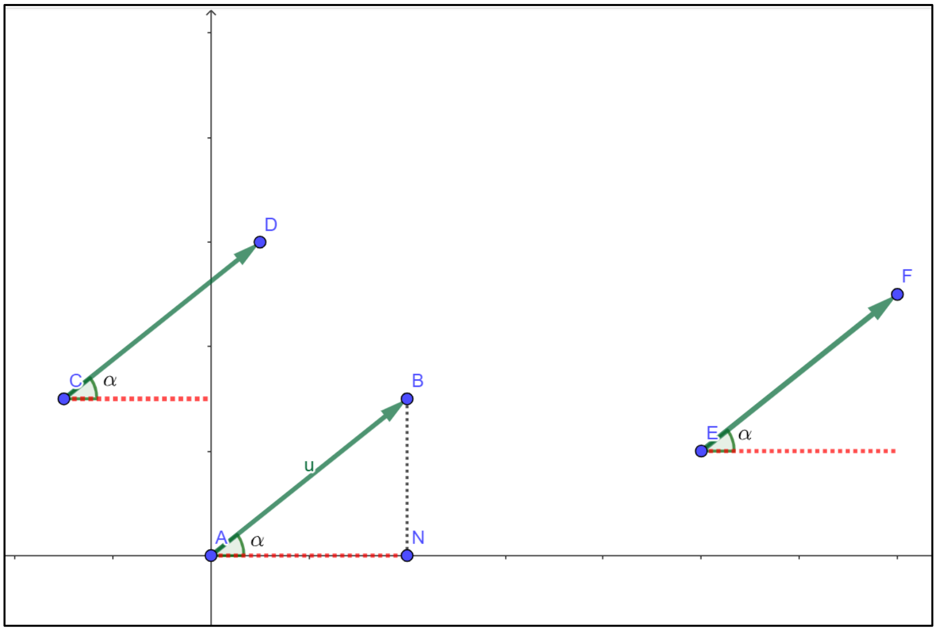


Figura A2.4 - Módulo do vetor $\vec{u}$

De modo geral, suponha que $\overrightarrow{AB}$, com origem em $A(x_o, y_o)$ e extremidade em $B(x_1, y_1)$, é uma representação qualquer do vetor $\vec{u} = (a, b)$, ou seja, $a = x_1 - x_0$ e $b = y_1 - y_0$. Teremos que o seu módulo, $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Da figura A2.4, considerando ainda o triângulo ABN, podemos notar que $\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{|\vec{u}|}$ e $\cos(\alpha) = \frac{a}{|\vec{u}|}$, assim $\boldsymbol{\vec{u}} = (|\boldsymbol{\vec{u}}|\boldsymbol{\cos(\alpha)}, |\boldsymbol{\vec{u}}|\boldsymbol{\text{sen}(\alpha)})$.

Alguns vetores especiais são o vetor nulo, cuja representação numérica é $\vec{0} = (0,0)$ e o **vetor unitário**, que é aquele que tem módulo 1. O versor de um vetor não nulo $\vec{u}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido que $\vec{u}$. O versor do vetor $\vec{u} = (4,3)$ será o vetor $\vec{v} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

Vetores opostos têm mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos opostos, por exemplo, no caso $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4,3)$, seu oposto é $\overrightarrow{BA} = (-4, -3)$, denominado -$\vec{u}$. **Vetores colineares** são aqueles que têm a mesma direção, ou seja, se tiverem representantes dois segmentos orientados pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas. Dois vetores não colineares quaisquer estão sempre no mesmo plano, ou seja, são **coplanares**.

Antes de voltarmos ao problema A2.1, vamos definir algumas operações com vetores e explorar a decomposição de um vetor usando outros mais simples.

A **soma**, ou **resultante de dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definida, geometricamente, de duas formas equivalentes, como mostram as figuras A2.5 (a), A2.5 (b) e A2.5 (c) a seguir.

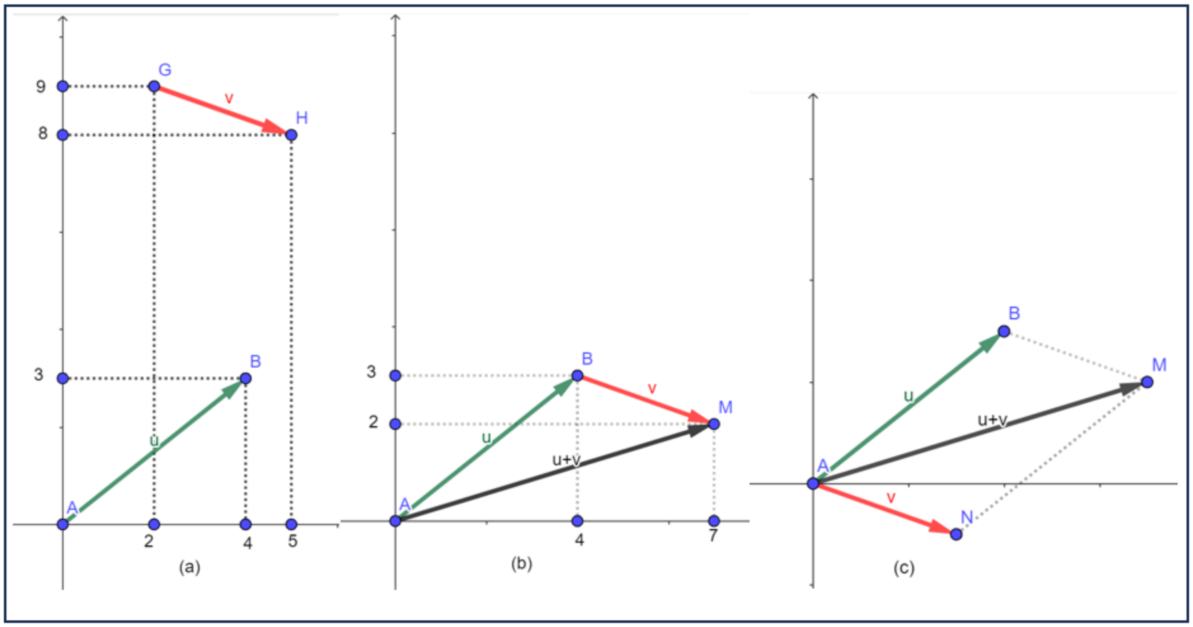


Figura A2.5 - (a) Dois vetores, (b) Soma da forma 1, (c) Soma da forma 2

A Figura A2.5 (a) mostra dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$, representando um vetor $\vec{u}$ e $\overrightarrow{GH}$, representando um vetor $\vec{v}$. Para obter o vetor resultante, $\overrightarrow{u+v}$, pode-se proceder como na Figura A2.5 (b).

Considera-se um representante de $\vec{v}$ com origem na extremidade de $\vec{u}$, ou seja, no ponto B. O vetor resultante será então representado por $\overrightarrow{AM}$.

Uma outra forma de obter o mesmo resultado é considerar um representante de $\vec{v}$ com origem na mesma origem de $\vec{u}$, ou seja, no ponto A. O vetor resultante será representado então pelo segmento que é a diagonal a partir de A, do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (**regra do paralelogramo**), como mostra a Figura A2.5 (c).

Algebricamente, temos que a soma de dois vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ é igual ao vetor $\vec{u}+\vec{v} = (a + c, b + d)$

A operação denominada **multiplicação de um vetor por um número real** (chamado de escalar em geral) ocorre da seguinte forma: dado um vetor $\vec{u} = (a, b)$ não nulo e um escalar $k \neq 0$, o produto de $\vec{u}$ por k é um outro vetor, $\vec{w} = k\,\vec{u} = (ka, kb)$.

Este vetor $\vec{w}$ tem a mesma direção do vetor $\vec{u}$, o mesmo sentido, se $k > 0$, e sentido oposto, se $k < 0$ e $|\overrightarrow{w}| = |k|.|\overrightarrow{u}|$

A Figura A2.6 mostra o vetor $\vec{u} = (4,3)$, o vetor $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{u} = \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ e o vetor $\vec{v} = 3\vec{u}$ $= (12,9)$.

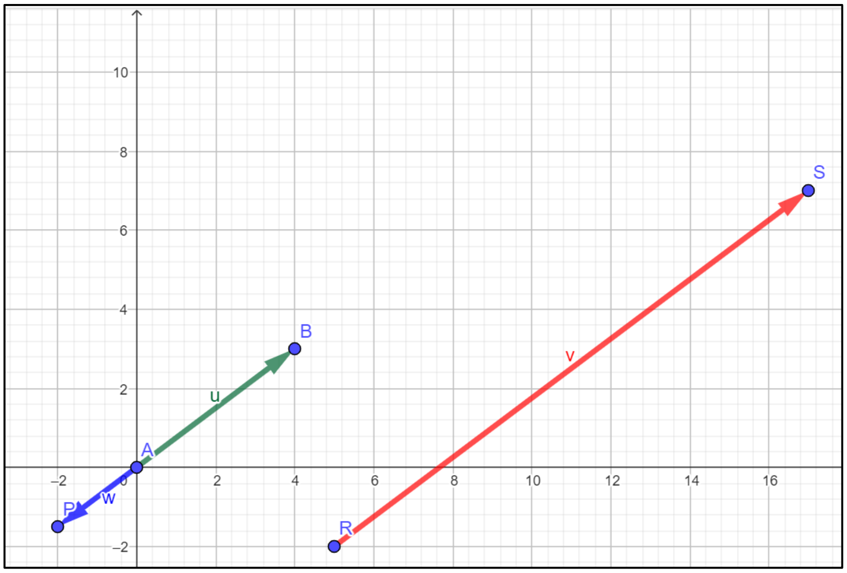


Figura A2.6 - Produto de um vetor por um número real

A próxima operação com vetores não é uma nova operação na verdade, e sim uma combinação das duas anteriores. Trata-se da **diferença entre dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, $\vec{u} - \vec{v}$. O vetor resultante desta operação é obtido somando-se o vetor $\vec{u}$ com o vetor obtido após multiplicar o vetor $\vec{v}$ pelo número real $k = -1$ (obtendo o vetor oposto a $\vec{v}$). O vetor $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1).\,\vec{v}$. Desta forma é fácil observar como é a operação geometricamente, como mostra a Figura A2.7.

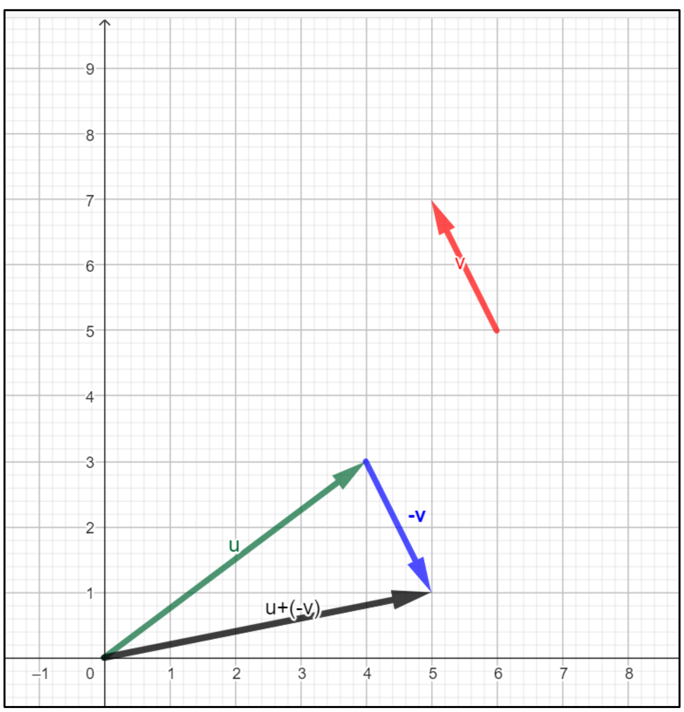


Figura A2.7 - Diferença entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Dados dois vetores quaisquer não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, considerando dois representantes deles, com a mesma origem, o **ângulo $\boldsymbol{\theta}$ entre esses dois vetores** costuma ser importante na resolução de problemas. Para evitar ambiguidades, é considerado sempre o menor ângulo, situado no intervalo $[0, \pi]$. Podemos notar que quando $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentido, quando $\theta = \pi$, eles têm a mesma direção, mas sentido contrário e quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **vetores ortogonais** ($\vec{u} \perp \vec{v}$). O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer outro vetor.

Com auxílio das operações anteriores, podemos decompor qualquer vetor $\vec{u}$ utilizando dois outros vetores não colineares $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, supondo todos 3 situados no mesmo plano. Basta simular, numa primeira etapa, que $\vec{u}$ é o vetor resultante da soma de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ e, numa segunda etapa, modificar os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, multiplicando-os por números reais adequados k_1 e k_2, para tornar verdadeira esta operação, obtendo $\vec{u} = k_1.\overrightarrow{v_1} + k_2.\overrightarrow{v_2}$. Dizemos que $\vec{u}$ é uma **combinação linear dos outros dois vetores**.

Assumindo que seria interessante usar esta possibilidade para simplificar (e não para complicar), observemos que um vetor qualquer $\vec{u} = (a, b) = (a, 0) + (0, b)$ utilizando a operação da soma de vetores. Em seguida, ainda podemos obter $\vec{u} = a(1,0) + b(0,1)$ utilizando a operação do produto de um vetor por um número real. Os vetores utilizados são os mais simples não nulos. Além disso são ortogonais. São denotados por $\vec{\imath} = (1,0)$ e $\vec{\jmath} = (0,1)$.

Como qualquer vetor do plano cartesiano pode ser representado como combinação linear de $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$, o conjunto formado pelos dois é chamado uma **base** para o plano cartesiano. Já que são ortogonais e unitários, esta base é chamada **base ortonormal**. Ela é a mais simples, por isso considerada um padrão, ou seja, uma **base canônica**. Temos então sempre $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, como mostra a Figura A2. 8.

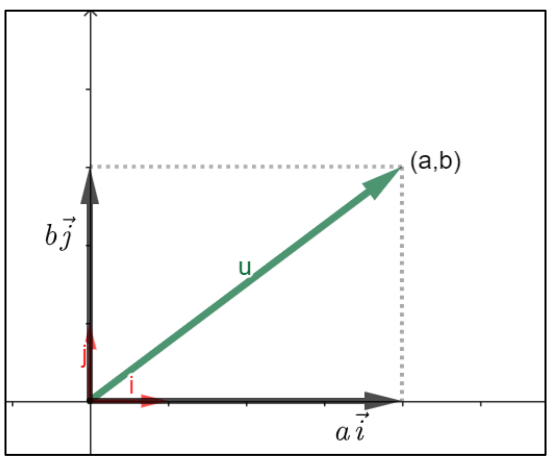


Figura A2. 8 - Decomposição de $\vec{u}$ na base canônica

Retornemos agora ao problema A2.1. Utilizando o GeoGebra, podemos esboçar na Figura A2. 9 o esquema de forças atuando no ponto da fita onde a atleta se encontra, escolhido para ser a origem O do referencial (sistema cartesiano). Os pontos onde a fita está presa nas árvores são A_1 e A_2 e a atleta se encontra no ponto médio (fletido) M, da fita, sujeitos ao mesmo ângulo de flexão.

Nestas condições as forças de tensão que a fita exerce sobre as árvores, $\overrightarrow{T_1}$ e $\overrightarrow{T_2}$, têm a mesma magnitude, ou seja, $|\overrightarrow{T_1}| = |\overrightarrow{T_2}| = T$. No ponto O também atua uma terceira força, $\overrightarrow{F_g}$, a da gravidade, causada pela massa da atleta. O ângulo entre as forças de tensão e o eixo horizontal, coincide com o ângulo de deslocamento da fita (duas paralelas cortadas por uma transversal).

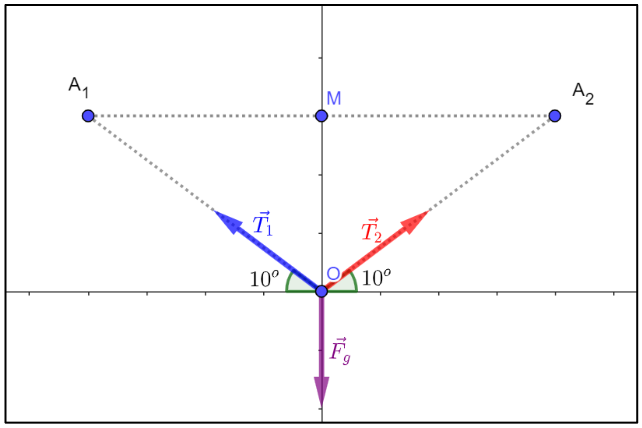


Figura A2. 9 - Esquema de forças no ponto médio

Decompondo as forças em componentes horizontais e verticais teremos então que as forças de tensão $\overrightarrow{T_1} = -T\cos(10^o)\vec{\imath} + T\text{sen}(10^o)\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{T_2} = T\cos(10^o)\vec{\imath} + T\text{sen}(10^o)\vec{\jmath}$ e que a força da gravidade $\overrightarrow{F_g} = 0\vec{\imath} - mg\vec{\jmath} = -800\vec{\jmath}$.

No ponto O da fita, há uma situação de inércia, então, pela primeira lei de Newton, a resultante das forças que atuam em O é nula, tanto na direção vertical, como na horizontal.

Na vertical então teremos $T\text{sen}(10^o) + T\text{sen}(10^o) - 800 = 0$, portanto $T = \frac{400}{\text{sen}(10^o)} = \frac{400}{0{,}17}$. Logo $T \cong 2{,}353 \times 10^3\ kg.m.s^{-2} =\ 2{,}353 \times 10^3$ Newton é a força (em Newtons) que a fita exerce em cada uma das árvores. Temos então a solução do item b.

No caso do item c, a atleta não se encontra mais no ponto médio da fita, os ângulos de deslocamento vertical não são iguais. Recorrendo novamente ao GeoGebra poderemos obter um esboço do esquema de forças nesta situação, que está apresentado na Figura A2. 10.

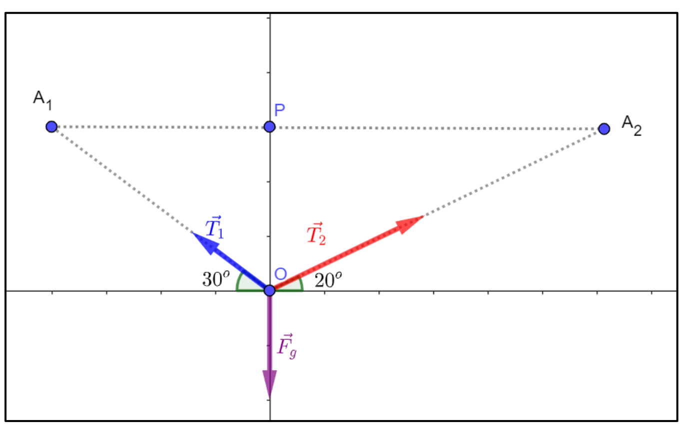


Figura A2. 10 - Esquema de forças na fita em ponto não médio

Decompondo as forças em componentes horizontais e verticais teremos então que as forças de tensão $\overrightarrow{T_1} = -|\overrightarrow{T_1}|\cos(30^o)\vec{\imath} + |\overrightarrow{T_1}|\text{sen}(30^o)\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{T_2} = |\overrightarrow{T_2}|\cos(20^o)\vec{\imath} + |\overrightarrow{T_2}|\text{sen}(20^o)\vec{\jmath}$ e que a força da gravidade $\overrightarrow{F_g} = 0\vec{\imath} - mg\vec{\jmath} = -800\vec{\jmath}$.

No ponto O da fita, novamente há uma situação de inércia, então, pela primeira lei de Newton, a resultante das forças que atuam em O é nula, tanto na direção vertical, como na horizontal.

Na direção horizontal então teremos $-|\overrightarrow{T_1}|\cos(30^o) + |\overrightarrow{T_2}|\cos(20^o) = 0$ e na vertical teremos $|\overrightarrow{T_1}|\text{sen}(30^o) + |\overrightarrow{T_2}|\text{sen}(20^o) - 800 = 0$. Da primeira equação conseguirmos obter que a magnitude da primeira força de tensão, $|\overrightarrow{T_1}| = |\overrightarrow{T_2}|.\frac{\cos(20^o)}{\cos(30^o)}$. Substituindo na segunda equação chegaremos a $|\overrightarrow{T_2}| = \frac{800\cos(30^o)}{\text{sen}(50)}$. Então $|\overrightarrow{T_1}| = \frac{800\cos(20^0)}{\text{sen}(50)}$.

No caso do item d, sabemos que $\cos(20) = \cos(30-10) = \cos(30)\cos(10) + \text{sen}(30)\text{sen}(10)$. Aproximando o valor de $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, teremos cos (20) $\cong$ 1,78. De modo similar, $\text{sen}(50) = \text{sen}(60-10) = \text{sen}(60)\cos(10) - \text{sen}(10)\cos(60) \cong 1{,}61$. Desta forma teremos que a magnitude das forças de tensão será $|\overrightarrow{T_2}| \cong 0{,}43 \cdot 10^3$ N e $|\overrightarrow{T_1}| \cong 0{,}88 \cdot 10^3$ N.

Uma atividade adicional poderia ser proposta para os alunos: utilizar ferramentas do GeoGebra, como o controle deslizante, para variar o ponto da fita e consequente alteração dos ângulos (logo das forças).

Referências

Referências do Capítulo 1

ABRAMOVICH, S. Computers in Mathematics Education: An Introduction. In: Computer in the Schools 30 (1-2): 4-11 (2013).

BARROS, J.; SILVA, A. O; SILVA, G.L. Uma releitura histórico-epistemológica para o ensino do conceito de função, Boletim do GEPEM Nº 9, 2021.

BIAZUTTI, A.C.; NASSER, L.; TORRACA, M.; BARROS, J.; OLIVEIRA, A. Conversão de Representações na transição do Ensino Médio para o Superior. In: CONGRESO ARGENTINO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, XIII, 2018, La Plata. *Anais...* Universidad Nacional de La Plata. La Plata, 2018.

BIAZUTTI, A.C., VAZ, R.F.N. e ANDRADE, L.R.P., Discutindo o Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas (MERP), Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM), V1, 2020.

BIAZUTTI, A.C., VAZ, R.F.N. e ANDRADE, L.R.P., Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas (MERP): uma alternativa metodológica para o ensino de Pré-Cálculo, ICOCIME 3, UERJ, 2023.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio. MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/a-area-de-matematica. Acesso em: 27/09/2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). *Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP)*. Disponível em https://www.obmep.org.br/ , Acesso em 12/02/2025.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

COSTA, A. C.; BITTENCOURT, R. R.; FERNANDES, F. A. Análise de erros em questões sobre função afim. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. Anais... São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6771_3608_ID.pdf. Acesso em: 27/10/2020.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. *Primeiros Elementos de Semiótica:* sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DANTE, Luiz. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática. 1ª a 5ª séries. Para estudantes do curso de Magistério e professores do 1º grau*. São Paulo: Ática, 2003.

DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática*. São Paulo: Ática, 2010.

DORICHENKO, S. *Um círculo Matemático de Moscou.* IMPA. 2016.

DUVAL, R. Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, IREM de Strasbourg, p. 235-253, 1988.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano:* registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática:* Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, p.11-33, 2003.

DUVAL, R. Gráficos e Equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *REVEMAT*, v. 06, n. 2, p. 96-112, 2011.

DUVAL, R. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*, Revista Eletrônica de Educação Matemática, v.7, n.2, Trad. Méricles Thadeu Moretti; Brasil, UFSC, 2012.

EVES, H. Introdução à história da matemática / tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M.; FRANCO, V. S. Geometria euclidiana – um estudo com o *software* GeoGebra. Maringá: EDUEM, 2010.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software* Maple**.** *Ciênc. educ. (Bauru)*[online], vol.22, n. 2, p.465-487, 2016.

IFRAH, G. *História Universal dos Algarismos*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.

KRULIK, S; RUDNIK, J.A. Reasoning and Problem Solving- A Handbook for Elementary School Teachers. Massachusetts: Allyn and Bacon, 1993.

MENDONÇA, A. F. & NETO, H. B. Nicole Oresme: Perspectivas Históricas para Uso em Sala de Aula. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática,* Ceará, v. 3, n. 9, p. 48– 62, dez. 2016. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM. Acesso em: 24 ago. 2020.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*, SBEM, p. 43-58, 2009.

NASSER, L.; CARDOSO, E. Adaptação da teoria de Van Hiele para o tópico de funções no Ensino Médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. Anais... São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5104_2377_ID.pdf. Acesso em: 04/10/ 2020.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M.A. Mobilizações Didáticas para aprendizagem do Conceito de função. In: FONSECA, L. (Org.) *Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem.* 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016, p. 183-196.

NASSER, L.; BIAZUTTI, A.C.; TORRACA, M.; BARROS, J. Investigando estratégias para aprimorar o desempenho em Cálculo I. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN, XIV, 2019, Medellin. *Anais...* CIAEM, Medellin, 2019.

NASSER, L. Resolução de Problemas- Uma análise dos fatores envolvidos, Boletim GEPEM, número 22, 1988.

PEIRCE, C. S. *Semiótica*. São Paulo: Editora Perspectiva, 2005.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema - Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.
POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Ed. Interciência. 1978.
PONTE, João Pedro; MATA-PEREIRA, Joana; HENRIQUES, Ana. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.
RAGAB A., METZGER A. al-Bīrūnī, Abū Rayḥān. In: Amils R. et al. (eds) Encyclopedia of Astrobiology. Springer, Berlim, Heidelberg (2014).
REZENDE, W. M.; BOTELHO, L. Um breve histórico do conceito de função. *Caderno Dá Licença***:** revista do programa de extensão da Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, v. 6, p. 64–75, dez. 2007. Disponível em: http://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf. Acesso em: 12/10/2020.
ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2017.
RÜTHING, D. Some Definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki, *Mathematical Intelligencer*, Springer, v. 6, n. 4, p. 72–77, dez. 1984.
SCHNEIDER, Azuaite. https://www.geogebra.org/m/G7YXJEYN, 2018.
SILVA, A. P. P. N. *A leitura de Fontes Antigas e a Formação de um Corpo Interdisciplinar de Conhecimentos: um exemplo a partir do Almagesto de Ptolomeu*. 2013. 95f. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 24 jul. 2013. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16105/1/AnaPPNS_DISSERT.pdf. Acesso em: 12/10/2020.
SMITH, D.E., History of Mathematics, volume II, Special Topics of Elementary Mathematics – Nova Iorque: Dover Publications, 1953.
STRUIK, D.J., *A Source Book in Mathematics*, *1200–1800*, Harvard Univ. Press, 1969
TINOCO, L. *Construindo o Conceito de Função*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, projeto Fundão, 2001.
VERLEY, J.-L.; BRIN, P.; GRÉGOIRE, M.; HALLEZ, M.; JOZEAU, M.-F.; LACOMBE, M.; MICHEL-PAJUS, A.; SERFATI, M. Mathématiques: approche par des textes historiques. Repères-IREM, n. 3, p. 43-52, abr. 1991. Disponível em https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/iwr91014_1702753069076-pdf . Acessado em 06/07/2025.
YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century, Arch. Hist. Ex. Sci., Moscou, v. 16, p. 37–85, 1976.

Referências do Capítulo 2

BACKES, L.H., Resolução de Problemas: uma alternativa para o ensino de funções, TCC-Licenciatura em Matemática, UFRGS, 2008.
BIAZUTTI, A.C., VAZ, R.F.N. e ANDRADE, L.R.P., Discutindo o Método de Ensino por meio

da Resolução de Problemas (MERP), Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM), V1, 2020.

BIAZUTTI, A.C; VAZ, R. F.N. & ANDRADE, L.R.P. Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas: uma alternativa para o Pré-Cálculo. In: A.J. Batista, R.F.N. Vaz & S.A. Santos (Orgs.). *Aplicações e Reflexões da Resolução de Problemas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática,* 218-248. Boa Vista, RR: EDUCITEC, 2021.

BOYER, C. História da Matemática. Ed. Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional de Cursos* (*ENEM)*, questão 159, prova azul, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional de Cursos* (*ENEM)*, questão 137, prova LIBRAS e questão 141, prova regular, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional de Cursos* (*ENEM)*, questão 157, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional de Cursos* (*ENEM)*, questão 166, reaplicação/PPL, 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional de Cursos* (*ENEM)*, questão 170, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional de Cursos* (*ENEM)*, questão 157, prova azul, segundo dia, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Relatório Síntese do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE)- Matemática-2005.* Disponível em *https://download.inep.gov.br/download/enade/2005/relatorios.* Acessado em 12/02/2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE)- Matemática*, questão 11, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação e Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). *Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP),* questão 2, nível 2, 1ª fase, 2019. Disponível em https://www.obmep.org.br/provas.htm , Acesso em 12/02/2025.

BRASIL. Ministério da Educação e Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). *Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP),* questão 15, nível 3, 2ª fase, 2014. Disponível em https://www.obmep.org.br/provas.htm , Acesso em 12/02/2025.

BRASIL. Receita Federal. Prova e ESAF-Auditor Fiscal da Receita Federal, Prova 1, questão 50, 2009. Disponível em https://qconcursos.com/questoes-de-concursos/provas/esaf-2009-receita-federal-auditor-fiscal-daa-receita-federal-prova-1. Acesso em 18/02/2025.

EVES, H. Introdução à história da matemática / tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FATEC. Questões e soluções de Vestibulares, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.

FIGUEIREDO, D.G. e NEVES, A.F. Equações Diferenciais Aplicadas, IMPA, 1997.

FUVEST. Questões e soluções de Vestibulares, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D. e PÉRIGO, R., Matemática, Volume único, Ensino Médio, Ed. Atual, São Paulo, SP, 2011.

MUNIZ, Leonardo. Teorema de Etiene. In: Revista do Professor de Matemática - RPM nº 99, ano 37, p.32-33. 2019. Disponível em: https://portal1.iff.edu.br/nossos-campi/bom-jesus-do-itabapoana/arquivos/2019/ArtigoOTeoremadeEtiene.pdf. Acessado em 11/01/ 2025.

NASSER, L. (coord), Matemática Financeira na Escola Básica: uma abordagem prática e visual, Ed. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2010.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M.A. Mobilizações Didáticas para aprendizagem do Conceito de função. In: FONSECA, L. (Org.) *Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem.* 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016, p. 183-196.

PRESMEG, N.; NENDURADU, R. An Investigation of a Preservice Teacher's use of representations in solving algebraic problems involving exponential relationships. In: CHICK, H.L. & VINCENT, J.L. (Eds.) Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 24, p.105-112, 2005.

STRUIK, D. *A concise History of Mathematics*. Ed. G. Bell and sons, 1954.

TORRACA, M.; COUTINHO, A.J.; IVO, C.; MENEZES, L.F. Insubordinação Criativa: alunos ensinando professores sobre o Imposto de Renda retido na Fonte. *Anais do IX EEMAT*, FEBF, Duque de Caxias, RJ, 2024.

PUC-CAMPINAS. Questões e soluções de Vestibulares, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.

UERJ. Questões e soluções de Vestibulares, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.

UFPR. Questões e soluções de Vestibulares, 2013, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.

UFRN. Questões e soluções de Vestibulares, 2000, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.

UNICAMP. Questões e soluções de Vestibulares, APUD Backes L.H., Resolução de Problemas: uma alternativa para o ensino de funções, TCC-Licenciatura em Matemática, UFRGS, 2008.

UNIFESP. Questões e soluções de Vestibulares, 2018, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.

UNIME. Questões e soluções de Vestibulares, 2014-1, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.

Referências do Capítulo 3

AZEVEDO, A. O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções: uma experiência com alunos do ensino secundário. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Portugal, 2009.

BACKES, L.H., Resolução de Problemas: uma alternativa para o ensino de funções, TCC-Licenciatura em Matemática, UFRGS, 2008.

BALOMENOS, R., FERRINI-MUNDY, J. e DICK, T. Geometria: prontidão para o Cálculo. In: M. Lindquist e A. Shulte (org.). Aprendendo e Ensinando Geometria. Atual Editora, São Paulo, 1994.

BARBOSA, L.F.G. Resolução de problemas de otimização utilizando desigualdades e GeoGebra. TCC-Licenciatura em Matemática, UFRJ, 2023.

BIAZUTTI, A.C; VAZ, R. N., ANDRADE, L. Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas: uma alternativa para o Pré-Cálculo. In: BATISTA, A.J., VAZ, R.F.N. e SANTOS, S.A. (Org.) *Aplicações e Reflexões da Resolução de Problemas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.* Boa Vista: 1ª ed. EDUCITEC, 2021. p. 218-248.

BIAZUTTI, A.C.; VAZ, R.N.; ANDRADE, L. Discutindo o Método de Ensino por meio da Resolução de Problemas (MERP), RBEM, V. p., 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). *Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP),* questão 2, nível 3, fase 2, 2014. Disponível em https://www.obmep.org.br/provas.htm , Acesso em 12/02/2025.

BRASIL. Ministério da Educação e Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). *Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP),* questão 3, nível 3, fase 2, 2017. Disponível em https://www.obmep.org.br/provas.htm , Acesso em 12/02/2025.

BRASIL. Ministério da Educação e Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). *Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP),* questão 4, nível 3, fase 2, 2021. Disponível em https://www.obmep.org.br/provas.htm , Acesso em 12/02/2025.

CESGRANRIO. Questões do Vestibular, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.

DINIZ, M., NERI, E. ALMEIDA, A., VEIGA, E., COELHO, T., Problemas de Otimização, Projeto Newton, Pará, 2013, https://aedmoodle.ufpa.br/course/view.php?id=4005. Acesso em 12/10/2020.

DORNELLES FILHO, A. A. Uma questão em hidrodinâmica, Caderno Catarinense de Ensino de Física, V. 13, nº 1, p.76-79, abr.1996.

FERREIRA, B.S. Problemas de Máximos e Mínimos. Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores. Lisboa, Universidade de Lisboa, 2012.

FGV-SP. Questões de Vestibular, 2013, Apud SOUZA, J. Matemática, Volume 1, Ensino Médio, Coleção Novo Olhar, Ed. FTD, SP, 2010.

FONTE, A. C. *Médias, desigualdades e problemas de otimização*. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática (PROFMAT)) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

GONÇALVES, A.C.S. Utilizando o GeoGebra no processo de aprendizagem de conceitos e propriedades de funções, dissertação de mestrado (PROFMAT), Rio de Janeiro, UFRJ, 2020.

LIMA, E.L, CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E. e MORGADO, A.C., A Matemática do Ensino Médio, Volume 1, SBM, 2000.
MELLO, Jose Luiz Pastore. Explorando o Ensino da Matemática. Artigos. Volume 1. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, págs.152 a 155, 2004.
NASSER, L., SOUSA, G. e TORRACA, M. Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo? Anais do V SIPEM, Petrópolis, 2012.
SILVA, B.R. Atividades Interativas para uma Abordagem Dinâmica de Funções Reais na Educação Básica: Um Estudo de Caso. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). Niterói, UFF, 2016.
SOUSA, G., TORRACA, M., NASSER, L., SILVA, G. e BARBOSA, L.F., Problematizando a transição do Ensino Básico para o Superior, na aprendizagem de Cálculo I. Anais do XIV ENEM, realizado *online*, 2022.
SOUZA, J., Matemática, Volume 1, Ensino Médio, Coleção Novo Olhar, Ed. FTD, SP, 2010
STEWART, J. Cálculo. Vol. 1. 7ª ed. (tradução). São Paulo: Thompson Learning ,2013.
THOMAS, G. Cálculo, Vol. 1. 11ª ed. (tradução). São Paulo: Addison Wesley, 2009.
UERJ. Questões e soluções de Vestibulares, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.
UNESP. Questões e soluções de Vestibulares, APUD Projeto Medicina, disponível em https://projetomedicina.com.br , Acesso em 12/02/2025.
UNICAMP. Questões e soluções de Vestibulares, APUD BACKES, L.H., Resolução de Problemas: uma alternativa para o ensino de funções, TCC-Licenciatura em Matemática, UFRGS, 2008.

Referências do Apêndice A1

HOHENWARTER, M. Ajuda do GeoGebra (em português). Disponível em https://help.geogebra.org/hc/en-us/articles/10445800380957-GeoGebra-Tools-and-Features-An-Overview, acessada em 10/02/2025.
WENDET, A., OLIVEIRA, E., DALMOLIN, L., XAVIER, L., BIDEL, A. Noções Básicas de Cálculo e Geometria Plana com o GeoGebra, 2012, disponível em https://www.ufsm.br, acessada em 10/02/2025.

Referências do Apêndice A2

ASSEMANY, D. (org). Vetores- Geometria Analítica. UFRJ, 144 p. 2012.
BOYER, C. História da Matemática. Ed. Edgard Blucher, 2003.
BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional de Cursos* (*ENEM)*, questão 117, prova amarela, 2019.
CHAPPELL, J.M., IQBAL, A., HARTNETT, J.G. & ABOTT, D. *The Vector Algebra War: a Historical Perspective*, In IEEE Acess, V.4, p.1997-2004, 2016.
CROWE, M.J. *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*. Notre Dame: University Press. Reed., New-York: Dover, 1967.

DANTE, L.R. Matemática: contexto e aplicações. Ed. Ática, V1, 2003.
DORIER, J.L. *Vectors and translations in mathematics and physics*. In: A. Beckmann, V. Freinan & C. Michelsen. Proceedings of Macas 2015: International Symposium of Mathematics and its connections to the Arts and Sciences. Hildesheim: Franzbecker, 2016.
JULIANELLI, J.R., CATALDO, J.C. Vetores, Geometria Analítica e Álgebra. MatVest, 2004.
KATZ, V. A. *History of Mathematics*, Ed. Pearson, 2008.
LEIBNIZ, G. W. *Leibnizens Mathematische Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, 2 vols., Berlin: Julius Pressner. Reed. OEuvres Mathématiques de Leibniz, Paris: Librairie de A. Frank Editeur, 1853.
MEDEIROS, L.A., ANDRADE, N.G. &WANDERLEY, A.M. Álgebra Vetorial e Geometria. Ed. Campus, 1980.
ROQUE, T. História da Matemática. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Ed. Zahar. 2012.
STRUIK, D. *A concise History of Mathematics*. Ed. G. Bell and sons, 1954.

Índice Remissivo

G

H

J

M

O

P

Q

R

S

T

V

Applets para Diversos Problemas e Funções do Livro

Um *applet* é um pequeno programa de computador que executa uma tarefa específica. O *software* GeoGebra permite a criação de *applets*, sem que seja necessário conhecer linguagens de programação. O criador do *applet* é o responsável pelo conteúdo matemático a ser incluído, utiliza as ferramentas do programa GeoGebra para desenvolver este conteúdo de uma forma interessante (estática ou preferencialmente dinâmica) e o GeoGebra traduz este trabalho em linguagem de programação, para poder ser rodado em uma página da web. Além disso o *applet* permite interação com o usuário, o que o torna útil num processo de ensino-aprendizagem.

A criação de um *applet* no GeoGebra envolve várias etapas: (1) traçar os objetivos matemáticos a serem atingidos; (2) criar mecanismos que permitam a interatividade com o estudante; (3) construir um arquivo no GeoGebra (arquivo.ggb) em que os objetivos das etapas anteriores sejam atingidos; (4) transformar o arquivo do GeoGebra em uma planilha dinâmica como página *web* (html), ou seja, um *applet.*

Existem muitos *applets* do GeoGebra disponíveis para utilização gratuita por parte de professores de Matemática e estudantes. Para pesquisar os que forem interessantes para um tópico de Matemática específico basta abrir uma conta no GeoGebra (www.geogebra.org).

Incluímos a seguir *links* para alguns *applets* construídos pelos autores e relacionados com funções do capítulo 2 e com alguns problemas do capítulo 3.

Função Afim: https://www.geogebra.org/m/afxqkcym
Função Quadrática: https://www.geogebra.org/m/gwwmtm66
Parábola: https://www.geogebra.org/m/wvgsqv8r
Funções Exponencial e Logaritmo: https://www.geogebra.org/m/hry2sm3e
Funções Trigonométricas: https://www.geogebra.org/m/gn8fbpr9
Função Poligonal: https://www.geogebra.org/m/q46g6bs2
Reta Tangente: https://www.geogebra.org/m/ffjhsurv
Problema 3.2 (Formiga no retângulo e função área): https://www.geogebra.org/m/gqgcuwkd
Problema 3.3 (Triângulo no círculo e função área): https://www.geogebra.org/m/t6wrnxdf
Problema 3.4 (Triângulo na vela e função área): https://www.geogebra.org/m/rhzekaeb
Problema 3.8 (Piscina e função perímetro): https://www.geogebra.org/m/qdfggf5r
Problema 3.18 (Potência de resistor): https://www.geogebra.org/m/qwabrufq