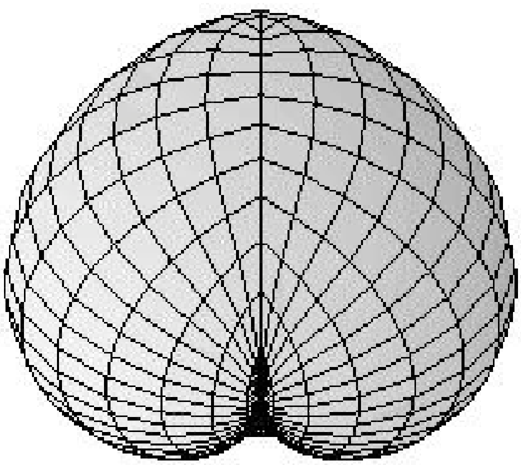
TEXTOS DE MATEMÁTICA
EDITORA INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

SUPLEMENTO DO CÁLCULO AVANÇADO

— ROLCI CIPOLATTI —



SUPLEMENTO

DO

CÁLCULO AVANÇADO

— Exercícios Resolvidos —

Primeira Edição

Rolci Cipolatti

Instituto de Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro - RJ - Brasil

2019

Cipolatti, Rolci -
C577c Suplemento de Cálculo Avançado/ Rolci Cipolatti. - 1 ed. 184p.
Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2019.
ISBN: 978-85-87674-32-6

1. Cálculo I. Universidade Federal do Rio de
Janeiro. Instituto de Matemática. II. Título

CDD 515

Quero hoje cantar a beleza.
Não a beleza feminina
Da menina que andava na praça.
Não a beleza da rosa
Cheirosa que reguei no jardim.
Nem a beleza emblemática
Da matemática que vejo no livro.

Quero cantar a beleza do azul
Do céu profundo na tarde de hoje.
Azul imponente, que lentamente se fez breu.
Azul dolorido de dor de parto
Que a noite o dia de hoje pariu.

Beleza indescritível!
O dia se foi, a noite surgiu, feliz.
Feliz de quem viu!

Exórdio

O presente texto contém as soluções de todos os exercícios da primeira edição do livro *Cálculo Avançado*, editado pela Sociedade Brasileira de Matemática. Como vários desses exercícios complementam o conteúdo do livro, recomendamos aos alunos que tentem resolvê-los e, se necessário, que estudem as soluções apresentadas (se possível, melhorando-as).

Não posso deixar de agradecer a alunos e colegas pelas correções e observações que possibilitaram a presente edição. Sendo eles tantos, certamente cometeria a indelicadeza da omissão, caso pretendesse listá-los. Meu muito obrigado a todos. Como nada substitui o olhar atento de leitores perspicazes para apontar erros — grandes ou pequenos — que se me passaram invisíveis, continuarei sempre contando com as correções e sugestões do leitor, pelo que, desde já, agradeço calorosamente.

Rio de Janeiro, janeiro de 2019.

Rolci Cipolatti

Sumário

1

Conjuntos e Funções

Exercício 1.1: *Mostre que o cojunto vazio é único.*

Solução: Sejam A e B dois conjuntos quaisquer satisfazendo $A \neq B$. Então uma das seguintes possibilidades sempre ocorre: existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 \notin B$ ou existe $x_0 \in B$ tal que $x_0 \notin A$. No primeiro caso, A não é vazio, pois contém x_0. No segundo caso, B não é vazio. Portanto, se $A \neq B$ então não podem ser ambos vazios. Logo o conjunto vazio é único.

Exercício 1.2: *Seja* $\Lambda =]0,1[$ *e* $A_\lambda = [\lambda - 2, \lambda + 2]$, $\forall \lambda \in \Lambda$. *Determine*

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \text{e} \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

Solução: (a) Provemos que

$$\bigcup_{\lambda} A_\lambda = (-2, 3).$$

Se $x \in \bigcup_\lambda A_\lambda$, então $x \in A_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in (0,1)$. Como $-2 < \lambda_0 - 2 \leq x \leq \lambda_0 + 2 < 3$, temos $x \in (-2,3)$.

Reciprocamente, se $x \notin \bigcup_\lambda A_\lambda$, então $x \notin A_\lambda$, qualquer que seja $\lambda \in (0,1)$. Logo, ou $x > \lambda + 2$ ou $x < \lambda - 2$ qualquer que seja $\lambda \in (0,1)$. No primeiro caso, necessariamente temos $x \geq 3$. No segundo, $x \leq -2$. Portanto, $x \notin (-2,3)$.

(b) Provemos que

$$\bigcap_{\lambda} A_\lambda = [-1, 2].$$

Se $x \in [-1,2]$, então, para todo $\lambda \in (0,1)$ temos $\lambda - 2 < -1 \leq x \leq 2 < \lambda + 2$. Logo $x \in (\lambda - 2, \lambda + 2)$, $\forall \lambda \in (0,1)$.

Reciprocamente, se $x \notin [-1,2]$, então $x < -1$ ou $x > 2$. No primeiro caso, podemos escolher $\lambda_0 \in (0,1)$ tal que $x < \lambda_0 - 2 < -1$ para conluir que $x \notin [\lambda_0 - 2, \lambda_0 + 2]$. No segundo caso, escolhemos $\lambda_1 \in (0,1)$ tal que $2 < \lambda_1 + 2 < x$ para concluir que $x \notin [\lambda_1 - 2, \lambda_1 + 2]$. Portanto, se $x \notin [-1,2]$ então $x \notin \bigcap_\lambda A_\lambda$.

Exercício 1.3: *Considere os conjuntos*

$$A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda,$$

onde $\Lambda = [0,1[$ *e*

$$A_\lambda = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,(x-\lambda)^2+y^2\le\lambda^2/2\},$$
$$B_\lambda = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,(x-\lambda)^2+y^2=\lambda^2/2\}.$$

Mostre que $A = B$. *Faça um esboço gráfico de* A.

Solução: Sejam

$$A_\lambda = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,(x-\lambda)^2+y^2\le\lambda^2/2\},$$
$$B_\lambda = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,(x-\lambda)^2+y^2=\lambda^2/2\}.$$

Então, para cada $\lambda\in[0,1)$, B_λ é a fronteira de A_λ. Sejam

$$A = \bigcup_{\lambda} A_\lambda \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{\lambda} B_\lambda.$$

Como $B_\lambda\subset A_\lambda$ para todo $\lambda\in[0,1)$, temos $B\subset A$. Por outro lado, se $(x_0,y_0)\in A$, então $(x_0,y_0)\in A_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0\in[0,1)$.

Se $\lambda_0=0$, então $(x_0,y_0)=(0,0)\in B$. Se $\lambda_0>0$ e $(x_0-\lambda_0)^2+y_0^2=\lambda_0^2/2$, então $(x_0,y_0)\in B$.

Suponhamos a terceira alternativa:

$$(x_0-\lambda_0)^2+y_0^2<\lambda_0^2/2. \tag{1.1}$$

Como B_{λ_0} é a circunferência de centro em λ_0 e raio $\lambda_0/\sqrt{2}$, que é tangente às retas $y=x$ e $y=-x$, temos necessariamente $0\le|y_0|<x_0$.

Consideremos $t=2x_0-\sqrt{2x_0^2-2y_0^2}$. Então é fácil ver que $(x_0-t)^2+y_0^2=t^2/2$, o que implica que $(x_0,y_0)\in B_t$ desde que provemos que $0<t<1$.

Mas observe que $t=2x_0-\sqrt{2x_0^2-2y_0^2}>2x_0-\sqrt{2}x_0>0$. Além disso, decorre de (1.1) que

$$t=2x_0-\sqrt{2x_0^2-2y_0^2}<\lambda_0<2x_0+\sqrt{2x_0^2-2y_0^2}$$

e concluímos, pois $\lambda_0<1$.

Exercício 1.4: *Uma função* $f:A\to B$ *é invertível se e somente se é bijetora.*

Solução: Se $f\colon A\to B$ é uma função, então por definição, $f\subset A\times B$ é tal que:

$$\forall x\in A,\ \exists! y\in B \quad \text{tal que} \quad (x,y)\in f.$$

Se f é invertível, então

$$f^{-1}=\{(y,x)\in B\times A\,;\,(x,y)\in f\} \quad \text{é função.}$$

Logo, para todo $y\in B$, existe um único $x\in A$ tal que $(y,x)\in f^{-1}$. Isto é, $\forall y\in B$, $\exists! x\in A$ tal que $(x,y)\in f$, o que significa dizer que f é bijetora.

Reciprocamente, se f é função bijetora, então para todo $y\in B$, existe um único $x\in A$ tal que $(x,y)\in f$, o que equivale a dizer que $\forall y\in B$, $\exists! x\in A$ tal que $(y,x)\in f^{-1}$ e, portanto, f^{-1} é função.

<u>**Exercício 1.5**</u>: *Dados A, B e C conjuntos, $\{A_\alpha\}$ e $\{B_\beta\}$ duas famílias de conjuntos, mostre que:*

a) $\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_\beta B_\beta\right) = \bigcup_{\alpha,\beta}(A_\alpha \cap B_\beta)$.

b) $\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) \cup \left(\bigcap_\beta B_\beta\right) = \bigcap_{\alpha,\beta}(A_\alpha \cup B_\beta)$.

c) $A \setminus B = A \cap B^c$.

d) se $A \subset B$ *então* $B^c \subset A^c$.

e) $\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha A_\alpha^c$, *e* $\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha A_\alpha^c$.

f) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

g) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

h) Valem as duas últimas identidades acima substituindo-se $\cap$ *por* $\cup$*?*

i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

j) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

k) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Solução: (a) Sejam $\mathcal{A} = \bigcup_\alpha A_\alpha$ e $\mathcal{B} = \bigcup_\beta B_\beta$.

Se $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ então $x \in \mathcal{A}$ e $x \in \mathcal{B}$. Logo existe α_0 tal que $x \in A_{\alpha_0}$ e existe β_0 tal que $x \in B_{\beta_0}$. Portanto, $x \in A_{\alpha_0} \cap B_{\beta_0}$ e consequentemente

$$x \in \bigcup_{\alpha,\beta}(A_\alpha \cap B_\beta).$$

Reciprocamente, se $x \in \bigcup_{\alpha,\beta}(A_\alpha \cap B_\beta)$, então existe um par (α_0, β_0) tal que

$$x \in A_{\alpha_0} \cap B_{\beta_0}.$$

Logo $x \in A_{\alpha_0}$ e $x \in B_{\beta_0}$, o que implica $x \in \mathcal{A}$ e $x \in \mathcal{B}$, isto é, $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

(b) Sejam $\mathcal{A} = \bigcap_\alpha A_\alpha$ e $\mathcal{B} = \bigcap_\beta B_\beta$.

Se $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, então $x \in \mathcal{A}$ ou $x \in \mathcal{B}$. No primeiro caso, $x \in A_\alpha$ para todo α. Como $A_\alpha \subset A_\alpha \cup B_\beta$ para todo β, temos $x \in A_\alpha \cup B_\beta$ para todo (α, β). Logo

$$x \in \bigcap_{\alpha,\beta}(A_\alpha \cup B_\beta). \tag{1.2}$$

Da mesma forma, se $x \in \mathcal{B}$, então $x \in B_\beta$ para todo β. Como $B_\beta \subset B_\beta \cup A_\alpha$ para todo α, concluímos (1.2).

Reciprocamente, se $x \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ então $x \notin \mathcal{A}$ e $x \notin \mathcal{B}$. Logo, existe α_0 tal que $x \notin A_{\alpha_0}$ e existe β_0 tal que $x \notin B_{\beta_0}$. Portanto, $x \notin A_{\alpha_0} \cup B_{\beta_0}$. Como

$$A_{\alpha_0} \cup B_{\beta_0} \supset \bigcap_{\alpha,\beta}(A_\alpha \cup B_\beta),$$

concluímos que

$$x \notin \bigcap_{\alpha,\beta}(A_\alpha \cup B_\beta).$$

(c) $x \in A \setminus B \iff x \in A$ e $x \notin B \iff x \in A \cap B^c$.

(d) Se $x \in B^c$ então $x \notin B$. Como $B \supset A$, $x \notin A$, o que equivale a $x \in A^c$.

(e) $x \notin \bigcup_\alpha A_\alpha \iff x \notin A_\alpha$ para nenhum $\alpha \iff x \in A_\alpha^c$ para todo $\alpha \iff x \in \bigcap_\alpha A_\alpha^c$.

Analogamente $x \notin \bigcap_\alpha A_\alpha \iff x \notin A_{\alpha_0}$ para algum $\alpha_0 \iff x \in A_{\alpha_0}^c \iff x \in \bigcup_\alpha A_\alpha^c$.

(f) Pelo item (c) temos

$$\begin{cases} A \cap (B \setminus C) = A \cap B \cap C^c \\ (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)^c \end{cases}$$

Pelos items (c) e (a), temos

$$(A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) = \big((A \cap B) \cap A^c\big) \cup \big((A \cap B) \cap C^c\big).$$

Como $A \cap B \cap A^c = \emptyset$, temos a conclusão.

(g) Pelo item (c), temos:

$$(A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap C^c$$
$$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c) = A \cap B \cap C^c$$

(h) Vale uma das identidades, a saber: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. De fato, pelo item (c)

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap C^c = (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Por outro lado, é fácil verificar que

$$A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus (A \cup C).$$

Para verificar que a inclusão contrária não é verdadeira, considere $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $C = \{5\}$. Então,

$$\begin{cases} A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3, 4\}, \\ (A \cup B) \setminus (A \cup C) = \{4\}. \end{cases}$$

(i)
$$\begin{aligned}(x, y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \quad \text{e} \quad y \in B \cup C \\ &\iff (x \in A \quad \text{e} \quad y \in B) \quad \text{ou} \quad (x \in A \quad \text{e} \quad y \in C) \\ &\iff (x, y) \in A \times B \quad \text{ou} \quad (x, y) \in A \times C \\ &\iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C).\end{aligned}$$

$$
\text{(j)} \qquad \begin{aligned}
(x,y)\in A\times(B\cap C) &\iff x\in A \quad \text{e} \quad y\in B\cap C\\
&\iff (x\in A \quad \text{e} \quad y\in B) \quad \text{e} \quad (x\in A \quad \text{e} \quad y\in C)\\
&\iff (x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C).
\end{aligned}
$$

$$
\text{(k)} \qquad \begin{aligned}
(x,y)\in A\times(B\setminus C) &\iff x\in A \quad \text{e} \quad y\in B\setminus C\\
&\iff x\in A \quad \text{e} \quad y\in B\cap C^c\\
&\iff (x,y)\in A\times B \quad \text{mas} \quad (x,y)\notin A\times C\\
&\iff (x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C).
\end{aligned}
$$

Exercício 1.6: *Sejam $f\colon X\longrightarrow Y$ uma função, $A\subset X$, $B\subset Y$, $\{A_\alpha\}_\alpha$ família de subconjuntos de X e $\{B_\beta\}_\beta$ família de subconjuntos de Y. Mostre que:*

a) $f^{-1}\Big(\bigcup B_\beta\Big)=\bigcup f^{-1}(B_\beta)$.

b) $f^{-1}\Big(\bigcap B_\beta\Big)=\bigcap f^{-1}(B_\beta)$.

c) $f^{-1}(B^c)=\big(f^{-1}(B)\big)^c$.

d) $f\Big(\bigcup A_\alpha\Big)=\bigcup f(A_\alpha)$.

e) $f\Big(\bigcap A_\alpha\Big)\subset\bigcap f(A_\alpha)$.

f) *Dê um exemplo para o qual não vale a igualdade no item (e).*

g) *Verifique que em geral não há nenhuma relação entre $f(A^c)$ e $\big(f(A)\big)^c$.*

h) $f\big(f^{-1}(B)\big)\subset B$ *e* $f^{-1}\big(f(A)\big)\supset A$, *não valendo, em geral, as igualdades nos dois casos. Dê condições sobre f para que sejam válidas as igualdades $f\big(f^{-1}(B)\big)=B$ e $f^{-1}\big(f(A)\big)=A$.*

Solução: (a) Se $x\in f^{-1}\Big(\bigcup_\beta B_\beta\Big)$, então $f(x)\in\bigcup_\beta B_\beta$. Logo, $f(x)\in B_{\beta_0}$ para algum β_0, o que implica $x\in f^{-1}(B_{\beta_0})\subset\bigcup_\beta f^{-1}(B_\beta)$.

Reciprocamente, se $x\in\bigcup_\beta f^{-1}(B_\beta)$, então $x\in f^{-1}(B_{\beta_0})$ para algum β_0, o que implica $f(x)\in B_{\beta_0}\subset\bigcup_\beta B_\beta$. Portanto $x\in f^{-1}\Big(\bigcup_\beta B_\beta\Big)$.

(b) $x\in f^{-1}\Big(\bigcap_\beta B_\beta\Big) \iff f(x)\in\bigcap_\beta B_\beta \iff f(x)\in B_\beta$ para todo β $\iff$ $x\in f^{-1}(B_\beta)$ para todo β $\iff x\in\bigcap_\beta f^{-1}(B_\beta)$.

(c) $x\in f^{-1}(B^c) \iff f(x)\in B^c \iff f(x)\notin B \iff x\notin f^{-1}(B) \iff x\in f^{-1}(B)^c$.

(d) Se $y\in f\Big(\bigcup_\alpha A_\alpha\Big)$, então existe $x\in\bigcup_\alpha A_\alpha$ tal que $y=f(x)$. Portanto, existe α_0 tal que $x\in A_{\alpha_0}$ e consequentemente $y\in f(A_{\alpha_0})\subset\bigcup_\alpha f(A_\alpha)$.

Reciprocamente, se $y\in\bigcup_\alpha f(A_\alpha)$, então $y\in f(A_{\alpha_0})$ para algum α_0. Isso quer dizer que existe $x\in A_{\alpha_0}$ tal que $y=f(x)$. Como $A_{\alpha_0}\subset\bigcup_\alpha A_\alpha$, então $x\in\bigcup_\alpha A_\alpha$ e $y=f(x)$, o que implica que $y\in f\Big(\bigcup_\alpha A_\alpha\Big)$.

(e) Se $y \in f\Big(\bigcap_\alpha A_\alpha\Big)$, então existe $x \in \bigcap_\alpha A_\alpha$ tal que $y = f(x)$. Portanto, $y = f(x)$ com $x \in A_\alpha$ para todo α. Consequentemente $y \in f(A_\alpha)$ para todo α, o que significa que $y \in \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$

(f) A reciproca não é verdadeira. De fato, considere, por exemplo, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, -1\}$ e $f(x) = x^2$. Então $f(A) = \{0, 1\} = f(B)$. Mas

$$f(A \cap B) = \{0\} \neq f(A) \cap f(B) = \{0, 1\}.$$

(g) Seja $X = (0, +\infty)$ e considere $f\colon X \to X$ dada pelo gráfico da Figura 1.1. Seja $A = [0, 1)$, de modo que $A^c = [1, +\infty)$. Então $f(A^c) = [0, 1)$ e $f(A)^c = \emptyset$. Portanto,

$$f(A^c) \underset{\supset}{\neq} f(A)^c.$$

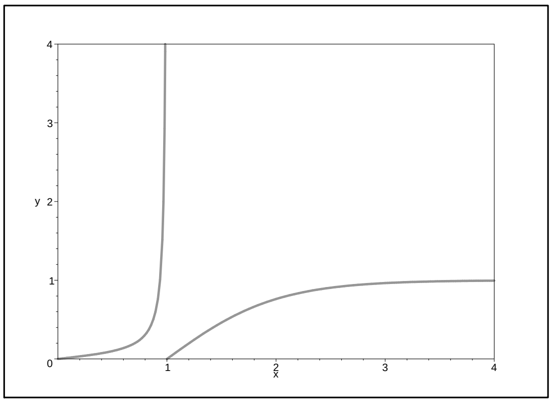


Figura 1.1

Considere agora $g\colon X \to X$ dada pelo gráfico da Figura 1.2. Seja $A = [0, 1)$ de modo que $A^c = [1, +\infty)$. Então $f(A^c) = [1, b)$, para algum $b > 0$ e $f(A)^c = [1, +\infty)$. Portanto,

$$f(A^c) \underset{\subset}{\neq} f(A)^c.$$

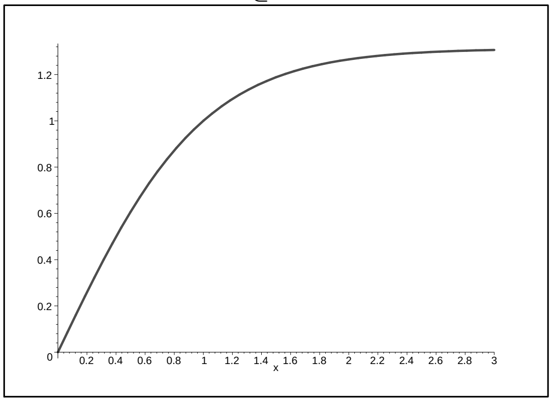


Figura 1.2

(h) $f\colon X \to Y$, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Vamos provar que

$$f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B. \qquad (*)$$

$$f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A. \qquad (**)$$

Se $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, então existe $x \in f^{-1}(B)$ tal que $f(x) = y$. Mas se $x \in f^{-1}(B)$, então $y = f(x) \in B$ e temos (*).

Embora a inclusão em (*) seja verdadeira, a igualdade, em geral, não se verifica. Por exemplo, considere $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $B = \mathbb{R}$. Então

$$f\big(f^{-1}(B)\big) = [-1, 1] \neq B.$$

Para provar (**), seja $x \in A$. Então $f(x) \in f(A)$. Assim, se $y = f(x)$, então $\{y\} \subset f(A)$ e $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$. Como $x \in f^{-1}(\{y\})$, temos a conclusão.

Para provar que a igualdade em (**) não é verdaderia, considere novamente $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $A = [-\pi/4, \pi/4]$. Então

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{(4n-1)\pi}{4}, \frac{(4n+1)\pi}{4}\right] \neq A.$$

Por outro lado, se f é sobrejetora, então vale a igualdade em (*). De fato, se $y \in B$ e f é sobre, existe ao menos um x do domínio tal que $y = f(x)$. Logo, $x \in f^{-1}(B)$, o que implica $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$.

Analogamente, se f é injetora, então vale a igualdade em (**). De fato, se $x_1 \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, então existe $y_1 \in f(A)$ tal que $y_1 = f(x_1)$. Mas $y_1 \in f(A)$ significa que existe $x_2 \in A$ tal que $y_1 = f(x_2)$. Como estamos supondo f injetora, temos $x_2 = x_1$. Logo $x_1 \in A$.

Exercício 1.7: *Seja $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Considere a função Φ assim definida*

$$\Phi : A^{\mathbb{N}} \to [0, 1], \quad \Phi(a_1, a_2, a_3, \ldots) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Mostre que Φ não é injetiva e que se $\Phi(a) = \Phi(b)$ para $a \neq b$, então $\Phi(a) \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Solução: Observe que $\Phi(0, 0, \ldots) = 0$ e $\Phi(9, 9, \ldots) = 1$. É claro que Φ é sobrejetiva, mas não é injetiva, pois

$$\Phi(0, 9, 9, 9, \ldots) = \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \frac{1}{10} = \Phi(1, 0, 0, 0, \ldots).$$

Sejam $a = (a_1, a_2, \ldots)$ e $b = (b_1, b_2, \ldots)$ duas sequências de $A^{\mathbb{N}}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}.$$

Seja n_0 menor número natural para o qual $a_n \neq b_n$, isto é,

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}\, ;\, a_n \neq b_n\}.$$

Então $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{n_0 - 1} = b_{n_0 - 1}$ e $a_{n_0} \neq b_{n_0}$ e temos

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $a_{n_0} > b_{n_0}$, de modo que

$$a_{n_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n_0+k}}{10^k} = b_{n_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n_0+k}}{10^k}$$

Como $a_n \geq 0$ para todo n, concluímos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n_0+k}}{10^k} \geq a_{n_0} - b_{n_0} \geq 1. \tag{1}$$

Por outro lado, como $b_n \leq 9$ para todo n, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n_0+k}}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1. \tag{2}$$

Assim, segue de (1) e (2),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n_0+k}}{10^k} = 1 \quad \Rightarrow \quad b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \cdots = 9$$

e, portanto, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n_0}, 9, 9, 9, \ldots)$ e $\varphi(b)$ é um número racional.
Observação: Como estamos supondo $a_{n_0} > b_{n_0}$ e $\Phi(a) = \Phi(b)$, então $0 \leq b_{n_0} \leq 8$ e $a_{n_0} = b_{n_0} + 1$, de modo que

$$\begin{aligned} b &= (b_1, b_2, \ldots, b_{n_0}, 9, 9, 9, \ldots), \\ a &= (b_1, b_2, \ldots, b_{n_0} + 1, 0, 0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

2

Métricas e Normas

Exercício 2.1: *Seja $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que cada uma das expressões abaixo define uma norma em $\mathbb{R}^n$.*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

Solução: (a) Para $x \in \mathbb{R}^n$, definimos $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.
É claro que $\|x\|_1 \geq 0$ e que $\|x\|_1 = 0$ se e somente se $x = 0$. Além disso,

$$\|\lambda x\|_1 = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \cdots + |\lambda x_n| = |\lambda|\big(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\big) = |\lambda|\|x\|_1.$$

Lembrando que $|a + b| \leq |a| + |b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\|x + y\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} \big(|x_j| + |y_j|\big) = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

(b) Para $x \in \mathbb{R}^n$, definimos $\|x\|_\infty = \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\}$.
É claro que $\|x\|_\infty \geq 0$ e que $\|x\|_\infty = 0$ se e somente se $x = 0$. Além disso,

$$\|\lambda x\|_\infty = \max\big\{|\lambda x_1|, \ldots, |\lambda x_n|\big\} = |\lambda| \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\} = |\lambda|\|x\|_\infty.$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \max\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \\ &\leq \max\{|x_1| + |y_1|, \ldots, |x_n| + |y_n|\} \\ &\leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

Exercício 2.2: *Faça os detalhes da prova do Corolário 2.2 (pag. 16 do Cálculo Avançado).*

Solução: Os detalhes omitidos na prova do Corolário 2.2 se referem à minimização da função

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q\lambda}\|y\|_q^q, \quad \lambda > 0 \quad (p > 1). \tag{2.1}$$

É claro que

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda\to +\infty} \varphi(\lambda) = +\infty.$$

Como φ é função contínua e positiva, existe um $\lambda_0 > 0$ ponto de mínimo de φ no intervalo $(0, +\infty)$. Como

$$\varphi'(\lambda) = \frac{p-1}{p}\lambda^{p-2}\|x\|_p^p - \frac{1}{q\lambda^2}\|y\|_q^q,$$

temos $\varphi'(\lambda) = 0$ se e somente se

$$\lambda^p = \frac{p}{q(p-1)}\frac{\|y\|_q^q}{\|x\|_p^p}.$$

Observando que $1/p + 1/q = 1$, verificamos facilmente que $p/q(p-1) = 1$. Portanto,

$$\lambda_0 = \frac{\|y\|_q^{q/p}}{\|x\|_p} \tag{2.2}$$

é o único ponto de mínimo de φ no intervalo $(0, +\infty)$. Substituindo λ_0 dado em (2.2) em (2.1), obtemos

$$\varphi(\lambda_0) = \|x\|_p\|y\|_q.$$

Como $|\langle x, y\rangle| \leq \varphi(\lambda_0)$, conclui-se a prova.

Exercício 2.3: *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.*

Solução: É claro que $\|x\|_p^p = |x_1|^p + \cdots |x_n|^p \leq n\|x\|_\infty^p$. Portanto

$$\|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{2.3}$$

Por outro lado, $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$ para algum $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o que implica

$$\|x\|_\infty^p \leq |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p = \|x\|_p^p. \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) obtemos

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{2.5}$$

Como

$$\lim_{p\to+\infty} n^{1/p} = 1,$$

a conclusão segue do *Teorema do Sanduíche*.

<u>Exercício 2.4</u>: *Sejam* $\| \ \|_\alpha$, $\| \ \|_\beta$ *e* $\| \ \|_\gamma$ *normas num espaço vetorial* V. *Se* $\| \ \|_\alpha$ *e* $\| \ \|_\beta$ *são equivalentes e* $\| \ \|_\beta$ *e* $\| \ \|_\gamma$ *são equivalentes, mostre que* $\| \ \|_\alpha$ *e* $\| \ \|_\gamma$ *são equivalentes.*

Solução: Por hipótese temos

$$m_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq M_1\|x\|_\alpha, \quad \forall x \in V;$$
$$m_2\|x\|_\beta \leq \|x\|_\gamma \leq M_2\|x\|_\beta, \quad \forall x \in V.$$

Portanto,

$$m_1 m_2\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\gamma \leq M_2 M_1\|x\|_\alpha, \quad \forall x \in V.$$

<u>Exercício 2.5</u>: *Sejam* $p_1, p_2 \in [1, \infty]$. *Mostre que as normas* $\| \quad \|_{p_1}$ *e* $\| \quad \|_{p_2}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *são equivalentes.*

Solução: Vimos no Exercício 2.3 que, qualquer que seja $p \in [1, +\infty)$, as normas $\| \ \|_p$ e $\| \ \|_\infty$ são equivalentes (veja (2.5)). Portanto,

$$\| \ \|_{p_1} \sim \| \ \|_\infty \quad \text{e} \quad \| \ \|_\infty \sim \| \ \|_{p_2}.$$

Pelo Exercício 2.4 concluímos que

$$\| \ \|_{p_1} \sim \| \ \|_{p_2}.$$

<u>Exercício 2.6</u>: *Demonstre o Teorema 2.2 (pag. 19 do Cálculo Avançado).*

Solução: Seja $T\colon V \to W$ isomorfismo (linear e bijetora). Seja $\| \ \|_W$ uma norma de W e definimos $\|v\|_V = \|T(v)\|_W$ para todo $v \in V$. Mostremos que $\| \ \|_V$ é uma norma em V. Obviamente $\|v\|_V \geq 0$. Além disso, $\|v\|_V = 0$ se e somete se $T(v) = 0$, isto é, $v \in \text{Ker}(T)$. Como T é invertível, $\text{Ker}(T) = \{0\}$. Logo, $\|v\|_V = 0$ se e somente se $v = 0$. Além disso,

$$\|\lambda v\|_V = \|T(\lambda v)\|_W = \|\lambda T(v)\|_W = |\lambda|\|v\|_V.$$

A desigualdade triangular segue por argumento análogo:

$$\|u + v\|_V = \|T(u + v)\|_W = \|T(u) + T(v)\|_W \leq \|u\|_V + \|v\|_V.$$

Sejam $\| \ \|_\alpha$ e $\| \ \|_\beta$ duas normas equivalentes de W. Então existem $m, M > 0$ tais que

$$m\|w\|_\alpha \leq \|w\|_\beta \leq M\|w\|_\alpha, \quad \forall w \in W.$$

Definimos $\|v\|_a = \|T(v)\|_\alpha$ e $\|v\|_b = \|T(v)\|_\beta$. Então

$$\|v\|_b = \|T(v)\|_\beta \geq m\|T(v)\|_\alpha = m\|v\|_a,$$
$$\|v\|_b = \|T(v)\|_\beta \leq M\|T(v)\|_\alpha = M\|v\|_a.$$

Portanto, $m\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq M\|v\|_b$ e temos a conclusão.

Exercício 2.7: *Mostre que as normas definidas em $C\big([0,1];\mathbb{R}\big)$ por*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx, \qquad \|f\|_\infty = \max\big\{|f(x)|\,;\,x \in [0,1]\big\}$$

não são equivalentes.

Solução: Seja $f \in C\big([0,1];\mathbb{R}\big)$. Como toda função contínua é integrável num intervalo limitado e atinge o valor máximo num intervalo limitado e fechado, as normas $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_\infty$ estão bem definidas.

É claro que $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ para todo $x \in [0,1]$. Portanto,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \le \|f\|_\infty.$$

Se as normas fossem equivalentes, existiria $M > 0$ tal que

$$\|f\|_\infty \le M\|f\|_1, \quad \forall f \in C\big([0,1];\mathbb{R}\big). \tag{2.6}$$

Consideremos $f_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $\|f_k\|_\infty = 1$ e $\|f_k\|_1 = 1/(k+1)$ para todo k. Portanto a desigualdade em (2.6) daria

$$1 \le \frac{M}{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

o que é impossível. Portanto, não existe tal $M > 0$ e consequentemente, as normas não são equivalentes.

Exercício 2.8:

a) *Seja A matriz $n \times n$ positiva-definida (isto é, $\langle Ax : x\rangle > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$) e simétrica (isto é, $\langle Ax : y\rangle = \langle x : Ay\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$), onde $\langle : \rangle$ denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\|x\|_A = \sqrt{\langle Ax : x\rangle}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.*

b) *Seja B matriz $n \times n$ positiva-definida (não necessariamente simétrica). Mostre que $\|x\|_B = \sqrt{\langle Bx : x\rangle}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.*

c) *Sejam A e B matrizes simétricas e positivas tais que $AB = BA$. Mostre que $\|x\| = \sqrt{\langle Ax : Bx\rangle}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.*

Solução: (a) Temos, por hipótese, A simétrica e $\langle Ax : x\rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Portanto, $\|x\|_A > 0$ para todo $x \neq 0$ e, obviamente, $\|0\|_A = 0$. Além disso, $\|\lambda x\|_A^2 = \langle \lambda Ax : \lambda x\rangle = \lambda^2 \langle Ax : x\rangle^2$, o que implica

$$\|\lambda x\|_A = |\lambda|\|x\|_A.$$

Para verificar a desigualdade triangular, observe que $|\langle Ax : y\rangle| \le \|x\|_A\|y\|_A$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz). De fato,

$$0 \le \|x + \tau y\|_A^2 = \|x\|_A^2 + 2\tau\langle Ax : y\rangle + \tau^2\|y\|_A^2, \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

o que implica que o discriminante do trinômio do segundo grau

$$\tau \mapsto \tau^2\|y\|_A^2 + 2\tau\langle Ax : y\rangle + \|x\|_A^2$$

é negativo ou nulo, isto é,

$$4\langle Ax : y\rangle^2 - 4\|y\|_A^2\|x\|_A^2 \leq 0. \tag{2.7}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz se obtém após extrair a raíz em (2.7).

Assim,

$$\begin{aligned}\|x+y\|_A^2 &= \|x\|_A^2 + 2\langle Ax : y\rangle + \|y\|_A^2 \\ &\leq \|x\|_A^2 + 2\|x\|_A\|y\|_A + \|y\|_A^2 \\ &\leq (\|x\|_A + \|y\|_A)^2\end{aligned}$$

e temos a conclusão.

Observação (para o estudante menos atento): a aplicação $(x, y) \mapsto \langle Ax : y\rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$ e o argumento acima é o usual na demonstração de que todo produto interno gera uma norma.

(b) Temos, por hipótese, $\langle Bx : x\rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Considere a matriz simétrica

$$A = \frac{1}{2}(B + B^T)$$

<u>Afirmativa</u>: $\langle Bx : x\rangle = \langle Ax : x\rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observe que se for verdadeira a afirmativa, a prova de que $\|\ \|_B$ é uma norma se reduz ao caso anterior. Para provar a afirmativa, sejam b_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$, os coeficientes da matriz B, isto é,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Os coeficientes da matriz A são da forma

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{ii} & \text{se } i = j, \\ (b_{ij} + b_{ji})/2 & \text{senão.} \end{cases}$$

Então

$$\langle Bx : x\rangle = \sum_{i,j} b_{ij}x_jx_i = \sum_i b_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j} \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2} x_ix_j = \langle Ax : x\rangle.$$

Observação (ao estudante menos atento): Para que a afirmativa acima não pareça à primeira vista mais artificiosa do que realmente é, considere o seguinte exemplo em $\mathbb{R}^2$:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

A forma quadrática associada a B é $\langle Bx : x\rangle = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$, que podemos escrever na forma

$$(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \langle \frac{1}{2}(B + B^T)x : x\rangle.$$

(c) É claro que $\|x\|^2 = \langle Ax : Bx\rangle = \langle B^T Ax : x\rangle = \langle ABx : x\rangle$.
Como A e B são simétricas e comutam, então AB é simétrica. De fato,

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB.$$

Portanto, este caso se reduz ao caso (a) se tivermos a garantia de que AB é positiva. Sabemos que A e B são simétricas e positivas. Portanto, são diagonalizáveis e todos os autovalores são positivos. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A e $\mu_1 \ldots, \mu_n$ os autovalores de B. Como A e B comutam, são simultaneamente diagonalizáveis, isto é, existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A e B. Mais precisamente, existe uma base ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ tal que

$$A\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i, \quad B\vec{u}_i = \mu_i \vec{u}_i.$$

Se $x = \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{u}_n$ é um vetor não nulo, então

$$\|x\|^2 = \langle Ax : Bx\rangle = \lambda_1 \mu_1 \alpha_1^2 + \cdots + \lambda_n \mu_n \alpha_n^2 > 0.$$

Observação (para o estudante mais atento): Dê um exemplo que mostre que a hipótese $AB = BA$ é essencial.

Exercício 2.9: *Considere $V = \mathcal{M}_{m\times n}$ o espaço vetorial das matrizes de ordem $m \times n$. Para $A, B \in V$, seja*

$$\big\langle A : B \big\rangle := \operatorname{tr}(A^T B),$$

onde A^T é a matriz transposta de A e $\operatorname{tr}(A^T B)$ denota o traço da matriz quadrada $A^T B$, isto é, a soma dos elementos da diagonal principal.

a) Mostre que $\big\langle : \big\rangle$ define um produto interno em V.

b) Verifique que $\sqrt{\big\langle A : A \big\rangle} = \|A\|_2$, onde $\| \ \|_2$ é a norma definida por (2.6) para $p = 2$.

c) Se $m = n$, mostre que $\|AB\|_2 \le \|A\|_2 \|B\|_2$

Solução: (a) Vamos introduzir a seguinte notação: para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, definimos

$$\begin{aligned} L_i(A) &:= (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \quad \text{vetor linha } i \text{ de } A; \\ C_j(A) &:= (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}), \quad \text{vetor coluna } j \text{ de } A; \end{aligned} \tag{2.8}$$

Observando que $L_i(A^T) = C_i(A)$, podemos escrever

$$[A^T B]_{ij} = \langle L_i(A^T) : C_j(B)\rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle C_i(A) : C_j(B)\rangle_{\mathbb{R}^m},$$

onde $\langle : \rangle_{\mathbb{R}^m}$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^m$. Portanto,

$$\langle A : B\rangle = \sum_{i=1}^{n} [A^T B]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \langle C_i(A) : C_i(B)\rangle_{\mathbb{R}^m},$$

Como $C_i\colon \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathbb{R}^m$ é linear, as propriedades (i) e (ii) da Definição 2.4 (pag.13 do livro) são herdadas diretamente do produto interno usual de $\mathbb{R}^m$. Por outro lado, se $A \neq 0$, então $C_i(A) \neq 0$ para algum $1 \leq i \leq n$ e

$$\langle A : A\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|C_i(A)\|_2^2 > 0.$$

(b) Pela notação introduzida em (2.8), temos

$$\sum_{i=1}^{n} \|C_i(A)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ki}^2 = \|A\|_2^2.$$

(c) Pela notação introduzida acima e a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$, temos

$$[AB]_{ij} = \langle L_i(A) : C_j(B)\rangle_{\mathbb{R}^n} \leq \|L_i(A)\|_2 \|C_j(B)\|_2.$$

Pela definição da norma $\|\ \|_2$ de $\mathcal{M}_{m\times n}$, temos

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} [AB]_{ij}^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|L_i(A)\|_2^2 \|C_j(B)\|_2^2 = \|A\|_2^2 \|B\|_2^2$$

<u>Exercício 2.10</u>: *Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) := x^n$. Mostre que o conjunto $\mathcal{X} := \big\{f_1, f_2, f_3, \ldots\big\}$ é linearmente independente e conclua que $C\big([0,1];\mathbb{R}\big)$ tem dimensão infinita.*

Solução: Consideremos uma combinação linear (finita) nula de elementos de $\mathcal{X}$, isto é, $\alpha_1 f_{k_1} + \cdots + \alpha_m f_{k_m} = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$. Então

$$f(x) := \alpha_1 x^{k_1} + \cdots + \alpha_m x^{k_m} = 0, \;\; \forall x \in [0,1].$$

Calculando a derivada de ordem k_m de f, obtém-se $0 = f^{(k_m)}(x) = \alpha_{k_m}$. Repetindo o argumento para as derivadas de ordem $k_{m-1}, k_{m-2}, \ldots, k_1$, concluímos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Portanto, $\mathcal{X}$ é linearmente independente e, em particular, $C\big([1,2];\mathbb{R}\big)$ tem dimensão infinita.

<u>Exercício 2.11</u>: *Seja X um conjunto e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma função. Mostre que*

$$\sup_{x\in X} \|f(x)\|_2 - \inf_{x\in X} \|f(x)\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{x\in X} f_i(x) - \inf_{x\in X} f_i(x)\Big),$$

onde $\|\cdot\|_2$ denota a norma 2 de $\mathbb{R}^n$.

Solução: $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, uma função vetorial definida em um conjunto arbitrário $X \neq \emptyset$. Queremos provar que

$$\sup_{x\in X} \|f(x)\|_2 - \inf_{x\in X} \|f(x)\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x\in X} f_i(x) - \inf_{x\in X} f_i(x)\right).$$

Vamos supor por um momento que, para qualquer que seja $g\colon X \to \mathbb{R}$, vale a desigualdade

$$\sup_{x\in X} |g(x)| - \inf_{x\in X} |g(x)| \le \sup_{x\in X} g(x) - \inf_{x\in X} g(x). \tag{2.9}$$

Então, basta provar que

$$\sup_{x\in X} \|f(x)\|_2 - \inf_{x\in X} \|f(x)\|_2 \le \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x\in X} |f_i(x)| - \inf_{x\in X} |f_i(x)| \right).$$

Para simplificar a notação, consideremos

$$\alpha = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_2, \quad \beta = \inf_{x\in X} \|f(x)\|_2,$$
$$a_i = \sup_{x\in X} |f_i(x)|, \quad b_i = \inf_{x\in X} |f_i(x)|.$$

Então

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (\sup \|f(x)\|_2)^2 = \sup \|f(x)\|_2^2 = \sup(|f_1(x)|^2 + \cdots + |f_n(x)|^2) \\ &\le a_1^2 + \cdots + a_n^2 \\ \beta^2 &= (\inf \|f(x)\|_2)^2 = \inf \|f(x)\|_2^2 = \inf(|f_1(x)|^2 + \cdots + |f_n(x)|^2) \\ &\ge b_1^2 + \cdots + b_n^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

De (2.10) temos

$$\alpha^2 - \beta^2 \le (a_1^2 - b_1^2) + \cdots + (a_n^2 - b_n^2).$$

Dividindo a desigualdade acima por $\alpha + \beta$, temos

$$\alpha - \beta \le (a_1 - b_1)\frac{a_1 + b_1}{\alpha + \beta} + \cdots + (a_n - b_n)\frac{a_n + b_n}{\alpha + \beta}.$$

Como $a_i \le \alpha$ e $b_i \le \beta$, segue que $(a_i + b_i)/(\alpha + \beta) \le 1$. Além disso, como $a_i - b_i \ge 0$, podemos concluir que

$$\alpha - \beta \le (a_1 - b_1) + \cdots + (a_n - b_n),$$

que é a desigualdade desejada.

Vamos então provar (2.9). Suponhamos que, para alguma função $g\colon X \to \mathbb{R}$, a desigualdade (2.9) não se verifique, isto é (omitindo a variável x para simplificar a notação),

$$\sup |g| - \inf |g| > \sup g - \inf g.$$

Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\sup g - \inf g + \varepsilon_0 < \sup |g| - \inf |g|$. Em particular,

$$g(x) \le \sup g < \sup |g| - \inf |g| + \inf g - \varepsilon_0, \quad \forall x \in X.$$

Fixemos $x \in X$ arbitrário. Então $\inf g > g(x) + \varepsilon_0 + \inf |g| - \sup |g|$, de modo que

$$g(y) \ge \inf g > g(x) + \varepsilon_0 + \inf |g| - \sup |g|, \quad \forall y \in X.$$

Como x e y foram fixados arbitrariamente, temos

$$g(x) - g(y) < \sup|g| - \inf|g| - \varepsilon_0, \quad \forall x, y \in X. \tag{2.11}$$

Trocando x por y em (2.11), obtemos

$$|g(x) - g(y)| < \sup|g| - \inf|g| - \varepsilon_0, \quad \forall x, y \in X.$$

Como $|g(x)| - |g(y)| \leq |g(x) - g(y)|$, temos

$$|g(x)| - |g(y)| < \sup|g| - \inf|g| - \varepsilon_0, \quad \forall x, y \in X. \tag{2.12}$$

Fixando y e passando ao sup em x na desigualdade (2.12), obtemos

$$|g(y)| \geq \inf|g| + \varepsilon_0, \quad \forall y \in X,$$

o que é impossível com $\varepsilon_0 > 0$.

3

Abertos, Fechados, Compactos

Exercício 3.1: *Sejam A e B subconjuntos de um espaço vetorial normado V. Demonstre as afirmativas abaixo.*

a) A é fechado $\iff$ $A \supset A'$. Dê exemplo de A fechado tal que $A' \neq A$.

b) A' é conjunto fechado.

c) $A \subset B \Longrightarrow A' \subset B'$.

d) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

e) $\overline{A}$ é conjunto fechado.

f) A é fechado $\iff$ $A = \overline{A}$.

Solução: (a) Suponhamos que A é fechado.

Se $A' \not\subset A$, existe $x_0 \in A'$ com $x_0 \in A^c$. Como A^c é aberto, existe $r > 0$ tal $B_r(x_0) \subset A^c$. Mas isso implica em particular que $\big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A = \emptyset$, isto é, $x_0 \notin A'$. Contradição!

Reciprocamente, suponhamos que $A' \subset A$. Se $x_0 \in A^c$, então $x_0 \notin A'$. Logo existe $r > 0$ tal que

$$\big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A = \emptyset. \tag{3.1}$$

Como $x_0 \notin A$, a condição (3.1) pode ser expressa como $B_r(x_0) \cap A = \emptyset$, o que equivale a $B_r(x_0) \subset A^c$. Log A^c é aberto e, consequentemente, A é fechado.

Exemplo: $A = [0,1] \cup \{2\} \quad \Rightarrow \quad A' = [0,1]$

(b) Para provar que A' é fechado, vamos usar o item (a), isto é, provemos que $(A')' \subset A'$.

Seja $r > 0$. Se $x \in (A')'$, então $\big(B_{r/2}(x) \setminus \{x\}\big) \cap A' \neq \emptyset$. Logo, existe $y \in A'$ tal que $0 < \|y - x\| < r/2$. Fixemos tal y e consideremos $a = \|y - x\|$. Por definição, qualquer que seja $\delta > 0$

$$\big(B_\delta(y) \setminus \{y\}\big) \cap A \neq \emptyset.$$

Consideremos, então, $\delta = \min\{a/2, r/4\}$ e $z \in \big(B_\delta(y) \setminus \{y\}\big) \cap A$. Então $z \in A$ e

$$\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < r/4 + r/2 = 3r/4 < r \Rightarrow z \in B_r(x);$$
$$\|z - x\| \geq \|y - x\| - \|z - y\| > a - a/2 = a/2 > 0 \Rightarrow z \neq x.$$

Portanto, $z \in \big(B_r(x) \setminus \{x\}\big) \cap A$. Como $r > 0$ é arbitrário, concluímos que $x \in A'$

(c) É claro que se $A \subset B$, então

$$\big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A \subset \big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap B, \quad \forall r > 0.$$

Em particular, se $x_0 \in A' \Rightarrow x_0 \in B'$.

(d) Seja $x_0 \in (A \cup B)'$ e $r > 0$. Pela propriedade distributiva de "$\cap$"em relação a "$\cup$",

$$\emptyset \neq \big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap (A \cup B) = \underbrace{\big[\big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A\big]}_{E} \cup \underbrace{\big[\big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap B\big]}_{F}.$$

Temos duas possibilidades:

$$E \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in A' \subset A' \cup B';$$
$$F \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in B' \subset A' \cup B'.$$

Em qualquer dos dois casos, temos $x_0 \in A' \cup B'$.
Reciprocamente, seja $x_0 \in A' \cup B'$. Então, ou $x_0 \in A'$ ou $x_0 \in B'$. Na primeira possibilidade (a outra é idêntica), qualquer que seja $r > 0$,

$$\emptyset \neq \big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A \subset \big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap (A \cup B).$$

Portanto, $x_0 \in (A \cup B)'$.

(e) Seja $x_0 \in (\overline{A})'$. Então

$$\big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap (A \cup A') \neq \emptyset, \forall r > 0$$

e assim,

$$\underbrace{\big[\big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A\big]}_{E} \cup \underbrace{\big[\big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A'\big]}_{F} \neq \emptyset.$$

Como

$$E \neq \emptyset \Longrightarrow x_0 \in A' \subset \overline{A},$$
$$F \neq \emptyset \Longrightarrow x_0 \in (A')' \overset{\text{item (b)}}{\subset} A' \subset \overline{A},$$

concluímos que $(\overline{A})' \subset \overline{A}$. Pelo item (b), $\overline{A}$ é fechado.

(f) Se A é fechado, então $A' \subset A$. Portanto,

$$\overline{A} = A' \cup A \subset A \cup A = A.$$

Como $\overline{A} = A \cup A' \supset A$, concluímos que $\overline{A} = A$. Reciprocamente, se $\overline{A} = A$ então $A' \subset A$ e A é fechado.

Exercício 3.2: *Sejam $\| \ \|_*$ e $\| \ \|_{**}$ duas normas equivalentes de um espaço vetorial V.*

a) *Mostre que x_0 é ponto de acumulação de A com relação a uma das normas se e somente se é ponto de acumulação com relação à outra.*

b) *Mostre que se A é um conjunto aberto em V em relação a $\| \ \|_*$, se e somente se A é aberto em relação a $\| \ \|_{**}$. Mostre que o mesmo vale para conjuntos fechados e compactos.*

Solução: Por hipótese, existem $m, M > 0$ tais que

$$m\|x\|_* \leq \|x\|_{**} \leq M\|x\|_*, \quad \forall x \in V.$$

Consideremos as bolas

$$B_r^*(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x - x_0\|_* < r\},$$
$$B_r^{**}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x - x_0\|_{**} < r\}.$$

Observe que, para qualquer $r > 0$, valem as inclusões

$$B_r^*(x_0) \subset B_{Mr}^{**}(x_0) \qquad (*)$$
$$B_r^{**}(x_0) \subset B_{r/m}^*(x_0) \qquad (**)$$

Se x_0 é ponto de acumulação de A em relação a $\| \ \|_*$, então

$$\big(B_r^*(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall r > 0.$$

Segue da inclusão $(*)$ que $\big(B_r^{**}(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, o que implica que x_0 é ponto de acumulação de A em relação a $\| \ \|_{**}$.

O argumento análogo e a utilização de $(**)$ nos leva à conclusão de que se x_0 é ponto de acumulação de A em relação a $\| \ \|_{**}$, então também é em relação a $\| \ \|_*$.

(b) Suponhamos A aberto em relação a $\| \ \|_*$ e $x_0 \in A$. Então existe $r > 0$ tal que $B_r^*(x_0) \subset A$. Da inclusão $(**)$ vemos que $B_{mr}^{**}(x_0) \subset A$, e concluímos que x_0 é ponto interior de A em relação a $\| \ \|_{**}$.

A recíproca é análoga.

Por outro lado, A é fechado em relação à norma $\| \ \|_*$ se, e somente se, A^c é aberto em relação a essa norma, se e somente se A^c é aberto em relação à norma $\| \ \|_{**}$, se e somente se A é fechado em relação a essa norma.

O mesmo vale para a compacidade, pois se $\{A_\lambda\}_\lambda$ é cobertura aberta de A em relação a $\| \ \|_*$, também o é em relação a $\| \ \|_{**}$.

Exercício 3.3: *Sejam A e B subconjuntos de um espaço vetorial normado V.*

a) *Se $A \subset B$, mostre que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ e $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

b) *Defina $\alpha(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$ e $\beta(B) = \overset{\circ}{\overline{B}}$. Mostre*

   i. *A aberto $\Rightarrow A \subset \alpha(A)$.*

   ii. *B fechado $\Rightarrow B \supset \beta(B)$.*

iii. Dê exemplo de conjunto A tal que A, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\alpha(A)$ e $\beta(A)$ sejam todos distintos.

Solução: (a) Por hipótese $A \subset B$. A inclusão $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ é imediata, pois se $x \in \overset{\circ}{A}$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A \subset B$.

Para mostrar que $\overline{A} \subset \overline{B}$, lembremos que (veja Exercício 3.1(c)) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$. Logo

$$\overline{A} = A' \cup A \subset B' \cup A \subset B' \cup B = \overline{B}.$$

(b) $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ e $\beta(B) = \overline{\overset{\circ}{B}}$.

É claro que $A \subset \overline{A}$ e, consequentemente (pelo item (a)) $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}} = \alpha(A)$. Se A é conjunto aberto, então

$$A = \overset{\circ}{A} \subset \alpha(A).$$

Por outro lado, $B \supset \overset{\circ}{B}$ e consequentemente $\overline{B} \supset \overline{\overset{\circ}{B}} = \beta(B)$. Se B é um conjunto fechado, então

$$B = \overline{B} \supset \beta(B).$$

Como exemplo, considere $A = (0,1) \cup (1,2) \cup \{3\}$ Então

$$\overset{\circ}{A} = (0,1) \cup (1,2), \quad \overline{A} = [0,2] \cup \{3\}, \quad \alpha(A) = (0,2), \quad \beta(A) = [0,2].$$

<u>**Exercício 3.4**</u>: *Seja K subconjunto compacto de um espaço vetorial normado V. Mostre que existe $A = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset K$ tal que $\overline{A} = K$.*

Solução: Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{B_{1/k}(x)\}_{x \in K}$ é cobertura aberta de K. Então, para $k = 1$, existem $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1} \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n_1} B_1(x_j).$$

Da mesma forma, existem $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_2}$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=n_1+1}^{n_2} B_{1/2}(x_j).$$

E assim por diante, construímos a sequência

$$A = \big\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, \ldots, x_{n_2}, \ldots, x_{n_3}, \ldots\big\}$$

Sejam $x \in K$, $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon$. Pela definição de A, existe $x_j \in A$ tal que $\|x - x_j\| < 1/k < \varepsilon$.

Exercício 3.5: *Seja $A = \{f \in C([0,1];\mathbb{R})\,;\, \|f\|_\infty < 1\}$ e $f_0 \equiv 0$. Mostre que f_0 é ponto interior de A relativamente à norma $\|\ \|_\infty$ mas não é ponto interior de A relativamente à norma $\|\ \|_1$.*

Solução: Observe que A é a bola aberta de centro em zero e raio 1 em relação à norma $\|\ \|_\infty$ no espaço $V = C([0,1];\mathbb{R})$. Logo A é aberto em relação a essa norma e f_0 é ponto interior.

Suponhamos que f_0 é ponto interior de A com relação à norma $\|\ \|_1$. Então deve existir $R > 0$ tal que se $\|f - f_0\|_1 < R$, então $f \in A$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $2/(k+1) < R$ e considere $f(x) = 2x^k$. Como $\|f\|_1 < R$, deveríamos ter $f \in A$. Mas é fácil ver que $\|f\|_\infty = 2$, isto é, $f \notin A$. Logo tal R não existe, o que significa que f_0 não é ponto interior de A (em relação a $\|\ \|_1$).

Exercício 3.6: *Demonstre a Proposição 3.6 (pag. 31 do Cálculo Avançado).*

Solução: (a) Suponhamos $l_1 \neq l_2$ dois limites para a sequência $\{x_k\}_k$ e considere $\varepsilon = \frac{1}{3}\|l_1 - l_2\|$. Então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$k \geq k_1 \Rightarrow \|x_k - l_1\| < \varepsilon$$
$$k \geq k_2 \Rightarrow \|x_k - l_2\| < \varepsilon$$

Se $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ e $k \geq k_0$, então

$$\|l_1 - l_2\| \leq \|x_k - l_1\| + \|l_2 - x_k\| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}\|l_1 - l_2\|,$$

um absurdo. Logo $l_1 = l_2$.

(b) Se $x_k \longrightarrow l$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - l\| < 1\ \forall k \geq n_0$. Seja

$$R = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{k_0}\| + 1\}.$$

Então verificamos facilmente que $x_k \in B_R(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

(c) Seja $x_0 \in A'$. Então, para todo $r > 0$, $\big(B_r(x_0)\setminus\{x_0\}\big) \cap A \neq \emptyset$. Em particular, para $r = 1$, existe $x_1 \in A$ satisfazendo $0 < \|x_1 - x_0\| < 1$. Analogamente, para $r = 1/2$, existe $x_2 \in A$ satisfazendo $0 < \|x_2 - x_0\| < 1/2$, para $r = 1/3$, etcetera. A sequência assim construída tem todos os elementos em A e converge para x_0. Vemos também que $x_k \neq x_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, se existe uma sequência $\{x_k\}_k$ de elementos de A que converge para x_0, com $x_k \neq x_0$ para todo k, então dado $r > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \|x_{k_0} - x_0\| < r$, o que equivale dizer que $x_{k_0} \in A \cap \big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big)$. Logo $x_0 \in A'$.

Exercício 3.7: *Prove diretamente a equivalência dos itens (ii) e (iii) no Teorema 3.7 (pag. 35 do Cálculo Avançado).*

Solução: Suponhamos K conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $\{x_k\}_k$ uma sequência de elementos de K. Consideremos o conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3 \ldots, \} \subset K$ que também é limitado.

Se A for finito, alguns dos elementos da sequência se repetem infinitamente. Temos, assim, uma subsequência constante $x_{k_1} = x_{k_2} = \cdots$, que é obviamente convergente, cujo limite está em K. Por outro lado, se A for infinito, o Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 3.1, pag. 21 do Cálculo Avançado) nos diz que existe uma sequência de elementos de A (que será uma subsequência da sequência original de K) que converge. Se denotarmos por x_0 o limite desta sub, então $x_0 \in K'$. Mas K sendo fechado, temos $K' \subset K$.

Reciprocamente, se K não é limitado, posso construir uma sequência que não possui sub convergente. De fato, escolho $x_1 \in K$ qualquer. Como $B_1(x_1)$ não cobre K, posso tomar $x_2 \in K \setminus B_1(x_1)$, de modo que $\|x_1 - x_2\| \geq 1$. Analogamente, como $B_1(x_1) \cup B_1(x_2)$ não cobre K posso escolher $x_3 \in K \setminus (B_1(x_1) \cup B_1(x_2))$. E assim sucessivamente, construímos uma sequência de elementos de K tal que $\|x_k - x_{k'}\| \geq 1$ se $k \neq k'$. Tal sequência não admite sub convergente.

Se K não é fechado, existe $x_0 \in K'$ tal que $x_0 \notin K$. Pela Proposição 3.6 (pag 21 do livro), existe uma sequência de elementos de K que converge para x_0. Portanto, nenhuma subsequência poderá convergir para um elementos de K, visto que $x_0 \notin K$.

Exercício 3.8: *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. A fronteira de A é definida por:*

$$\partial A = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \forall r > 0, B_r(x) \cap A \neq \emptyset,\ B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\big\}.$$

a) Mostre que $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$. Em particular, ∂A é fechado.

b) Mostre que $\overline{A} = A \cup \partial A$ e $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$.

c) Determine a fronteira de $A = \big([0,1] \times [0,1]\big) \cap \mathbb{Q}^2$.

Solução: (a) Condideremos as condições:

$$\begin{cases} (1) \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset, \\ (2) \quad B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset, \end{cases} \quad \forall r > 0.$$

Seja $x \in \partial A$. De (2) segue que $x \notin \overset{\circ}{A}$. Se $x \in A$ nada temos a provar, pois $A \subset \overline{A}$. Se $x \notin A$, a condição (1) significa que $x \in A'$. Logo, $\partial A \subset \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Reciprovamente, seja $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Logo $x \notin \overset{\circ}{A}$, o que implica a condição (2). Como $\overline{A} = A \cup A'$, temos $x \in A$ ou $x \in A'$, que, em qualquer dos casos, implica a condição (1).

Além disso, a condição (1) é equivalente a $x \in \overline{A}$ e a condição (2) é equivalente a $x \in \overline{A^c}$. Portanto, $x \in \partial A$ se, e somente se, $x \in \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$.

(b) $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $x \in A \cup A'$. Se $x \in A$, é imediato que $x \in A \cap \partial A$. Se $x \notin A$, então $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ e $x \in A'$. Logo, qualquer que seja $r > 0$, temos

$$\left.\begin{array}{r} x \in \mathbb{R}^n \setminus A \Rightarrow B_r(x) \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus A\big) \neq \emptyset \\ x \in A' \Rightarrow \big(B_r(x) \setminus \{x\}\big) \cap A \neq \emptyset \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x \in \partial A$$

Reciprocamente, seja $x \in A \cup \partial A$. Se $x \in A$ não há o que mostrar. Suponhamos então $x \in \partial A$ e $x \notin A$. Então, para todo $r > 0$ temos

$$B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset. \tag{3.2}$$

Das duas propriedades de (3.2), decorre que $\big(B_r(x) \setminus \{x\}\big) \cap A \neq \emptyset$ e concluímos que $x \in A'$.

Por outro lado, se $x \in \overset{\circ}{A}$, então $x \in A$ e existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(x) \subset A$, o que implica que $B_{r_0}(x) \cap A^c = \emptyset$. Logo, $x \notin \partial A$, isto é, $\overset{\circ}{A} \subset A \setminus \partial A$.
Reciprocamente, se $x \in A \setminus \partial A$, então existe $r_0 > 0$ tal que

$$B_{r_0}(x) \cap A^c = \emptyset \quad \text{ou} \quad B_{r_0}(x) \cap A = \emptyset. \tag{3.3}$$

Como a segunda condição em (3.3) é evidentemente falsa, segue da primeira que $B_{r_0}(x) \subset A$, isto é, $x \in A'$.

(c) Como consequência imediata da densidade de $\mathbb{Q}$, temos $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ e portanto segue do item (a),

$$\partial A = \overline{A} = [0,1] \times [0,1].$$

4

Limite e Continuidade

<u>**Exercício 4.1**</u>: *Sejam a, b, c, d números reais positivos. Mostre que o limite*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}$$

existe (e vale zero) se, e somente se, $(a/c)+(b/d)>1$.

Solução: Seja $f(x,y)=\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}$, $(x,y)\neq(0,0)$.
A condição $(a/c)+(b/d)>1$ é necessária. De fato, se $(a/c)+(b/d)\leq 1$ podemos considear a curva $x(t)=t^{1/c}$ e $y=t^{1/d}$, $t>0$, de modo que

$$\lim_{t\downarrow 0} f\big(x(t),y(t)\big)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{t^{(a/c)+(b/d)-1}}{2}=\begin{cases}1/2 & \text{se } (a/c)+(b/d)=1\\ +\infty & \text{se } (a/c)+(b/d)<1.\end{cases}$$

Como o limite é zero com x ou y tendendo a zero sobre os respectivos eixos, concluímos que o limite nesse caso não existe.
Para provar que a condição $(a/c)+(b/d)>1$ é suficiente, vamos analisar dois casos:
Caso 1. $(a/c)+(b/d)>1$ e $\max\big\{a/c,\ b/d\big\}>1$.
Podemos supor sem perda de generalidade que $a/c>1$. Assim, se $|x|\leq 1$, temos

$$f(x,y)\leq |y|^b\left(\frac{|x|^c}{|x|^c+|y|^d}\right)\leq |y|^b,$$

de onde se conclui que o limite existe e vale zero.
Caso 2. $(a/c)+(b/d)>1$ e $\max\big\{a/c,\ b/d\big\}\leq 1$.
Pela Desigualdade de Young (Lema 2.2, pag. 15), temos para $p,q>1$ tais que $1/p+1/q=1$,

$$|x|^a|y|^b\leq\frac{1}{p}|x|^{ap}+\frac{1}{q}|y|^{bq}.$$

Assim otemos

$$f(x,y)\leq\frac{1}{p}|x|^{ap-c}+\frac{1}{q}|y|^{bq-d}$$

e a conclusão segue caso seja possível encontrar p, q nas condições acima tais que $ap - c > 0$ e $bq - d > 0$.

Para isso, observemos que o ponto $P = (a/c,\, b/d)$ pertence ao triângulo ABC (veja a Figura 4.1).

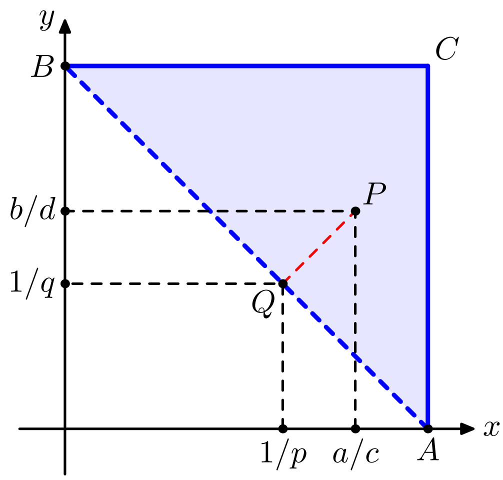


Figura 4.1

Se considerarmos a projeção de P sobre a reta $x+y=1$, obtemos o ponto $Q = (x_0, y_0)$, onde

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right) \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right).$$

Observe que $0 < x_0 < 1$, $0 < y_0 < 1$ e $x_0 + y_0 = 1$, de modo que podemos podemos escolher $p = 1/x_0$ e $q = 1/y_0$

É claro que

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right) < \frac{a}{c} \iff 1 < \frac{a}{c} + \frac{b}{d};$$
$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right) < \frac{b}{d} \iff 1 < \frac{a}{c} + \frac{b}{d}.$$

Portanto, temos as desigualdades

$$\frac{1}{p} < \frac{a}{c} \Rightarrow ap - c > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} < \frac{b}{d} \Rightarrow bq - d > 0,$$

como queríamos provar.

Exercício 4.2: *Sejam f_1 e f_2 duas funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ e considere $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$.*

Prove se verdadeira ou dê contra-exemplo se falsa:

a) *Se f_1 e f_2 são contínuas, então g é contínua.*

b) *Se g é contínua, então f_1 e f_2 são contínuas.*

c) *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções contínuas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Defina f por*

$$f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}.$$

Então f é contínua.

Solução: (a) Primeiramente, observe que

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$g(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x) + |f_1(x) - f_2(x)|}{2}.$$

Como a aplicação $s \mapsto |s|$ é contínua, vale a afirmativa em (a).

(b) Falso. De fato, sejam

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{senão} \end{cases}.$$

Então, $g \equiv 1$ é contínua, mas f_i não é.

(c) Vamos provar por indução. O item (a) nos garante a validade para $n = 2$. Suponhamos a afirmativa válida para $k - 1$, isto é, se $f_1, \ldots, f_{k-1}$ são contínuas, então $g = \max\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ também é contínua.

Sejam $f_1, \ldots, f_{k-1}, f_k$ funções contínuas e consideremos

$$f = \max\{f_1, \ldots, f_k\}.$$

É fácil ver que $f = \max\{g, f_k\}$, onde estamos denotando por g a função

$$g = \max\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}.$$

Por hipótese, g é contínua e, pelo item (a), concluímos que f é contínua.

Exercício 4.3: *Considere as afirmações:*

a) $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo;

b) Se $A \subset X$ tal que $\partial A \cap X = \emptyset$, então $A = \emptyset$ ou $A = X$. Mostre que (a) implica (b), mas a recíproca é falsa.

Solução: Mostremos que (a)$\Rightarrow$(b). Lembremos a definição de ∂A:

$$\partial A = \big\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \forall r > 0, B_r(x) \cap A \neq \emptyset,\ B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\big\}.$$

Mostemos (a)$\Rightarrow$(b) por redução absurdo. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo e $A \subset X$ tais que

$$A \neq \emptyset,\ \ A \neq X,\ \ \partial A \cap X = \emptyset.$$

Então $A \neq \emptyset$ e $X \setminus A \neq \emptyset$.

Se $x \in A$ é um elemento qualquer, então $x \notin \partial A$, pois $\partial A \cap X = \emptyset$. Logo, existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x)$ não intercepta $X \setminus A$, o que implica $B_{r_x}(x) \subset A$. Como $x \in A$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que A é aberto.

Da mesma forma, se $x \in X \setminus A$ é um elemento qualquer, então $x \notin \partial A$, pois $\partial A \cap X = \emptyset$. Logo, pelo mesmo argumento acima, concluímos que $\mathbb{R}^n \setminus A$ é aberto.

Como por hipótese X é conexo e, pelos argumentos acima, $X \subset A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$, $A \cap X = A \neq \emptyset$ e $(\mathbb{R}^n \setminus A) \cap X = X \setminus A \neq \emptyset$, segue que $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$, o que é um absurdo.

Mostremos que (b)$\not\Rightarrow$(a). Considere $X = \{1, 2\} \subset \mathbb{R}$. É claro que X não é conexo. O conjunto das partes de X é $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$. É claro que

$$\partial\{1\} = \{1\}, \ \ \partial\{2\} = \{2\}, \ \ \partial\{1, 2\} = \{1, 2\}$$

Logo, o único subconjunto A de X que satisfaz a condição $\partial A \cap X \neq \emptyset$ é o conjunto vazio. Assim, se (b) implica (a), X é conexo, o que é absurdo.

Observação: Vale observar que o argumento acima se aplica para qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ fechado e desconexo. De fato, como $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, segue que $\partial A = \emptyset \iff A = \emptyset$. Logo, se $A \neq \emptyset$ e X é fechado, temos $\partial A \subset \overline{A} \subset \overline{X} = X$. Portanto, o único subconjunto de X que satisfaz a condição $\partial A \cap X = \emptyset$ é o conjunto vazio.

Exercício 4.4: *Demonstre o Lema 4.2 (da pag. 45 do texto). Use o resultado para mostrar que se $1 < p_1, p_2, \dots, p_k < +\infty$ são tais que*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = 1,$$

então vale a seguinte generalização da desigualdade de Young.

$$|x_1 x_2 \cdots x_k| \leq \frac{|x_1|^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{|x_k|^{p_k}}{p_k}. \tag{4.1}$$

Solução: Vamos demonstrar o Lema 4.2. Por hipótese, se $x, y \in A$ e $\lambda \in (0, 1)$, então

$$f\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Suponhamos verdadeiro para $n = k$, isto é, se $x_1, \dots, x_k \in A$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in (0, 1)$ são tais que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ então

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k).$$

Consideremos agora $k + 1$ pontos de A e $k + 1$ números no intervalo $(0, 1)$ cuja soma seja igual a 1. Então podemos escrever

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = f\big(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y\big), \tag{4.2}$$

onde estamos denotando

$$y = \left[\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} x_2 + \cdots + \frac{\lambda_{k+1}}{1 - \lambda_1} x_{k+1}\right].$$

Como f é convexa, obtemos

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1) f(y). \tag{4.3}$$

Observando que

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} + \cdots + \frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda_1} = 1$$

segue da hipótese de indução

$$f(y) \leq \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} f(x_2) + \cdots + \frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda_1} f(x_{k+1}). \tag{4.4}$$

De (4.2), (4.3) e (4.4), concluímos que

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).$$

A prova da desigualdade (4.1) segue diretamente da concavidade da função logaritmo e dos argumentos usados na prova do Lema 2.2.

Exercício 4.5: *Diz-se que uma função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é aberta se $f(U)$ é aberto de $\mathbb{R}^m$ para todo $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função invertível tal que f^{-1} é contínua. Mostre que f é aberta.*

Solução: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é bijetora e $g = f^{-1}$ é contínua.

Pelo Teorema 4.5 (pag. 40), $g^{-1}(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, qualquer que seja V aberto de $\mathbb{R}^n$. Mas $g^{-1}(V) = f(V)$. Isto quer dizer que f é função aberta.

Exercício 4.6:

a) Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e $f\colon A \longrightarrow B$ uma função bijetora. Se A é compacto e f é contínua, mostre que $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$ é contínua.

b) Dê exemplo com $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f\colon A \longrightarrow B$ bijetora e contínua tal que $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$ não é contínua. Faça o mesmo com $A, B \subset \mathbb{R}^2$.

Solução: (a) Seja $\{y_k\}_k$ sequência de B tal que $y_k \to \overline{y}$. Queremos mostrar que $f^{-1}(y_k) \to f^{-1}(\overline{y})$.

Primeiramente, observe que, sendo B fechado e $y_k \in B$, temos $\overline{y} \in B$. Como f é bijetora, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um único $x_k \in A$ tal que $y_k = f(x_k)$. Analogamente, existe um único $\overline{x} \in A$ tal que $\overline{y} = f(\overline{x})$. Como A é compacto, existe uma subsequência $\{x_{k_i}\}$ que converge para algum $\widetilde{x} \in A$. Pela continuidade de f,

$$f(x_{k_i}) \overset{i \to +\infty}{\longrightarrow} f(\widetilde{x}).$$

Entretanto, sabemos que $f(x_{k_i}) = y_{k_i} \to \overline{y} = f(\overline{x})$. Pela unicidade dos limites, concluímos que $f(\widetilde{x}) = f(\overline{x})$ e pela injetividade de f obtemos $\widetilde{x} = \overline{x}$.

Além disso, é toda a sequência $\{x_k\}$ que converge para $\overline{x}$. De fato, se tomarmos uma outra subsequência qualquer de $\{x_k\}$ que converge para algum $\widehat{x} \in A$, os mesmos argumentos anteriores nos levarão à $\widehat{x} = \overline{x}$.

Logo, $f^{-1}(y_k) = x_k \to \overline{x} = f^{-1}(\overline{y})$. O Teorema 4.2 (pag. 38) nos garante que f^{-1} é contínua.

(b) Exemplo de uma função $f\colon A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ bijetora e contínua com inversa descontínua.

Seja $A = [0,1] \cup (2,3]$, $B = [0,2]$ e $f\colon A \to B$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1], \\ x-1 & \text{se } x \in (2,3]. \end{cases}$$

Então f é contínua e bijetora, mas

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in [0,1], \\ y+1 & \text{se } y \in (1,2], \end{cases}$$

não é contínua.

Exemplo de uma função $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to B \subset \mathbb{R}^2$ bijetora e contínua com inversa descontínua.

Sejam $A = (0,1] \times [0, 2\pi)$, $B = \{(x_1, x_2)\,;\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \setminus \{(0,0)\}$ e $f\colon A \to B$ definida por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. É claro que f é contínua e bijetora.

Provemos que a inversa $f^{-1}\colon B \to A$ não é contínua nos pontos de $B \cap \{(x_1, 0)\,;\, x_1 > 0\}$. De fato, vamos mostrar que f^{-1} não é contínua no ponto $(1/2, 0)$. Seja $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k})$ uma sequência com as seguintes propriedades:

$$\|x_k\|_2 = \frac{1}{2}, \quad x_{2,k} > 0, \quad x_{2,k} \to 0^+.$$

Então, é claro que $x_k = \frac{1}{2}(\cos\theta_k, \operatorname{sen}\theta_k)$, onde $\theta_k > 0$ e $\theta_k \to 0^+$. Isto é

$$x_k \to (\frac{1}{2}, 0), \quad \text{mas} \quad f^{-1}(x_k) = (\frac{1}{2}, \theta_k) \to (\frac{1}{2}, 0).$$

Por outro lado, se $x_k = (x_{1,n}, x_{2,n})$ é uma sequência com as seguintes propriedades:

$$\|x_k\|_2 = \frac{1}{2}, \quad x_{2,n} < 0, \quad x_{2,n} \to 0^-,$$

então fica claro que $x_k = \frac{1}{2}(\cos\theta_k, \operatorname{sen}\theta_k)$, onde $\theta_k < 2\pi$ e $\theta_k \to 2\pi^-$. Isto é

$$x_k \to (\frac{1}{2}, 0), \quad \text{mas} \quad f^{-1}(x_k) = (\frac{1}{2}, \theta_k) \to (\frac{1}{2}, 2\pi).$$

Portanto, f^{-1} não é contínua.

Exercício 4.7: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty. \tag{4.5}$$

Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Solução: Considere $M = |f(0)|$. Por hipótese, existe $R > 0$ tal que se $\|x\| > R$ então $f(x) > M$. Como $K = \overline{B_R(0)}$ é compacto, existe $x_0 \in K$ ponto de mínimo de f sobre K, isto é,

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in K.$$

Em particular, $f(x_0) \leq f(0)$. Por outro lado, se $x \notin K$, então

$$f(x) > M = |f(0)| \geq f(0) \geq f(x_0).$$

Portanto, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como queríamos demonstrar.

<u>**Exercício 4.8**</u>: *Mostre que a função $f\colon [0\,,\,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^\alpha$, com $0 < \alpha < 1$ é Hölder contínua de ordem α.*

Solução: Queremos provar que existe $M \geq 0$ tal que a função $f(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, satisfaz

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y > 0.$$

Como f é uma função crescente, basta mostrar que

$$x^\alpha - y^\alpha \leq M(x - y)^\alpha, \quad \forall x \geq y \geq 0. \tag{4.6}$$

Fixemos $y \geq 0$ e consideremos a função

$$g(x) = (x - y)^\alpha - x^\alpha + y^\alpha,$$

definida no intervalo $[y, +\infty)$. É claro que $g(y) = 0$ e

$$g'(x) = \alpha\big[(x - y)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}\big].$$

Como $0 \leq x - y \leq x$ e $\alpha - 1 < 0$, temos

$$(x - y)^{\alpha-1} > x^{\alpha-1}, \quad \forall x > y.$$

Portanto, a função g é estritamente crescente no intervalo $[y, +\infty)$ e concluímos que $g(x) > 0 = g(y)$. Isso quer dizer que $(x - y)^\alpha > x^\alpha - y^\alpha$ e obtemos (4.6) com $M = 1$.

<u>**Exercício 4.9**</u>: *Considere $f\colon [0, 1/e] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1/\sqrt{-\ln x} & \text{se } 0 < x \leq 1/e \end{cases}$$

Mostre que f é uniformemente contínua mas não é Hölder-contínua.

Solução: Queremos mostrar que f não é Hölder contínua em $[0, 1/e]$, isto é, que **não** existem $0 < \alpha \leq 1$ e $M > 0$ tais que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0, 1/e].$$

Ou, o que é equivalente, queremos mostrar que, quaisquer que sejam $M > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$, podemos encontrar $x_0, y_0 \in [0, 1/e]$ tais que $|f(x_0) - f(y_0)| \geq M|x_0 - y_0|^\alpha$.

Consideremos a função $g\colon [0, 1] \to [0, 1/e]$ definida por

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0 \\ \exp(-1/y^2) & \text{se } 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

É fácil verificar que g é contínua, bijetora e $g = f^{-1}$. De fato, g é Lipschitz, posto que $|g'(y)| \leq 2/e$ para todo $y \in (0, 1)$. Pelo exercício 4.6(a), f é contínua. Portanto, o Teorema 4.11 (pag. 48) nos garante que f é uniformemente contínua.

Para mostrar que f não é Hölder, sejam $M > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1/\alpha$ e considere o limite

$$\lim_{\xi \to +\infty} \frac{\xi^n}{\exp(\xi^2)} = 0. \tag{4.7}$$

Se tomarmos $\xi = 1/y$, então podemos escrever (4.7) na forma

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\exp(-1/y^2)}{y^n} = 0.$$

Portanto, para $\varepsilon = 1/M^n$, existe $y_0 \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\exp(-1/y_0^2)}{y_0^n} < \varepsilon,$$

que podemos escrever na forma

$$|g(y_0) - g(0)| < \varepsilon |y_0 - 0|^n. \tag{4.8}$$

Se tomarmos $x_0 = g(y_0)$, então $x_0 \in (0, 1/e)$ e podemos escrever (4.8) na forma

$$|f(x_0) - f(0)| \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/n} |x_0 - 0|^{1/n} = M|x_0 - 0|^{1/n} \geq M|x_0 - 0|^{\alpha},$$

que é o que queríamos demonstrar.

<u>**Exercício 4.10**</u>: *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e não vazio. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ defina*

$$\operatorname{dist}(x,F) = \inf\big\{\|x-y\| \; ; \; y \in F\big\}.$$

a) Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe $y_x \in F$ tal que $\operatorname{dist}(x,F) = \|x - y_x\|$.

b) Mostre que a função $x \mapsto \operatorname{dist}(x,F)$ é Lipschitz contínua.

Solução: (a) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $y_k \in F$ tal que

$$\operatorname{dist}(x,F) \leq \|x - y_k\| < \operatorname{dist}(x,F) + \frac{1}{k}.$$

Logo, a sequência $\{y_k\}_k$ é limitada e podemos extrair uma seubsequência $\{y_{k_i}\}$ que converge para algum $y_x \in F$. O resultado segue da passagem ao limite com $k_i \to +\infty$ nas desigualdades acima.

(b) Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Pelo item anterior, existem $y_1, y_2 \in F$ tais que

$$\operatorname{dist}(x_i,F) = \|x_i - y_i\|, \quad i = 1,2.$$

Então,

$$\|x_1 - x_2\| \geq \|x_2 - y_1\| - \|y_1 - x_1\| \geq \operatorname{dist}(x_2,F) - \operatorname{dist}(x_1,F).$$

Analogamente,

$$\|x_1 - x_2\| \geq \|x_1 - y_2\| - \|y_2 - x_2\| \geq \operatorname{dist}(x_1,F) - \operatorname{dist}(x_2,F).$$

Das desigualdades acima, obtemos

$$|\operatorname{dist}(x_1,F) - \operatorname{dist}(x_2,F)| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

<u>**Exercício 4.11**</u>: *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e A, B conjuntos fechados não vazios disjuntos, mostre que existe uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo as seguintes propriedades*

$$f(x) = a, \ \forall x \in A, \quad f(x) = b, \ \forall x \in B.$$

$$\min\{a, b\} \leq f(x) \leq \max\{a, b\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Solução: Basta considerar

$$f(x) = b\frac{\operatorname{dist}(x, A)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)} + a\frac{\operatorname{dist}(x, B)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}.$$

<u>**Exercício 4.12**</u>:

a) *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e convexo e $f \colon A \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, então f é contínua. Mostre que o resultado é falso se A não for aberto.*

b) *Seja $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ função convexa. Mostre que f é semicontínua superiormente em $[a, b]$.*

c) *Dê um exemplo de uma função convexa definida na bola $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \, ; \, \|x\|_2 \leq 1\}$ que não seja semicontínua superiormente em B.*

<u>**Solução:**</u> (a) Seja $x_0 \in A$. Como A é aberto, podemos escolher $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset A$. Seja $g \colon \overline{B_2(0)} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$g(x) = f(x_0 + \frac{r}{2}x) - f(x_0), \quad \forall x \in \overline{B_2(0)},$$

onde $\overline{B_2(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, \|x\|_2 \leq 2\}$. Então é fácil verificar que g é convexa em $\overline{B_2(0)}$ e $g(0) = 0$.

Os mesmos argumentos usados nas etapas 1 e 2 da prova do Teorema 4.10 nos levam à conclusão de que g é contínua em 0 e, consequentemente, f é contínua em x_0.

O resultado é falso se A não for aberto. De fato, considere a função $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ e $f(x) = 0$ para $x \in [0, 1)$. Obviamente f não é contínua e é fácil verificar que f é convexa.

(b) Se $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é convexa, então f é contínua em (a, b). Provemos que f é s.c.s. em a. Seja $\{x_k\}_k$ uma sequência em $[a, b]$ tal que $x \to a^+$. Então podemos escrever $x_k = \lambda_k b + (1 - \lambda_k)a$, com $\lambda_k \to 0^+$. Como f é convexa, temos

$$f(x_k) \leq \lambda_k f(b) + (1 - \lambda_k) f(a).$$

Tomando o limite superior dois lados da desigualdade acima, temos

$$\limsup_{n \to +\infty} f(x_k) \leq f(a)$$

e concluímos que f é scs em a. O mesmo argumento vale para a outra extremidade do intervalo.

(c) Considere f: $B \to \mathbb{R}$ a função assim definida.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ \theta & \text{se } x = \cos\theta, \ y = \operatorname{sen}\theta, \ 0 < \theta < 2\pi \\ \pi & \text{se } x = 1, \ y = 0 \end{cases}$$

<u>**Exercício 4.13**</u>: *Prove que o conjunto $N_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq r\}$ é convexo se f é função convexa.*

Solução: f é função convexa e $N_r = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, f(x) \leq r\}$.

Se $x, y \in N_r$ e $\lambda \in [0,1]$, então

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r.$$

Portanto $\lambda x + (1-\lambda)y \in N_r$.

<u>**Exercício 4.14**</u>: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e convexo. Uma função $f\colon \Omega \to]0,\infty[$ é dita log-côncava em Ω se a função $\log\big(f(x)\big)$ é côncava em Ω.*

a) *Prove que toda função log-côncava é contínua.*

b) *Prove que f é log-côncava $\Leftrightarrow$ $f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq f(x)^\lambda f(y)^{(1-\lambda)}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in [0,1]$.*

c) *Prove que o conjunto $N_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq r\}$ é convexo se f é log-côncava.*

d) *Toda função log-côncava é côncava? Toda função côncava é log-côncava?*

Solução: (a) Seja f uma função log-côncava e $g(x) = \ln f(x)$. Então, por definição, g é côncava e, consequentemente, contínua. Como $f(x) = \exp(g(x))$, concluímos que f é contínua.

(b) Suponhamos f função log-côncava. Então $g(x) = \ln f(x)$ é função côncava. Isto é, $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$, para todo $x, y \in \Omega$ e $\lambda \in [0,1]$. Portanto

$$\begin{aligned} \ln f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geq \lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y) \\ &= \ln f(x)^\lambda + \ln f(y)^{1-\lambda} \\ &= \ln f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Obtemos a conclusão após aplicar a exponencial em ambos os lados da desigualdade (4.9).

Reciprocamente, se $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}$, então obtemos após aplicar o logaritmo (que é uma função crescente) em ambos os lados,

$$\ln f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y),$$

o que significa dizer que f é log-côncava.

(c) Sejam $x, y \in N_r$ e $\lambda \in [0,1]$. Então, pelo item (b),

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda} \geq r^\lambda r^{1-\lambda} = r.$$

(d) Toda função côncava (**e positiva**) é log-côncava. De fato, lembrando a desigualdade de Young: se $a, b > 0$ e $1 \leq p, q \leq +\infty$ satisfazem $1/p + 1/q = 1$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Tomemos $a = f(x)^\lambda$, $b = f(y)^{1-\lambda}$, $p = 1/\lambda$ e $q = 1/(1-\lambda)$. Então podemos escrever

$$f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda} \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

portanto, se f é côncava, temos

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(x)^{\lambda} f(y)^{1-\lambda}.$$

Mas nem toda função log-côncava é côncava. Por exemplo, considere $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \exp(\sqrt{x})$. É claro que $\ln f(x) = \sqrt{x}$ que é uma função côncava. No entanto, f é convexa, pois $f''(x) > 0$ para todo $x \in (1,+\infty)$.

<u>Exercício 4.15</u>: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa, isto é, $f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e para todo $t \in \,]0,1[$. Mostre que se f é coerciva (veja (4.5)), então existe um único $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Solução: Sabemos que se f é convexa em $\mathbb{R}^n$, então f é contínua. Sendo coerciva (veja Exercício 4.7), existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Resta-nos mostrar que tal x_0 é único. Suponhamos então que existem dois pontos x_0 e x_1 diferentes tais que

$$m = f(x_0) = f(x_1) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Como f é estritamente convexa, temos

$$f\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1\right) < \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) = m.$$

Portanto $x_2 = (x_0 + x_1)/2 \in \mathbb{R}^n$ é tal que $f(x_2) < m$, o que é impossível.

<u>Exercício 4.16</u>: *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo e fechado.*

a) Mostre que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, existe um único $y \in C$ tal que $\|x-y\|_2 \leq \|z-x\|_2$, $\forall z \in C$. ($y = P_C(x)$ é denominado a projeção ortogonal de x sobre C. Temos assim definida a aplicação

$$\begin{array}{rcl} P_C\colon \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & P_C(x) \end{array} \tag{4.10}$$

b) Mostre que $y = P_C(x) \iff \langle x-y : z-y\rangle \leq 0$, $\forall z \in C$.

c) Use o item (b) para mostrar que P_C satisfaz

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|_2^2 \leq \big\langle x-y : P_C(x) - P_C(y)\big\rangle$$

e conclua que P_C é Lipschitz-contínua em $\mathbb{R}^n$.

d) Verifique que os argumentos dos itens anteriores continuam válidos para qualquer norma que provenha de um produto escalar.

e) Mostre que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, existe (não necessariamente único) $y \in C$ tal que $\|x-y\|_1 \leq \|z-x\|_1$, $\forall z \in C$. Analogamente, existe (não necessariamente único) $y \in C$ tal que $\|x-y\|_\infty \leq \|z-x\|_\infty$, $\forall z \in C$.

Solução: (a) Vamos mostrar que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe um único $y \in C$ tal que

$$\|x-y\|_2 \leq \|z-x\|_2, \quad \forall z \in C. \tag{4.11}$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Se $x \in C$, então $y = x$ satisfaz (4.11). Se $x \notin C$, seja $x_1 \in C$ e considere $r = \|x - x_1\|_2 > 0$. É claro que $C_r := \overline{B_r(x)} \cap C$ é compacto e não vazio. Como a função $z \mapsto \|x - z\|_2$ é contínua, existe $y \in C_r$ tal que $\|x - y\|_2 \le \|x - z\|_2$, $\forall z \in C_r$. Por outro lado, se $z \in C \setminus C_r$, então

$$\|x - z\|_2 \ge \|x - x_1\|_2 \ge \|x - y\|_2$$

e obtemos a desigualdade (4.11).

(b) Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, seja $y \in C$ satisfazendo (4.11). Vamos mostrar que

$$\langle x - y \,:\, z - y \rangle \le 0, \ \forall z \in C. \tag{4.12}$$

Seja $z \in C$. Então, para todo $t \in (0,1)$ temos $(1-t)y + tz \in C$ e, em particular, $\|x - y\|_2^2 \le \|x - (1-t)y - tz\|_2^2$, o que implica

$$\langle x - y : z - y \rangle \le \frac{t}{2}\|y - z\|_2^2.$$

Fazendo $t \to 0^+$, obtemos a desigualdade em (4.12).

Reciprocamente, seja $y \in C$ satisfazendo (4.12) e considere $z = tw + (1-t)y \in C$. Então,

$$\|x-z\|_2^2 = \|(x-y)+t(y-w)\|_2^2 = \|x-y\|_2^2 + 2t\langle x-y, y-w\rangle + t^2\|y-w\|_2^2 \ge \|x-y\|_2^2$$

e obtemos (4.11).

Para provar que y é único, suponhamos y_1, y_2 satisfazendo (4.11). Então

$$\begin{aligned} \langle x - y_1 : z - y_1 \rangle \le 0 \\ \langle x - y_2 : z - y_2 \rangle \le 0 \end{aligned} \quad \forall z \in C. \tag{4.13}$$

Substituindo $z = y_2$ na primeira desigualdade de (4.13), $z = y_1$ na segunda e somando as duas, obtemos $\|y_1 - y_2\|_2 \le 0$, ou $y_1 = y_2$.

Para provar (c), consideremos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Então segue de (b) que

$$\begin{aligned} \langle x_1 - P_C(x_1) : P_C(x_2) - P_C(x_1) \rangle \le 0, \\ \langle x_2 - P_C(x_2) : P_C(x_1) - P_C(x_2) \rangle \le 0, \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \langle x_1 - P_C(x_1) : P_C(x_2) - P_C(x_1) \rangle \le 0, \\ \langle P_C(x_2) - x_2 : P_C(x_2) - P_C(x_1) \rangle \le 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

Somando as desigualdade em (4.14), obtemos

$$\langle x_1 - x_2 + P_C(x_2) - P_C(x_1) : P_C(x_2) - P_C(x_1) \rangle \le 0$$

de onde concluímos a desigualdade

$$\|P_C(x_2) - P_C(x_1)\|_2^2 \le \langle x_2 - x_1 : P_C(x_2) - P_C(x_1) \rangle. \tag{4.15}$$

Para mostrar que P_C é Lipschitz-contínua, basta aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito de (4.15).

(d) O argumento utilizado no item (a) se aplica a qualquer norma. Já os argumentos utilizados nos itens (b) e (c) só valem para normas induzidas por um produto interno: $\|x\| = \sqrt{\langle x : x\rangle}$.

(e) O caso da norma $\|\ \|_1$: Considere $x_0 = (1,1)$ e $C = \{x \in \mathbb{R}^2\,;\, \|x\|_1 \le 1\}$. Então os pontos de C que estão mais próximos de x_0 na norma $\|\ \|_1$ são os pontos $y = (t, 1-t)$, $t \in [0,1]$. De fato,

$$\|x_0 - z\|_1 = |1-t| + |t| = 1.$$

O caso da norma $\|\ \|_\infty$: Considere $x_0 = (1,0)$ e $C = \{x \in \mathbb{R}^2\,;\, \|x\|_\infty \le 1\}$. Então os pontos de C que estão mais próximos de x_0 na norma $\|\ \|_\infty$ são os pontos $y = (1,t)$, $t \in [-1,1]$. De fato,

$$\|x_0 - z\|_\infty = \max_{-1\le t\le 1}\{1, |t|\} = 1.$$

Exercício 4.17: *Considere $\mathbb{R}^n$ munido da norma $\|\ \|_*$ e $\mathbb{R}^m$ munido da norma $\|\ \|_\bullet$. Seja $f\colon (\mathbb{R}^n, \|\ \|_*) \to (\mathbb{R}^m, \|\ \|_\bullet)$ definida por $f(x) = Ax$, onde A é matriz $(m\times N)$. Defina*

$$\begin{cases} M_A = \sup\{\|f(x)\|_\bullet ; \|x\|_* = 1\}, \\ m_A = \inf\{C \ge 0; \|f(x)\|_\bullet \le C\|x\|_*\}. \end{cases}$$

1. *Prove que $M_A = m_A = \|f(x_0)\|_\bullet$ para algum vetor unitário $x_0 \in \mathbb{R}^n$;*
2. *Prove as seguintes propriedades:*
   a) *$M_{A+B} \le M_A + M_B$;*
   b) *$M_{\lambda A} = |\lambda| M_A$;*
   c) *$M_A \ge 0$ e $M_A = 0 \iff A = 0$.*
   d) *Mostre que se $m = N$ e $\|\cdot\|_\bullet = \|\cdot\|_*$, então $M_{AB} \le M_A M_B$. Em particular, se A é invertível, então $M_{A^{-1}} \ge 1/M_A$.*
3. *Calcule M_A nos seguintes casos:*
   a) *$A\colon (\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty) \to (\mathbb{R}^m, \|\ \|_\infty)$*
   b) *$A\colon (\mathbb{R}^n, \|\ \|_1) \to (\mathbb{R}^m, \|\ \|_1)$*
   c) *$A\colon (\mathbb{R}^n, \|\ \|_1) \to (\mathbb{R}^m, \|\ \|_\infty)$*

   Definição: Denotando

$$\|A\| = M_A, \tag{4.16}$$

temos definida uma norma no espaço vetorial das matrizes e vale a desigualdade $\|Ax\|_\bullet \le \|A\|\|x\|_*$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. A norma definida por (4.16) é denominada norma induzida pelas normas $\|\ \|_*$ e $\|\ \|_\bullet$

Solução: (1) Consideremos A matriz $m \times N$ e $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \|Ax\|_\bullet$. É claro que g é contínua. Como o conjunto $K = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x\|_* = 1\}$ é compacto, existe $x_0 \in K$ tal que $g(x_0) \ge g(x)$, $\forall x \in K$. Portanto,

$$M_A = g(x_0) = \|Ax_0\|_\bullet. \tag{4.17}$$

Vamos provar que $m_A = M_A$. Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $x \neq 0$, então $x/\|x\|_* \in K$. Logo, $g(x/\|x\|_*) \leq M_A$, isto é,

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_*}\right) \right\|_\bullet \leq M_A \quad \Rightarrow \quad \|Ax\|_\bullet \leq M_A \|x\|_*.$$

Segue da definição de m_A que $m_A \leq M_A$.
Reciprocamente, pela definição de inf, dado $\varepsilon > 0$, existe $C \geq 0$ tal que

$$m_A \leq C < m_A + \varepsilon, \quad \text{e} \quad \|Ax\|_\bullet \leq C\|x\|_*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.18}$$

Tomando $x = x_0$ definido em (4.17) em (4.18), obtemos

$$M_A = \|Ax_0\|_\bullet \leq C < m_A + \varepsilon.$$

Portanto, $M_A < m_A + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $M_A \leq m_A$.
(2) Provemos as propriedades (a) e (b). A propriedade (c) é trivial.

$$\begin{aligned}
M_{A+B} &= \sup\big\{\|(A+B)x\|_\bullet\,;\, \|x\|_* = 1\big\} \\
&\leq \sup\big\{\|Ax\|_\bullet + \|Bx\|_\bullet\,;\, \|x\|_* = 1\big\} \\
&\leq \sup\big\{\|Ax\|_\bullet\,;\, \|x\|_* = 1\big\} + \sup\big\{\|Bx\|_\bullet\,;\, \|x\|_* = 1\big\} \\
&= M_A + M_B \\
M_{\lambda A} &= \sup\big\{\|\lambda Ax\|_\bullet\,;\, \|x\|_* = 1\big\} \\
&= \sup\big\{|\lambda|\|Ax\|_\bullet\,;\, \|x\|_* = 1\big\} \\
&= |\lambda| \sup\big\{\|Ax\|_\bullet\,;\, \|x\|_* = 1\big\} \\
&= |\lambda| M_A
\end{aligned}$$

Vamos mostrar (d). Se x e y são vetores unitários, então

$$\|Bx\| \leq M_B \quad \text{e} \quad \|Ay\| \leq M_A.$$

Consideremos, em particular, $y = Bx/\|Bx\|$. Então

$$\left\| A\left(\frac{Bx}{\|Bx\|}\right) \right\| \leq M_A \Rightarrow \|ABx\| \leq M_A\|Bx\| \leq M_A M_B.$$

Portanto, $\|ABx\| \leq M_A M_B$ qualquer que seja x unitário, o que implica

$$M_{AB} = \sup\big\{\|ABx\|\,;\, \|x\| = 1\big\} \leq M_A M_B.$$

No caso em que A é matriz invertível, temos $A^{-1}A = I$ e, como consequência do demonstrado acima,

$$1 = M_I = M_{A^{-1}A} \leq M_{A^{-1}} M_A \quad \Rightarrow \quad M_{A^{-1}} \geq 1/M_A.$$

(3) Seja $A = (a_{ij})_{i,j}$ matriz $m \times N$. Calculemos M_A nos três casos seguintes:

(a) $$M_A = \sup\big\{\|Ax\|_\infty \,;\, \|x\|_\infty = 1\big\}.$$

Nesta caso, vamos mostrar que

$$M_A = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Se $y = (y_1, \ldots, y_m)$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$ são tais que $y = Ax$, então

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \Rightarrow |y_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty.$$

Portanto,

$$\|y\|_\infty \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty$$

e segue da definição de m_A que

$$m_A \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right). \tag{4.19}$$

Para provar a igualdade, seja i_0 o índice sobre o qual o máximo em (4.19) é atingido, isto é,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

e considere o vetor $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0N})$, onde

$$x_{0j} = \begin{cases} a_{i_0 j}/|a_{i_0 j}| & \text{se } a_{i_0 j} \neq 0 \\ 0 & \text{se } a_{i_0 j} = 0 \end{cases}$$

Então é claro que $\|x_0\|_\infty = 1$. Além disso, se $y_0 = Ax_0$, então

$$\|y_0\|_\infty = |y_{i_0}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|.$$

Portanto,

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \leq M_A = m_A. \tag{4.20}$$

De (4.19) e (4.20), temos a conclusão.

Observação: Posto que, neste caso, M_A é a norma de A induzida pelas normas $\| \ \|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$, podemos considerar a notação $M_A = \|A\|_{\infty\infty}$.
Observe que se $L_1, L_2, \ldots, L_m$ são os vetores-linha que compõem a matriz A, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$$

então

$$\|A\|_{\infty\infty} = \max\big\{\|L_1\|_1, \|L_2\|_1, \ldots, \|L_m\|_1\big\} = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

(b) $$M_A = \sup\big\{\|Ax\|_1 \,;\, \|x\|_1 = 1\big\}.$$

Neste caso, vamos mostrar que

$$M_A = \max_j \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right).$$

Se $y = (y_1, \ldots, y_m)$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$ são tais que $y = Ax$, então

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Se denotarmos por $C_1, C_2, \ldots, C_n$ os vetores-coluna que compõem a matriz A, então podemos escrever (4.21) na forma

$$y = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_n C_n.$$

Portanto,

$$\|y\|_1 \leq |x_1|\|C_1\|_1 + \cdots + |x_n|\|C_n\|_1 \leq \max\big\{\|C_1\|_1, \ldots, \|C_n\|_1\big\}\|x\|_1,$$

o que implica

$$m_A \leq \max\big\{\|C_1\|_1, \ldots, \|C_n\|_1\big\}. \tag{4.22}$$

Para provar a igualdade, seja j_0 o índice em (4.22) em que o máximo é atingido, isto é,

$$\|C_{j_0}\|_1 = \max\big\{\|C_1\|_1, \ldots, \|C_n\|_1\big\}.$$

Tomando $x = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ o j_0-ésimo vetor da base canônica, é fácil ver que $\|x\|_1 = 1$ e $C_{j_0} = Ax$. Portanto

$$\|C_{j_0}\|_1 = \max\big\{\|C_1\|_1, \ldots, \|C_n\|_1\big\} \leq M_A = m_A,$$

como queríamos provar.

Observação: Com a notação introduzida na observação anterior, podemos escrever

$$\|A\|_{1\,1} = \max\big\{\|C_1\|_1, \ldots, \|C_n\|_1\big\} = \max_j \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right).$$

(c) $$M_A = \sup\big\{\|Ax\|_\infty\,;\ \|x\|_1 = 1\big\}.$$

Nesta caso, vamos mostrar que

$$M_A = \max_j \left(\max_i |a_{ij}| \right).$$

Se $y = (y_1, \ldots, y_m)$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$ são tais que $y = Ax$, então

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Se denotarmos por $C_1, C_2, \ldots, C_n$ os vetores-coluna que compõem a matriz A, então podemos escrever (4.23) na forma

$$y = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_nC_n.$$

Portanto,

$$\|y\|_\infty \le |x_1|\|C_1\|_\infty + \cdots + |x_n|\|C_n\|_\infty \le \max\big\{\|C_1\|_\infty, \ldots, \|C_n\|_\infty\big\}\|x\|_1,$$

o que implica

$$m_A \le \max\big\{\|C_1\|_\infty, \ldots, \|C_n\|_\infty\big\}. \tag{4.24}$$

Para provar a igualdade, seja j_0 o índice em (4.24) em que o máximo é atingido, isto é,

$$\|C_{j_0}\|_\infty = \max\big\{\|C_1\|_\infty, \ldots, \|C_n\|_\infty\big\}.$$

Tomando $x = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ o j_0-ésimo vetor da base canônica, é fácil ver que $\|x\|_1 = 1$ e $C_{j_0} = Ax$. Portanto

$$\|C_{j_0}\|_\infty = \max\big\{\|C_1\|_\infty, \ldots, \|C_n\|_\infty\big\} \le M_A = m_A,$$

como queríamos provar.

Observação: Com a notação introduzida nas observações anteriores, podemos escrerver

$$\|A\|_{1\infty} = \max\big\{\|C_1\|_\infty, \ldots, \|C_n\|_\infty\big\} = \max_j \left(\max_i |a_{ij}| \right).$$

Exercício 4.18: *Se V é um espaço vetorial normado, o espaço das funções lineares contínuas de V em $\mathbb{R}$, é denominado espaço dual de V e denotado por V'.*

Seja $V = \mathbb{R}^n$ munido da norma $\| \ \|_p$, com $p \in [1, +\infty]$. Mostre que V' pode ser identificado a $\mathbb{R}^n$ e, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\|_{V'} = \|y\|_q$, onde $q \in [1, +\infty]$ satisfaz $1/p + 1/q = 1$ ($q = 1$ se $p = +\infty$ e vice-versa).

Solução: $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ se, e somente se, T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Em particular, a matriz associada a T é uma matriz $1 \times N$, isto é, uma "matriz linha". Se munirmos $\mathbb{R}^n$ da norma $\| \ \|_p$, então a norma induzida em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é, conforme definido no Exercício 4.17,

$$\|T\| = \sup\big\{|T(x)|\,;\, \|x\|_p = 1\big\}.$$

Observe que o Teorema de Riez nos garante que, para cada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, R)$, existe um único $y \in \mathbb{R}^n$ (a tal matriz linha) tal que

$$T(x) = \langle y : x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto,

$$\|T\| = \sup\big\{|\langle y : x \rangle|\,;\, \|x\|_p = 1\big\}.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$|\langle y : x \rangle| \leq \|y\|_{p'} \|x\|_p, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, $\|T\| \leq \|y\|_{p'}$. Por outro lado, supondo que $T \neq 0$, considemos o vetor $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0N})$ tal que

$$x_{0i} = \frac{1}{\|y\|_{p'}^{p'/p}} |y_i|^{p'-2} y_i,$$

então podemos verificar que $\|x_0\|_p = 1$ e que $T(x_0) = \|y\|_{p'}$. Portanto,

$$\|T\| = \|y\|_{p'}.$$

Moral da História: Se $V = (\mathbb{R}^n, \| \ \|_p)$, então $V' = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n, \| \ \|_{p'})$.

Exercício 4.19: *Seja A matriz $m \times n$ e defina a função $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $f(x) = Ax$. Mostre que*

$$f \text{ é injetora} \iff \exists k > 0 \text{ tal que } \|f(x)\| \geq k\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Solução: Seja $k = \inf\{\|Ax\|\,;\, \|x\| = 1\}$. É claro que $k \geq 0$. Como a esfera unitária $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x\| = 1\}$ é um conjunto compacto e a aplicação $x \mapsto \|Ax\|$ é contínua, existe x_0 unitário tal que $\|Ax_0\| = k$.

Se $f(x) = Ax$ é injetora, então k é estritamente positivo. De fato,

$$k = 0 \ \Rightarrow \ Ax_0 = 0 \ \Rightarrow \ x_0 = 0,$$

o que é impossível, pois $\|x_0\| = 1$.

Assim, se $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, temos

$$k \leq \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \geq k\|x\|.$$

A recíproca é imediata, pois se $x \neq y$ e $\|Ax - Ay\| \geq k\|x - y\| > 0$, temos $Ax \neq Ay$, isto é, f injetora.

Exercício 4.20: *Seja $\mathcal{M}_2$ o espaço das matrizes quadradas 2×2 a coeficientes reais, com alguma norma. Seja*

$$\begin{array}{rccc} \det\colon & \mathcal{M}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \mapsto & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{array}$$

a) Mostre que $\det$ *é contínua.*

b) Mostre que $S = \{A \in \mathcal{M}_2\,;\, \det A \neq 0\}$ é aberto e não conexo.

c) Seja $f\colon S \to \mathcal{M}_2$ a função definida por $f(X) = X^{-1}$. Mostre que f é contínua em S. Sug.: $X^{-1} - X_0^{-1} = X^{-1}(X_0 - X)X_0^{-1}$.

Solução: (a) Mostremos que a aplicação $\det\colon \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

é uniformemente contínua. Para tal, vamos munir o espaço $\mathcal{M}_2$ com a norma

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2}.$$

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes quaisquer de $\mathcal{M}_2$. Então

$$\begin{aligned} |\det(A-B)| &= |(a_{11} - b_{11})(a_{22} - b_{22}) - (a_{12} - b_{12})(a_{21} - b_{21})| \\ &\leq |a_{11} - b_{11}||a_{22} - b_{22}| + |a_{12} - b_{12}||a_{21} - b_{21}| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|a_{11} - b_{11}|^2 + |a_{22} - b_{22}|^2 + |a_{12} - b_{12}|^2 + |a_{21} - b_{21}|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\|A - B\|_2^2 \end{aligned}$$

(b) Consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned} S_+ &= \big\{A \in \mathcal{M}_2\,;\, \det A > 0\big\} \\ S_- &= \big\{A \in \mathcal{M}_2\,;\, \det A < 0\big\} \\ S_0 &= \big\{A \in \mathcal{M}_2\,;\, \det A = 0\big\} \end{aligned}$$

Como S_+ é a imagem inversa do intervalo aberto $(0, +\infty)$ pela aplicação $A \mapsto \det A$, isto é, $S_+ = \det^{-1}(0, +\infty)$, segue do item (a) que S_+ é um conjunto aberto de $\mathcal{M}_2$. O mesmo vale para S_-, de modo que $S = S_+ \cup S_-$ é aberto. Além disso, como $S_+ \cap S_- = \emptyset$, concluímos que S é desconexo.

(c) Consideremos a aplicação $f\colon S \to S$, definida por $f(X) = X^{-1}$ e fixemos $X_0 \in S$. Como $\mathcal{M}_2$ é espaço de dimensão 4, todas as normas são equivalentes. Podemos então consideremos em $\mathcal{M}_2$ a norma induzida pela norma euclidiana (tal como definida no Exercício 4.17), isto é,

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2\,;\, \|x\|_2 = 1\}.$$

Então (veja Exercício 4.17 (2d)), $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Observando que podemos escrever $X^{-1} - X_0^{-1} = X^{-1}(X - X_0)X_0^{-1}$, temos

$$\|f(X) - f(X_0)\| = \|X^{-1}(X - X_0)X_0^{-1}\| \leq \|X^{-1}\|\|X_0^{-1}\|\|X - X_0\|.$$

Para $\varepsilon > 0$ dado, consideremos

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2\|X_0^{-1}\|}, \frac{\varepsilon}{2\|X_0^{-1}\|^2}\right\}.$$

Vamos provar que se $\|X - X_0\| < \delta$, então $\|X^{-1} - X_0^{-1}\| < \varepsilon$.
Primeiramente observemos que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, vale a desigualdade

$$\|x\|_2 = \|X_0X_0^{-1}x\|_2 \leq \|X_0^{-1}\|\,\|X_0x\|_2,$$

de modo que podemos escrever

$$\|X_0x\|_2 \geq \frac{1}{\|X_0^{-1}\|}\|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.25}$$

Portanto, aplicando a desigualdade triangular e (4.25), temos

$$\begin{aligned}\|Xx\|_2 &= \|X_0x + (X - X_0)x\|_2 \\ &\geq \|X_0x\|_2 - \|(X - X_0)x\|_2 \\ &\geq \frac{1}{\|X_0^{-1}\|}\|x\|_2 - \|X - X_0\|\,\|x\|_2 \\ &\geq \frac{1}{2\|X_0^{-1}\|}\|x\|_2\end{aligned} \tag{4.26}$$

Como X é sobrejetora, denotando $y = Xx$, podemos escrever (4.26) na forma

$$\|y\|_2 \geq \frac{1}{2\|X_0^{-1}\|}\|X^{-1}y\|_2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, $\|X^{-1}y\|_2 \leq 2\|X_0^{-1}\|\,\|y\|_2$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, o que implica

$$\|X^{-1}\| \leq 2\|X_0^{-1}\| \quad \text{se} \quad \|X - X_0\| < \delta.$$

Portanto, se $\|X - X_0\| < \delta$, temos

$$\|X^{-1} - X_0^{-1}\| \leq 2\|X_0^{-1}\|^2\|X - X_0\| < \varepsilon$$

e a continuidade de f no ponto X_0 fica demonstrada.

Exercício 4.21: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ função contínua e defina*

$$\mathcal{Z}(f) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f(x) = 0\big\}.$$

Mostre que $\mathcal{Z}(f)$ é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Solução: Seja $x \in \mathcal{Z}(f)'$. Então existe uma sequência $x_k \in \mathcal{Z}(f)$ tal que $x_k \to x$ quando $k \to +\infty$. Como f é contínua, $f(x_k) \to f(x)$. Mas $f(x_k) = 0$ para todo n. Logo $f(x) = 0$, o que significa que $x \in \mathcal{Z}(f)$. Portanto

$$\mathcal{Z}(f)' \subset \mathcal{Z}(f)$$

como queríamos demonstrar.

Exercício 4.22: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua em 0 e tal que*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = \langle a : x \rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Solução: f é aditiva e contínua em 0, então é fácil ver que f é uniformemente contínua. De fato, da aditividade é imediato concluir que $f(0) = 0$ e $f(-x) = -f(x)$. Sendo f contínua em 0, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|z\| < \delta$ então $\|f(z)\| < \varepsilon$. Logo, se $\|y - x\| < \delta$, então

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| < \varepsilon$$

e concluímos que f é uniformemente contínua. Por indução, é fácil mostrar que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

Além disso,

$$f(x) = f\left(n\frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x). \tag{4.28}$$

De (4.27) e (4.28) obtemos facilmente $f(rx) = rf(x)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Por densidade, existe uma sequência $(r_k)_k$ de números racionais tal que $r_k \to \lambda$. Como f é contínua, temos

$$f(\lambda x) = \lim_{n \to +\infty} f(r_k x) = \lim_{k \to +\infty} r_k f(x) = \lambda f(x).$$

Portanto f é linear e concluímos a solução tomando $a \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$a = (f(\mathrm{e}_1), f(\mathrm{e}_2), \ldots, f(\mathrm{e}_n)),$$

onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 4.23: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Mostre que f é convexa.

Solução: Temos por hipótese f função contínua satisfazendo a seguinte condição que denominaremos "sub-aditividade":

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

e queremos mostrar que

$$f\big(\lambda y + (1-\lambda)x\big) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x), \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Vamos denotar por $[x, y]$ o segmento que liga os pontos x e y, isto é,

$$[x, y] = \big\{\alpha y + (1-\alpha)x\,;\, \alpha \in [0,1]\big\}.$$

A partição de $[x,y]$ em 2^m partes iguais, define o seguinte conjunto de pontos

$$P_m = \left\{x, \frac{(2^m-1)x+y}{2^m}, \frac{(2^m-2)x+2y}{2^m}, \dots, \frac{x+(2^m-1)y}{2^m}, y\right\},$$

isto é,

$$P_m = \left\{\frac{k}{2^m}y + \frac{2^m-k}{2^m}x\,;\, k \in \{0,1,2,\dots,2^m\}\right\}.$$

Observe que $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots$.

<u>Afirmativa</u>: Para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $k \in \{0,1,2,\dots,2^m\}$ vale a desigualdade:

$$f\left(\frac{k}{2^m}y + \frac{2^m-k}{2^m}x\right) \le \frac{k}{2^m}f(y) + \frac{2^m-k}{2^m}f(x). \tag{4.29}$$

Antes de demonstrar a afirmativa, vejamos como (4.29) permite concluir a demonstração da convexidade de f.

Se $\lambda \in (0,1)$ então podemos construir uma sequência de números racionais da forma $r_m = k_m/2^m$ tal que $k_n \in \{0,1,2,\dots,2^m\}$ e tal que $r_n \to \lambda$. De fato, escolhemos o ponto de P_n que esteja mais próximo de λ, isto é, escolhemos k_n tal que

$$\left|\frac{k_m}{2^m} - \lambda\right| = \min\left\{|\lambda|, \left|\frac{1}{2^m} - \lambda\right|, \left|\frac{2}{2^m} - \lambda\right|, \dots, \left|\frac{2^m-1}{2^m} - \lambda\right|, |1-\lambda|\right\}.$$

Observe que se $\lambda \in P_n$ para algum n, então $r_n = r_{n+1} = r_{n+2} = \cdots$. Caso contrário,

$$\left|\frac{k_n}{2^m} - \lambda\right| \le \frac{1}{2^m} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Então, como f é contínua, temos

$$\begin{aligned} f\big(\lambda y + (1-\lambda)x\big) &= \lim_{n\to\infty} f\big(r_n y + (1-r_n)x\big) \\ &\le \lim_{n\to\infty} r_n f(y) + \lim_{n\to\infty}(1-r_n)f(x) \\ &= \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x) \end{aligned}$$

Só nos resta então demonstrar a desigualdade (4.29), o que faremos por indução.

A desigualdade é verdadeira para $n=1$. Suponhamos verdadeira para $n-1$, isto é,

$$f\left(\frac{k}{2^{n-1}}y + \frac{2^{n-1}-k}{2^{n-1}}x\right) \le \frac{k}{2^{n-1}}f(y) + \frac{2^{n-1}-k}{2^{n-1}}f(x), \quad \forall k \in \{0,1,2,\dots,2^{n-1}\}.$$

Seja $k' \in \{0,1,2,\dots,2^m\}$. Se $k' = 2k$ é par, então, por hipótese de indução,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k'}{2^m}y + \frac{2^m-k'}{2^m}x\right) &= f\left(\frac{k}{2^{m-1}}y + \frac{2^{m-1}-k}{2^{m-1}}x\right) \\ &\le \frac{k}{2^{m-1}}f(y) + \frac{2^{m-1}-k}{2^{m-1}}f(x) \\ &= \frac{k'}{2^m}f(y) + \frac{2^m-k'}{2^m}f(x) \end{aligned}$$

Por outro lado, se $k' = 2k+1$ é ímpar, então podemos escrever

$$\frac{2k+1}{2^m}y + \frac{2^m-(2k+1)}{2^m}x = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{k}{2^{m-1}}y + \frac{2^{m-1}-k}{2^{m-1}}x\right)\right. \\ \left. + \left(\frac{k+1}{2^{m-1}}y + \frac{2^{m-1}-k-1}{2^{m-1}}x\right)\right]$$

Pela sub-aditividade da f, obtemos

$$f\left(\frac{2k+1}{2^m}y + \frac{2^m-(2k+1)}{2^m}x\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{k}{2^{m-1}}y + \frac{2^{m-1}-k}{2^{m-1}}x\right) + \\ + \frac{1}{2}f\left(\frac{k+1}{2^{m-1}}y + \frac{2^{m-1}-k-1}{2^{m-1}}x\right) \tag{4.30}$$

Agora observe que se $k' = 2k+1$ pertence a $\{0,1,\ldots,2^m\}$, então $1 \leq k' \leq 2^m - 1$ e consequentemente $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$. Portanto, vale a hipótese de indução no lado esquerdo de (4.30), o que nos leva a concluir

$$f\left(\frac{k'}{2^m}y + \frac{2^m-k'}{2^m}x\right) \leq \frac{k'}{2^m}f(y) + \frac{2^m-k'}{2^m}f(x),$$

que era o que queríamos demonstrar.

Exercício 4.24: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função e considere seu gráfico*

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}\,;\ y = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

a) Mostre que se f é contínua, então $G(f)$ é fechado em $\mathbb{R}^{n+m}$.

b) Mostre que se $G(f)$ é fechado e f é limitada, então f é contínua.

c) Considere $G(f|_K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}\,;\ y = f(x),\ \forall x \in K\}$. Mostre que se f é contínua e K é compacto em $\mathbb{R}^n$, então $G(f|_K)$ é compacto em $\mathbb{R}^{n+m}$.

Solução: (a) Seja $(x,y) \in G(f)'$. Então existe uma sequência $(x_k, y_k) \in G(f)$ tal que $(x_k,y_k) \to (x,y)$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Mas $(x_k,y_k) \in G(f)$ significa que $y_k = f(x_k)$. Como f é contínua, temos $y_k = f(x_k) \to f(x)$. Portanto, segue da unicidade do limite que $y = f(x)$, isto é, $(x,y) \in G(f)$.

Resumindo, provamos que $G(f)' \subset G(f)$ e, portanto, $G(f)$ é fechado.

(b) Seja $x_k \to x$ em $\mathbb{R}^n$ e $y_k = f(x_k)$. Então, $(x_k,y_k) \in G(f)$. Sendo f uma função limitada, temos $\|f(x)\| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto a sequência (x_k,y_k) é limitada em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (x_{k_i}, y_{k_i}) convergente. Já sabemos que $x_k \to x$. Logo, existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y_{k_i} \to \overline{y}$.

Como estamos supondo $G(f)$ fechado, temos $(x,y) \in G(f)$, isto é, $y = f(x)$. Além disso, se a sequência (x_k,y_k) admite outra subsequência (x_{k_j}, y_{k_j}) convergindo para $(\overline{x},\overline{y})$, os mesmos argumentos mostram que $(\overline{x},\overline{y}) \in G(f)$, isto é, $\overline{y} = f(\overline{x})$. Mas $\overline{x} = x$, de modo que $\overline{y} = f(\overline{x}) = f(x) = y$. Assim, é toda a sequência (x_k,y_k) que converge para (x,y).

Resumindo, provamos que $x_k \to x$ e $y_k = f(x_k)$, então $f(x_k) \to f(x)$, o que mostra que f é contínua.

(c) $G(f|_K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}\,;\, y = f(x),\ x \in K\}$, onde K é compacto e f é contínua. Seja $(x_k, y_k) \in G(f|_K)$. Então $x_k \in K$ e $y_k = f(x_k)$. Como K é compacto, existe uma subsequência $\{x_{k_i}\}_i$ tal que $x_{k_i} \to \overline{x} \in K$ quando $i \to \infty$. Como f é contínua, $f(x_{k_i}) \to f(\overline{x})$. Mas $y_{k_i} = f(x_{k_i})$. Logo,

$$(x_{k_i}, y_{k_i}) \to (\overline{x}, f(\overline{y})) \in G(f|_K).$$

Pelo Teorema 3.8 (pag. 35), $G(f|_K)$ é compacto.

Exercício 4.25: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ vezes}}$ é uma contração. Mostre que f possui um único ponto fixo.*

Solução: $f^k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma contração. Então, o Teorema 4.13 (pag. 51) garante que f^k possui um único ponto fixo $\overline{x}$, isto é,

$$f^k(\overline{x}) = \overline{x}. \tag{4.31}$$

Aplicando f a ambos os lados de (4.31), temos

$$f\big(f^k(\overline{x})\big) = f^k\big(f(\overline{x})\big) = f(\overline{x}).$$

Portanto, $f(\overline{x})$ é ponto fixo de f^k. Como este é único, temos necessariamente $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Assim $\overline{x}$ é ponto fixo de f.

Por outro lado, se $\widehat{x}$ é também ponto fixo de f, então

$$\widehat{x} = f(\widehat{x}) = f^2(\widehat{x}) = \cdots = f^k(\widehat{x}).$$

Como f^k tem um único ponto fixo, temos necessariamente $\widehat{x} = \overline{x}$.

Exercício 4.26: *Verdadeiro ou falso?*

1) f e g contrações $\Rightarrow f \circ g$ contração.

2) $f \circ f$ contração $\Rightarrow f$ contração.

Solução: (1) Verdadeiro! De fato, se f e g são contrações, existem α_1, α_2 no intervalo $[0,1)$ tais que

$$\|f(x) - f(y)\| \le \alpha_1 \|x - y\|, \quad \|g(x) - g(y)\| \le \alpha_2 \|x - y\|.$$

Portanto, como $\alpha_1\alpha_2 < 1$ e

$$\|f(g(x)) - f(g(y))\| \le \alpha_1\alpha_2 \|x - y\|,$$

conluímos que $f \circ g$ é contração.

(2) Falso! De fato, considere

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \le 1 \text{ ou } x \ge 2, \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

É fácil ver que $f \circ f$ é função constante, e portanto contração (com $\alpha = 0$), mas f é descontínua e portanto não pode ser uma contração.

Um segundo exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

É fácil ver que $(f \circ f)(x) = 1$ para todo x, sendo portanto contração (com $\alpha = 0$), mas f é descontínua.

Exercício 4.27: *Seja $f(x,y) = (\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 3\,,\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 8)$. Mostre que f não é contração na norma $\|\ \|_\infty$ mas é contração na norma $\|\ \|_1$. Portanto f possui um único ponto fixo. Calcule-o.*

Solução: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$f(x_1, x_2) = \Big(\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{4} + 3, \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 8\Big).$$

Queremos mostrar que f não é contração na norma $\|\ \|_\infty$, mas é na norma $\|\ \|_1$. Sejam $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ dois pontos de $\mathbb{R}^2$ e denotemos por $s = x_1 - y_1$ e $t = x_2 - y_2$. Então,

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty = \|(s/3 - t/4, s/2 + t/2)\|_\infty = \max\{|s/3 - t/4|, |s/2 + t/2|\}.$$

Escolhendo $s = t = 1$, obtemos

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty = 1 = \|x - y\|_\infty.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\|_1 &= |s/3 - t/4| + |s/2 + t/2| \\
&\leq \frac{5}{6}|s| + \frac{3}{4}|t| \\
&\leq \frac{5}{6}\left(|s| + |t|\right) \\
&= \frac{5}{6}\|x - y\|_1
\end{aligned}$$

Logo, f é contração (com respeito a norma $\|\ \|_1$) e, portanto, possui um único ponto fixo.

Exercício 4.28: *Seja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ função contínua e crescente e $f\colon X \to [a,b]$. Mostre que*

$$\sup_x g\big(f(x)\big) = g\big(\sup_x f(x)\big).$$

Solução: Para simplificar a notação, vamos considerar

$$m = \sup_{x \in X} f(x), \quad M = \sup_{x \in X} g(f(x)).$$

Primeiramente observe que, sendo $[a,b]$ um conjunto fechado, temos

$$f(x) \in [a,b],\ \forall x \in X \ \Rightarrow\ m \in [a,b].$$

Como $f(x) \leq m$ para todo $x \in X$ e g é crescente, temos

$$g(f(x)) \leq g(m), \quad \forall x \in X. \tag{4.32}$$

Passando ao sup no lado esquerdo da desigualdade (4.32) obtemos

$$M \leq g(m). \tag{4.33}$$

Suponhamos, por absurdo, que a desigualdade em (4.33) seja estrita, isto é, $M < g(m)$. Então podemos escolher $\varepsilon_0 > 0$ (por exemplo $\varepsilon_0 = (g(m) - M)/2$) tal que $M < g(m) - \varepsilon_0$. Como m é o supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que

$$m - \frac{1}{n} < f(x_n).$$

Logo,

$$g(m - \frac{1}{n}) \leq g(f(x_n)) \leq M < g(m) - \varepsilon_0. \tag{4.34}$$

Fazendo $n \to \infty$ e considerando que g é função contínua, obtemos de (4.34) $g(m) \leq M < g(m) - \varepsilon_0$, o que é um absurdo. Logo, $M = g(m)$ como queríamos provar.

Observação ao aluno menos atento: o resultado continua válido se g é crescente e sci.

<u>**Exercício 4.29**</u>: *Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e $A \subset \mathbb{R}$ conjunto limitado.*

a) Mostre que

$$\sup_{x\in A} f(x) \leq f(\sup A) \quad \text{e} \quad f(\inf A) \leq \inf_{x\in A} f(x).$$

b) Mostre que se f é sci então

$$\sup_{x\in A} f(x) = f(\sup A).$$

Solução: (a) Para simplificar a notação, consideremos

$$M = \sup_{x\in A} f(x), \quad m = \inf_{x\in A} f(x).$$

Como $A \subset \mathbb{R}$ é limitado, $\inf A$ e $\sup A$ são números reais e

$$\inf A \leq x \leq \sup A, \quad \forall x \in A.$$

Como f é crescente, $f(\inf A) \leq f(x) \leq f(\sup A)$ para todo $x \in A$. Portanto,

$$f(\inf A) \leq m \leq M \leq f(\sup A).$$

(b) Vamos supor por absurdo que $M < f(\sup A)$. Então, para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno,

$$M < f(\sup A) - \varepsilon_0. \tag{4.35}$$

Como f é s.c.i em $\mathbb{R}$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ e para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$, então $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.

Consideremos então $x_0 = \sup A$ e $\varepsilon = \varepsilon_0$ escolhido acima. Então existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - \sup A| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(\sup A) - \varepsilon_0,$$

o que está em contradição com (4.35).

<u>Exercício 4.30</u>: *Seja $\{s_k\}_k$ sequência de números reais e defina:*

$$\liminf_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty} \inf\{s_k, s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots\}.$$

Seja $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap A'$. Mostre que f é semicontínua inferiormente em x_0 se e somente se

$$f(x_0) \le \liminf_{k\to+\infty} f(x_k) \quad \forall\,\{x_k\}_k \subset A \text{ tal que } \; x_k \to x_0.$$

Solução: Vamos provar primeiramente a implicação "$\Rightarrow$".

Consideremos a sequência de números reais $\{f(x_k)\}_k$, onde $x_k \to x_0$ em $\mathbb{R}^n$. Seja

$$S_k = \big\{f(x_k), f(x_{k+1}), f(x_{k+2}), \ldots\big\},$$

de modo que valem as inclusões $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$.

Primeiramente observemos que S_k é limitado inferiormente, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$. De fato, basta mostrar que S_1 é limitado inferiormente.

Seja $\varepsilon > 0$. Como estamos supondo f sci, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - x_0\| < \delta$, então $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$. Como $\{x_k\}_k$ converge para x_0, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \ge k_0$, então $\|x_k - x_0\| < \delta$ e consequentemente

$$f(x_k) > f(x_0) - \varepsilon, \quad \forall k \ge k_0. \tag{4.36}$$

Assim, $f(x_0) - \varepsilon$ é cota inferior para o conjunto S_{k_0}, o que significa dizer que S_{k_0} é limitado inferiormente. Como

$$S_1 = \big\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{k_0-1})\big\} \cup S_{k_0},$$

concluímos que S_1 também é limitado inferiormente.

Observemos agora que $\inf S_1 \le \inf S_2 \le \inf S_3 \le \cdots$ e

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \big(\inf S_k\big).$$

De (4.36) obtemos

$$f(x_0) - \varepsilon \le \inf S_{k_0} \le \liminf_{k\to\infty} f(k_k),$$

Como ε é arbitrário, concluímos que

$$f(x_0) \le \liminf_{k\to\infty} f(k_k).$$

Provemos agora a implicação contrária "$\Leftarrow$".

Se f não é sci, então para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que qualquer que seja $\delta > 0$ podemos encotrar $x_\delta \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \text{e} \quad f(x_\delta) \le f(x_0) - \varepsilon_0.$$

Tomemos $\delta = 1/k$ e consideremos a sequência $\{x_k\}_k$ tal que $\|x_k - x_0\| < 1/k$ e $f(x_k) > f(x_0) - \varepsilon_0$.

É claro que $x_k \to x_0$ e $\inf S_k \le f(x_k) \le f(x_0) - \varepsilon_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ o que implica

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_k) \le f(x_0) - \varepsilon_0 < f(x_0).$$

Exercício 4.31: *Prove usando argumento de sequências que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é função sci, então existe $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = \min\{f(x)\,;\, x \in K\}$.*

a) *Prove que $l = \inf f(K) > -\infty$*

b) *Prove que se $l = \inf f(K)$ então $l \in f(K)$.*

Solução: Provemos primeiro que o conjunto $f(K)$ é limitado inferiormente.

Se $f(K)$ não é limitado inferiormente, podemos encontrar uma sequência $\{y_k\} \subset K$ tal que $f(y_k) \to -\infty$. Em particular, $\liminf f(y_k) = \lim f(y_k) = -\infty$. Como K é compacto, existe subsequência $\{y_{k_i}\}$ tal que $y_{k_i} \to y_0 \in K$ e como f é sci, temos $f(y_0) \leq \liminf f(y_{k_i}) = -\infty$, o que é um absurdo, pois $f(y_0) \in \mathbb{R}$. Logo, $f(K)$ é um conjunto limitado inferiormente e possui o ínfimo l. Vamos mostrar que $l = f(x_0)$ para algum $x_0 \in K$.

Da definição de ínfimo, existe uma sequência $\{x_k\} \subset K$ tal que $f(x_k) \to l$. Como K é compacto, existe subsequência $\{x_{k_i}\}$ tal que $x_{k_i} \to x_0 \in K$ e $f(x_{k_i}) \to l$. Como f é sci,

$$f(x_0) \leq \liminf_{i\to\infty} f(x_{k_i}) = \lim_{i\to} f(x_{k_i}) = l.$$

é claro que $f(x_0) < l$ não pode ocorrer, pois $x_0 \in K$. Logo $f(x_0) = l$, que era o que queríamos provar.

Exercício 4.32: *Seja $\{f_\alpha\}_\alpha$ uma família de funções s.c.i. de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Defina $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ por:*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \sup_\alpha f_\alpha(x) < \infty\}$$
$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$$

a) *Mostre que f é semicontínua inferiormente em Ω.*

b) *Se f_α é contínua $\forall\alpha$, podemos concluir que f é contínua?*

c) *Se f_α é função convexa $\forall\alpha$, mostre que f é convexa.*

d) *Mostre que as afirmativas anteriores se verificam trocando-se acima: "sci, sup, $< \infty$ e convexa" respctivamente por "scs, inf, $> -\infty$ e côncava".*

Solução: (a) Seja $x_0 \in \Omega$. Vamos provar que f é sci em x_0.

Dado $\varepsilon > 0$ existe um índice α_0 tal que $f(x_0) - \varepsilon/2 < f_{\alpha_0}(x_0) \leq f(x_0)$. Sendo f_{α_0} sci, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad f_{\alpha_0}(x) > f_{\alpha_0}(x_0) - \varepsilon/2.$$

Portanto, se $\|x - x_0\| < \delta$, temos

$$f(x_0) - \varepsilon/2 < f_{\alpha_0}(x_0) < f_{\alpha_0}(x) + \varepsilon/2 \leq f(x) + \varepsilon/2$$

e consequentemente $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.

(b) Não! Considere $\alpha = 1/k$ e $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ kx & \text{se } 0 < x < 1/k \\ 1 & \text{se } x \geq 1/k \end{cases}$$

Neste caso $\Omega = \mathbb{R}$ e $f(x) = \sup_n f_k(x)$ é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Observe que f é sci em $\mathbb{R}$.

(c) Consideremos $\{f_\alpha\}_\alpha$ uma família de funções convexas. Provemos que Ω é conjunto convexo e f definida sobre Ω é função convexa.

Seja $x_0, x_1 \in \Omega$ e para $\lambda \in [0,1]$, denotemos $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0$. Então, para todo índice α

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_\lambda) &\leq \lambda f_\alpha(x_1) + (1-\lambda) f_\alpha(x_0) \\ &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_0) < +\infty. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Logo $x_\lambda \in \Omega$ e concluímos que Ω é convexo. Além disso, passando ao sup em α no lado esquerdo de (4.37), obtemos

$$f(x_\lambda) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_0)$$

o que quer dizer que f é convexa.

(d) Faça $f_\alpha = -g_\alpha$, com g_α satisfazendo as condições anteriores.

5

Funções Diferenciáveis

<u>Exercício 5.1</u>: *Sejam $\psi, \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$\lim_{s \to \pm\infty} \varphi(s) = 0.$$

Considere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \varphi(y/x^2)\psi(|x|) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

a) Considere $\psi(s) = s$. Mostre que f é Gateaux-derivável em $(0,0)$ com

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^2 \text{ vetor unitário,}$$

mas f não é diferenciável em $(0,0)$.

b) Verifique que a função f do Exemplo 6 deste capítulo é obtida de (5.1) com $\varphi(s) = 2s/(1+s^2)$ e $\psi(s) = s$.

c) Sejam $\psi(s) = 1$ $\forall s \geq 0$ e $\varphi = 1_{[1,2]}$ a função característica de $[1,2]$, isto é, $\varphi(s) = 1$ se $s \in [1,2]$ e $\varphi(s) = 0$ senão. Mostre que f definida por (5.1) satisfaz o item (a) mas f não é contínua em $(0,0)$.

Solução: (a) Seja $u = (u_1, u_2)$ vetor unitário de $\mathbb{R}^2$ e consideremos

$$\frac{f(0+\lambda u) - f(0)}{\lambda} = \begin{cases} \varphi(u_2/\lambda u_1^2)|u_1| & \text{se } u_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } u_1 = 0 \end{cases}.$$

Como $\varphi(s) \to 0$ se $s \to \pm\infty$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 0.$$

Em particular, $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Suponhamos por absurdo que f é diferenciável em $(0,0)$. Então

$$f(h) = f(0) + \langle f'(0,0) : h \rangle + \varepsilon(h).$$

sendo necessaiamente $f'(0,0) = \nabla f(0,0)$ e

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|_1} = 0.$$

Portanto, $f(h) = \varepsilon(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}^2$. Se φ é não nula, existe α tal que $\varphi(\alpha) \neq 0$. Então, para $h = (t, \alpha t^2)$ temos $\varepsilon(h) = \varphi(\alpha)|t|$ e

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|_1} = \lim_{t\to 0} \frac{|\varphi(\alpha)|}{1+|\alpha||t|} = |\varphi(\alpha)| \neq 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$.
(b) Se $\psi(s) = s$ e $\varphi(s) = 2s/(1+s^2)$, então

$$f(x,y) = \frac{2y/x^2}{1+y^2/x^4}|x| = \frac{2yx^2|x|}{x^4+y^2}.$$

(c) Consideremos $\psi(s) \equiv 1$ e φ a função característica do intervalo $[1,2]$, isto é,

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq s \leq 2 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Então f não é contínua em $(0,0)$. De fato, para todo $t > 0$

$$f(t, 3t^2/2) = \varphi(3/2) = 1$$
$$f(t, t^2/2) = \varphi(1/2) = 0$$

No entanto f possui derivada direcional nula em qualquer direção. De fato, considere $u = (u_1, u_2)$ um vetor unitário. Então, para todo $\lambda > 0$,

$$\frac{f(\lambda u) - f(0)}{\lambda} = \begin{cases} \varphi(u_2/\lambda u_1^2)/\lambda & \text{se } u_1 \neq 0 \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \tag{5.2}$$

Suponhamos $u_1 \neq 0$ e $u_2 > 0$. Então, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, temos $u_2/\lambda u_1^2 > 2$ e consequentemente $\varphi(u_2/\lambda u_1^2) = 0$. Analogamente, se $u_2 \leq 0$ então $u_2/\lambda u_1^2 \leq 0$ e $\varphi(u_2/\lambda u_1^2) = 0$. Em qualquer dos casos (5.2) é nulo se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno.

<u>Exercício 5.2</u>:

a) *Considere $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$. Mostre que f é diferenciável e que $f'\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a matriz identidade I.*
b) *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|_p^p$, com $1 < p < \infty$. Mostre que f é diferenciável. Mostre que $\|f'(x)\|_q^q = \|x\|_p^p$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $1/p + 1/q = 1$.*

Solução: (a) $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$. Então

$$f(x+h) = \frac{1}{2}\|x+h\|_2^2 = \frac{1}{2}\|x\|_2^2 + \langle x : h\rangle + \frac{1}{2}\|h\|_2^2.$$

Como $h \mapsto \langle x : h \rangle$ é linear e $\varepsilon(h) = \frac{1}{2}\|h\|_2^2$ satisfaz

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|_2} \leq \frac{1}{2}\|h\|_2 \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0,$$

concluímos da definição que f é diferenciável em x e $f'(x)h = \langle x : h \rangle$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$, isto é, $f'(x) = x$. Portanto, $f' \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a função identidade.

(b) $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|_p^p = \frac{1}{p}\left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)$, $1 < p < +\infty$.

Consideremos incialmente a função $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(s) = |s|^p/p$. É claro que φ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$\varphi'(s) = |s|^{p-2}s = \begin{cases} s^{p-1} & \text{se } s > 0 \\ 0 & \text{se } s = 0 \\ -(-s)^{p-1} & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

Além disso, φ' é contínua em $\mathbb{R}$ visto que estamos considerando $p > 1$.

Com as considerações acima, vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \varphi(x_i) = |x_i|^{p-2}x_i$$

é contínua em $\mathbb{R}^n$. Portanto, pelo Teorema 5.12 (pag. 73), f é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e

$$f'(x) = \nabla f(x) = \left(|x_1|^{p-2}x_1, \ldots, |x_n|^{p-2}x_n\right).$$

Seja q o conjugado de p, isto é, $1/q + 1/p = 1$. Então $q(p-1) = p$ e

$$\|\nabla f(x)\|_q^q = |x_1|^{q(p-1)} + \cdots + |x_n|^{q(p-1)} = |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p = \|x\|_p^p.$$

<u>**Exercício 5.3**</u>: *Sejam $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis e considere*

$$F(x) = \big\langle f(x) : g(x) \big\rangle,$$

onde $\langle \, : \, \rangle$ denota o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$. Mostre que F é diferenciável e calcule $F'(x)$.

Solução: $F(x) = \langle f(x) : g(x) \rangle$. Por hipótese

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \varepsilon_1(h) \\ g(x+h) &= g(x) + g'(x)h + \varepsilon_2(h) \end{aligned}$$

Vamos denotar por L e M respectivamente as matrizes associadas a $f'(x)$ e $g'(x)$. Então

$$\begin{aligned} F(x+h) &= \langle f(x) + Lh + \varepsilon_1(h) : g(x) + Mh + \varepsilon_2(h) \rangle \\ &= \langle f(x) : g(x) \rangle + \langle f(x) : Mh \rangle + \langle g(x) : Lh \rangle + \varepsilon(h) \\ &= F(x) + \langle M^T f(x) + L^T g(x) : h \rangle + \varepsilon(h) \end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon(h) = \langle f(x) : \varepsilon_2(h)\rangle + \langle Lh : \varepsilon_2(h)\rangle + \langle g(x) : \varepsilon_1(h)\rangle + \\ + \langle Mh : \varepsilon_1(h)\rangle + \langle Lh : Mh\rangle + \langle \varepsilon_1(h) : \varepsilon_2(h)\rangle$$

Como a aplicação $h \mapsto \langle M^T f(x) + L^T g(x) : h\rangle$ é linear, se concluirmos que

$$\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_2} \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0,$$

então F é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e

$$F'(x) = M^T f(x) + L^T g(x) = [g'(x)]^T f(x) + [f'(x)]^T g(x).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|_2} \leq \Big(\|f(x)\|_2 + \|Lh\|_2\Big)\frac{\|\varepsilon_2(h)\|_2}{\|h\|_2} + \Big(\|g(x)\|_2 + \|Mh\|_2\Big)\frac{\|\varepsilon_1(h)\|_2}{\|h\|_2} + \\ + \|\varepsilon_1(h)\|_2\frac{\|\varepsilon_2(h)\|_2}{\|h\|_2} + \|L\|\,\|M\|\,\|h\|_2$$

e a conclusão segue direto das hipóteses sobre ε_1 e ε_2.

Exercício 5.4: *Seja A matriz $n \times n$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função diferenciável e defina $F(x) = g(Ax)$. Mostre que $F'(x) = A^{\mathrm{T}} g'(Ax)$, $\forall x$, onde A^{T} é a transposta de A.*

Observe que, em particular, se $F(x) = \frac{1}{2}\|Ax\|_2^2$, então $F'\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada por $F' = A^{\mathrm{T}}A$.

Solução: Por hipótese $g(y+k) = g(y) + \langle g'(y) : k\rangle + \varepsilon(k)$, para todo $y, k \in \mathbb{R}^n$.

Tomemos $y = Ax$ e $k = Ah$. Então,

$$\begin{aligned} F(x+h) = g(Ax + Ah) &= g(Ax) + \langle g'(Ax) : Ah\rangle + \varepsilon(Ah) \\ &= F(x) + \langle A^T g'(Ax) : h\rangle + \varepsilon(Ah) \end{aligned}$$

A aplicação $h \mapsto \langle A^T g'(Ax) : h\rangle$ é linear. Além disso,

$$\frac{|\varepsilon(Ah)|}{\|h\|} = \frac{|\varepsilon(Ah)|}{\|Ah\|}\frac{\|Ah\|}{\|h\|} \tag{5.3}$$

Como $\|k\| = \|Ah\| \leq C\|h\|$, fica claro que $k \to 0$ quando $h \to 0$. Portanto, decorre de (5.3) que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varepsilon(Ah)|}{\|h\|} = 0$$

e concluímos que F é diferenciável e $F'(x) = A^T g'(Ax)$.

Exercício 5.5: *Seja* $F(x) = \langle Ax : x\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. *Mostre que* $F' = A^{\mathrm{T}} + A$. *Calcule* G' *para* $G(x) = \langle Ax : Bx\rangle$, A *e* B *matrizes* $n \times n$.

Solução: $F(x) = \langle Ax : x\rangle$. Então,

$$F(x+h) = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax : h\rangle + \langle Ah : x\rangle + \langle Ah : h\rangle$$

isto é, para $\varepsilon(h) = \langle Ah : h\rangle$ podemos escrever

$$F(x+h) = F(x) + \langle (A + A^T)x : h\rangle + \varepsilon(h).$$

A aplicação $h \mapsto \langle (A + A^T)x : h\rangle$ é linear e

$$|\varepsilon(h)| \leq \|Ah\|\,\|h\| \leq C\|h\|^2.$$

Portanto, F é diferenciável e $F'(x) = (A + A^T)x$.

Exercício 5.6: *Uma função* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é* p*-homogênea se* $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$, $\forall \lambda > 0$ *e* $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

a) *Dê exemplo de função* p*-homogênea. Existe função* p*-homogênea descontínua?*
b) *Mostre que uma função 1-homogênea é diferenciável em* $x = 0$ *se, e somente se, é linar.*
c) *Mostre que toda função* p*-homogênea diferenciável satisfaz a relação*

$$\big\langle x : \nabla f(x)\big\rangle = pf(x).$$

Reciprocamente, se $\big\langle x : \nabla f(x)\big\rangle = pf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, *então* f *é* p*-homogênea.*

Solução: (a) Um exemplo de função p-homogênea: $f(x) = \|x\|^p$. Consideremos $n = 1$ e suponhamos $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $\lambda > 0$. Seja $a = f(1)$ e $b = f(-1)$. Então, como necessariamente $f(0) = 0$, podemos escrever, para $x \neq 0$,

$$f(x) = f\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = |x|^p f\left(\frac{x}{|x|}\right) = \begin{cases} a|x|^p & \text{se } x > 0 \\ b|x|^p & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

concluímos que f é contínua se $p > 0$.

Consideremos $n = 2$ e a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^p + |y|^p & \text{se } xy \geq 0 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Então f é p-homogênea e descontínua nos pontos da forma $(x, 0)$ com $x \neq 0$ e $(0, y)$ com $y \neq 0$.

Aproveite este momento para pensar num exemplo de função p-homogênea definida em $\mathbb{R}^2$ que seja contínua somente na origem.

(b) Se f é linear, então f é obviamente diferenciável em $x = 0$. Por outro lado, se f é 1-homogênea e diferenciável em $x = 0$, temos $f(0) = tf(0)$ para todo $t > 0$, o que implica que $f(0) = 0$. Além disso,

$$tf(h) = f(th) = \langle f'(0) : th\rangle + \epsilon(th),\ \forall t > 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto,

$$tf(h) - t\langle f'(0) : h\rangle = \epsilon(th) \quad \Rightarrow \quad f(h) - \langle f'(0) : h\rangle = \frac{\epsilon(th)\|h\|}{\|th\|} \to 0 \text{ quando } t \to 0.$$

Logo, f é linear.

(c) Suponhamos f diferenciável e p-homogênea. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, consideremos a função real $\varphi\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(s) = s^p f(x)$.

É claro que $\varphi'(s) = ps^{p-1}f(x)$. Por hipótese, $\varphi(s) = f(sx)$ e como f é diferenciável, temos da regra da cadeia

$$\varphi'(s) = \langle \nabla f(sx) : x\rangle, \quad \forall s > 0.$$

Assim, $ps^{p-1}f(x) = \langle \nabla f(sx) : x\rangle$ para todo $s > 0$. Tomando $s = 1$ obtemos

$$pf(x) = \langle \nabla f(x) : x\rangle$$

como queríamos.

Reciprocamente, suponhamos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável satisfazendo a propriedade

$$pf(x) = \langle \nabla f(x) : x\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Novamente, consideremos a função $\varphi(s) = f(sx)$ definida para $s > 0$. Então, pela regra da cadeia,

$$\varphi'(s) = \langle \nabla f(sx) : x\rangle = \frac{1}{s}\langle \nabla f(sx) : sx\rangle = \frac{1}{s}pf(sx) = \frac{p}{s}\varphi(s),$$

isto é,

$$s\varphi'(s) - p\varphi(s) = 0, \quad s > 0 \tag{5.4}$$

Multiplicando ambos os lados de (5.4) por s^{-p-1}, temos

$$s^p\varphi'(s) - ps^{p-1}\varphi(s) = \frac{d}{ds}\Big(s^{-p}\varphi(s)\Big) = 0.$$

Portanto existe uma constante C tal que $s^{-p}\varphi(s) = C$ para todo $s > 0$, isto é, $f(sx) = \varphi(s) = Cs^p$, para todo $s > 0$. Tomando $s = 1$, obtemos $f(x) = C$. Assim, $f(sx) = f(x)s^p$ para todo $s > 0$, o que significa dizer que f é p-homogênea.

Observação: Se você acha que multiplicar a equação (5.4) por s^{-p-1} é artificioso demais, escreva (5.4) na forma

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{p}{s} \iff \frac{d}{ds}\ln|\varphi(s)| = p\frac{d}{ds}\ln s.$$

Portanto, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\ln|\varphi(s)| = p\ln s + a = \ln s^p + a$. Calculando a exponencial de ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$|\varphi(s)| = \mathrm{e}^a s^p = Cs^p$$

e re-encontramos o caso anterior.

Exercício 5.7: *Sabemos que o TVM é válido para funções diferenciáveis de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}$, *isto é; se* $x_1, x_0 \in \mathbb{R}^n$, *então existe* $t \in]0,1[$ *tal que*

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(x_t)(x_1 - x_0) = \big\langle \nabla f(x_t) : x_1 - x_0 \big\rangle,$$

onde $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$.

a) *Verifique que o TVM não vale para funções de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^m$ *se* $m > 1$.

b) *Mostre que vale a Desigualdade do Valor Médio: se* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *então*

$$\|f(x_1) - f(x_0)\|_2 \leq \|f'(x_t)(x_1 - x_0)\|_2.$$

Em particular, vale a desigualdade

$$\|f(x_1) - f(x_0)\|_2 \leq \|f'(x_t)\| \, \|(x_1 - x_0)\|_2,$$

onde estamos denotando

$$\|f'(x)\| = \sup\{\|f'(x)h\|_2 \,;\, \|h\|_2 = 1\}.$$

Sug.: Considere $h(t) = \big\langle f(x_0 + t(x_1 - x_0)) : f(x_1) - f(x_0) \big\rangle$.

Solução: (a) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, t^3)$. Supondo a validade do TVM para f, existiria $t \in (0,1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(t)$, isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

o que é impossível.

Analogamente, se considerarmos $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = (x^2 + y^2, x^3 + y^3)$ e supondo a validade do TVM, teríamos que, para algum $t \in (0,1)$, $g(1,1) - g(0,0) = g(t,t)(1,1)$, isto é

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 2t \\ 3t^2 & 3t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o que é impossível.

(b) Dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, consideremos

$$h(t) = \langle f(x_0 + t(x_1 - x_0)) \,:\, f(x_1) - f(x_0) \rangle.$$

Então é fácil ver que

$$\begin{aligned} h(1) &= \langle f(x_1) \,:\, f(x_1) - f(x_0) \rangle \\ h(0) &= \langle f(x_0) \,:\, f(x_1) - f(x_0) \rangle \end{aligned}$$

de modo que $h(1) - h(0) = \|f(x_1) - f(x_0)\|_2^2$.

Como h é função real diferenciável (como composta de funções diferenciáveis), existe $t \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(t)$, ist é,

$$\|f(x_1) - f(x_0)\|_2^2 = \langle f(x_t)(x_1 - x_0) \,:\, f(x_1) - f(x_0) \rangle,$$

onde $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$ e $f'(x_t)$ é a matriz jacobiana de f no ponto x_t.

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|f(x_1) - f(x_0)\|_2^2 \leq \|f(x_t)(x_1 - x_0)\|_2 \|f(x_1) - f(x_0)\|_2,$$

de modo que, após simplificação, obtemos a desigualdade do valor médio

$$\|f(x_1) - f(x_0)\|_2 \leq \|f(x_t)(x_1 - x_0)\|_2.$$

Exercício 5.8: *Seja $B = B_1(0)$ a bola unitária de $\mathbb{R}^n$ e $f\colon B \to B$ uma função de classe C^1. Suponha que existe $\alpha > 0$ tal que $\|f'(x_0)h\|_2 \leq \alpha\|h\|_2$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$. Prove que*

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \alpha\|x - y\|_2, \quad \forall x, y \in B.$$

Solução: Sejam $x, y \in B$. Então, pelo Exercício 5.7,

$$\|f(x_1) - f(x_0)\|_2 \leq \|f'(x_t)(x_1 - x_0)\|_2.$$

Como B é convexo, $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0) \in B$. Logo, por hipótese,

$$\|f(x_1) - f(x_0)\|_2 \leq \|f'(x_t)(x_1 - x_0)\|_2 \leq \alpha\|x_1 - x_0\|_2$$

como queríamos demonstrar.

Exercício 5.9: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ função de classe C^1. Mostre que:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 f'(x_0 + th)h\, dt.$$

Obs.: Se $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)\big)$, define-se

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt = \Big(\int_a^b \gamma_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b \gamma_m(t)\, dt\Big) \tag{5.5}$$

Solução: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Como f é diferenciável, cada componente f_j é diferenciável. Vamos mostrar que, para todo $j = 1, \ldots, m$, vale a igualdade

$$f_j(x + h) - f_j(x) = \int_0^1 \langle \nabla f_j(x + th) \ :\ h\rangle\, dt.$$

Seja $\gamma(t) = f_j(x + th)$. Então γ é função real diferenciável e, pela regra da cadeia,

$$\gamma'(t) = \langle \nabla f_j(x + th) : h\rangle.$$

Além disso, sendo f de classe C^1, $\gamma'(t)$ é função contínua e

$$f_j(x + h) - f_j(x) = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 \langle \nabla f_j(x + th) : h\rangle\, dt.$$

Lembrando que

$$[f'(x + th)] = \begin{pmatrix} \cdots & \nabla f_1(x + th) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \nabla f_m(x + th) & \cdots \end{pmatrix}$$

a conclusão segue da definição (5.5).

Exercício 5.10: *Seja* $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ *contínua satisfazendo:*

(1) x *e* $f(x)$ *são linearmente dependentes para todo* $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(2) $\|x\|_2 \|f(x)\|_2 = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

a) Determine $f(x)$. *Mostre que* f *é diferenciável e determine* $f'(x)$.

b) Se $C \subset \mathbb{R}^2$ *é uma circunferência que não passa pela origem, determine* $f(C)$. *Quem é* $f(C)$ *se* C *passa pela origem?*

Solução: (a) É claro que se x e $f(x)$ são vetores linearmente dependentes de $\mathbb{R}^n$, existe $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda(x)x$. Assim, $\|f(x)\| = |\lambda(x)|\|x\|$. Pela propriedade (2), obtemos $|\lambda(x)|\|x\|^2 = 1$, isto é,

$$|\lambda(x)| = \frac{1}{\|x\|^2}$$

e consequentemente

$$f(x) = \pm\frac{x}{\|x\|^2}. \tag{5.6}$$

Como f é contínua, então somente uma das possibilidades ocorre:

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2} \quad \text{ou} \quad f(x) = -\frac{x}{\|x\|^2}$$

Fixemo-nos no primeiro caso, o outro é idêntico. Para $n = 2$ e supondo a norma euclidiana $\| \ \|_2$, temos

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

Calculando as derivadas parciais de f, temos

$$[f'(x_1, x_2)] = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\ \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

Como as derivadas parciais acima são funções contínuas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, concluímos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Seja inicialmente C uma circunferência de centro em x_0 passando pela origem. Então

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \,;\, \|x - x_0\| = \|x_0\|\}.$$

Mas $\|x - x_0\|^2 = \|x_0\|^2$ se e somente se $2\langle x : x_0\rangle = \|x\|^2$ ou equivalentemente

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|^2} : x_0 \right\rangle = \frac{1}{2}$$

que podemos escrever na forma

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{1}{2}\frac{x_0}{\|x_0\|^2} : x_0 \right\rangle = 0.$$

Como $\{y \in \mathbb{R}^2 \,;\, \langle y - y_0 : x_0\rangle = 0\}$ é a reta que passa por y_0 e é ortogonal a x_0, podemos concluir que $f(C)$ é a reta que passa por $f(x_0)/2$ e é ortogonal a x_0.

Observe que os argumentos utilizados acima não se restrigem a $n = 2$. De fato, se C é a fronteira de uma bola de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem com centro em x_0, então $f(C)$ é um hiperplano que passa por $f(x_0)/2$ e é ortogonal a x_0.

Consideremos agora C uma circunferência que não passa pela orgem. Então

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \,;\, \|x - x_0\| = r\},$$

onde $r \neq \|x_0\|$.

<u>Afirmativa</u>: $f(C)$ é uma circunferência.

Se $x_0 = 0$ verificamos facilmente que

$$f(C) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,;\, \|x\| = 1/r\},$$

isto é, $f(C)$ também é uma circunferência com centro em 0.

Vamos agora provar a afirmativa no caso $x_0 \neq 0$. Consideremos

$$x_1 = (1 + \frac{r}{\|x_0\|})x_0, \quad x_2 = (1 - \frac{r}{\|x_0\|})x_0.$$

Então,

$$f(x_1) = \frac{x_0}{\|x_0\|(\|x_0\| + r)}, \quad f(x_2) = \frac{x_0}{\|x_0\|(\|x_0\| - r)}.$$

O ponto médio do segmento que liga $f(x_1)$ a $f(x_2)$ é

$$\overline{x} = \left(\frac{1}{\|x_0\|^2 - r^2}\right) x_0.$$

Assim, para que $F(C)$ seja uma circunferência, o centro deverá ser $\overline{x}$ e o raio

$$R = \frac{1}{2}\|f(x_1) - f(x_2)\| = \frac{r}{\|x_0\|^2 - r^2}.$$

Vamos então verificar que, de fato, $f(C)$ é uma circurferência de raio R e centro em $\overline{x}$ definidos acima.

$$\begin{aligned} \|f(x) - \overline{x}\|^2 &= \left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{x_0}{\|x_0\|^2 - r^2} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x : x_0\rangle}{\|x\|^2(\|x_0\|^2 - r^2)} + \frac{\|x_0\|^2}{(\|x_0\|^2 - r^2)^2}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Como $x \in C$ se e somete se $2\langle x : x_0\rangle = \|x_0\|^2 - r^2 + \|x\|^2$, obtemos de (5.7)

$$\|f(x) - \overline{x}\|^2 = \left(\frac{r}{\|x_0\|^2 - r^2}\right)^2$$

como queríamos provar.

Nunca é demais observar que os argumentos usados não se restringem à dimensão $n = 2$. De fato, se C é a fronteira da bola de $\mathbb{R}^n$ de centro em x_0 e raio $r \neq \|x_0\|$, então $f(C)$ é a fronteira da bola de centro em $\overline{x}$ e raio R definidos acima.

Exercício 5.11: *Seja $V = \mathcal{M}_{n\times n}$ o espaço das matrizes $n \times n$ munido da norma induzida (veja (4.16)) por uma norma qualquer de $\mathbb{R}^n$. Considere $f\colon V \to V$ a função definida por $f(X) = X^2$. Mostre que f é diferenciável em V e calcule $f'(X)H$ para toda $H \in V$. Cuidado! $f'(X) \neq 2X$. Faça o mesmo para $f(X) = X^3$.*

Solução: Consideremos em V a norma

$$\|A\|_* = \max\{\|Ax\|_2 \,;\, \|x\|_2 = 1\}.$$

Então (veja Exercício 4.17 (2d)), $\|AB\|_* \leq \|A\|_*\|B\|_*$, para quaisquer $A, B \in V$.
Consideremos $f\colon V \to V$ definida por $f(X) = X^2$. Então podemos escrever

$$f(X_0 + H) = (X_0 + H)^2 = X_0^2 + X_0H + HX_0 + H^2.$$

Consideremos $\mathcal{L}(H) = X_0H + HX_0$ e $\varepsilon(H) = H^2$. É claro que $\mathcal{L}(H)$ é linear e

$$\|\varepsilon(H)\|_* = \|H^2\|_* \leq \|H\|_*^2,$$

o que implica

$$0 \leq \frac{\|\varepsilon(H)\|_*}{\|H\|_*} \leq \|H\|_*$$

de onde concluímos que f é diferenciável em X_0 e $f'(X_0)H = X_0H + HX_0$ para todo $H \in V$.
Analogamente, se $f(X) = X^3$, então

$$f(X_0 + H) = X_0^3 + X_0^2H + X_0HX_0 + X_0H^2 + HX_0^2 + HX_0H + H^2X_0 + H^3.$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H) &= X_0^2H + X_0HX_0 + HX_0^2 \\ \varepsilon(H) &= X_0H^2 + HX_0H + H^2X_0 + H^3 \end{aligned}$$

É claro que $\mathcal{L}\colon V \to V$ é linear e

$$\|\varepsilon(H)\|_* \leq 3\|X_0\|_*\|H\|_*^2 + \|H\|_*^3$$

e concluímos que f é diferenciável em X_0 com $f'(X_0) = \mathcal{L}$.

Exercício 5.12: *Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 em Ω. Mostre que $\varepsilon\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por*

$$\varepsilon(x, h) := f(x + h) - f(x) - f'(x)h$$

é contínua em $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Mostre também que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\varepsilon(x, h)\|}{\|h\|} = 0$$

uniformemente nos compactos de Ω. Mais precisamente, mostre que se $K \subset \Omega$ é um conjunto compacto e $\varepsilon > 0$, então existe $\delta > 0$ (independente de $x \in K$) tal que

$$\|h\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \frac{\|\varepsilon(x, h)\|}{\|h\|} < \varepsilon, \quad \forall x \in K. \tag{5.8}$$

Solução: Sejam $x_0 \in \Omega$ e $h_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 + h_0 \in \Omega$. Consideremos $\{x_k\}_k$ sequência de pontos de Ω e $\{h_k\}_k$ sequência em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$x_k \to x_0 \quad \text{e} \quad h_k \to h_0.$$

Como f é de clase C^1, f' é contínua em x_0. Portanto,

$$f'(x_k) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(x_0).$$

Além disso, como f é contínua, $f(x_k) \to f(x_0)$. Assim

$$\varepsilon(x_k, h_k) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon(x_0, h_0).$$

Seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto com interior não vazio e $x \in \overset{\circ}{K}$. Para h suficientemente pequeno, temos

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 f'(x+sh)h\,ds,$$

de modo que

$$\varepsilon(x,h) = \int_0^1 [f'(x+sh) - f'(x)]h\,ds.$$

Assim,

$$\|\varepsilon(x,h)\|_2 \leq \left(\int_0^1 \|f'(x+sh) - f'(x)\|\,ds\right)\|h\|_2.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $\|h\|_2$, obtemos

$$\frac{\|\varepsilon(x,h)\|_2}{\|h\|_2} \leq \int_0^1 \|f'(x+sh) - f'(x)\|\,ds. \tag{5.9}$$

Como f' é uniformemente contínua em K, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (independente de $x \in K$) tal que

$$\|h\|_2 < \delta \quad \Rightarrow \|f'(x+h) - f'(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in K.$$

Como $\|sh\|_2 \leq \|h\|_2$ para todo $s \in [0,1]$, temos de (5.9)

$$\frac{\|\varepsilon(x,h)\|_2}{\|h\|_2} < \varepsilon \quad \text{se} \quad \|h\|_2 < \delta, \quad \forall x \in K.$$

Exercício 5.13: *Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em Ω. Seja $R\subset\Omega$ o retângulo $R=[a,b]\times[c,d]$. Considere $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$g(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Mostre que g é diferenciável em $]a,b[$ e que para todo $x_0\in\,]a,b[$,

$$g'(x_0)=\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,dy.$$

Solução: Seja

$$\varepsilon(h)=\int_c^d f(x_0+h,y)\,dy-\int_c^d f(x_0,y)\,dy-h\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,dy.$$

Para provar que $g(x)$ é derivável em x_0, basta mostrar que $|\varepsilon(h)|/h$ tende para zero quando h tende para zero.

Como a aplicação $t\mapsto f(x_0+th,y)$ é de clase C^1 no intervalo $[0,1]$, temos

$$f(x_0+h,y)-f(x_0,y)=h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y)\,dt.$$

Portanto,

$$|\varepsilon(h)|=|h|\int_c^d\left(\int_0^1\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right|\,dt\right)dy. \tag{5.10}$$

Como f é de classe C^1, a aplicação $(x,y)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ é uniformemente contínua em $[a,b]\times[c,d]$. Portanto, dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ (independente de y) tal que se $|h|<\delta$ então

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right|<\frac{\varepsilon}{d-c},\quad \forall y\in[c,d]. \tag{5.11}$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade (5.10) por $|h|$ e considerando (5.11), concluímos

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{|h|}<\varepsilon\quad\text{se}\quad |h|<\delta.$$

Exercício 5.14: *Calcule $P_C(x)$ e $f(x)$ definida por (5.19) (pag. 91 do livro texto) para cada um dos seguintes convexos:*

(a) $C=[0,+\infty[$;

(b) $C=[0,1]$;

(c) $C=[0,+\infty[\,\times[0,+\infty[$

(d) $C=B_R(0)$ *a bola de raio R e centro em zero de $\mathbb{R}^n$.*

Descreva o operador de projeção P_C nos três primeiros casos acima usando a notação

$$x^+=\max\{x,0\}=\frac{x+|x|}{2}.$$

Solução: (a) $C = [0, +\infty)$. Então

$$P_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

e o potencial correspondente é

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^2/2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) $C = [0, 1]$. Então

$$P_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e o potencial correspondente é

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^2/2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Considerando $x^+ = \max\{x, 0\} = (x + |x|)/2$, temos no caso (a)

$$P_C(x) = x^+ = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{1}{2}(x^+)^2 = \frac{(x + |x|)^2}{8}$$

e no caso (b)

$$P_C(x) = x^+ - (x^+ - 1)^+ = \frac{1}{2} + \frac{x + |x|}{4} - \left| \frac{x + |x| - 2}{4} \right|.$$

(c) $C = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ (C é o primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$). Então,

$$P_C(x, y) = (x^+, y^+) \quad \text{e} \quad f(x, y) = \frac{1}{2}\big((x^+)^2 + (y^+)^2\big).$$

(d) $C = B_R(0)$ (a bola de raio R e centro na origem em relação à norma euclidiana). Então

$$P_C(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x\|_2 \leq R \\ Rx/\|x\|_2 & \text{se } \|x\|_2 > R \end{cases}$$

e o potencial correspondente é

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|_2^2/2 & \text{se } \|x\|_2 \leq R \\ R\|x\|_2 - R^2/2 & \text{se } \|x\|_2 > R \end{cases}$$

Exercício 5.15: *Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função Lipschitz, U aberto e $x_0 \in U$. Suponha que, para todo $h \in \mathbb{R}^n$, existe o limite*

$$g(h) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{\lambda \|h\|} \tag{5.12}$$

e que a aplicação $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por (5.12) é linear em h. Mostre que f é diferenciável em x_0.

Solução: Primeiramente observe que

$$g(h) = \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0), \quad \nu = h/\|h\|.$$

Por hipótese g é linear na variável h. Portanto, existem constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$g(h) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h_j.$$

No caso particular em que $h = \mathrm{e}_i$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \alpha_i.$$

Logo, as derivadas parciais de f em x_0 existem e

$$g(h) = \langle \nabla f(x_0) : h \rangle, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Para provarmos que f é diferenciável em x_0, basta mostrar que

$$\varepsilon(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0) : h \rangle$$

satisfaz a propriedade

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = 0. \tag{5.13}$$

Suponhamos por absurdo que (5.13) é falso, isto é, existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{h_k\}$ que tende a zero tal que

$$\frac{|\varepsilon(h_k)|}{\|h_k\|} \geq \varepsilon_0. \tag{5.14}$$

Seja $h_k = \lambda_k \nu_k$, onde $\|\nu_k\| = 1$. Então

$$\frac{\varepsilon(h_k)}{\lambda_k} = \frac{f(x_0 + \lambda_k \nu_k) - f(x_0)}{\lambda_k} - \langle \nabla f(x_0) : \nu_k \rangle.$$

Como a esfera unitária $S = \{\nu \in \mathbb{R}^n \,;\, \|\nu\| = 1\}$ é compacta, podemos supor sem perda de generalidade que $\{\nu_k\}_k$ converge para $\nu \in S$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon(h_k)}{\lambda_k} &= \frac{f(x_0 + \lambda_k \nu_k) - f(x_0)}{\lambda_k} - \langle \nabla f(x_0) : \nu_k \rangle \\
&= \frac{f(x_0 + \lambda_k \nu_k) - f(x_0 + \lambda_k \nu)}{\lambda_k} + \frac{f(x_0 + \lambda_k \nu) - f(x_0)}{\lambda_k} \\
&\quad - \langle \nabla f(x_0) : \nu \rangle - \langle \nabla f(x_0) : \nu_k - \nu \rangle
\end{aligned}$$

Como estamos supondo f Lipschitz, existe $C > 0$ tal que $|f(x_0+\lambda_k\nu_k)-f(x_0+\lambda_k\nu)| \le C\lambda_k\|\nu_k-\nu\|$. Portanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varepsilon(h_k)}{\lambda_k}\right| &\le C\|\nu_k-\nu\| + \left|\frac{f(x_0+\lambda_k\nu)-f(x_0)}{\lambda_k} - \langle\nabla f(x_0):\nu\rangle\right| \\ &+ \|\nabla f(x_0)\|\|\nu_k-\nu\|.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Como o lado direito de (5.15) tende a zero quando n tende a infinito, (5.15) entra em contradição com (5.14). Consequentemente vale (5.13) e concluímos que f é diferenciável em x_0.

Exercício 5.16: *(a) Verifique diretamente a fórmula no caso $n = 2$, calculando a derivada do determinante*

$$\det\big(A(t)\big) = a_{11}(t)a_{22}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t).$$

(b) Seja $A(t)$ matriz $n \times n$. Calcule

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\det\big(A(t)\big)}\right).$$

Solução: (a) Se $g(A) = \det(A)$ e A invertível, então $g'(A)H = \operatorname{tr}(A^{-1}H)\det(A)$, para toda matriz H. Pela Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dt}g\big(A(t)\big) = g'(A)A'(t) = \operatorname{tr}\big(A(t)^{-1}A'(t)\big)\det A(t).$$

No caso particular $n = 2$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(\det\big(A(t)\big)\big) &= a'_{11}(t)a_{22}(t) + a_{11}(t)a'_{22}(t) - a'_{12}(t)a_{21}(t) - a_{12}(t)a'_{21}(t) \\ &= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a'_{12}(t) & a'_{21}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{22}(t) & -a_{12}(t) \\ -a_{21}(t) & a_{11}(t)\end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{tr}\big(A'(t)A^{-1}(t)\big)\det(A(t)).\end{aligned}$$

(b) Para simplificar a notação, não explicitaremos a variável t. Assim, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{g(A)} = -\frac{g'(A)A'}{g(A)^2} = -\frac{\operatorname{tr}(A^{-1}A')\det(A)}{\det(A)^2} = -\frac{\operatorname{tr}(A^{-1}A')}{\det(A)}. \tag{5.16}$$

Observação: Vale lembrar que $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. Assim, aplicando a regra da cadeia na função $t \mapsto \det\big(A^{-1}(t)\big)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\operatorname{tr}\big(A(A^{-1})'\big). \tag{5.17}$$

Como veremos adiante (veja Exercício 10.10(iii)), se A é invertível, a função $A \mapsto A^{-1}$ é difereciável como função definida no espaço das matrizes, cuja diferencial em A é dada por $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$. Portanto, aplicando a regra da cadeia em (5.17), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det(A^{-1}) &= \det(A^{-1})\operatorname{tr}\big(A(A^{-1})'\big) = \det(A^{-1})\operatorname{tr}\big(-AA^{-1}A'A^{-1})\big) \\ &= -\det(A^{-1})\operatorname{tr}\big(A'A^{-1})\big) = -\frac{\operatorname{tr}\big(A^{-1}A'\big)}{\det(A)}\end{aligned}$$

Exercício 5.17: *Seja $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço das matrizes quadradas de ordem 2 e considere a função*

$$g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad g(A) = \det(A).$$

Seja $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Mostre que

$$g(A+H) = g(A) + \operatorname{tr}\big(f(A)H\big) + \det(H),$$

e conclua que g é diferenciável, com $g'(A) = f(A)^T$. Observe que se $\det(A) \neq 0$, então $f(A) = \det(A)A^{-1}$.

Solução: Seja H a matriz com coeficientes h_{ij}, $i, j = 1, 2$. Calculando diretamente, obtemos

$$\begin{aligned} \det(A+H) &= (d + h_{22})(a + h_{11}) + (c + h_{21})(-b - h_{12}) \\ &= (ad - bc) + (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}) + (ah_{22} + dh_{11} - ch_{12} - bh_{21}) \\ &= \det(A) + \det(H) + \operatorname{tr}\big(f(A)H\big). \end{aligned}$$

Como $\det(A) = o\big(\|H\|\big)$ e a aplicação $H \mapsto \operatorname{tr}\big(f(A)H\big)$ é linear, concluímos por definição que g é diferenciável e $g'(A)H = \operatorname{tr}\big(f(A)H\big) = \big\langle f(A)^T : H\big\rangle$.

Exercício 5.18: *Seja $A_0 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Suponha que A_0 admite dois autovalores reais $\lambda_1(A_0) \neq \lambda_2(A_0)$.*

(a) Mostre que existe $\delta > 0$ tal que se $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\|A - A_0\| < \delta$, então A admite dois autovales $\lambda_1(A)$ e $\lambda_2(A)$ reais e distintos.

(b) Mostre que a aplicação $A \mapsto \lambda_i(A)$ é diferenciável na bola $B_\delta(A_0)$ e calcule as derivadas $\lambda_i'(A)$, $i = 1, 2$.

(c) Usando o item (b), mostre que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i'(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial a}\lambda_i(A) & \dfrac{\partial}{\partial b}\lambda_i(A) \\ \dfrac{\partial}{\partial c}\lambda_i(A) & \dfrac{\partial}{\partial d}\lambda_i(A) \end{pmatrix}$$

Solução: (a) Como estamos em dimensão 2, a equação característica de A_0 é

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A_0)\lambda + \det(A_0) = 0,$$

cujas raízes são

$$\begin{aligned} \lambda_1(A_0) &= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}(A_0) + \sqrt{\operatorname{tr}(A_0)^2 - 4\det(A_0)}\Big), \\ \lambda_2(A_0) &= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}(A_0) - \sqrt{\operatorname{tr}(A_0)^2 - 4\det(A_0)}\Big). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Como por hipótese A_0 tem dois autovalores reais e distintos, $\mathrm{tr}(A_0)^2 - 4\det(A_0) > 0$. Da continuidade das funções determinante e traço, podemos garantir que existe δ satisfazendo as condições do item (a).

(b) Consideremos a função $\lambda_1(A)$ em (5.19) definida na bola $B_\delta(A_0)$. Pela regra da cadeia e o Exercício 5.17, temos que $\lambda_1(A)$ é diferenciável $B_\delta(A_0)$ e

$$\lambda_1'(A)H = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(H) + \frac{2\,\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(H) - 4\,\mathrm{tr}(f(A)H)}{2\sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}\right],$$

ou equivalentemente,

$$\lambda_1'(A) = \frac{1}{2}\left[I + \Big(\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)\Big)^{-1/2}\Big(\mathrm{tr}(A)I - 2f(A)^T\Big)\right], \tag{5.20}$$

onde $f(A)$ é definida em (5.18).

Pela semelhança das fórmulas, é imediato verificar que

$$\lambda_2'(A) = \frac{1}{2}\left[I - \Big(\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)\Big)^{-1/2}\Big(\mathrm{tr}(A)I - 2f(A)^T\Big)\right].$$

(c) Vamos expressar a fórmula (5.20) em termos de coordenadas. Então

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{tr}(A) = a + d, \\ \det(A) = ad - bc \end{cases}$$

Então

$$\lambda_1(A) = \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}.$$

Reescrevendo a fórmula (5.20) em termos das coordenadas a, b, c e d, e lembrando que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f(A)^T = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\lambda_1'(A) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[(a+d)^2 - 4(ad-bc)\right]^{-1/2}\begin{pmatrix} a-d & 2c \\ 2b & d-a \end{pmatrix}\right]. \tag{5.21}$$

Calculando diretamente as derivadas parciais de $\lambda_1(A)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\lambda_1(A) &= \frac{1}{2}\Big[1 + \big[(a+d)^2 - 4(ad-bc)\big]^{-1/2}(a-d)\Big] \\
\frac{\partial}{\partial b}\lambda_1(A) &= \frac{1}{2}\Big[0 + \big[(a+d)^2 - 4(ad-bc)\big]^{-1/2}2c\Big] \\
\frac{\partial}{\partial c}\lambda_1(A) &= \frac{1}{2}\Big[0 + \big[(a+d)^2 - 4(ad-bc)\big]^{-1/2}2b\Big] \\
\frac{\partial}{\partial b}\lambda_1(A) &= \frac{1}{2}\Big[1 + \big[(a+d)^2 - 4(ad-bc)\big]^{-1/2}(d-a)\Big]
\end{aligned} \tag{5.22}$$

De (5.21) e (5.22), vemos que

$$\lambda_1'(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial a}\lambda_1(A) & \dfrac{\partial}{\partial b}\lambda_1(A) \\ \dfrac{\partial}{\partial c}\lambda_1(A) & \dfrac{\partial}{\partial d}\lambda_1(A) \end{pmatrix}$$

É evidente que a mesma expressão acima vale para $\lambda_2'(A)$, com uma única diferença de sinal que antecede o fator que envolve a potência $-1/2$ em (5.21).

6

Curvas em $\mathbb{R}^n$

Exercício 6.1: *Seja* $\gamma\colon [0,+\infty[\,\to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t}).$$

Mostre que γ *é retificável e calcule seu comprimento.*
Solução: γ é curva de classe C^1 em $[0,+\infty)$ e

$$\gamma'(t) = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t, -e^{-t}\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t, -e^{-t}),$$

de modo que $\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{3}e^{-t}$.
Pela Proposição 6.1 (pag. 61 do livro texto), γ é retificável no intervalo $[0,T]$, para cada $T > 0$ e

$$\int_0^T \|\gamma'(t)\|_2\,dt = \sqrt{3}\int_0^T e^{-t}\,dt = \sqrt{3}(1-e^{-T}).$$

Como

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \|\gamma'(t)\|_2 dt = \sqrt{3},$$

concluímos que γ é retificável no intervalo $[0,+\infty)$ e seu comprimento é igual a $\sqrt{3}$.

Exercício 6.2: *Dê exemplo de uma curva* $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, *ligando dois pontos de* $\mathbb{R}^2$ *que não seja retificável.*
Solução: Consideremos a curva $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t\operatorname{sen}(\frac{1}{t})) & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Primeiramente observe

$$\operatorname{sen}\frac{1}{t} = 1 \iff t = \frac{2}{(4k+1)\pi}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$
$$\operatorname{sen}\frac{1}{t} = -1 \iff t = \frac{2}{(4k-1)\pi}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos a partição P de $[0,1]$ definida por

$$P = \left\{0 < \frac{2}{(4n+1)\pi} < \frac{2}{(4n-1)\pi} < \frac{2}{(4n-3)\pi} < \frac{2}{(4n-5)\pi} \cdots < \frac{2}{\pi} < 1\right\},$$

que divide o intevalo $[0,1]$ em $2n+2$ partes. Para simplificar a notação, consideremos

$$t_k^- = \frac{2}{(4k-1)\pi}, \quad t_k^+ = \frac{2}{(4k+1)\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Então $\gamma(t_k^+) = (t_k^+, t_k^+)$ e $\gamma(t_k^-) = (t_k^-, -t_k^-)$, de modo que

$$\|\gamma(t_k^+) - \gamma(t_k^-)\|_2 = \sqrt{(t_k^+ - t_k^-)^2 + (t_k^+ + t_k^-)^2} = \frac{4}{\pi(16k^2-1)}\sqrt{1+16k^2}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k^+) - \gamma(t_k^-)\|_2 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{1+16k^2}}{16k^2-1}.$$

Observando que $\sqrt{1+16k^2} \geq 4k$ e $16k^2 - 1 \leq 16k^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k^+) - \gamma(t_k^-)\|_2 \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Como a série harmônica $\sum 1/k$ é divergente, a curva γ não é retificável.

Exercício 6.3: *Uma partícula se move no plano (resp. no espaço) e sua trajetória é descrita por*

$$\gamma(t) = (1-t)^2 x_1 + 2t(1-t)x_2 + t^2 x_3, \quad t \in [0,1], \tag{6.1}$$

onde x_1, x_2 e x_3 são pontos dados de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$).

a) Descreva o movimento da partícula, fazendo um esboço da trajetória.

b) Calcule $\gamma'(0)$ e $\gamma'(1)$.

c) Se x_1, x_2 e x_3 não são colineares, mostre que $\gamma(t)$ está contido no triângulo com vértices em x_1, x_2 e x_3.

Solução: (a) Vamos definir $x(t) = (1-t)x_1 + tx_2$ e $y(t) = (1-t)x_2 + tx_3$. $x(t)$ e $y(t)$ parametrizam os segmentos de reta que ligam x_1 a x_2 e x_2 a x_3 respectivamente. Para simplificar a notação, escreveremos

$$[x_1, x_2] = \{x(t)\,;\, t \in [0,1]\}.$$

Fixemos $t \in (0,1)$ e consideremos $z(s) = (1-s)x(t) + sy(t)$, $s \in [0,1]$. $z(s)$ parametriza o segmento de reta $[x(t), y(t)]$. Observe agora que se tomarmos $s = t$, então $z(t) = \gamma(t)$. Portanto, $\gamma(t)$ é o ponto de $[x(t), y(t)]$ que está distante das extremidades na mesma proporção com que $x(t)$ está distante das extremidades de $[x_1, x_2]$ e $y(t)$ está distante das extremidades $[x_2, x_3]$. Mais precisamente,

$$\frac{\|\gamma(t) - x(t)\|_2}{\|y(t) - x(t)\|_2} = \frac{\|x(t) - x_1\|_2}{\|x_2 - x_1\|_2} = \frac{\|y(t) - x_2\|_2}{\|x_3 - x_2\|_2} = t.$$

(b) $\gamma'(0) = 2x_2 - 2x_1$ e $\gamma'(1) = 2x_3 - 2x_2$. Isso quer dizer que se uma partícula se move no plano (ou no espaço) e seu movimento é descrito por $\gamma(t)$, então sua velocidade no instante $t = 0$ é $2(x_2 - x_1)$. em particular, a trajetória é tangente ao segmento $[x_1, x_2]$ no ponto x_1. Analogamente, a velocidade no instante $t = 1$ é $2(x_3 - x_2)$ e a trajetória é tantente ao segmento $[x_2, x_3]$ no ponto x_3.

(c) Se x_1, x_2 e x_3 não são colineares, podemos considerar o triângulo Δ (no plano ou o espaço) cujos vértices coincidem com esses pontos. Como Δ é o cojunto de todas as combinações convexas de x_1, x_2 e x_3, temos

$$x \in \Delta \iff x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_j \in [0,1].$$

Como $(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1$, com cada uma das parcelas no intervalo $[0,1]$ se $t \in [0,1]$, constatamos que $\gamma(t) \in \Delta$, isto é, a curva está contida no triângulo Δ.

Exercício 6.4: *O mesmo do exercício anterior para a partícula cuja trajetória é descrita por*

$$\gamma(t) = (1-t)^3 x_1 + 3t(1-t)^2 x_2 + 3t^2(1-t)x_3 + t^3 x_4. \tag{6.2}$$

Solução: Primeiramente observe que $\gamma(t) = (1-t)x(t) + ty(t)$, onde

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^2 x_1 + 2t(1-t)x_2 + t^2 x_3 \\ y(t) &= (1-t)^2 x_2 + 2t(1-t)x_3 + t^2 x_4 \end{aligned}$$

Portanto, $\gamma(t)$ é a combinação convexa de duas curvas de Bézier (de ordem 2). Observe que, no caso $\mathbb{R}^2$, $x(t)$ está contida no triângulo de vértices x_1, x_2 e x_3, enquanto que $y(t)$ está contida no triângulo de vértices x_2, x_3 e x_4. Como o quadrilátero formado pelos quatro pontos contém os dois triângulos, concluímos que $\gamma(t)$ está contida neste quadrilátero.

Exercício 6.5: *Seja Ω aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$. (a) Mostre que se x e y são dois pontos quaisquer de Ω, existe uma curva ligando x a y totalmente contida em Ω.*

(b) Mostre que existe uma curva poligonal ligando x a y totalmente contida em Ω.

Solução: (a) Seja $x_0 \in \Omega$ e considere o conjunto

$$A = \big\{ y \in \Omega\,;\, y \text{ não pode ser ligado a } x_0 \text{ por uma curva } \big\}.$$

Queremos mostrar que $A = \emptyset$.

Suponhamos por absurdo que $A \neq \emptyset$. Se A e $\Omega \setminus A$ forem abertos, chegamos a uma contradição, pois estamos supondo Ω é conexo.

Provemos primeiramente que $\Omega \setminus A$ é aberto. Se $x_1 \in \Omega \setminus A$, existe uma curva γ_1 ligando x_0 a x_1 inteiramente contida em Ω, isto é, existe $\gamma_1\colon [0,1] \to \Omega$ contínua tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Como Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_1) \subset \Omega$. É claro que qualquer ponto $x_2 \in B_r(x_1)$ pode ser ligado a x_1 por um segmento de reta

$$\gamma_2\colon [0,1] \to B_r(x_1), \quad \gamma_2(s) = (1-s)x_1 + sx_2.$$

Consideremos a função $\gamma\colon [0,2] \to \Omega$ definida por

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [0,1] \\ (2-t)x_1 + (t-1)x_2 & \text{se } t \in [1,2] \end{cases}$$

Como γ_2 é uma curva que liga x_0 a x_2, concluímos que $x_2 \notin A$. Portanto, $B_r(x_1)$ não contém nenhum ponto de A, isto é, $B_r(x_1) \subset \Omega \setminus A$, o que prova que $\Omega \setminus A$ é conjunto aberto.

Provemos agora que A é aberto. Seja $y_1 \in A$. Por definição, y_1 não pode ser ligado a x_0 por nunhuma curva. Mas $y_1 \subset \Omega$ e Ω é aberto, de modo que podemos encontrar $r > 0$ tal que $B_r(y_1) \subset \Omega$. É claro que $B_r(y_1)$ não contém pontos de $\Omega \setminus A$. De fato, se $y_2 \in B_r(y_1) \cap (\Omega \setminus A)$, existiria uma curva γ ligando x_0 a y_2 que poderíamos colar com um segmento de reta para formar uma curva ligando x_0 a y_1.

Portanto $B_r(y_1) \subset A$, como queríamos provar.

(b) Sejam x_1 e x_2 dois pontos de Ω. Pelo item (a) existe uma curva $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Como γ é contínua e o intervalo $[0,1]$ é compacto, $\gamma\big([0,1]\big)$ é subconjunto compacto contido em Ω.

Para cada $t \in [0,1]$ seja $r_t > 0$ tal que $B_{r_t}(\gamma(t)) \subset \Omega$. É claro que a família de bolas

$$\{B_{r_t}(\gamma(t))\}_{t\in[0,1]}$$

é uma cobertura aberta de $\gamma([0,1])$. Assim, existem $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ tais que

$$\gamma([0,1]) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{r_{t_j}}(\gamma(t_j)).$$

A curva poligonal

$$\bigcup_{j=1}^{m-1} [\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})],$$

está contida em Ω e liga $\gamma(t_0) = x_0$ a $\gamma(t_m) = x_1$, como queríamos provar.

Exercício 6.6: *Seja γ uma curva poligonal ligando os pontos x_1, x_2 e x_3 de $\mathbb{R}^n$. Para $\varepsilon > 0$ seja $\mathcal{O}_\varepsilon$ a vizinhança de diâmetro ε de γ definida por $\mathcal{O}_\varepsilon = \bigcup_{x\in\gamma} B_\varepsilon(x)$. Construa uma curva diferenciável ligando x_1 a x_3 inteiramente contida em $\mathcal{O}_\varepsilon$.*

Solução: Podemos supor sem perda de generalidade que

$$\varepsilon < \min\big\{1, \|x_2 - x_1\|, \|x_3 - x_2\|\big\}.$$

Consideremos $\gamma\colon [(\varepsilon-1)/2\varepsilon, (\varepsilon+1)/2\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-\varepsilon)x_2 + \varepsilon x_1 + 2t\varepsilon(x_2 - x_1) & \text{se } (\varepsilon-1)/2\varepsilon \le t \le 0 \\ x_2 + \varepsilon t^2(x_3 - x_2) + \varepsilon(1-t)^2(x_1 - x_2) & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ (1+\varepsilon)x_2 - \varepsilon x_3 + 2t\varepsilon(x_3 - x_2) & \text{se } 1 \le t \le (1+\varepsilon)/2\varepsilon \end{cases} \tag{6.3}$$

Então podemos verificar que γ satisfaz às condições desejadas.

A construção de (6.3) é feita da seguinte maneira:

Etapa 1: Considere a esfera de raio ε centrada em x_2:

$$\partial B_\varepsilon(x_2) = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x - x_2\| = \varepsilon\}.$$

Sejam x_2^- e x_2^+ os pontos da interseção de $\partial B_\varepsilon(x_2)$ com os segmentos $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ respectivamente. Então

$$x_2^- = (1-\varepsilon)x_2 + \varepsilon x_1, \quad x_2^+ = (1-\varepsilon)x_2 + \varepsilon x_3.$$

Etapa 2: A curva γ será definida de modo que: para $t \leq 0$ coincida com o segmento $[x_1, x_2^-]$, para $t \geq 1$ coincida com o segmento $[x_2^+, x_3]$ e para $0 \leq t \leq 1$ seja a curva de Bézier gerada pelos pontos x_2^-, x_2 e x_2^+.

Etapa 3: Para que esta construção defina uma função de classe C^1, devemos ajustar os parâmetros de modo que as derivadas laterais nos pontos $t = 0$ e $t = 1$ sejam iguais. Sabemos do Exercício 6.3 (b) que $\gamma'(0^+) = 2(x_2 - x_2^-)$ e $\gamma'(1^-) = 2(x_2^+ - x_2)$. Portanto, podemos considerar

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= x_2^- + 2t(x_2 - x_2^-), \quad t \leq 0\\ \gamma(t) &= x_2^+ + 2(t-1)(x_2^+ - x_2), \quad t \geq 1\end{aligned}$$

que nos dá (6.1).

Exercício 6.7: *Prove o Lema 6.1 (pag. 104)*

Solução: Sejam $x, y \in \Omega$. Pelo Exercício 6.5(b) podemos construir uma poligonal

$$[x, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_m, y] \subset \Omega.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, as esferas $\partial B_\varepsilon(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$, estão inteiramente contidas em Ω e interseptam os segmentos $[x_{j-1}, x_j]$ e $[x_j, x_{j+1}]$ respectivamente nos pontos x_j^- e x_j^+. Procedento como no Exercício 6.6, podemos construir uma curva γ de classe C^1 formada por segmentos de retas e curvas de Bézier. Observe que as esferas têm o mesmo raio ε, o que permite fazer a colagem dos segmentos com as curvas de Bézier mantendo contínua a derivada.

Exercício 6.8: *Sejam $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva fechada ($\gamma(a) = \gamma(b)$) diferenciável e K um convexo fechado do $\mathbb{R}^n$ tal que $K \supset \{\gamma'(t)\,;\, t \in [a, b]\}$. Mostre que $0 \in K$.*

Solução: Vamos supor por absurdo que $0 \notin K$ e consideremos $x_0 = P_K(0)$. Então é claro que $x_0 \neq 0$. Seja H o hiperplano que passa por 0 e é ortogonal a x_0, isto é,

$$H = \big\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \langle x : x_0\rangle = 0\big\}.$$

Afirmativa: $H \cap K = \emptyset$.

De fato, se $y \in H \cap K$ então (veja Exercício 4.16(i) d pag. 61),

$$\begin{aligned}y \in H &\Rightarrow \langle y : x_0\rangle = 0\\ y \in K &\Rightarrow \langle 0 - x_0 : y - x_0\rangle \leq 0\end{aligned} \tag{6.4}$$

De (6.4) obtemos $\|x_0\|_2^2 - \langle x_0 : y\rangle \leq 0$ e consequentemente $x_0 = 0$. Mas isso é impossível, porque estamos supondo $0 \notin K$. Logo, vale a afirmativa.

Consideremos $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \langle \gamma(t) : x_0\rangle$. Então g é função derivável satisfazendo $g(a) = g(b)$. Pelo Teorema de Role, existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $g'(t_0) = 0$, isto é, $\langle \gamma'(t_0) : x_0\rangle = 0$. Portanto, $\gamma'(t_0) \in H$ e, como por hipótese $\gamma'(t_0) \in K$, concluímos que $\gamma'(t_0) \in H \cap K$, o que está em contradição com a afirmativa feita acima.

Portanto, $0 \in K$ como queríamos mostrar.

Exercício 6.9: *Seja γ uma curva retificável de comprimento L parametrizada por $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Seja $s: [a, b] \to [0, L]$ a função definida por*

$$s(t) := \begin{cases} \text{comprimento de } \gamma\big([a, t]\big) & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } t = a \end{cases}$$

a) Mostre que s é crescente.

b) Mostre que se γ é função Lipschitz contínua, então $s(t)$ também é Lipschitz contínua.

c) Suponha $s(t)$ estritamente crescente e defina

$$\tilde{\gamma}: [0, L] \to \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)),$$

onde $t(s)$ denota a inversa de $s(t)$. Mostre que $\tilde{\gamma}$ e γ descrevem a mesma curva, isto é, $\gamma\big([a, b]\big) = \tilde{\gamma}\big([0, L]\big)$.

d) Se $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é curva de classe C^1 em $[a, b]$ tal que $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ para todo $t \in]a, b[$, mostre que $\tilde{\gamma}$ é curva de classe C^1 em $[0, L]$ tal que $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ para todo s.

(Moral da história: se uma curva pode ser percorrida por uma partícula com velocidade escalar $\|\gamma'(t)\| \neq 0$, então pode ser percorrida com velocidade escalar constante).

Solução: Para simplificar a notação, diremos que $P \in \mathcal{P}([a, t])$ se

$$P = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = t\}$$

é uma partição de $[a, t]$. Denotaremos também

$$S(P, \gamma) = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

(a) Dado $\varepsilon > 0$, existe $P_0 \in \mathcal{P}([a, t])$ tal que

$$s(t) - \varepsilon < S(P, \gamma) \leq s(t), \quad \forall P \in \mathcal{P}([a, t]),\ P \supset P_0.$$

Se $h > 0$, então $P' = P \cup \{t + h\} \in \mathcal{P}([a, t + h])$ e

$$s(t) - \varepsilon < S(P, \gamma) \leq S(P', \gamma) \leq s(t + h).$$

Logo $s(t+h) - s(t) \geq -\varepsilon$. Fazendo ε tender a zero, obtemos $s(t+h) \geq s(t)$.

(b) Se γ é função Lipschitz contínua, existe $C > 0$ tal que

$$\|\gamma(t) - \gamma(t')\| \leq C|t - t'|, \quad \forall t, t' \in [a, b].$$

Dados $t_0, t_1 \in (a, b)$ e $\varepsilon > 0$, existe $P_0 \in \mathcal{P}([a, t_0])$ tal que

$$s(t_0) - \varepsilon < S(P, \gamma) \leq s(t_0), \quad \forall P \supset P_0. \tag{6.5}$$

Analogamente, existe $P_1 \in \mathcal{P}([a, t_1])$ tal que

$$s(t_1) - \varepsilon < S(P, \gamma) \leq s(t_1), \quad \forall P \supset P_1.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $t_1 > t_0$. Então $P_2 := P_0 \cup P_1 \in \mathcal{P}([a, t_1])$ e $s(t_1) - \varepsilon < S(P_2, \gamma) \leq s(t_1)$. Como $P_2 \cap [a, t_0] \in \mathcal{P}([a, t_0])$, obtemos

$$\begin{aligned} &s(t_0) - \varepsilon < S(P_2 \cap [a, t_0]) \leq s(t_0) \\ &s(t_1) - \varepsilon < S(P_2 \cap [a, t_0]) + \sum_{j=k+1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \leq s(t_1) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Subtraindo a primeira desigualdade da segunda em (6.6), obtemos

$$s(t_1) - s(t_0) - \varepsilon < \sum_{j=k+1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \leq C(t_1 - t_0).$$

Portanto, $0 \leq s(t_1) - s(t_0) < C(t_1 - t_0) + \varepsilon$ e concluímos o que queríamos provar após fazer ε tender a zero.

(c) Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $s_0 \in [0, L]$ tais que $x_0 = \tilde{\gamma}(s_0)$. Como $s\colon [a, b] \to [0, L]$ é função bijetora, existe um único t_0 tal que $s_0 = s(t_0)$. Portanto, $x_0 = \gamma(t_0)$.

A recíprova segue por argumento idêntico.

(d) Se γ é de classe C^1, então

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\xi)\|\, d\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|.$$

Portanto,

$$\frac{d}{ds}\tilde{\gamma}(s) = \frac{d}{ds}\gamma(t(s)) = \gamma'(t(s))\frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|}$$

é contínua, como queríamos provar.

Exercício 6.10: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e conexo. Demostre a afirmativa abaixo se verdadeira ou dê um contra-exemplo se falsa. " Mostre que existe $R > 0$ tal que $\forall x, y \in \Omega$ existe uma curva γ retificável ligando x a y tal que* $\operatorname{med}(\gamma) \leq R$".

Solução: A afirmativa é falsa. Considere o seguinte conjunto (em coordenadas polares):

$$\Omega = \left\{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,;\ \frac{1}{2\theta} < r < \frac{2}{\theta},\ \theta \in (1, +\infty)\right\}$$

É fácil ver que Ω é aberto e limitado. Para provar que a afirmativa não se aplica neste caso, basta verificar que a curva $\gamma\colon (1, +\infty) \to \Omega$ definida por

$$\gamma(t) = \frac{1}{t}(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

não é retificável. Assim, os pontos $x_1 = (0, 2/\pi)$ e $x_k = (0, 2/k\pi)$ $(k \to +\infty)$ não podem ser ligados por uma curva contida em Ω cujo comprimento esteja limitado.

Exercício 6.11: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o disco unitário de centro na origem. Determine $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{R}_\theta[f](x) = 2\sqrt{1 - \|x\|_2^2},\ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Solução: Pela fórmula da inversa da Transformada Raio-X (veja (6.9)) e fazendo a mudança de variável $\xi := \sqrt{\tau^2 - r^2}$, temos:

$$\begin{aligned} f_0(r) &= -\frac{1}{\pi r}\frac{d}{dr}\left[\int_r^1 \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, g(\tau)\, d\tau\right] = -\frac{1}{\pi r}\frac{d}{dr}\left[\int_r^1 \frac{2\tau\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, d\tau\right] \\ &= -\frac{2}{\pi r}\frac{d}{dr}\left[\int_0^{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{1 - r^2 - \xi^2}\, d\xi\right] = -\frac{2}{\pi r}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} \frac{-r}{\sqrt{1 - r^2 - \xi^2}}\, d\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 - \xi^2}}\, d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}\, d\xi = 1 \end{aligned}$$

Exercício 6.12: *O ângulo formado por duas curvas diferenciáveis que se cruzam num ponto P é, por definição, o ângulo formado pelos vetores tangentes às curvas em P. Mais precisamente, se $\gamma_1, \gamma_2\colon I \to \mathbb{R}^n$ são duas curvas diferenciáveis tais que $P = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ para algum $t_0 \in I$, então definimos o ângulo θ entre γ_1 e γ_2 em P por*

$$\cos\theta = \frac{\langle \gamma_1'(t_0) : \gamma_2'(t_0)\rangle}{\|\gamma_1'(t_0)\|\,\|\gamma_2'(t_0)\|.}$$

Uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é denominada transformação conforme se o ângulo entre duas quaisquer curvas que se cruzam fica preservado por f.

a) Seja $f(x) = Ax$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, onde A é matriz 2×2. Mostre que f é transformação conforme se e somente se A é da forma:

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$$

b) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (\varphi, \psi)$ função diferenciável. Determine condições necessárias e suficientes sobre f' para que f seja uma transformação conforme.

c) Calcule $J_f(x)$.

Solução: (a) Provemos a implicação "$\Rightarrow$". Sejam u e v dois vetores unitários e consideremos as retas

$$\gamma_1(t) = x_0 + tu, \quad \gamma_2(t) = x_0 + tv.$$

γ_1 e γ_2 se cruzam em x_0 formando neste ponto um ângulo θ tal que $\cos\theta = \langle u : v\rangle$. Sejam $\Gamma_1(t) = f(\gamma_1(t))$ e $\Gamma_2(t) = f(\gamma_2(t))$. Como f é linear, as retas

$$\Gamma_1(t) = Ax_0 + tAu, \quad \Gamma_2(t) = Ax_0 + tAv$$

se cruzam no ponto Ax_0 formando o ângulo ϕ tal que

$$\cos\phi = \frac{\langle Au : Av\rangle}{\|Au\|\,\|Av\|}.$$

Por hipótese $\theta = \phi$. Logo

$$\langle Au : Av\rangle = \|Au\|\,\|Av\|\langle u : v\rangle. \tag{6.7}$$

Se considerarmos u e v ortogonais, então Au e Av também são ortogonais. Consideremos a representação matricial de A em relação à base canônica $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$.

$$[A] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Como $A\mathrm{e}_1$ e $A\mathrm{e}_2$ são ortogonais, obtemos $ab + cd = 0$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix},$$

isto é,

$$[A] = \begin{pmatrix} a & -\lambda c \\ c & \lambda a \end{pmatrix}$$

Por outro lado, se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, então

$$\begin{aligned} Au &= (au_1 - \lambda c u_2, cu_1 + \lambda a u_2) \\ Av &= (av_1 - \lambda c v_2, cv_1 + \lambda a v_2) \end{aligned}$$

de onde se obtém que

$$\begin{aligned} \langle Au : Av\rangle &= (a^2 + c^2)(u_1v_1 + \lambda^2 u_2v_2) \\ \|Au\| &= \sqrt{(a^2 + c^2)(u_1^2 + \lambda^2 u_2^2)} \\ \|Av\| &= \sqrt{(a^2 + c^2)(v_1^2 + \lambda^2 v_2^2)} \end{aligned}$$

Voltando a (6.7), temos

$$u_1v_1 + \lambda^2 u_2v_2 = \sqrt{(u_1^2 + \lambda^2 u_2^2)(v_1^2 + \lambda^2 v_2^2)}(u_1v_1 + u_2v_2).$$

Escolhendo-se $u = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $v = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, obtemos $\lambda^2 = 1$ como queríamos provar.

Provemos a implicação contrária "$\Leftarrow$". Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas de classe C^1. Podemos supor sem perda de generalidade que $\|\gamma_1'(t)\| = 1$ e $\|\gamma_2'(\tau)\| = 1$ para rodo t, τ (veja Exercício 6.9(c)).

Supondo que elas se cruzam em $P_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(\tau_0)$, seja θ tal que

$$\cos\theta = \langle \gamma_1'(t_0) : \gamma_2'(\tau_0)\rangle.$$

Se ϕ é o ângulo entre $A\gamma_1(t_0)$ e $A\gamma_2(\tau_0)$ no ponto AP_0, então

$$\cos\phi = \frac{\langle A\gamma_1'(t_0) : A\gamma_2'(\tau_0)\rangle}{\|A\gamma_1'(t_0)\|\,\|\gamma_2'(\tau_0)\|}.$$

Como

$$\langle A\gamma_1'(t_0) : A\gamma_2'(\tau_0)\rangle = (a^2+c^2)\langle\gamma_1'(t_0) : \gamma_2'(\tau_0)\rangle = (a^2+c^2)\cos\theta$$
$$\|A\gamma_1'(t_0)\| = \sqrt{a^2+c^2} = \|A\gamma_2'(\tau_0)\|$$

concluímos que $\cos\phi = \cos\theta$.

(b) Suponhamos $f = (\phi, \psi)$ função diferenciável. Então

$$[f'(x,y)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Afirmativa: f é transformação conforme se e somente se

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{matrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{matrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{matrix} \tag{6.8}$$

Consideremos duas curvas $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(\tau)$ que se cruzam no ponto $x_0 = \gamma(t_0) = \gamma_2(\tau_0)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $u = \gamma_1'(t_0)$ e $v = \gamma_2(\tau_0)$ são vetores unitários. Definimos $\Gamma_1(t) = f(\gamma_1(t))$ e $\Gamma_2(\tau) = f(\gamma_2(\tau))$. Então estas duas curvas se cruzam no ponto $f(x_0)$ formando o ângulo θ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle\Gamma_1'(t_0) : \Gamma_2'(\tau_0)\rangle}{\|\Gamma_1'(t_0)\|\,\|\Gamma_2'(\tau_0)\|} = \frac{\langle Au : Av\rangle}{\|Au\|\,\|Av\|},$$

onde $A = [f'(x_0)]$. Pelo item anterior, $\cos\theta = \langle u : v\rangle$ se e somente se A satisfaz uma das duas relações de (6.8).

(c) Por definição, temos

$$J_j(x) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Se f satisfaz uma das relações de (6.8), temos

$$J_j(x) = \pm\|\nabla\phi\|_2^2 = \pm\|\nabla\psi\|_2^2.$$

<u>**Exercício 6.13**</u>: *Mostre que a função f definida no Exercício 5.10 é (no caso $n = 2$) uma transformação conforme.*

Solução: A função é $f(x,y) = \pm(\phi(x,y), \psi(x,y))$, onde

$$\phi(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \psi(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Então

$$[f'(x,y)] = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

Como ϕ e ψ satisfazem (6.8), concluímos que f é uma transformação conforme.

Exercício 6.14: *Determine uma curva diferenciável* $\gamma\colon[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\gamma\big([-1,1]\big)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,y=|x|,-1\leq x\leq 1\}.$$

Solução: Seja $\gamma\colon[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t)=(t^3,|t|^3)$. Então é claro que γ satisfaz as condições desejadas. De fato, γ é de classe C^1 pois $\gamma'(t)=(3t^2,3|t|t)$ é contínua.

Exercício 6.15: *Seja* $g\colon\Omega\to\mathbb{R}^2$ *definido por*

$$g(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

onde $\Omega=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,y>-x\big\}$. *Mostre que* g *é campo gradiente em* Ω *e determine o potencial* $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ *tal que* $\nabla f=g$.

Solução: É claro que $g'(x,y)$ é simétrica e contínua em Ω, pois

$$[g'(x,y)]=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}2xy & y^2-x^2\\ y^2-x^2 & -2xy\end{pmatrix}$$

Como Ω é aberto e convexo, temos do Teorema 6.10 que existe $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y)=g(x,y)$ para todo $(x,y)\in\Omega$.

Sabemos que $f_0(\tilde{x},\tilde{y})=\arctan(\tilde{y}/\tilde{x})$ é gradiente de $g(\tilde{x},\tilde{y})$ em $\Omega_0=\{(\tilde{x},\tilde{y})\,;\,\tilde{x}>0\}$. Como Ω é a imagem de Ω_0 pela rotação de $\pi/4$

$$T=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix},$$

podemos determinar o potencial de g em Ω considerando a mudança de variáveis $(\tilde{x},\tilde{y})=T^{-1}(x,y)$, isto é,

$$\tilde{x}=\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}y}{2}$$

$$\tilde{y}=\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{2}y}{2}$$

Portanto,

$$f(x,y)=f_0(\tilde{x},\tilde{y})=\arctan\left(\frac{x-y}{x+y}\right).$$

7

Derivadas de Ordem Superior

Exercício 7.1: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Mostre que $f'(x) = f$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, isto é, $f'(x)h = f(h)$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$. Observe também que f' é constante e, portanto, $f'' \equiv 0$.*

Solução: Como f é linear (matriz $m \times n$), f é diferenciável e $f'(x)h = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$, isto é, $f'(x) = f$. Portanto a aplicação derivada $f'\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{m\times n}$ é constante.

Em particular, podemos escrever $f'(x+h) = f'(x) + L(h) + \varepsilon(h)$ com $L = \varepsilon \equiv 0$. Portanto (da unicidade da diferencial), concluímos que f é duas vezes diferenciável e $f''(x) \equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Exercício 7.2: *Seja $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ função diferenciável tal que*

$$\|\varphi'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Se $\alpha < 1$, mostre que φ é uma contração e demonstre que para cada $y \in \mathbb{R}^n$, existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = x + \varphi(x)$.

b) Podemos afirmar que φ é uma contração se $\|\varphi'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$?

c) Use o item (a) para mostrar que se A é uma matriz $n \times n$ tal que $\|A\| < 1$ então $(I + A)$ é invertível.

d) Se φ é monótona positiva, mostre que para cada $y \in \mathbb{R}^n$, existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $y = x + \varphi(x)$ (mesmo que $\alpha \geq 1$).

Solução: (a) Pela desigualdade do valor médio (veja Exercício 5.7b, pag. 89), existe t no intervalo $(0, 1)$ tal que

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\| \leq \|\varphi'(x_t)\| \|x_1 - x_0\| \leq \alpha \|x_1 - x_0\|,$$

onde $x_t = tx_1 + (1-t)x_0$. Como por hipótese $\alpha < 1$, φ é uma contração.

Assim, dado $y \in \mathbb{R}^n$ (fixado), considere a aplicação $g(x) = y - \varphi(x)$. Observe que g também é uma contração, pois

$$\|g(x_1) - g(x_0)\| = \|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\| \leq \alpha \|x_1 - x_0\|.$$

Portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Banach (Teorema 4.13, pag. 51), existe um único $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(\overline{x}) = \overline{x}$, isto é, $\overline{x}$ é a única solução de $x + \varphi(x) = y$.

(b) Não! Considere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \big(x + \sqrt{x^2+1}\big)/2$. Então $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mas f não é contração, pois não admite ponto fixo.

(c) Considere $\varphi(x) = Ax$. Então (veja Exercício 4.17, pag. 60), $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\| \leq \|A\|\|x_1 - x_0\|$. Como estamos supondo $\|A\| < 1$, φ é uma contração. Pelo item (a), a equação $x + Ax = y$ admite uma única solução, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, isto é, a matriz $I + A$ é invertível.

(d) Suponhamos φ monótona positiva e diferenciável tal que $\|\varphi'(x)\| \leq \alpha$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $\alpha < 1$ recaímos no caso (a). Suponhamos então $\alpha \geq 1$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\alpha < 1$. Pelo item (a), dado $y \in \mathbb{R}^n$, existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = x + \varepsilon\varphi(x)$, isto é, a função $g(x) = x + \varepsilon\varphi(x)$ é bijetora e portanto, invertível. Além disso, como estamos supondo φ monótona positiva,

$$\langle g(x_1) - g(x_0) : x_1 - x_0\rangle = \|x_1 - x_0\|^2 + \varepsilon\langle \varphi(x_1) - \varphi(x_0) : x_1 - x_0\rangle \geq \|x_1 - x_0\|^2.$$

Aplicando a desiguladade de Cauchy-Schwarz no lado esquerdo da desigualdade acima, obtemos

$$\|g(x_1) - g(x_0)\| \geq \|x_1 - x_0\|. \tag{7.1}$$

Como g é invertível, podemos escrever (7.1) na forma

$$\|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_0)\| \leq \|y_1 - y_0\|, \tag{7.2}$$

isto é, g^{-1} é Lipschitz contínua, com constante de Lipschitz 1.

Observe agora que, para $y \in \mathbb{R}^n$ dado, a equação $x + \varphi(x) = y$ pode ser reescrita na forma $x + \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon y + (1-\varepsilon)x$, ou equivalentemente $x = g^{-1}\big(\varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big)$. Basta, portanto, mostrar que $F(x) = g^{-1}\big(\varepsilon y + (1-\varepsilon)x\big)$ possui um único ponto fixo. De (7.2) temos

$$\|F(x_1) - F(x_0)\| \leq |1-\varepsilon|\|x_1 - x_0\|.$$

Como escolhemos $\varepsilon < 1/\alpha \leq 1$, F é contração e, portanto, admite um único ponto fixo, como queríamos demonstrar.

Exercício 7.3: *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e fechado e $P_C\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a projeção ortogonal sobre C (veja Exercício 4.12). Mostre que P_C é função monótona positiva. Conclua que $x \mapsto f(x) = \big\langle x - \frac{1}{2}P_C(x) : P_C(x)\big\rangle$ é função convexa.*

Solução: Pelo Exercício 4.16(iii),(pag. 59), temos

$$\langle P_C(x) - P_C(y) : x - y\rangle \geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \geq 0.$$

Logo, P_C é monótona positiva. Pelo Teorema 5.6 (pag. 86), $f(x)$ é diferenciável e $f'(x) = P_C(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, $f'(x)$ é monótona positiva em $\mathbb{R}^n$ e o Teorema 7.1 (pag. 115) nos permite concluir que $f(x)$ é função convexa.

Exercício 7.4: *Calcule $f''(x)$ para cada uma das funções $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Observe que em todos os casos f' é linear e portanto $f''\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{n\times n}$ é constante.*

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2, \quad f(x) = \frac{1}{2}\|Ax\|_2^2,$$
$$f(x) = \langle Ax : x\rangle, \quad f(x) = \langle Ax : Bx\rangle.$$

Solução: Primeiramente, lembre que se g é linear (veja Exemplo 5.3, pag. 68), g é diferenciável e $g'(x) = g$ para todo x, isto é,

$$g'(x)h = g(h), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

(a) $f(x) = \|x\|_2^2/2$. Então, $f'(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $f''(x) = I$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
(b) $f(x) = \|Ax\|_2^2/2$. Então, $f'(x) = A^T Ax$ e $f''(x) = A^T A$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
(c) $f(x) = \langle Ax : x \rangle$. Então, $f'(x) = (A + A^T)x$ e $f''(x) = A + A^T$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
(d) $f(x) = \langle Ax : Bx \rangle = \langle B^T Ax : x \rangle$. Então, $f'(x) = (B^T A + A^T B)x$ e $f''(x) = B^T A + A^T B$.

Exercício 7.5: *Considere $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função duas vezes diferenciável e A uma matriz $n \times n$. Defina $g(x) = f(Ax)$. Mostre que g é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e*

$$\begin{aligned} g'(x) &= A^T f'(Ax) \\ g''(x) &= A^T f''(Ax)A \end{aligned}$$

Solução: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $\varphi(x) = Ax$ é linear e, portanto, diferenciável. Logo, pela regra da cadeia, g é diferenciável e

$$\langle g'(x) : h \rangle = \langle f'(Ax) : Ah \rangle = \langle A^T f'(Ax) : h \rangle, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, $g'(x) = A^T f'(Ax)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
Analogamente, pela regra da cadeia, $g'\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e

$$[g''(x)]h = A^T f''(Ax)Ah, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, $g''(x) = A^T f''(Ax)A$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 7.6: *Considere a matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Mostre que A é positiva definida se e somente se $\det A > 0$ e $a > 0$. Mostre que se A é semipositiva definida, então $\det A \geq 0$ e $a \geq 0$ mas a recíproca é falsa.
Solução: Seja $x = (x_1, x_2)$ um vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$. Então

$$\langle Ax : x \rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Suponhamos incialmente $a \neq 0$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle Ax : x \rangle &= a \left[x_1^2 + \frac{2b}{a}x_1x_2 + \frac{c}{a}x_2^2 \right] \\ &= a \left[\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2 \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}x_2^2 \right] \end{aligned} \tag{7.3}$$

Se $a > 0$ e $\det A = ac - b^2 > 0$, concluímos de (7.3) que $\langle Ax : x\rangle > 0$ para todo $x \neq 0$.

Reciprocamente, se $\langle Ax : x\rangle > 0$ para todo $x \neq 0$, escolhemos $x = (1, 0)$ para concluir de (7.3) que $a > 0$. Escolhendo em seguida $x = (b/a, -1)$, obtemos $\det A > 0$.

Suponhamos A semipositiva definida. Então $\langle Ax : x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $a \neq 0$, as mesmas escolhas nos levam à conclusão que $a \geq 0$ e $\det A \geq 0$. Por outro lado, se $a = 0$, então $\langle Ax : x\rangle = x_2(2bx_1 + cx_2) \geq 0$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Fixando $x_2 = 1$, concluímos que $b = 0$, isto é, $\det A = 0$.

A recíproca é falsa. Escolha $a = b = 0$ e $c = -1$.

Exercício 7.7: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função duas vezes diferenciável em $x_0 = 0$ tal que $f(tx) = t^2 f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que*

$$f(x) = \frac{1}{2}\big\langle f''(0)x : x\big\rangle, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Solução: Considere $\varphi(t) = f(tx)$. Então

$$\varphi'(t) = \langle f'(tx) : x\rangle = 2tf(x) \quad \text{e} \quad \varphi''(t) = \langle f''(tx)x : x\rangle = 2f(x).$$

Para $t = 0$ a segunda identidade acima nos dá

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle f''(0)x : x\rangle.$$

Exercício 7.8: *Seja $D = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_2^2 \leq 1\}$. Considere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tal que*

$$J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D \quad \text{e} \quad \|f(x) - x\|_2 \leq \frac{1}{3} \quad \forall x \in D.$$

Mostre que existe $x_0 \in D$ tal que $f(x_0) = 0$.

Solução: Seja $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \|f(x)\|_2$. Como φ é contínua e D é compacto, existe $x_0 \in D$ tal que

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x), \quad \forall x \in D.$$

Observe que $\varphi(x_0) \leq 1/3$. De fato,

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(0) = \|f(0)\|_2 = \|f(0) - 0\|_2 \leq 1/3. \tag{7.4}$$

Além disso, x_0 não pertence à fronteira ∂D de D. De fato, se $x_0 \in \partial D$, então $\|x_0\|_2 = 1$. Como

$$1/3 \geq \|x_0 - f(x_0)\|_2 \geq 1 - \|f(x_0)\|_2 = 1 - \varphi(x_0),$$

teríamos $\varphi(x_0) \geq 2/3$, o que está em contradição com (7.4). Portanto, x_0 está no interior de D.

Observe que x_0 também é ponto de mínimo de $\psi(x) = \varphi(x)^2$. Como ψ é diferenciável em $\overset{\circ}{D}$ e $x_0 \in \overset{\circ}{D}$, temos $\psi'(x_0) = 0$. Isto é, $\langle \psi'(x_0) : h\rangle = 0$ para todo $h \in \mathbb{R}^2$.

Aplicando a Regra da Cadeia, temos

$$\langle \psi'(x) : h \rangle = 2\langle f'(x)^T f(x) : h \rangle, \quad \forall x \in \overset{\circ}{D} .$$

Portanto,

$$\langle f'(x_0)^T f(x_0) : h \rangle = 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

o que implica que $f'(x_0)^T f(x_0) = 0$.
Observe que, por hipótese,

$$\det[f'(x_0)^T] = \det[f'(x_0)] = J_f(x_0) \neq 0.$$

Portanto, $f(x_0) = 0$ como queríamos provar.

<u>Exercício 7.9</u>:

a) *Seja A matriz $n \times n$ semipositiva definida, isto é $\langle A : x \rangle \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e defina a função $g(x) = Ax$. Mostre que g é monótona positiva. Seja $F_\lambda(x) = x + \lambda Ax$, com $\lambda > 0$. Mostre que F_λ é bijetora em $\mathbb{R}^n$.*

b) *Seja f monótona positiva e considere $F_\lambda(x) = x + \lambda f(x)$, com $\lambda > 0$. Mostre que F_λ é injetora. Se F_{λ_0} é sobrejetora para algum λ_0, mostre que F_λ é sobrejetora para todo $\lambda > 0$.*

Solução: (a) Provemos que F_λ é função injetora. Como A é semipositiva definida, temos

$$\begin{aligned}\|F_\lambda(x_1) - F_\lambda(x_2)\|_2^2 &= \|x_1 - x_2\|_2^2 + 2\lambda\langle x_1 - x_2 : Ax_1 - Ax_2 \rangle + \lambda^2 \|Ax_1 - Ax_2\|_2^2 \\ &\geq \|x_1 - x_2\|_2^2,\end{aligned}$$

de modo que se $F_\lambda(x_1) = F_\lambda(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Como F_λ é linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, é injetora se e somente se é sobrejetora.
(b) f monótona positiva e $F_\lambda(x) = x + \lambda f(x)$. Provemos que F_λ é injetiva.

$$\begin{aligned}\|F_\lambda(x_1) - F_\lambda(x_2)\|_2^2 = \|x_1 - x_2\|_2^2 + 2\lambda\langle x_1 - x_2 ; f(x_1) - f(x_2) \rangle \\ + \lambda^2 \|Ax_1 - Ax_2\|_2^2 \geq \|x_1 - x_2\|_2^2\end{aligned} \tag{7.5}$$

de modo que se $F_\lambda(x_1) = F_\lambda(x_2)$, então $x_1 = x_2$.
Suponhamos F_{λ_0} sobrejetora. Então existe a inversa $F_{\lambda_0}^{-1}$. De (7.5) concluímos que $F_{\lambda_0}^{-1}$ é Lipschitz contínua, com constante de Lipschitz igual a 1.
Seja $\lambda > 0$. Para mostrar que F_λ é sobrejetora, seja $y \in \mathbb{R}^n$. Então x é solução de $F_\lambda(x) = y$ se e somente se $f(x) = (y - x)/\lambda$, que podemos escrever na forma

$$x + \lambda_0 f(x) = \frac{\lambda_0}{\lambda} y + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} x\right),$$

isto é,

$$x = F_{\lambda_0}^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} y + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} x\right)\right). \tag{7.6}$$

Se denotarmos
$$\Phi(x) = F_{\lambda_0}^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}y + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)\right),$$
então F_λ é sobrejetora se e somente se Φ possui ponto fixo.

Observe que
$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_2 \leq \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| \|x_1 - x_2\|_2,$$
de modo que Φ é contração se $\lambda > \lambda_0/2$. Portanto, F_λ é sobrejetora para todo $\lambda > \lambda_0/2$.

Seja $\lambda_1 = 2\lambda_0/3$. Então F_{λ_1} é sobrejetora e os mesmos argumentos anteriores nos permitem concluir que F_λ é sobrejetora para todo $\lambda > \lambda_1/2$. Repetindo esse processo sucessivamente, construímos a sequência $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots)$, onde $\lambda_k = 2^k\lambda_0/3^k$ tal que, a cada etapa, concluímos que F_λ é sobrejetora para todo $\lambda > \lambda_k/2$.

Como $\lambda_n \to 0$, F_λ é sobrejetora para todo $\lambda > 0$, como queríamos demosntrar.

Exercício 7.10: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ função de classe C^1 tal que $J_f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Considere a sequência:*
$$x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1}f(x_k), \quad k \geq 0 \qquad (*)$$

a) Mostre que se $x_k \longrightarrow \bar{x}$, então $f(\bar{x}) = 0$.

b) Reciprocamente, se $f(\overline{x}) = 0$ para algum $\overline{x}$, mostre que a sequência definida por $(*)$ converge para $\bar{x}$ se x_0 for tomado suficientemente próximo de $\overline{x}$.

Solução: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ função de classe C^1 tal que $\det[f'(x)] \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e
$$x_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1}f(x_k). \tag{7.7}$$

(a) Suponhamos $x_k \to \overline{x}$. Como f é de classe C^1, temos
$$f(x_k) \to f(\overline{x}) \quad \text{e} \quad A_k := f'(x_k) \to A := f'(\overline{x}).$$

Como a aplicação $A \mapsto A^{-1}$ é contínua (veja Exercício 4.20(iii). pag. 61), temos
$$A_k^{-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A^{-1}.$$

Portanto, fazendo n tender a infinito em (7.7) obtemos
$$A^{-1}f(\overline{x}) = 0,$$
de onde se permite concluir que $f(\overline{x}) = 0$ pois $\det A \neq 0$

(b) Supondo $f(\overline{x}) = 0$, podemos escrever (7.7) na forma
$$\begin{aligned} x_{k+1} - \overline{x} &= x_k - \overline{x} - [f'(x_k)]^{-1}\big(f(x_k) - f(\overline{x})\big) \\ &= [f'(x_k)]^{-1}\Big(f'(x_k)(x_k - \overline{x}) + f(x_k) - f(\overline{x})\Big) \\ &= [f'(x_k)]^{-1}\Big(\big(f'(x_k) - f'(\overline{x})\big)(x_k - \overline{x}) + \varepsilon(x_k - \overline{x})\Big) \end{aligned},$$

onde $\|\varepsilon(\xi)\|/\|\xi\| \to 0$ quando $\|\xi\| \to 0$. Seja $\alpha = \|f'(\overline{x})^{-1}\|$. Como as aplicações $x \mapsto f'(x)$ e $X \mapsto X^{-1}$ são contínuas, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|x - \overline{x}\| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \|f'(x)^{-1}\| < 2\alpha,$$

de modo que se $x_k \in B_{\delta_1}(\overline{x})$, então

$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| \leq 2\alpha \left(\|f'(x_k) - f'(\overline{x})\| \|x_k - \overline{x}\| + \|\varepsilon(x_k - \overline{x})\| \right).$$

Além disso, como f' é contínua em $\overline{x}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|x - \overline{x}\| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \|f'(x) - f'(\overline{x})\| < \frac{1}{8\alpha}.$$

Como f é diferenciável em $\overline{x}$, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$\|x - \overline{x}\| < \delta_3 \quad \Rightarrow \quad \|\varepsilon(x - \overline{x})\| < \frac{1}{8\alpha}\|x - \overline{x}\|.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Então se $\|x_k - \overline{x}\| < \delta$, temos

$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| \leq \frac{1}{2}\|x_k - \overline{x}\|.$$

Portanto, se x_0 pertence à bola $B_\delta(\overline{x})$, temos

$$\|x_k - \overline{x}\| \leq \frac{1}{2^k}\|x_0 - \overline{x}\|$$

e concluímos que $x_k \to \overline{x}$.

Exercício 7.11: *Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função estritamente convexa e fortemente coerciva, isto é,*

$$\lim_{\|x\|_2 \to +\infty} \frac{g(x)}{\|x\|_2} = +\infty.$$

(a) *Mostre que existe $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que g^* definida por*

$$g^*(x) := \big\langle x : \varphi(x) \big\rangle - g\big(\varphi(x)\big)$$

é convexa e fortemente coerciva. Sug.: considere

$$\sup\big\{ \langle x : y \rangle - g(y)\, ;\, y \in \mathbb{R}^n \big\}.$$

(b) *Suponha g de classe C^1. Mostre que g' é invertível com φ sua inversa Sug.: aplique o Teorema 7.1 (pag, 115).*

(c) *Suponha que g é de classe C^2. Mostre que g^* é estritamente convexa, de classe C^2 e $\nabla g^*(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sug.: aplique o Teorema 5.5 (pag. 115).*

(c') *A condição g de classe C^2 no item anterior não é necessária. Mostre que se g é de classe C^1, o mesmo vale para g^* e seguem-se as mesmas conclusões do item (c).*

(d) Nas condições acima, mostre que

$$g^{**}(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \big\langle x : y\big\rangle - g^*(y) = g(x).$$

Solução: (a) Seja $G(x,y) = \langle x : y\rangle - g(y)$. Então, a aplicação $y \mapsto G(x,y)$ é estritamente côncava, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n$. Segue da coercividade de g que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe um único $y_x \in \mathbb{R}^n$ ponto de máximo absoluto de $G(x,y)$. Desta unicidade, podemos definir a função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x) = y_x$. Assim g^* está bem definida. Para mostrar que ela é convexa, observe que, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \lambda < 1$, tem-se

$$G\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y\big) = \lambda G(x_1,y) + (1-\lambda)G(x_2,y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

de onde se conclui que g^* é convexa, tomando-se o supremos em y nos dois lados da identidade acima.

Para mostrar que g^* é fortemente coerciva, suponha por absurdo que existe $C > 0$ e uma sequência $\{x_n\}$ tal que

$$\|x_n\|_2 \to +\infty \quad \text{e} \quad g^*(x_n) \leq C\|x_n\|_2.$$

Então, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\left\langle y : \frac{x_n}{\|x_n\|_2}\right\rangle \leq C + \frac{g(y)}{\|x_n\|_2}.$$

Como a esfera unitária é compacta, existe u vetor unitário e uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ tal que $x_{n_k}/\|x_{n_k}\|_2 \to u$ quando $k \to \infty$. Portanto, $\langle y, u\rangle \leq C$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, o que é um absurdo.

(b) Como g é estritamente convexa e de classe C^1, o Teorema 7.1 nos garante que g' é estritamente monótona positiva, isto é, se $x_1 \neq x_2$, então,

$$\big\langle g'(x_1) - g'(x_2) : x_1 - x_2\big\rangle > 0.$$

Em particular, g' é injetiva e, consequentemente, invertível sobre seu contradomínio. Além disso, como

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, \varphi(x)) = x - g'\big(\varphi(x)\big) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.8}$$

vemos que φ é a inversa de g', que é, consequentemente, uma função contínua.

(c) Pelo Teorema 5.5, basta mostrar que g^* possui derivadas parciais em todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, para se concluir que g^* é diferenciável. Seja e_i o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Denotando $\varepsilon_x(s) = \varphi(x+se_i) - \varphi(x)$, segue de (7.8)

$$\begin{aligned}
g^*(x+se_i) &= \big\langle x+se_i : \varphi(x+se_i)\big\rangle - g\big(\varphi(x+se_i)\big)\\
&= \big\langle x+se_i : \varphi(x)+\varepsilon_x(s)\big\rangle - g\big(\varphi(x)+\varepsilon_x(s)\big)\\
&= \big\langle x+se_i : \varphi(x)+\varepsilon_x(s)\big\rangle - g\big(\varphi(x)\big) - \big\langle g'\big(\varphi(x)\big) : \varepsilon_f(s)\big\rangle - \epsilon_g\big(\varepsilon_f(s)\big)\\
&= g^*(x) + s\langle e_i : \varphi(x)\rangle + s\langle e_i : \varepsilon_f(s)\rangle - \epsilon_g\big(\varepsilon_f(s)\big),
\end{aligned}$$

onde $\epsilon_g(h) = o(h)$. Logo,

$$\frac{g^*(x+se_i)-g^*(x)}{s} = \langle e_i : \varphi(x)\rangle + \langle e_i : \varepsilon_f(s)\rangle - \frac{\epsilon_g\big(\varepsilon_f(s)\big)}{s}. \tag{7.9}$$

Sendo g' de classe C^1 e φ a sua inversa, φ é também de classe C^1, de modo que

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} \varepsilon_f(s) = \lim_{s\to 0}\big[\varphi(x+se_i)-\varphi(x)\big] = 0,\\ &\lim_{s\to 0}\frac{\varepsilon_f(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{s\to 0}\big\langle e_i : \varepsilon_f(s)\big\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to 0}\frac{\epsilon_g\big(\varepsilon_f(s)\big)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{\epsilon_g\big(\varepsilon_f(s)\big)}{\varepsilon_f(s)}\frac{\varepsilon_f(s)}{s} = 0. \tag{7.10}$$

Passando ao limite com $s \to 0$ em (7.9) e considerando (7.10), obtemos

$$\frac{\partial g^*}{\partial x_i}(x) = \langle e_i : \varphi(x)\rangle.$$

Portanto, g^* é diferenciável e $(g^*)'(x) = \varphi(x) = g^{-1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, como φ é estritamente monótona positiva, o Teorema 7.1 (pag. 115) nos garante que g^* é estritamente convexa.

(c') Suponhamos g de classe C^1. Então, com a notação do item (c), temos

$$\begin{aligned} g^*(x+se_i) &= \big\langle x+se_i : \varphi(x+se_i)\big\rangle - g\big(\varphi(x+se_i)\big)\\ &= \big\langle x+se_i : \varphi(x)+\varepsilon_x(s)\big\rangle - g\big(\varphi(x)+\varepsilon_x(s)\big) \end{aligned}$$

Pela convexidade de g temos, para $s > 0$ (verifique),

$$g\big(\varphi(x)+\varepsilon_x(s)\big) \geq g\big(\varphi(x)\big) + \big\langle g'\big(\varphi(x)\big) : \varepsilon_x(s)\big\rangle.$$

Assim, segue de (7.8),

$$\begin{aligned} g^*(x+se_i) &\leq \big\langle x+se_i : \varphi(x)+\varepsilon_x(s)\big\rangle - g\big(\varphi(x)\big) - \big\langle g'(\varphi(x)) : \varepsilon_x(s)\big\rangle\\ &= g^*(x) + s\big\langle e_i : \varphi(x)\big\rangle + s\big\langle e_i : \varepsilon_x(s)\big\rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\limsup_{s\to 0^+}\frac{g^*(x+se_i)-g^*(x)}{s} \leq \big\langle e_i : \varphi(x)\big\rangle. \tag{7.11}$$

Analogamente, para $s > 0$,

$$\begin{aligned} g^*(x-se_i) &\leq \big\langle x-se_i : \varphi(x)+\varepsilon_x(s)\big\rangle - g\big(\varphi(x)\big) - \big\langle g'(\varphi(x)) : \varepsilon_x(s)\big\rangle\\ &= g^*(x) - s\big\langle e_i : \varphi(x)\big\rangle - s\big\langle e_i : \varepsilon_x(s)\big\rangle, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\frac{g^*(x - se_i) - g^*(x)}{-s} \geq \big\langle e_i : \varphi(x)\big\rangle + \big\langle e_i : \varepsilon_x(s)\big\rangle.$$

Logo,

$$\liminf_{s\to 0^+} \frac{g^*(x - se_i) - g^*(x)}{-s} = \liminf_{s\to 0^-} \frac{g^*(x + se_i) - g^*(x)}{s} \geq \big\langle e_i : \varphi(x)\big\rangle. \tag{7.12}$$

Sendo g^* convexa, temos

$$\begin{aligned} \limsup_{s\to 0^-} \frac{g^*(x + se_i) - g^*(x)}{s} &\leq \limsup_{s\to 0^+} \frac{g^*(x + se_i) - g^*(x)}{s} \\ \liminf_{s\to 0^-} \frac{g^*(x + se_i) - g^*(x)}{s} &\leq \liminf_{s\to 0^+} \frac{g^*(x + se_i) - g^*(x)}{s} \end{aligned} \tag{7.13}$$

Segue de (7.11), (7.12) e (7.13),

$$\frac{\partial g^*}{\partial x_i}(x) = \lim_{s\to 0} \frac{g^*(x + se_i) - g^*(x)}{s} = \big\langle e_i : \varphi(x)\big\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(d) Sabemos que $g^*(x) \geq \langle x : y\rangle - g(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Assim, fixado y,

$$g(y) \geq \langle y : x\rangle - g^*(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad g(y) \geq \sup_x\big(\langle y : x\rangle - g^*(x)\big) = g^{**}(y).$$

Por outro lado, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$g\big(\varphi(x)\big) = \big\langle x : \varphi(x)\big\rangle - g^*(x) \leq g^{**}\big(\varphi(x)\big).$$

Do exposto acima, concluímos que

$$g\big(\varphi(x)\big) = g^{**}\big(\varphi(x)\big), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Para $y \in \mathbb{R}^n$ qualquer, seja $x = g'(y)$. Como $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a inversa de g', temos

$$x = g'(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \varphi(x).$$

Logo, $g(y) = g^{**}(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$.

<u>Exercício 7.12</u>: *Seja $\mu > 0$. Dê exemplo de uma função $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $0 < \rho(s) < 1$ para todo $0 < s < \mu$ e*

$$\rho(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0, \\ 1 & \text{se } s \geq \mu. \end{cases}$$

Solução: Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ definida por

$$\varphi(s) := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-s^2}\right) & \text{se } |s| < 1, \\ 0 & \text{se } |s| \geq 1. \end{cases}$$

Para cada $\mu > 0$, seja $\varphi_\mu(s) := \varphi(2s/\mu)$, i.e.,

$$\varphi_\mu(s) := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{\mu^2}{\mu^2 - 4s^2}\right) & \text{se } |s| < \mu/2, \\ 0 & \text{se } |s| \geq \mu/2. \end{cases}$$

É claro que $\varphi_\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\operatorname{supp} \varphi_\mu = \big[-\mu/2, \mu/2\big]$. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(s) := \frac{1}{C}\varphi_\mu\left(s - \frac{\mu}{2}\right), \quad C := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt.$$

É claro que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\operatorname{supp} \phi = [0, \mu]$. Para concluir, seja $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\rho(s) := \int_{-\infty}^{s} \phi(t)\, dt.$$

Então ρ satisfaz as condições desejadas.

8

O Teorema da Função Inversa

Exercício 8.1: *Seja* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y).$$

Qual a imagem de f*? Mostre que o Jacobiano de* f *não é nulo em nenhum ponto de* $\mathbb{R}^2$*. Pelo teorema da função inversa, todo ponto de* $\mathbb{R}^2$ *tem uma vizinhança onde* f *é biunívoca. Entretanto* f *não é injetora em* $\mathbb{R}^2$*. Quais são as imagens por* f *das retas paralelas aos eixos coordenados?*

Solução: Para cada $x \in \mathbb{R}$ a aplicação $y \mapsto e^x(\cos y, \operatorname{sen} y)$, $y \in \mathbb{R}$, parametriza uma circunferência de raio $e^x > 0$. Portanto,

i) a imagem de f é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

ii) f não é injetora, pois $f(0, 0) = f(0, 2\pi) = (1, 0)$;

iii) $\det[f'(x, y)] = e^x > 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;

iv) se R é uma reta paralela ao eixo y, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $R = \{(c, t)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$, de modo que $f(R) = \{e^c(\cos t, \operatorname{sen} t)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ é uma circunferência de raio e^c;

v) se R é uma reta paralela ao eixo x, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $R = \{(t, c)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$, de modo que $f(R) = \{e^t(\cos c, \operatorname{sen} c)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ é uma semi-reta que passa por $(\cos c, \operatorname{sen} c)$.

Exercício 8.2: *Para cada uma das funções abaixo determinar: (1) quais são sobrejetivas; (2) quais são injetivas; (3) o Jacobiano; (4) os pontos de* $\mathbb{R}^2$ *onde não se aplica o Teorema da Função Inversa.*

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$

b) $f\colon]0, \infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arc\,tan} y/x)$*;*

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y) = (xy^2, x^2y)$*;*

d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y) = (x^3 - y, y^3 + x)$.

Solução: (a) f é a transformação linear associada à matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

É claro que f é bijetora se e somente se $ad - bc \neq 0$. Como $\det[f'(x,y)] = ad - bc$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, o Teorema da Função Inversa não se aplica em nenhum ponto (x,y) se $ad - bc = 0$.

(b) f não é sobre pois $(0,t) \notin \operatorname{Im} f$, $\forall t \in \mathbb{R}$. No entanto, f é injetora, pois $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$ se e somente se

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$
$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

Se denotarmos $c = y_1/x_1$ e $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, o sistema acima nos indica que os pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) estão na intersecção da reta $y = cx$ com a circunferência $x_1^2+y_1^2 = r^2$. Como x_1 e x_2 são positivos, concluímos que $x_1 = x_2$ e consequentemente $y_1 = y_2$.

Como f é de classe C^1 e

$$\det[f'(x,y)] = \det \begin{bmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} & y/\sqrt{x^2+y^2} \\ -y/(x^2+y^2) & x/(x^2+y^2) \end{bmatrix} = (x^2+y^2)^{-1/2} > 0,$$

o Teorema da Função Inversa (Teorema 8.1, pag. 139) se aplica em qualquer ponto do domínio de f.

(c) f não é injetora, pois $f(1,0) = f(0,1) = (0,0)$. f também não é sobrejetora, pois qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$, $(0,t) \notin \operatorname{Im} f$ e $(t,0) \notin \operatorname{Im} f$. Como

$$\det[f'(x,y)] = \det \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix} = 3x^2y^2,$$

o Teorema da Função Inversa não se aplica nos pontos da forma $(0,y)$ e $(x,0)$.

É claro que f é de classe C^1 e $\det[f'(x,y)] = 9x^2y2 + 1 > 0$. Logo, o Teorema da Função Inversa se aplica em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$. De fato, f é bijetora, como se pode observar facilmente. Considere a família de curvas γ_s parametrizadas por $\gamma_s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_s(x) = (x^3 - s, x + s^3)$. É fácil ver que, para cada $s \in \mathbb{R}$, γ_s é uma função injetora (a curva γ_s não se intersepta sobre si mesma). Com efeito, γ_s é obtida transladando-se γ_0 para o ponto $(-s, s^3)$. Como a função $\Gamma(s) = (-s, s^3)$ também é injetora, podemos concluir que f. Com raciocínio análogo podemos concluirque f é sobre.

Exercício 8.3: *Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus P \to \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ definida por $f_i(x_1,x_2,x_3) = x_i/(1 + x_1 + x_2 + x_3)$, onde*

$$P = \{(x_1,x_2,x_3) \mid 1 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Calcule o Jacobiano $J_f((x_1,x_2,x_3)$. Mostre que f é injetora e calcule f^{-1}.

Solução: Calculando diretamente, temos

$$\det[f'(x_1,x_2,x_3)] = \frac{1}{1+x_1+x_2+x_3} \begin{vmatrix} 1+x_2+x_3 & -x_1 & -x_1 \\ -x_2 & 1+x_1+x_3 & -x_2 \\ -x_3 & -x_3 & 1+x_1+x_2 \end{vmatrix} = 1$$

Para mostrar que f é injetora, suponhamos

$$\frac{x_i}{1+x_1+x_2+x_3} = \frac{\tilde{x}_i}{1+\tilde{x}_1+\tilde{x}_2+\tilde{x}_3}, \quad i = 1,2,3.$$

Então é claro que

$$\frac{x_i}{\tilde{x}_i} = \frac{1 + x_1 + x_2 + x_3}{1 + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3} = p, \quad i = 1, 2, 3. \tag{8.1}$$

De (8.1) obtém-se $x_i = p\tilde{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ e

$$1 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 + p(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3) \tag{8.2}$$

Dividindo-se ambos os lados de (8.2) por $1 + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3$, obtém-se $p = 1$ e, consequentemente, $x_i = \tilde{x}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Mostremos que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3 \setminus Q$, onde

$$Q = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \,;\, y_1 + y_2 + y_3 = 1\}.$$

Seja $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus P$ e consideremos $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $r = x_1 + x_2 + x_3$ e $s = y_1 + y_2 + y_3$. Então $r \neq -1$ e $r/(1 + r) = s$, de onde conclui-se facilmente que $s \neq 1$, o que mostra que $(y_1, y_2, y_3) \notin Q$.

Reciprocamente, seja $(y_1, y_2, y_3) \notin Q$ e $s = y_1 + y_2 + y_3$. Então existe um único $r \neq -1$ tal que $r/(1 + r) = s$. Definimos $x_i = (1 + r)y_i$. Então é claro que $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$.

Consideremos $g\colon \mathbb{R}^3 \setminus Q \to \mathbb{R}^3 \setminus P$ definido por

$$g_i(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_i}{1 - (y_1 + y_2 + y_3)}.$$

É fácil verficar que $g = f^{-1}$.

<u>**Exercício 8.4**</u>: *Considere as funções*

$$\cosh \xi = \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}, \quad \operatorname{senh} \xi = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}.$$

a) Determine uma solução (x_0, y_0) para o sistema

$$\begin{cases} e^x \cos y - e^x \operatorname{sen} y = 1 \\ e^x \cosh y + e^x \operatorname{senh} y = 1 \end{cases}$$

b) É possível resolver o sistema

$$\begin{cases} e^x \cos y - e^x \operatorname{sen} y = 1 + \mu \\ e^x \cosh y + e^x \operatorname{senh} y = 1 + \nu \end{cases} \tag{8.3}$$

para μ e ν pequenos?

Solução: (a) Basta verificar que $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ satisfazem o sistema.

(b) Consideremos a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (e^x \cos y - e^x \operatorname{sen} y, e^x \cosh y + e^x \operatorname{senh} y).$$

É claro que $f(0, 0) = (1, 1)$, f é de classe C^1 e

$$[f'(x, y)] = \begin{bmatrix} e^x \cos y - e^x \operatorname{sen} y & e^x \cosh y + e^x \operatorname{senh} y \\ -e^x \operatorname{sen} y - e^x \cos y & e^x \operatorname{senh} y + e^x \cosh y \end{bmatrix}$$

de modo que $\det[f'(0, 0)] = 2$. Pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ e uma vizinhança V de $(1, 1)$ tais que $f\colon U \to V$ é invertível. Portanto, para μ e ν suficientemente pequenos o sistema (8.3) tem uma única solução.

Exercício 8.5: *Sabendo-se que o polinômio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ possui as raízes $\overline{\lambda}_1 = 1$, $\overline{\lambda}_2 = 2$ e $\overline{\lambda}_3 = 3$, mostre que existe $\delta > 0$ tal que se $|a + 6| < \delta$, $|b - 11| < \delta$ e $|c + 6| < \delta$, então o polinômio $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ possui três raízes reais e distintas λ_1, λ_2 e λ_3.*

Solução: Se λ_1, λ_2 e λ_3 são raízes do polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$, então vale a fórmula de Viète

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -a \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= b \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -c \end{aligned}$$

Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função definida por

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_2\lambda_3).$$

F é de classe C^1, $F(1, 2, 3) = (6, 11, 6)$ e

$$\det[F'(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2\lambda_3 \\ 1 & \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_1\lambda_3 \\ 1 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix}$$

Como $\det[F'(1, 2, 3)] = -2$, existe uma vizinhança U do ponto $(1, 2, 3)$ e uma vizinhança V do ponto $(6, 11, 6)$ tal que $F\colon U \to F(U)$ é difeomorfismo de classe C^1. Em particular, sendo F^{-1} contínua no ponto $(6, 11, 6)$, para $\delta > 0$ suficientemente pequena, temos

$$|\lambda_1 - 1| < \frac{1}{2}, \quad |\lambda_2 - 2| < \frac{1}{2}, \quad |\lambda_3 - 3| < \frac{1}{2}$$

como queríamos provar.

Exercício 8.6: *Seja $\|\ \ \|$ uma norma qualquer de $\mathbb{R}^n$ e considere em $V = \mathcal{M}_{n\times n}$ munido da norma induzida, definida por (4.16).*

a) Seja $\mathcal{I} = \{X \in V\,;\, X \text{ é invertível}\}$. Mostre que $\mathcal{I}$ é aberto e desconexo em V.

b) Sejam $A, B \in V$. Dizemos que B é raiz quadrada de A se $B^2 = A$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que se $\|A - I\| < \delta$ então A possui uma raiz quadrada.

c) "Quantas" raízes quadradas possui a identidade $I \in \mathcal{M}_{2\times 2}$,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Solução: O item (a) segue dos mesmos argumentos usados na solução dos itens (a) e (b) do exercício 4.20 (pag. 61).

(b) Considere $f\colon V \to V$ definida por $f(X) = X^2$. Então f é de classe C^1 e $f'(I) = 2I$ (veja Exercício 5.11). Como $f'(I)$ é invertível, existe uma vizinhança U da matriz identidade I tal que $f(U)$ é vizinhança aberta de I e $f\colon U \to f(U)$ é difeomorfismo de classe C^1. Em particular, existe $\delta > 0$ tal que se $\|X - I\| < \delta$, então $f^{-1}(X)$ está bem definida e, por definição, $Y = f^{-1}(X)$ é raiz quadrada de X, como queríamos provar.

(c) É claro que I e $-I$ são raízes da identidade I. Além disso, se

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

então R_0 e $-R_0$ são também raízes da identidade. Mais geralmente, para cada $m \in \mathbb{R}$ consideremos R_m a reflexão em relação à reta $y = mx$, isto é,

$$R_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

Então é claro que R_m e $-R_m$ são raízes da identidade.
Observe que a aplicação $m \mapsto R_m$ define uma curva diferenciável em V (uma curva de matrizes simétricas e raízes da identidade) tal que

$$\lim_{m \to +\infty} R_m = \lim_{m \to -\infty} R_m = R_0.$$

Como $\|R_m - I\| \sim \dfrac{1}{1+m^2} \max\{1, 2m, 2m^2\}$, a matriz identidade I é ponto isolado de curva R_m.
Observe que se $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, então a matriz

$$R_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix}$$

é raiz da identidade. Observe também que $R_{a,b}$ se reduz a R_m se $a = (1-m^2)/(1+m^2)$ e $b = 2m/(1+m^2)$ e que $R_{a,b}$ é simétrica se e somente se $a^2 + b^2 = 1$, isto é, $a = (1-m^2)/(1+m^2)$ e $b = 2m/(1+m^2)$ para algum $m \in \mathbb{R}$.

<u>**Exercício 8.7**</u>: Seja $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, função de clase C^1 tal que $[f'(x_0)]$ tem posto igual a $n-1$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ é injetiva na bola $B_\delta(x_0)$.
Solução: Como as normas são equivalentes, vamos considerar

$$B_\delta(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R}^{n-1}\,;\, \|x - x_0\|_1 < \delta\big\}.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}(x_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$g(x, x_n) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) + x_n), \quad (x, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n).$$

Então, é claro que g é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e

$$\big[g'(x_0,0)\big] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}(x_0) & 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}(x_0) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}(x_0) & 1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\det\big[g'(x_0,0)\big] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}(x_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

(veja (A.5) no Apêndice, pag. 346), segue do Teorema da Função Inversa a existência de $\delta > 0$ tal que $g : \widetilde{B}_\delta(x_0,0) \to f\big(\widetilde{B}_\delta(x_0,0)\big)$ é bijetiva, onde aqui estamos denotando

$$\widetilde{B}_\delta(x_0,0) = \{(x,x_n)\,;\, \|x - x_0\|_1 + |x_n| < \delta\}.$$

Em particular, se $x \neq \tilde{x}$ são tais que $(x,0), (\tilde{x},0) \in \widetilde{B}_\delta(x_0,0)$, então

$$f(x) - f(\tilde{x}) = g(x,0) - g(\tilde{x},0) \neq 0.$$

Assim, a prova está concluída, considerando-se

$$B_\delta(x_0) = \widetilde{B}_\delta(x_0,0) \cap \{(x,0)\,;\, x \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

9

O Teorema da Função Implícita

Exercício 9.1: *Considere a superfície $xy - z\log y + e^{yz} - e = 0$. É possível representá-la na forma $z = f(x,y)$ nas proximidades do ponto $(0,1,1)$?*

Solução: Sim. Considere $f\colon \mathbb{R}\times(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = xy - x\ln y + e^{yz} - e$. Então $f(0,1,1) = 0$, f é de classe C^1 e $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = e \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, z pode ser expresso como função das variáveis x e y uma vizinhança do ponto $(0,1)$.

Exercício 9.2: *O ponto $P = (1,-1,2)$ pertence às superfícies $x^2(y^2+z^2) = 5$ e $(x-z)^2 + y^2 = 2$. Mostre que a curva interseção dessas superfícies pode ser parametrizada na forma $z = f(x)$ e $y = g(x)$ numa vizinhança de P.*

Solução: Considere a função $F\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y,z) = (x^2y^2 + x^2z^2 - 5, (x-z)^2 + y^2 - 2)$. É claro que $F(1,-1,2) = (0,0)$, F é de classe C^1 e

$$\frac{\partial F}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2x^2y & 2x^2z \\ 2y & 2(z-x) \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det\left[\frac{\partial F}{\partial(y,z)}\right](1,-1,2) = 4,$$

existe $\delta > 0$ e $\varphi\colon (1-\delta, 1+\delta)\to\mathbb{R}^2$, $\varphi = (f,g)$ satisfazendo as condições desejadas.

Exercício 9.3: *Seja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ função de classe C^1 tal que $f(1) = 1$ e defina*

$$S = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\, 2f(xy) = f(x)^2 + f(y)\big\}.$$

a) *Mostre que se $f'(1)\neq 0$, existe $r > 0$ tal que $S\cap B_r(1,1)$ é gráfico de uma função $y = \varphi(x)$ de classe C^1.*

b) *Nas condições do item (a), se f é de classe C^2, mostre que $x = 1$ é ponto de máximo ou mínimo local para φ (o que implica, em particular, que S não é gráfico de nenhuma função $x = \psi(y)$ na vizinhança de $(1,1)$).*

c) *Mostre que se S é gráfico de uma função $x = \psi(y)$ em alguma vizinhança de $(1,1)$, então $f'(1) = 0$.*

Solução: (a) Considere $F(x,y) = 2f(xy) - f(x)^2 - f(y)$. Então F é de classe C^1 e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xf'(xy) - f'(y)$$

Como $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = f'(1) \neq 0$, a conclusão segue do teorema da função implícita.

(b) Pelo item (a) temos, para algum $\delta > 0$

$$2f(x\varphi(x)) - f(x)^2 - f(\varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in (1-\delta, 1+\delta). \tag{9.1}$$

Derivando (9.1) implicitamente em relação a x, temos

$$2f'(x\varphi(x))[\varphi(x) + x\varphi'(x)] - 2f'(x)f(x) - f'(\varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad \forall x \in (1-\delta, 1+\delta).$$

Em particular, para $x = 1$, obtemos $\varphi'(1) = 0$. Derivando (9.1) duas vezes em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned} 2f''(x\varphi(x))\big[\varphi(x) + x\varphi'(x)\big]^2 + 2f'(x\varphi(x))\big[2\varphi'(x) + x\varphi''(x)\big] \\ - 2f'(x)^2 - 2f''(x)f(x) - f''(\varphi(x))\varphi'(x)^2 - f'(\varphi(x))\varphi''(x) = 0 \end{aligned}$$

Em particular, para $x = 1$, obtemos $f'(1)\varphi'(1) = 2f'(1)$ e a conclusão segue da hipótese $f'(1) \neq 0$.

(c) Se $x = \psi(y)$ numa vizinhança de $y_0 = 1$, temos

$$2f(y\psi(y)) - f(\psi(y))^2 - f(y) = 0, \quad \forall y \in (1-\delta, 1+\delta). \tag{9.2}$$

Derivando (9.2) em relação a y, obtemos

$$2f'(y\psi(y))\big[\psi(y) + y\psi'(y)\big] - 2f(\psi(y))f'(\psi(y))\psi'(y) - f'(y) = 0, \quad \forall y \in (1-\delta, 1+\delta).$$

Para $y = 1$ temos necessariamente $f'(1) = 0$, como queríamos mostrar.

<u>**Exercício 9.4**</u>: *Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(0,0) = 0$. Encontre uma condição para f que permita resolver a equação $f\big(f(x,y), y\big) = 0$ com y função de x numa vizinhança de $(0,0)$.*

Solução: Seja $F(x,y) = f(f(x,y),y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Suponhamos f de classe C^1. Então F é de classe C^1, $F(0,0) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Pelo teorema da função implícita, basta que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq -1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$. e

<u>**Exercício 9.5**</u>: *Mostre que o sistema abaixo pode ser resolvido com:*

1) x, y, u em função de z;

2) x, z, u em função de y;

3) y, z, u em função de x;

mas não é possível exprimir x, y, z em função de u.

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 = 0 \\ x - y + 2z + u = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$$

Solução: Primeiramente, observe que podemos escrever o sistema na forma

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^2 \\ -u \\ -2u \end{pmatrix}, \tag{9.3}$$

Como o determinate da matriz em (9.3) é nulo, não podemos determinar (x, y, z) em função de u.

(1) Consideremos $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z, u) = (3x + y - z + u^2, x - y + 2z + u, 2x + 2y - 3z + 2u).$$

Observe que

$$\left[\frac{\partial F}{\partial(x, y, u)}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\det \left[\frac{\partial F}{\partial(x,y,u)}\right](0, 0, 0) = -12$, segue do teorema da função implícita que o sistema pode ser resolvido com x, y, u em função de z.

(2) Como no intem anterior, temos

$$\left[\frac{\partial F}{\partial(x, z, u)}\right] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2u \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\det \left[\frac{\partial F}{\partial(x,z,u)}\right](0, 0, 0) = 21$.

(3) Analogamente

$$\left[\frac{\partial F}{\partial(y, z, u)}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2u \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\det \left[\frac{\partial F}{\partial(y,z,u)}\right](0, 0, 0) = 3$.

Exercício 9.6: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $f(0, 0) = 0$. Sejam B e C respectivamente as matrizes (relativamente à base canônica)*

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right] \qquad \text{e} \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right]$$

a) B e C são matrizes de que ordem?

b) Escreva $[f'(0, 0)]$ em termos dos blocos B e C.

c) Seja $\phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x, y) = f\big(f(x, y), f(x, y)\big)$. Calcule

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, 0)\right], \qquad \left[\frac{\partial \phi}{\partial y}(0, 0)\right] \qquad \text{e} \qquad [\phi'(0, 0)]$$

em termos de B e C.

d) *Se B é invertível e $\|C\| < 1/\|B^{-1}\|$, mostre que a equação $\phi(x,y) = 0$ pode ser resolvida com x em função de y numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$.*

Solução: É claro que B e C são matrizes de ordem $n \times n$ e a matriz (de ordem $n \times 2n$) $[f'(0,0)] = [B\ \ C]$.

(c) Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

de modo que

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,0)\right] = B^2 + CB, \quad \left[\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0)\right] = BC + C^2, \quad .$$

(d) Observe que $B^2 + CB = B(I + B^{-1}C)B$. Para mostrar que $[\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,0)]$ é invertível, basta mostrar que $I + B^{-1}C$ é invertível. Como estamos supondo $\|C\| < 1/\|B^{-1}\|$, a conclusão segue do Corolário 8.4 (veja também o Exercício 7.2(c)).

<u>**Exercício 9.7**</u>: *Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0$ se $x > 0$, satisfazendo*

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 2.$$

Mostre que existe $\delta > 0$ e uma única função $\varphi\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em $]0,\delta[$ tal que

$$\int_x^{\varphi(x)} f(t)\,dt = 1.$$

Determine $\varphi'(x)$.

Solução: Considere a equação $F(x,y) = 1$ onde $F\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ é definida por

$$F(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Como f é contínua, temos F de classe C^1. Como $F(0,0) = 0$ e $F(0,1) = 2$, existe $y_0 \in (0,1)$ tal que $F(0,y_0) = 1$. Além disso, como

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,y_0) = f(y_0) > 0$$

segue do teorema da função implícita que existe $\delta > 0$ e $\varphi\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}$ função continuamente diferenciável em $(0,\delta)$ tal que

$$\int_x^{\varphi(x)} f(t)\,dt = 1, \quad \forall x \in [0,\delta] \tag{9.4}$$

como queríamos provar.

Seja $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, de modo que $G(\varphi(x)) - G(x) = 1$. Como f é positiva, temos G estritamente crescente e, consequentemente, invertível. Portanto,

$$\varphi(x) = G^{-1}\big(1 + G(x)\big).$$

<u>**Exercício 9.8**</u>: *Considere a_i, $i = 1, \dots, n$, números reais distintos e o polinômio de grau n ímpar,*

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i).$$

Defina

$$A = \big\{b \in \mathbb{R}\,;\, p(x) = b \text{ possui } n \text{ raízes distintas}\big\}.$$

(a) *Mostre que $0 \in A$.*

(b) *Mostre que A é limitado se $|b|$ é suficientemente grande,*

(c) *Use o Teorema da Função Implícita para mostrar que A é aberto.*

Solução: (a) É claro que $0 \in A$ pois $a_1, a_2, \dots, a_n$ são raízes distintas de $p(x) = 0$.

(b) A função $p(x)$ é um polinômio. Logo, $|p(x)| \to \infty$ quando $|x| \to \infty$, isto é, dado $M > 0$, existe $R > 0$ tal que se $|x| \geq R$, então $|p(x)| \geq M$. Portanto, $A \subset [-R, R]$.

(c) Consideremos a função $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, tal que

$$F(\boldsymbol{x}, b) = (p(x_1) - b, \dots, p(x_n) - b), \quad \forall (\boldsymbol{x}, b) = (x_1, x_2, \dots, x_n, b).$$

Seja b_0 um elemento de A. Então existe $\boldsymbol{x}_0 = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_i \neq \overline{x}_j$ se $i \neq j$, tal que $F(\boldsymbol{x}_0, b_0) = \boldsymbol{0}$. É claro que F é de classe C^1 e

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0, b_0) = (0, 0, \dots, p'(\overline{x}_i), \dots, 0),$$

de modo que

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, b_0) = \begin{pmatrix} p'(\overline{x}_1) & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & p'(\overline{x}_2) & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p'(\overline{x}_n) \end{pmatrix}$$

Observe que a matriz acima é diagonal com determinante diferente de zero. De tato, se $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$ são raízes distintas do polinômio $p(x) - b$, então (demonstre!) $p'(\overline{x}_i) \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe $\delta_0 > 0$ e funções $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de classe C^1 definidas no intervalo $(b_0 - \delta, b_0 + \delta)$ tais que $\varphi_i(b_0) = \overline{x}_i$ e tais que

$$F\big(\varphi_1(b), \dots, \varphi_n(b), b\big) = 0, \quad \forall b \in (b_0 - \delta, b_0 + \delta).$$

Para concluir a demostração, basta mostrar que o intervalo $(b_0 - \delta, b_0 + \delta) \subset A$ para algum $\delta \leq \delta_0$, isto é, as raízes $\varphi_i(b)$ com $b \in (b_0 - \delta, b_0 + \delta)$ são todas distintas.

Seja $\varepsilon = \frac{1}{3}\min\big\{|\overline{x}_i - \overline{x}_j|\,;\, i \neq j\big\}$. É claro que $\varepsilon > 0$ pois as raízes $\overline{x}_i$ são, por hipótese, todas distintas. Por continuidade, para cada $i = 1, \dots, n$ existe $\delta_i > 0$ tal que

$$|b - b_0| < \delta_i \quad \Rightarrow \quad |\varphi_i(b) - \overline{x}_i| < \varepsilon/3.$$

Assim, para $i \neq j$ e $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_0\}$, se $b \in (b_0 - \delta, b_0 + \delta)$,

$$|\varphi_i(b) - \varphi_j(b)| \geq |\overline{x}_i - \overline{x}_j| - \big(|\varphi_i(b) - \overline{x}_i| + |\varphi_j(b) - \overline{x}_j|\big) \geq \frac{\varepsilon}{3} > 0.$$

Exercício 9.9: *Calcular o valor máximo de*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2$$

sob a restrição $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. *Utilizar o resultado para calcular a seguinte desigualdade, válida para números reais positivos* $a_1, \ldots, a_n$*:*

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Solução: Para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, consideremos $g(x) = \|x\|_2^2 - 1$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, g(x) = 0\}$. f e g são funções de classe C^1 e $g'(x) = 2x \neq 0$, $\forall x \in S$.
Como S é compacto, existe $\overline{x} \in S$ tal que $f(\overline{x}) = \max_S f$. Em particular,

$$f(\overline{x}) > 0 = \min_S f,$$

o que implica $\overline{x}_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Pelo Teorema de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f'(\overline{x}) = \lambda g'(\overline{x})$, isto é,

$$\begin{cases} 2\overline{x}_1 \overline{x}_2^2 \cdots \overline{x}_n^2 = 2\lambda \overline{x}_1 \\ 2\overline{x}_1^2 \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n^2 = 2\lambda \overline{x}_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 2\overline{x}_1^2 \overline{x}_2^2 \cdots \overline{x}_n = 2\lambda \overline{x}_n \end{cases}$$

Como cada $\overline{x}_i \neq 0$, temos

$$\lambda = \overline{x}_2^2 \overline{x}_3^2 \cdots \overline{x}_n^2 = \ldots = \overline{x}_1^2 \overline{x}_2^3 \cdots \overline{x}_{n-1}^2$$

de onde se deduz que $\overline{x}_1^2 = \overline{x}_2^2 = \cdots = \overline{x}_n^2 = 1/n$ e $f(\overline{x}) = (1/n)^n$.
Se $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, então $x/\|x\|_2 \in S$ e $f(x/\|x\|_2) \le (1/n)^n$, isto é,

$$x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 \le \frac{\|x\|_2^{2n}}{n^n}. \tag{9.5}$$

Extraindo a raíz n-ésima de ambos os lados de (9.5), obtemos

$$\sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2} \le \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}.$$

Dados $a_1, \ldots, a_n$ números reais positivos, escolhemos $x_1, \ldots, x_n$ tais que $x_i^2 = a_i$ para concluir que

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

<u>**Exercício 9.10**</u>: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2.$$

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números reais estritamente positivos e defina

$$G = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 = 1\Big\}.$$

a) *Mostre que existe $\overline{x} \in G$ tal que $f(\overline{x}) = \max\big\{f(x)\,;\, x \in G\big\}$;*

b) *Calcule $\overline{x}$.*

Solução: (a) Para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, consideremos

$$g(x) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \cdots + p_n x_n^2 - 1,$$

de modo que $G = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, g(x) = 0\}$. f e g são funções de classe C^1 e $g'(x) = 2(p_1 x_1, \ldots, p_n x_n) \neq 0$, $\forall x \in G$. Como G é compacto, existe $\overline{x} \in G$ tal que $f(\overline{x}) = \max_G f$.

(b) Visto que $f(\overline{x}) > 0 = \min_G f$, temos $\overline{x}_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Pelo Teorema de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f'(\overline{x}) = \lambda g'(\overline{x})$, isto é,

$$\begin{cases} 2\overline{x}_1 \overline{x}_2^2 \cdots \overline{x}_n^2 = 2\lambda p_1 \overline{x}_1 \\ 2\overline{x}_1^2 \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n^2 = 2\lambda p_2 \overline{x}_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 2\overline{x}_1^2 \overline{x}_2^2 \cdots \overline{x}_n = 2\lambda p_n \overline{x}_n \end{cases}$$

Como cada $\overline{x}_i \neq 0$, temos

$$\lambda = \frac{\overline{x}_2^2 \overline{x}_3^2 \cdots \overline{x}_n^2}{p_1} = \ldots = \frac{\overline{x}_1^2 \overline{x}_2^3 \cdots \overline{x}_{n-1}^2}{p_n}$$

de onde se deduz que

$$\overline{x}_1^2 = \mu, \quad \overline{x}_2^2 = \frac{p_1}{p_2}\mu, \cdots, \overline{x}_n^2 = \frac{p_1}{p_n}\mu$$

para algum $\mu > 0$. Como $g(\overline{x}) = 1$, concluímos que $\mu = (np_1)^{-1}$ e

$$\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \frac{1}{\sqrt{p_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{p_n}} \right).$$

<u>**Exercício 9.11**</u>: *Seja* $\| \quad \|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}$ *a norma induzida pelas normas euclidianas* $\| \quad \|_2$ *de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$ *(veja (4.11) no enunciado do Exercício 4.13). Se* A *é matriz* $m \times n$*, mostre que* $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} = \sqrt{\lambda}$*, onde* λ *é o maior autovalor da matriz simétrica e positiva definida* $A^{\mathrm{T}}A$*.*

Use o resultado para concluir que se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*, então*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)} = \sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

Solução: Para simplificar a notação, consideremos $\|A\| = \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \ \mathbb{R}^m)}$. Por definição,

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2\,;\ \|x\|_2 = 1\}.$$

Observando que $\|A\|^2 = \sup\{\|Ax\|_2^2\,;\ \|x\|_2^2 = 1\}$, podemos considerar $f(x) = \|A\|_2^2$ e $g(x) = \|x\|_2^2 - 1$, que são funções de classe C^1 e tais que

$$f'(x) = 2A^TAx, \quad g'(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\ g(x) = 0\}$. Então $\|A\|^2 = \sup_S f$. Como S é compacto, existe $\overline{x} \in S$ sobre o qual f atinge o máximo e, como $g'(\overline{x}) \neq 0$, o Teorema de Lagrange nos garante a existência de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f'(\overline{x}) = \lambda g'(\overline{x})$, isto é,

$$A^TA\overline{x} = \lambda\overline{x}.$$

Portanto $\overline{\lambda}$ é autovalor da matriz (simétrica e positiva) A^TA e $\overline{x}$ autovetor correspondente.

Por outro lado, se μ é autovalor de A^TA, então existe $x \in S$ tal que

$$A^TAx = \mu x. \tag{9.6}$$

Multiplicando escalarmente ambos os lados de (9.6) por x, obtemos

$$\mu = \mu\|x\|_2^2 = \langle A^TAx; x\rangle = \|Ax\|_2^2 \leq \|A\overline{x}\|_2^2 = \lambda.$$

Portanto, λ é o maior autovalor de A^TA e, consequentemente $\|A\| = \sqrt{\lambda}$, como queríamos provar.

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, cujos autovalores são respectivamente

$$\lambda_1 = 3 - \sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 3 + \sqrt{5}.$$

Portanto, $\|A\| = \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

<u>**Exercício 9.12**</u>: *Seja $A > 0$ e $\mathcal{T}_A$ o conjunto de todos os triângulos de área A. Seja $T \in \mathcal{T}_A$ com lados medindo a, b e c. Mostre que*

$$ab + ac + bc \geq 4A\sqrt{3}. \tag{9.1}$$

Solução: Denotemos $T_{abc} \in \mathcal{T}_A$ um triângulo com lados a, b e c. É claro que o triângulo equilátero T_{lll} pertence a $\mathcal{T}_A$ se, e somente se, $l^2 = 4A\sqrt{3}/3$.
Consideremos as funções $f, p : [0, \infty)^3 \to \mathbb{R}$ assim definidas:

$$f(a, b, c) = ab + ac + bc \quad \text{e} \quad p(a, b, c) = a + b + c.$$

Então, $f(l, l, l) = 3l^2 = 4A\sqrt{3}$ e $p(l, l, l) = 3l$. Portanto, para mostrar a desigualdade (9.1), é suficiente mostrar que

$$\max\big\{f(a, b, c)\,;\, p(a, b, c) = 3l,\ a, b, c \geq 0\big\} = 4A\sqrt{3}. \tag{9.2}$$

De fato, se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $u_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, temos $\nabla f(a, b, c) \cdot u \geq 0$ i.e., f cresce nas direções positivas dos eixos cartasianos. Se mostrarmos que

$$f(a, b, c) \leq f(l, l, l) = 4A\sqrt{3} \text{ sempre que } p(a, b, c) = 3l\ ,$$

teremos concluído a desigualdade (9.1).
Como f e p são funções de classe C^1, podemo calcular o máximo de (9.1) pelo método de Lagrange:

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla p(a, b, c),\ \ p(a, b, c) = 3l. \tag{9.3}$$

Resolvendo o sistema (9.3), obtemos

$$b + c = a + c = a + b = \lambda \quad \Rightarrow \quad a = b = c = \lambda/2.$$

Portanto,

$$a + b + c = 3\lambda/2 = 3l \quad \Rightarrow \quad l = \lambda/2$$

e

$$\max\big\{f(a, b, c)\,;\, p(a, b, c) = 3l,\ a, b, c \geq 0\big\} = f(l, l, l) = 3l^2 = 4A\sqrt{3}$$

como querímos provar.

<u>**Exercício 9.13**</u>: *Seja A uma matriz simétrica $n \times n$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $A_\alpha = A + \alpha I$, sendo I a matriz unitária. Considere $\lambda_1(\alpha) \leq \lambda_2(\alpha) \leq \cdots \leq \lambda_n(\alpha)$ os autovalores de A_α.*

(a) Mostre que

$$\lambda_1(\alpha) = \min\big\{\langle A_\alpha x : x\rangle\,;\, \|x\|_2^2 = 1\big\},$$

onde $\langle : \rangle$ denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.

(b) Supondo $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $(1 < k \leq n)$ os autovetores correspondentes aos primeiros k autovalores, mostre que

$$\lambda_k(\alpha) = \min\big\{\langle A_\alpha x : x\rangle\,;\, \|x\|_2^2 = 1,\ \text{e}\ \langle x\ :\ x_1\rangle = \cdots = \langle x\ :\ x_{k-1}\rangle = 0\big\},$$

(c) *Mostre que as aplicações $\alpha \mapsto \lambda_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, n$ são funções côncavas definidas em $\mathbb{R}$ (e consequentemente contínuas).*

Solução: Sendo A_α simétrica, o Teorema Espectral nos garante que A_α possui n autovalores reais.

(a) Consideremos a função quadrática $x \mapsto F_\alpha(x) = \langle A_\alpha x : x\rangle$. Observe que F_α é de classe C^1 e $F'_\alpha(x) = 2A_\alpha x$. Como a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$ é compacta, existe x_1 tal que $\|x_1\|_2^2 = 1$ satisfazendo

$$F_\alpha(x_1) = \min\big\{F_\alpha(x)\,;\, \|x\|_2^2 = 1\big\}.$$

Pelo Teorema de Lagrange, existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $2A_\alpha x_1 = 2\lambda_1 x_1$. Portanto x_1 é autovetor associado ao autovalor λ_1. Multiplicando escalarmente esta última equação por x_1, obtemos

$$\lambda_1 = \langle A_\alpha x_1 : x_1\rangle = F_\alpha(x_1) = \min\big\{\langle A_\alpha x : x\rangle\,;\, \|x\|_2^2 = 1\big\},$$

isto é, $\lambda_1 = \lambda_(\alpha)$.

(b) Vamos demonstrar este item considerando $k = 2$. A prova do caso geral é idêntica.

Pelo Teorema de Lagrange, existe x_2 satisfazendo as restrições $\|x_2\|_2 = 1$, $\langle x_1 : x_2\rangle = 0$ e constantes reais λ_2 e μ tais que

$$2A_\alpha x_2 = 2\lambda_2 x_2 + \mu x_1.$$

Multiplicando escalarmente esta equação por x_2, obtemos $\langle A_\alpha x_2 : x_2\rangle = \lambda_2$. Por outro lado, multiplicando a mesma equação por x_1, obtemos

$$\mu = \langle A_\alpha x_2 : x_1\rangle = \langle x_2 : A_\alpha x_1\rangle = \lambda_1(\alpha)\langle x_2 : x_1\rangle = 0.$$

Portanto, $A_\alpha x_2 = \lambda_2 x_2$. Como $x_2 \neq 0$, x_2 é autovetor associado ao autovalor λ_2, e concluímos como na etapa (a) que $\lambda_2 = \lambda_2(\alpha)$.

Observe também que

$$\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x\|_2^2 = 1 \text{ e } \langle x : x_1\rangle = 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x\|_2^2 = 1\} \Rightarrow \lambda_1(\alpha) \leq \lambda_2(\alpha).$$

(c) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ vetor unitário, a aplicação $\alpha \mapsto \langle A_\alpha x : x\rangle = \langle Ax : x\rangle + \alpha$ é uma função afim. Logo, pelo Exercício 4.32 (pag. 63), temos que cada um dos autovalores $\lambda_i(\alpha)$ é função côncava na variável $\alpha \in \mathbb{R}$. Em particular, como consequência do Teorema 4.22 (pag. 45), essas função são contínuas.

10

Sequências de Funções

Exercício 10.1: *Seja* $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f_k(x) = \lim_{j\to\infty} (\cos k!\pi x)^{2j}.$$

Mostre que

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in \{1/k!, 2/k!, \ldots, 1\}, \\ 0 & \textit{senão} \end{cases}$$

e que f_k *converge pontualmente em* $[0,1]$ *para a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional}, \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional}. \end{cases}$$

Solução: Seja $A_k = \big\{1/k!, 2/k!, \ldots, (k-1)/k, 1\big\}$. Então $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Se $x \in A_k$, então $x = m/k!$ para algum $m \in \mathbb{N}$, $m \le k!$. Assim

$$\cos(k!\pi x) = \cos(m\pi) = \pm 1$$

e consequentemente $f_k(x) = 1$. Por outro lado, se $x \notin A_k$, $k!\pi x$ não é múltiplo inteiro de π, de modo que $|\cos(k!\pi x)| < 1$. Como

$$\lim_{j\to+\infty} \big(\cos(k!\pi x)\big)^{2j} = 0,$$

concluímos que

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A_k \\ 0 & \text{senão}. \end{cases}$$

Fixemos $x \in \mathbb{Q}$, $x = m/n$. Se $k \ge n$, então $k!/n \in \mathbb{N}$, de modo que $k!\pi x = m(k!/n)\pi$ é múltiplo inteiro de π e consequentemente $f_k(x) = 1$ para todo $k \ge n$. Por outro lado, se $x \notin \mathbb{Q}$, então $x \notin A_k$ para nenhum $k \in \mathbb{N}$, de modo que $f_k(x) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Portanto, $f_k \xrightarrow{\text{p}} f$ em $[0,1]$, onde $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ senão.

Exercício 10.2: *Dê exemplo de sequência de funções sci que converge pontualmente para uma função que não é sci.*

Solução: Seja $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{se } 0 \le x \le 1/n \\ 0 & \text{se } 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

É fácil ver que f_n é contínua (e portanto sci) em $[0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas $f_n \xrightarrow{\text{p}} f$ em $[0,1]$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

que não é sci em $[0,1]$.

Exercício 10.3: *Sejam $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sequências de funções definidas em $A \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^m$. Se $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergem uniformemente em A, prove que $\{f_k + g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em A. Se, além disso, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ são sequências de funções uniformemente limitadas (isto é, $\|f_k(x)\| \le \alpha$ e $\|g_k(x)\| \le \beta$ $\forall x \in A$, $\forall k$), mostre que $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida por $\varphi_k(x) = \langle f_k(x); g_k(x)\rangle$ converge uniformemente em A.*

Solução: Dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \ge k_0$, então

$$\|f_k(x) - f_l(x)\| < \varepsilon/2, \quad \forall x \in A.$$

Analogamente, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \ge k_1$, então

$$\|g_k(x) - g_l(x)\| < \varepsilon/2, \quad \forall x \in A.$$

Seja $k_2 = \max\{k_1, k_0\}$ e $\phi_k(x) = f_k(x) + g_k(x)$. Se $k, l \ge k_2$, então

$$\|\phi_k(x) - \phi_l(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

Assim $\{\phi_k\}_{k\ge 1}$ é uniformemente de Cauchy em A.
Seja $\varphi_k(x) = \langle f_k(x); g_k(x)\rangle$, $x \in A$. Então

$$\begin{aligned} |\varphi_k(x) - \varphi_l(x)| &\le |\langle f_k(x) - f_l(x); g_l(x)\rangle| + |\langle f_k(x); g_k(x) - g_l(x)\rangle| \\ &\le \|f_k(x) - f_l(x)\|\,\|g_l(x)\| + \|f_k(x)\|\,\|g_k(x) - g_l(x)\| \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \ge k_0$ então

$$\|f_k(x) - f_l(x)\| < \frac{\varepsilon}{2\beta}, \quad \|g_k(x) - g_l(x)\| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}, \quad \forall x \in A.$$

de onde se conclui que $\{\varphi\}_k$ é uniformemente de Cauchy em A.

Exercício 10.4: *Verdadeiro ou falso?*

(a) Se $f_k \xrightarrow{u} f$ em A, então $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é sequência de funções limitadas.

(b) Se $f_k \xrightarrow{u} f$ em A, com A compacto e f_k contínua para todo k, então $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é sequência de funções uniformemente limitadas.

Solução: (a) Falso! Considere $f_k(x) = \exp(x) + (1/k)$. É claro que $f_k \underset{\longrightarrow}{\text{p}} f$ em $\mathbb{R}$, onde $f(x) = \exp(x)$, mas nenhuma das funções f_k é limitada em $\mathbb{R}$.

(b) Verdadeiro! Primeiramente, observe que f é contínua, pois é limite uniforme de funções contínuas. Como estamos supondo A compacto, f é limitada em A, isto é, existe $M_0 > 0$ tal que

$$\|f(x)\| \le M_0, \quad \forall x \in A.$$

Dado $\varepsilon = 1$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \ge k_0$

$$\|f_k(x) - f(x)\| < 1, \quad \forall x \in A.$$

Portanto,

$$\|f_k(x)\| < 1 + M, \quad \forall x \in A, \quad \forall k \ge k_0.$$

Como as funções $f_1, f_2, \ldots, f_{k_0-1}$ são limitas em A, existem constantes $M_1, \ldots, M_{k_0-1}$ tais que

$$\|f_j(x)\| \le M_j, \quad \forall x \in A, \quad \forall j = 1, \ldots, k_0 - 1.$$

Logo,

$$\|f_k(x)\| \le \max\{M_0, M_1, \ldots, M_{k_0-1}\}, \quad \forall x \in A, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Exercício 10.5: *Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função de classe C^1 e $f_k\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sequência de funções uniformemente limitadas (isto é, $|f_k(x)| \le \alpha$ $\forall k$ e $\forall x \in A$), tal que $f_k \longrightarrow f$ uniformemente em A. Mostre que $g \circ f_k \longrightarrow g \circ f$ uniformemente em A.*

Solução: Para x e k fixados arbitrariamente, temos do Teorema do Valor Médio:

$$g\big(f_k(x)\big) - g\big(f(x)\big) = g'\big((1 - \lambda_k(x))f_k(x) + \lambda_k(x)f(x)\big)\big(f_k(x) - f(x)\big), \tag{10.1}$$

onde $0 < \lambda_k(x) < 1$. Observe que, para todo $x \in A$ e para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$(1 - \lambda_k(x))f_k(x) + \lambda_k(x)f(x) \in [-2\alpha, 2\alpha].$$

De fato,

$$|(1 - \lambda_k(x))f_k(x) + \lambda_k(x)f(x)| \le |f_k(x)| + |f(x)| \le 2\alpha.$$

Como g é função de classe C^1, seja

$$M = \max\{|g'(\xi)|\,;\, \xi \in [-2\alpha, 2\alpha]\}.$$

Então temos de (10.1)

$$\big|g\big(f_k(x)\big) - g\big(f(x)\big)\big| \le M|f_k(x) - f(x)|$$

e concluímos a prova.

<u>**Exercício 10.6**</u>: *Considere*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x}$$

Para que valores de x esta série é absolutamente (pontualmente) convergente? Em que intervalos ela é uniformemente convergente? f é contínua nos pontos em que a série converge? f é limitada?

Solução: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2x}.$$

É claro que f_n está bem definida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -1/4, \ldots, -1/n^2\}$. Além disso, é claro também que $f_n(0) = n$ para todo n. Consideremos então o conjunto

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -1/4, -1/9, \ldots\}$$

<u>Afirmativa 1</u>: $f_n \xrightarrow{\text{p}} f$ em A.

De fato, $|1+k^2x| \geq k^2|x| - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, para k suficientemente grande

$$\left|\frac{1}{1+k^2x}\right| \leq \frac{1}{k^2|x|-1}.$$

Como a série numérica (x está fixado) $\sum(k^2|x|-1)^{-1}$ é convergente, concluímos que $\{f_n\}_n$ converge pontualmente em A.

É claro que $\{f_n\}_n$ não é uniformemente convergente em A. De fato, $\{f_n\}_n$ não é uniformemente de Cauchy em $(0, +\infty)$ pois

$$f_n(1/n^2) - f_{n-1}(1/n^2) = 1/2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, $\{f_n\}_n$ não é uniformemente de Cauchy em $(-\infty, 0) \cap A$ pois

$$-2/n^2 \in A \quad \text{e} \quad \left|f_n(-2/n^2) - f_{n-1}(-2/n^2)\right| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Afirmativa 2</u>: $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ em $[\alpha, +\infty)$, $\forall \alpha > 0$.

De fato, seja $M_k = 1/\alpha k^2$. Como

$$0 \leq \frac{1}{1+\alpha k^2 x} \leq M_k, \quad \forall x \in [\alpha, +\infty)$$

e como a série $\sum M_k$ é convergente, o Teorema 10.12 nos garante a convergência uniforme de $\{f_n\}_n$ em $[\alpha, +\infty)$. Como já sabemos que f_n converge pontualmente para f em A, provamos a afirmativa.

<u>Afirmativa 3</u>: $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ em $(-\infty, -\beta] \cap A$, $\forall \beta > 0$.

Suponhamos inicialmente $\beta > 1$. É claro que

$$|1 + k^2 x| \geq k^2|x| - 1 \geq k^2\beta - 1 \geq 0, \quad \forall x \in (-\infty, -\beta], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta k^2 - 1}$$

é convergente, os argumentos na prova da Afirmativa 2 se aplicam.
Suponhamos $\beta > 1/4$. É claro que

$$|1 + k^2 x| \geq k^2|x| - 1 \geq k^2\beta - 1 \geq 0, \quad \forall x \in (-\infty, -\beta], \quad \forall n \geq 2.$$

Como a série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\beta k^2 - 1}$$

é convergente, concluímos que $\{f_n\}_{n\geq 2}$ converge para

$$\widetilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{1+x}$$

uniformemente em $(-\infty, \beta]$. Logo, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge para

$$f(x) = \widetilde{f}(x) + \frac{1}{1+x}$$

uniformemente em $(-\infty, -\beta] \setminus \{-1\}$.
Podemos repetir o argumento para $\beta > 1/9, \beta > 1/16, \dots$ para concluir a prova da afirmativa.

<u>Afirmativa 4</u>: f é função contínua mas não é limitada em A.
Cada uma das funções f_n é contínua em A e a sequência converge uniformemente para f em $(A \cap (-\infty, -\beta]) \cup [\alpha, +\infty)$, $\forall \alpha, \beta > 0$. Portanto f é contínua em A.
Para mostrar que f não é limitada em A, observe que se $x < -1$, então $k^2 x + 1 < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$f_n(x) \leq \frac{1}{x+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Fazendo $n \to +\infty$ obtemos

$$f(x) \leq \frac{1}{1+x}$$

e a conclusão, visto que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = -\infty.$$

<u>**Exercício 10.7**</u>: *Prove que a série* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$ *converge uniformemente em todo intervalo limitado, mas não converge absolutamente em nenhum* x.

Solução: É claro que

$$\alpha_k = \frac{x^2+k}{k^2} = \frac{x^2}{k^2} + \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para x fixado, a série (de termos positivos)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2+k}{k^2}$$

é divergente. Por outro lado, como $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \cdots$ e $\alpha_k \to 0$ quando $k \to +\infty$, a série alternada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$$

é convergente. Assim, se definirmos $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{x^2+k}{k^2},$$

então $\{f_n\}_n$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para a função

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}.$$

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado. Então existe $R > 0$ tal que $A \subset [-R, R]$. Para provar que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente para f em A, considere $f_n(x) = g_n(x) + \beta_n$, onde

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{x^2}{k^2} \quad \text{e} \quad \beta_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1}{k}.$$

Sabemos que a sequência $\{\beta_n\}_n$ é convergente (de fato, $\beta_n \to \ln(1/2)$). Como $x^2/k^2 \leq R^2/k^2$ para todo $x \in A$ e a série $\sum 1/k^2$ é convergente, o Teorema 10.12 nos garante que $\{g_n\}_n$ converge uniformemente em A. Logo, $\{f_n\}_n$ converge uniformemente em A.

<u>**Exercício 10.8**</u>: *Mostre que*

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(\theta X) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Solução: Primeiramente observe que $X^2 = -I$, de modo que

$$X^3 = -X, \quad X^4 = I, \quad X^5 = X, \ldots.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \exp(\theta X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} X^k = I + \theta X + \frac{\theta^2}{2} X^2 + \frac{\theta^3}{3!} X^3 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) X \\ &= (\cos\theta) I + (\operatorname{sen}\theta) X \end{aligned}$$

<u>**Exercício 10.9**</u>: *Sejam $\mathcal{M}$ o espaço das matrizes de ordem $n \times n$, $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ a função $f(X) = \exp(X)$. Mostre que, para todo $X_0 \in \mathcal{M}$, existe $\delta > 0$ tal que $U = f\big(B_\delta(X_0)\big)$ é aberto em $\mathcal{M}$ e f é invertível em $B_\delta(X_0)$. Assim, podemos definir a função $X \mapsto \ln(X)$ para $X \in U$. Mostre que $g(X) = \ln(X)$ é diferenciável em U com $g'(X) = X^{-1}$.*

Solução: Pelo Teorema 10.11 (pag. 182), a função $f(X) = \exp(X)$ é diferenciável (e portanto necessariamente contínua) em $\mathcal{M}$ e $f'(X) = \exp(X) = f(X)$, para todo $X \in \mathcal{M}$. Logo, f é de classe $C^1(\mathcal{M})$ (é de fato de classe $C^\infty(\mathcal{M})$) e fixado $X_0 \in \mathcal{M}$, $f'(X_0) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é tal que $f'(X_0)H = \exp(X_0)H$, para todo $H \in \mathcal{M}$.

Pela Observação 10.3 (pag. 182 do texto), $f'(X_0)$ é invertível. De fato,

$$Y = f'(X_0)H = \exp(X_0)H \quad \Longleftrightarrow \quad H = \exp(-X_0)Y = f'(X_0)^{-1}Y.$$

Portanto, estamos nas condições de aplicar o Teorema da Função Inversa; segue do Teorema 8.4 (pag. 145 do texto):

(a) Existe $\delta > 0$ tal que $U = f\big(B_\delta(X_0)\big)$ é aberto;

(b) $f : B_\delta(X_0) \to U$ é difeomorfismo de classe $C^\infty(\mathcal{M})$.

Se g denota a inversa de f, g é de classe $C^\infty(\mathcal{M})$ e $g\big(f(X)\big) = X$ para todo $X \in \mathcal{M}$. Temos $X = g(Y) \in B_\delta(X_0)$ se, e somente se, $Y = \exp(X)$. Logo, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} g\big(f(X)\big) = X &\Rightarrow g'\big(f(X)\big)f'(X) = g'(Y)f'(X) = I, \\ &\Leftrightarrow g'(Y) = f'(X)^{-1} = \exp(X)^{-1} = Y^{-1}. \end{aligned}$$

<u>**Exercício 10.10**</u>: *Seja $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n\times n}$ e considere $X \in \mathcal{M}$ tal que $\|X\| < 1$.*

a) Mostre que $I + X$ é invertível.

b) Mostre que a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k X^k$ converge pontualmente para $(I + X)^{-1}$ em $B_1(0)$.

c) Seja $\mathcal{I} = \big\{X \in \mathcal{M}\,;\, X \ \text{é invertível}\ \big\}$ e $f{:}\,\mathcal{I} \to \mathcal{M}$ a função $f(X) = X^{-1}$. Mostre que f é diferenciável em $\mathcal{I}$ e calcule $f'(X)$.

Solução: (a) Veja Exercício 7.2(iii) (pag. 128 do texto).

(b) Seja

$$Y_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j X^j = I - X + X^2 - \cdots + (-1)^k X^k.$$

Então, é fácil ver que

$$(I + X)Y_k = I + (-1)^k X^{k+1}.$$

Como $(I + X)$ é invertível, obtemos

$$Y_k = (I + X)^{-1} + (-1)^k (I + X)^{-1} X^{k+1}.$$

Portanto,

$$\|Y_k - (I + X)^{-1}\| \le \|(I + X)^{-1}\|\|X\|^{k+1}.$$

Como estamos supondo $\|X\| < 1$, então

$$\lim_{k\to+\infty} \|X\|^{k+1} = 0$$

e concluímos que

$$\lim_{k\to+\infty} Y_k = (I+X)^{-1},$$

isto é,

$$(I+X)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j X^j.$$

(Observe a semelhança com a soma dos termos de uma Progressão Geométrica de números reais $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = (1+x)^{-1}$, válido para $|x| < 1$).

(c) Seja $X \in \mathcal{I}$. Para $H \in \mathcal{M}$, podemos escrever $X + H = X(I + X^{-1}H)$. Pelo item (a), se $\|X^{-1}H\| < 1$, então $I + X^{-1}H$ é invertível e

$$(X+H)^{-1} = (I + X^{-1}H)^{-1}X^{-1}.$$

Pelo item (b),

$$(I + X^{-1}H)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (X^{-1}H)^j.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(X+H)^{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (X^{-1}H)^j X^{-1} \\ &= X^{-1} - X^{-1}HX^{-1} + \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j (X^{-1}H)^j X^{-1}.\end{aligned} \tag{10.2}$$

Como a aplicação $H \mapsto X^{-1}HX^{-1}$ é linear em H, podemos escrever (10.2) na forma

$$f(X+H) = f(X) - X^{-1}HX^{-1} + \varepsilon(H),$$

onde

$$\varepsilon(H) = \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j (X^{-1}H)^j X^{-1}.$$

A função $f(X) = X^{-1}$ será diferenciável com derivada $f'(X)H = -X^{-1}HX^{-1}$ se $\varepsilon(H)$ definido acima for $o(H)$.

De fato,

$$\|\varepsilon(H)\| \leq \frac{\|X^{-1}\|^3}{1 - \|X^{-1}\|\,\|H\|}\|H\|^2.$$

Portanto, considerando $H \in \mathcal{M}$ tal que

$$\|H\| < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|X^{-1}\|}\right\},$$

temos

$$\frac{\|\varepsilon(H)\|}{\|H\|} \leq 2\|X^{-1}\|^3\|H\|.$$

Exercício 10.11: *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e considere a matriz exponencial* $\exp(\theta A)$. *Mostre que:*

$$(a)\ \frac{d}{d\theta}\exp(\theta A) = A\exp(\theta A) = \exp(\theta A)A.$$
$$(b)\ \det\big[\exp(A)\big] = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A}.$$

Solução: (a) Fixemos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e consideremos $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ definido por

$$\Phi_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\theta^k}{k!}A^k.$$

Observe que Φ_n define uma curva diferenciável no espaço das matrizes $\mathcal{M}_{n\times n}$ e

$$\Phi_n'(\theta) = A\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\theta^k}{k!}A^k = A\Phi_{n-1}(\theta) = \Phi_{n-1}(\theta)A.$$

Para $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$, temos:

$$\|\Phi_m(\theta) - \Phi_n(\theta)\|_{\mathcal{M}_{n\times n}} \le \sum_{k=n+1}^{m}\frac{|\theta|^k}{k!}\|A\|^k_{\mathcal{M}_{n\times n}},$$
$$\|\Phi_m'(\theta) - \Phi_n'(\theta)\|_{\mathcal{M}_{n\times n}} \le \|A\|_{\mathcal{M}_{n\times n}}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{|\theta|^k}{k!}\|A\|^k_{\mathcal{M}_{n\times n}},$$

Logo, $\{\Phi_n\}$ e $\{\Phi_n'\}$ são sequências de Cauchy em $\mathcal{M}_{n\times n}$. Sabemos que $\Phi_n \to \Phi$ uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}$, com $\Phi(\theta) = \exp(\theta A)$. Logo, $\Phi_n' \to \Psi$ uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}$, com $\Psi(\theta) = A\Phi(\theta)$. Pelo Teorema 10.6 (pag. 173), Φ é diferenciável e $\Phi'(\theta) = \Psi(\theta)$. Assim, concluímos a prova de (a).

(b) Lembrando que se $g(A) = \det(A)$ e A é invertível, então $g'(A)H = \mathrm{tr}(A^{-1}H)g(A)$. Então, se $\varphi(\theta) = \det\big(\Phi(\theta)\big)$, temos pela Regra da Cadeia e do item anterior,

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) &= g'\big(\Phi(\theta)\big)\Phi'(\theta) = \mathrm{tr}\big(\Phi(\theta)^{-1}\Phi'(\theta)\big)\varphi(\theta)\\ &= \mathrm{tr}\big(\exp(-\theta A)A\exp(\theta A)\big)\varphi(\theta) = \mathrm{tr}(A)\varphi(\theta).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi'(\theta) = \mathrm{tr}(A)\varphi(\theta) \quad \Rightarrow \quad \varphi(\theta) = Ce^{\mathrm{tr}(A)}$$

Como $\varphi(0) = \det\big(\exp(O)\big) = \det(I) = 1$, concluímos que $C = 1$.

Exercício 10.12: *Mostre que*

$$\lim_{p\to+\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$$

uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Solução: Para cada $p \in [1, +\infty)$ seja $f_p(x) = \|x\|_p$. Para cada x fixado em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\|x\|_\infty \le f_p(x) \le N^{1/p}\|x\|_\infty.$$

Como $n^{1/p} \to 1$ quando $p \to +\infty$, concluímos que $f_p(x)$ converge pontualmente em $\mathbb{R}^n$ para a função $f(x) = \|x\|_\infty$.

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Vamos mostrar que $\{f_p\}_p$ é uniformemente de Cauchy em K. Sejam $p, q \in [1, +\infty)$ e suponhamos $q > p$. Então

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \left(n^{1/p} - 1\right) \|x\|_\infty, \quad \forall x \in K$$

Como K é limitado, existe $R > 0$ tal que $\|x\|_\infty \leq R$ para todo $x \in K$, de modo que,

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \left(n^{1/p} - 1\right) R, \quad \forall x \in K.$$

Sabemos que $n^{1/p} \to 1$ quando $p \to +\infty$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $p_0 > 1$ tal que se $p > p_0$ então $n^{1/p} - 1 < \varepsilon/2R$. Portanto, se $q > p > p_0$, então $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$, como queríamos provar.

<u>**Exercício 10.13**</u>: *Seja $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$ e considere $\{f_k\}_k$ a sequência definida por $f_k\colon B \to \mathbb{R}^n$,*

$$f_k(x) = kf(\frac{x}{k}) \quad \forall x \in B,$$

onde $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$. Mostre que se $\{f_k\}_k$ converge uniformemente em B para uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, então f é diferenciável em 0.

Solução: Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ então

$$\|f_k(x) - L(x)\| < \varepsilon/2, \quad \forall x \in A.$$

Pela definição de f_k, temos, para $k \geq k_0$,

$$\|f(\frac{x}{k}) - L(\frac{x}{k})\| < \varepsilon/2k, \quad \forall x \in A.$$

Seja $\epsilon(h) = f(h) - L(h)$ e, para $\varepsilon > 0$, $\delta < 1/k_0$. Então, se $\|h\| < \delta$, podemos escolher $k \geq k_0$ de modo que $1/2k \leq \|h\| < 1/k$, de forma que $x = kh \in A$ e, consequentemente,

$$\frac{\|\epsilon(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|f(h) - L(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon.$$

Como $f(0) = 0$, podemos escrever $f(h) = L(h) + \epsilon(h)$ e concluímos que f é diferenciável em 0.

<u>**Exercício 10.14**</u>: *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sequência de funções reais contínuas convergindo pontualmente em K para uma função contínua f. Se*

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x), \quad \forall x \in K, \quad k = 1, 2, \ldots$$

mostre que a convergência é uniforme. Mostre que o resultado é falso se K não é compacto.

Solução: Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_x$, então $f(x) - f_k(x) < \varepsilon/3$. Além disso, da continuidade de f e f_{k_x}, podemos escolher $\delta_x > 0$ tal que se $\|y - x\| < \delta_x$, então

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$$
$$|f_{k_x}(y) - f_{k_x}(x)| < \varepsilon/3$$

Pela desigualdade triangular, se $\|y - x\| < \delta_x$, então

$$|f(y) - f_{k_x}(y)| < \varepsilon.$$

Como K é compacto, existe uma família finita $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ de pontos de K tal que $K \subset \cup_{i=1}^n B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. Seja $k_0 = \max\{k_{x_1}, k_{x_2}, \ldots, k_{x_n}\}$. Se $y \in K$ então $y \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ para algum $i = 1, \ldots, n$ e se $k \geq k_0$, temos

$$0 \leq f(y) - f_k(y) \leq f(y) - f_{k_0}(y) \leq f(y) - f_{n_{x_i}}(y) < \varepsilon.$$

O resultado é falso se K não é compacto. Por exemplo, considere $K = [0, +\infty)$ e $f_k \colon K \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < k \\ k + 1 - x & \text{se } k \leq x < k + 1 \\ 0 & \text{se } k \geq k + 1 \end{cases}$$

Então f_k converge pontualmente para a função constante $f(x) = 1$, $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$. No entanto, f_k não converge uniformemente para f, pois

$$\sup_{x \in K} |f_k(x) - f(x)| = 1.$$

<u>**Exercício 10.15**</u>: *Seja $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência de polinômios definida recursivamente por*

(a) $p_1(x) = x/2$;

(b) $p_{k+1}(x) = p_k(x) + \frac{1}{2}\big(x - p_k(x)^2\big)$, $k \in \mathbb{N}$.

Mostre que $p_1(x) \leq p_2(x) \leq \cdots \leq \sqrt{x}$ para todo $x \in [0, 1]$ e conclua que a sequência $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0, 1]$ para a função $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução: Provemos por indução. É claro que $0 \leq p_1(x) \leq \sqrt{x}$, para todo $x \in [0, 1]$. Suponhamos então

$$p_{k-1}(x) \leq p_k(x) \quad \text{e} \quad p_{k-1}(x) \leq \sqrt{x}, \ \forall x \in [0, 1].$$

Da segunda desigualdade acima, obtemos

$$p_k(x) \leq \sqrt{x} \ \Rightarrow \ x - p_k(x)^2 \geq 0 \ \Rightarrow \ p_{k+1}(x) = p_k(x) + \frac{1}{2}\big(x - p_k(x)^2\big) \geq p_k(x).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} p_k(x) \leq \sqrt{x} \leq 1 \ &\Rightarrow \ 1 - p_k(x) \geq 1 - \sqrt{x} \ \Rightarrow \ \big(1 - p_k(x)\big)^2 \geq \big(1 - \sqrt{x}\big)^2 \\ &\Rightarrow \ 1 - 2p_k(x) + p_k(x)^2 \geq 1 - 2\sqrt{x} + x \\ &\Rightarrow \ \sqrt{x} \geq p_k(x) + \frac{1}{2}\big(x - p_k(x)^2\big) = p_{k+1}(x). \end{aligned}$$

11

O Espaço C(K;R^m)

<u>**Exercício 11.1**</u>: *Sejam $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o funcional*

$$J\colon C\big([a,b];\mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}, \quad J(f) := \int_a^b \psi(x) g\big(f(x)\big)\, dx$$

é contínuo em $C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$

Solução: Se $\psi \equiv 0$, nada temos a provar. Para ψ não nula, seja $M = \int_a^b |\psi(x)|\, dx$. Sejam $f_0 \in C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$ e $\varepsilon > 0$. Definimos $R = \|f_0\|_\infty + 1$. Como g é uniformemente contínua no compacto $[-R,R]$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(s_1) - g(s_2)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

para todo $s_1, s_2 \in [-R,R]$ satisfazendo $|s_1 - s_2| < \delta_1$.
Consideremos $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$. Então, se $h \in C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$ é tal que $\|h\|_\infty < \delta$, temos

$$|J(f_0 + h) - J(f_0)| \le \int_a^b |\psi(x)| \left| g\big(f_0(x) + h(x)\big) - g\big(f_0(x)\big)\right|\, dx < \varepsilon$$

e concluímos que J é contínuo em f_0.

<u>**Exercício 11.2**</u>: *Sejam $J_i\colon C\big([a,b];\mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ os funcionais definidos abaixo.*

$$J_1(f) := \int_a^b \cos f(x)\, dx, \quad J_2(f) := \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{1 + f(x)^2}}\, dx,$$
$$J_3(f) := \int_a^b |f(x)|^p\, dx, \quad (p > 0).$$

Mostre que J_1 e J_2 são funcionais uniformemente contínuos e que J_3 é uniformemente contínuo se e somente se $p = 1$.

Solução: É claro que os funcionais J_1, J_2 e J_3 são contínuos, pois $g_1(s) = \cos s$, $g_2(s) = s/(1+s^2)$ e $g_3(s) = |s|^p$, $(p > 0)$ são funções contínuas.

Provemos que J_1 e J_2 são uniformemente contínuos. Primeiramente observemos que, para $i = 1, 2$, $|g_i'(s)| \leq 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, $|g_i(s_1) - g_i(s_2)| \leq |s_1 - s_2|$, quaisquer que sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, de modo que, quaisquer que sejam $f_1, f_2 \in C\big([a, b]; \mathbb{R}\big)$, temos

$$\big|g_i\big(f_1(x)\big) - g_i\big(f_2(x)\big)\big| \leq |f_1(x) - f_2(x)| \leq \|f_1 - f_2\|_\infty, \quad \forall x \in [a, b].$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta \leq \varepsilon/(b - a)$ para se concluir que

$$|J(f_1) - J(f_2)| \leq (b - a)\|f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon$$

se $\|f_1 - f_2\|_\infty < \delta$.

Provemos que J_3 é uniformemente contínuo se $p = 1$. Como vimos no Capítulo 2, $J_3(f) = \|f\|_1$ é uma norma em $C\big([a, b]; \mathbb{R}\big)$. Portanto, da desigualdade triangular temos

$$|J_3(f_1) - J_3(f_2)| = |\,\|f_1\|_1 - \|f_2\|_1| \leq \|f_1 - f_2\|_1 \leq (b - a)\|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Provemos agora que J_3 não é uniformemente contínuo se $p \neq 1$.

Suponhamos por absurdo que J_3 seja uniformemente contínuo. Então, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|J_3(f_1) - J_3(f_2)| < 1 \tag{11.1}$$

para todo $f_1, f_2 \in C\big([a, b]; \mathbb{R}\big)$ satisfazendo $\|f_1 - f_2\|_\infty < \delta$.

Para cada $c > 0$, consideremos f_c a função constante $f_c(x) = c$. Então, $|J_3(f_{c_1}) - J_3(f_{c_2})| < 1$ quaisquer que sejam c_1, c_2 tais que $|c_1 - c_2| < \delta$. Em particular, se $0 < \mu < \delta$ então

$$|J_3(f_{c+\mu}) - J_3(f_c)| < 1, \quad \forall c > 0.$$

Por outro lado, $J(f_{c+\mu}) - J(f_c) = (b - a)\big((c + \mu)^p - c^p\big)$ e temos, em particular

$$(b - a)|(c + \mu)^p - c^p| < 1 \quad \text{se} \quad \forall c > 0. \tag{11.2}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (c, c + \mu)$ tal que

$$(c + \mu)^p - c^p = p\xi^{p-1} \geq p \min\{c^{p-1}, (c + \mu)^{p-1}\}. \tag{11.3}$$

De (11.1), (11.2) e (11.3), obtemos

$$\min\{c^{p-1}, (c + \mu)^{p-1}\} < \frac{1}{(b - a)p}, \quad \forall c > 0$$

ou equivalentemente

$$c < \left[\frac{1}{(b - a)p}\right]^{1/p-1} \quad \forall c > 0 \quad \text{se} \quad p > 1,$$

$$(c + \mu) > \left[\frac{1}{(b - a)p}\right]^{1/p-1} \quad \forall c > \mu > 0 \quad \text{se} \quad p < 1,$$

o que é um absurdo.

Exercício 11.3: *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $J\colon C\big(K;\mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}$ um funcional. Mostre que J é contínuo em $f_0 \iff$ para toda sequência $\{f_k\}$ em $C\big(K;\mathbb{R}\big)$ tal que $f_k \longrightarrow f$ uniformemente em K então $J(f_k) \longrightarrow J(f)$.*

Solução: Suponhamos J contínuo em f_0. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|f - f_0\|_\infty < \delta$ tem-se $|J(f) - J(f_0)| < \varepsilon$.

Seja $\{f_k\}_k$ sequência convergindo uniformemente para f_0 em K. Então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, $\|f_k - f_0\|_\infty < \delta$ e consequentemente $|J(f_k) - J(f_0)| < \varepsilon$.

Reciprocamente, suponhamos que J não seja contínua em f_0. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $f_\delta \in C(K, \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\|f_\delta - f_0\|_\infty < \delta \quad \text{e} \quad |J(f_\delta) - J(f_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\delta = 1/k$. Então existe $f_k \in C(K, \mathbb{R})$ satisfazendo

$$\|f_k - f_0\|_\infty < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad |J(f_k) - J(f_0)| \geq \varepsilon_0$$

o que significa que f_k converge uniformemente para f_0 em K mas $J(f_k)$ não converge para $J(f_0)$.

Exercício 11.4: *Seja $V = C\big([a, b]; \mathbb{R}\big)$ e considere os conjuntos definidos abaixo:*

(a) $F_1 = \{\phi \in V\,;\, |\phi(x)| \leq 1 + \int_a^x |\phi(s)|\, ds\}$.

(b) $F_2 = \{\phi \in V\,;\, \phi$ *derivável*, $\phi(a) = 1, 0 \leq \phi'(x) < \phi^+(x)\}$.

(c) $F_3 = \{\phi \in V\,;\, \phi$ *derivável*, $\phi' \in F_1\}$.

Quais são fechados? Quais são limitados? Quais são compactos?

Solução: (a) F_1 é fechado e limitado em V, mas não é compacto. Para provar que F_1 é fechado, seja $\phi \in F_1'$ e $\phi_n \in F_1$ tal que $\phi_n \underset{\rightarrow}{\text{u}} \phi$ em $[a, b]$. Então $\phi_n(x) \to \phi(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Além disso, pelo Teorema 10.8,

$$\int_a^x |\phi_n(s)|\, ds \to \int_a^x |\phi(s)|\, ds \quad \forall x \in [a, b].$$

Logo,

$$|\phi(x)| \leq 1 + \int_a^x |\phi(s)|\, ds$$

e concluímos que $\phi \in F_1$.

Para provar que F_1 é limitado, observemos que a desigualdade de Gronwall (veja Lema 11.14) nos garante que

$$\phi \in F_1 \quad \Rightarrow \quad |\phi(x)| \leq e^x \leq e^b, \quad \forall x \in [a, b].$$

Portanto, se $\phi \in F_1$ então $\|\phi\|_\infty \leq e^b$ e concluímos que F_1 é limitado em V.

Para mostrar que F_1 não é compacto, considere

$$\phi_n(x) = \begin{cases} n(x - a) & \text{se } a \leq x \leq a + 1/n \\ 1 & \text{senão} \end{cases} \tag{11.4}$$

É claro que $\phi_n \in F_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito,

$$\int_a^x |\phi_n(s)|\, ds = \begin{cases} n(x-a)^2/2 & \text{se } a \leq x \leq a + 1/n \\ x - a - 1/2n & \text{senão} \end{cases} \tag{11.5}$$

Observe que se $x \in [a, a+1/n]$ então $0 \leq n(x-a) \leq 1$, de modo que

$$n(x-a) \leq 1 + \frac{n}{2}(x-a)^2. \tag{11.6}$$

Por outro lado, se $x \in [a+1/n, b]$, então $x - a \geq 1/n$ e $x - a - 1/2n \geq 1/2n > 0$, de modo que

$$1 \leq 1 + (x - a - 1/2n). \tag{11.7}$$

Comparando (11.6) e (11.7) com (11.4) e (11.5), concluímos que $\phi_n \in F_1$.

Suponhamos por absurdo que F_1 seja compacto. Então a sequência definida por (11.4) possui subsequência convergindo uniformemente para alguma função $\phi \in F_1$ (ϕ necessariamente contínua). Como a convergência uniforme implica na convergência pontual, temos tambem $\phi_n \underset{\rightarrow}{\text{p}} \phi$ em $[a, b]$.

Podemos verificar diretamente que ϕ_n converge pontualmente para a função

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = a \\ 1 & \text{se } x \in (a, b] \end{cases}$$

que é descontínua em $x = a$, o que é uma contradição.

Observe também que a sequência $\{\phi_n\}_n$ nos permite mostrar que F_1 não é equicontí nuo. De fato, se F_1 fosse equicontínuo, teríamos para $\varepsilon = 1/2$ a existência de $\delta > 0$ tal que

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| < 1/2 \quad \text{se} \quad |x - y| < \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mas para $n > 1/\delta$, $x = a$ e $y = a + 1/n$ temos $|x - y| < \delta$ e no entanto

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| = 1 > \varepsilon_0.$$

(b) F_2 é limitado e equicontínuo, mas não é fechado em V.

Provemos que F_2 é limitado. Se $\phi \in F_2$, então ϕ é função crescente pois $\phi'(x) \geq 0$. Em particular $\phi(x) \geq 1$ para todo $x \in [a, b]$. Logo,

$$\phi \in F_2 \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) - \phi(x) < 0, \quad \forall x \in (a, b). \tag{11.8}$$

Integrando (11.8) de a a x, obtemos

$$\phi \in F_2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \phi(x) < e^{x-a} \leq e^{b-a}, \quad \forall x \in [a, b],$$

e concluímos que F_2 é limitado (pois $\|\phi\|_\infty \leq e^{b-a}$).

Para provar que F_2 é equicontínuo, observamos de (11.8) que se $\phi \in F_2$ então $0 \leq \phi'(x) \leq e^{b-a}$ e a conclusão segue do Teorema do Valor Médio.

Para verificar que F_2 não é fechado, considere a sequência

$$\phi_n(x) = e^{n(x-a)/(n+1)}, \quad x \in [a,b].$$

é fácil ver que $\phi_n \in F_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que ϕ_n converge uniformemente para $\phi(x) = e^{x-a}$ que não pertence a F_2.

Observe que, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, podemos afirmar que $\overline{F_2}$ é compacto.

Observe também que, contrariamente ao que se poderia pensar

$$\overline{F_2} \underset{\supset}{\neq} \big\{\phi \in V\,;\, \phi \text{ derivável}, \phi(a) = 1, 0 \le \phi'(x) \le \phi(x)\big\}.$$

Por quê ? Quem é então $\overline{F_2}$?

(c) F_3 é equicontínuo, mas não é fechado nem limitado.

Provemos que F_3 é equicontínuo. Se $\phi \in F_3$, então $\phi \in C^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ e, da desigualdade de Gronwall, $|\phi'(x)| \le e^x \le e^b$, $\forall x \in [a,b]$. Pelo Teorema do Valor Médio,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le e^b|x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b]$$

e concluímos que F_3 é equicontínuo.

Provemos que F_3 não é limitado. Podemos supor sem perda de generalidade que $a = 0$ e $b = 1$. Considere $\phi_n(x) = e^x + n$. É claro que

$$\phi_n'(x) = e^x = 1 + \int_0^x e^s\,ds = 1 + \int_a^x \phi_n'(s)\,ds,$$

que mostra que $\phi_n \in F_3$. Como $\|\phi_n\|_\infty \ge n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que F_3 não é limitado.

Provemos que F_3 não é fechado. Podemos supor sem perda de generalidade que $a = -1$ e $b = 1$. Consideremos a sequência

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,-1/n] \\ (nx+1)^2/4n & \text{se } x \in [-1/n, 1/n] \\ x & \text{se } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Então podemos verificar que $f_n \in F_3$ e que $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ em $[-1,1]$, onde $f(x) = x^+$ que não pertence a F_3 pois não é derivável.

Vale observar que as funções f_n foram obtidas colando curvas de Bézier da forma $(1-t)^2A + 2t(1-t)B + t^2C$, onde $A = (-1/n, 0)$, $B(0,0)$ e $C = (1/n, 1/n)$.

<u>Exercício 11.5</u>: *Seja $\mathcal{X} = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, onde $f_k\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ é definida por*

$$f_k(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x + 4k^2\pi^2}.$$

a) Prove que $\mathcal{X}$ é equicontínuo e uniformemente limitado.

b) Prove que $f_k \to 0$ pontualmente, mas não converge uniformemente em $[0,+\infty[$. (Qual a incoerência com o Teorema de Arzelà-Ascoli?)

Solução: Provemos que $\mathcal{X}$ é equicontínuo. Se $f_k \in \mathcal{X}$, temos do TVM

$$|f_k(y) - f_k(x)| = \left| \frac{\cos\sqrt{\xi + 4\pi^2 k^2}}{2\sqrt{\xi + 4\pi^2 k^2}} \right| |x - y| \leq \frac{1}{4\pi}|x - y|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $x, y \in [0, +\infty)$. Logo, para $\varepsilon > 0$ dado, basta escolher $\delta \leq 4\pi\varepsilon$ para concluir que $\mathcal{X}$ é equicontínuo.

Provemos que f_k converge pontualmente para zero em $[0, +\infty)$. Para x qualquer fixado, podemos escrever

$$\sqrt{x + 4\pi^2 k^2} = 2k\pi\sqrt{1 + \frac{x}{4\pi^2 k^2}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\sqrt{1+h} \leq 1 + h/2$ para todo $h \geq 0$, temos

$$2k\pi \leq \sqrt{x + 4\pi^2 k^2} \leq 2k\pi\left(1 + \frac{x}{8k^2\pi^2}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para k suficientemente grande (dependendo do valor de x), temos $x/4k\pi < \pi/2$ e como a função $s \mapsto \operatorname{sen} s$ é crescente no intervalo $[2k\pi, 2k\pi + \pi/2]$, temos

$$\operatorname{sen} 2k\pi \leq \operatorname{sen}\sqrt{x + 4k^2\pi^2} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4k\pi}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$0 \leq f_k(x) \leq \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4k\pi}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $k \to +\infty$ obtemos $f_k(x) \to 0$.

A convergência não é uniforme, pois para $x_k = 2k\pi^2 + \pi^2/4$ temos $f_k(x_k) = 1$. Portanto, $\|f_k\|_\infty = 1$ para todo k.

Observe que não há incoerência com o Teorema de Arzela-Ascoli, pois $[0, +\infty)$ não é compacto.

<u>Exercício 11.6</u>: *Mostre que se $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é função contínua tal que*

$$\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

então $f(x) = 0$ em $[0,1]$.

Solução: Pela linearidade da integral, temos

$$\int_0^1 f(x)p(x)\,dx = 0$$

para todo polinômio $p(x)$. Pelo Teorema de Weierstrass, existe uma sequência de polinômios $\{p_k\}_k$ que converge uniformemente para f em $[0,1]$.

Como fp_k converge uniformemente para f^2 em $[0,1]$ temos do Teorema 10.8,

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = \lim_{k \to +\infty} \int_0^1 f(x)p_k(x)dx = 0.$$

Portanto, $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, como queríamos provar.

<u>**Exercício 11.7**</u>: *Seja $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a solução do problema de valor inicial:*

$$y' = \frac{y}{1+y^2}, \quad y(0) = a_k.$$

Se $a_k \to a$, mostre que $f_k \to f$ uniformemente em $[0,1]$, onde $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é a solução do problema de valor inicial:

$$y' = \frac{y}{1+y^2}, \quad y(0) = a. \tag{11.9}$$

Solução: Como $a_k \to a$, existe $R > 0$ tal que $|a_k| \leq R$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (toda sequência convergente é limitada). Seja $\mathcal{X} = \{f_1, f_2, \ldots\}$.

Afirmativa 1: $\mathcal{X}$ é limitado em $C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$.

De fato, $f_k \in \mathcal{X}$ se, e somente se,

$$f_k(x) = a_k + \int_0^x \frac{f_k(s)}{1+f_k(s)^2}\,ds, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{11.10}$$

Logo,

$$|f_k(x)| \leq |a_k| + \int_0^x \frac{|f_k(s)|}{1+f_k(s)^2}ds \leq |a_k| + \int_0^x |f_k(s)|\,ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (veja Lema 11.14), temos

$$|f_k(x)| \leq |a_k|e^x \leq Re, \quad \forall x \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\|f_k\|_\infty \leq Re$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e demonstramos a afirmativa.

Afirmativa 2: $\mathcal{X}$ é equicontínuo.

De fato, (supondo $y > x$)

$$|f_k(y) - f_k(x)| = \left|\int_x^y \frac{f_k(s)}{1+f_k(s)^2}\,ds\right| \leq \int_x^y |f_k(s)|\,ds \leq Re|y-x|.$$

Portanto, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, $\overline{\mathcal{X}}$ é compacto em $C\big([0,1];\mathbb{R}\big)$ e podemos extrair uma subsequência $\{f_{k_j}\}_j$ de $\mathcal{X}$ tal que

$$f_{k_j} \underset{\to}{u} f \quad \text{em} \quad [0,1], \quad f \in \overline{\mathcal{X}}.$$

Pelo Exercício 10.5, temos

$$\frac{f_{k_j}}{1+f_{k_j}^2} \overset{\text{u}}{\longrightarrow} \frac{f}{1+f^2} \quad \text{em} \quad [0,1]$$

e, como consequência do Teorema 10.8,

$$\int_0^x \frac{f_{k_j}(s)}{1+f_{k_j}(s)^2}\,ds \overset{\text{u}}{\longrightarrow} \int_0^x \frac{f(s)}{1+f(s)^2}\,ds,$$

de modo que, fazendo k_j tender a infinito em (11.10), temos

$$f(x) = a + \int_0^x \frac{f(s)}{1+f(s)^2}\,ds$$

e concluímos que f é solução do problema de valor incial (11.9)

Pelo Teorema de Picard (Teorema 11.2), o problema de valor incicial (11.9) possui uma única solução. Logo, a sequência inteira $\{f_k\}_k$ converge para, como queríamos provar.

Exercício 11.8: *Considere a sequência* $\{\alpha_i\}_{i=0,\dots,n-1}$ *definida em . Mostre que*

$$\psi(x) = \alpha_0(x - x_0)^+ + \cdots + \alpha_{n-1}(x - x_{n-1})^+$$

satisfaz $\psi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$

Solução: Faremos a prova por indução. Primeiramente, observemos que $\psi(x_1) = \alpha_0(x_1 - x_0) = f(x_1)$. Suponhamos a propriedade válida para $k-1$: $\psi(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$. Como

$$\psi(x_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j(x_i - x_j) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{i-j}{n}\alpha_j$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$, podemos escrever

$$\psi(x_k) = \frac{k}{n}\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} j\alpha_j$$
$$\psi(x_{k-1}) = \frac{k-1}{n}\sum_{j=0}^{k-2}\alpha_j - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-2} j\alpha_j$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\psi(x_k) &= \frac{k}{n}\sum_{j=0}^{k-2}\alpha_j + \frac{k}{n}\alpha_{k-1} - \frac{1}{n}\left[\sum_{j=0}^{k-2} j\alpha_j + (k-1)\alpha_{k-1}\right] \\ &= \psi(x_{k-1}) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j = f(x_{k-1}) + f(x_1) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j\end{aligned} \tag{11.11}$$

Ovservando que $f(x_0) = f(0) = 0$ e que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j &= \sum_{j=1}^{k-1}[f(x_{j+1}) - f(x_j)] - \sum_{j=1}^{k-1}[f(x_j) - f(x_{j-1})] \\ &= f(x_k) - f(x_1) - f(x_{k-1}) + f(x_0)\end{aligned}$$

obtemos, após substituir em (11.11), $\psi(x_k) = f(x_k)$, como queríamos provar.

Exercício 11.9: *Seja* $V = C([0,1];\mathbb{R})$ *e* $J\colon V \to \mathbb{R}$ *o funcional definido por*

$$J(f) = \int_0^1 \frac{1}{1 + f(x)^2}\,dx, \qquad \forall f \in V.$$

a) *Mostre que* J *é contínuo em* V.

b) *Seja* $\mathcal{X} = \{f \in V\,;\, f(0) = 0 \text{ e } f \text{ é função Lipschitz contínua com constante } L > 0\}$. *Mostre que existe* $\overline{f} \in \mathcal{X}$ *tal que* $J(\overline{f}) = \min\{J(f)\,;\, f \in \mathcal{X}\}$.

c) *Calcule* $\overline{f}$.

Solução: (a) J é funcional contínuo por consequência direta do Exercício 11.1, visto que $g(s) = 1/(1+s^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) $\mathcal{X}$ é equicontínuo, visto que, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta \leq \varepsilon$.

$\mathcal{X}$ é limitado. De fato, se $f \in \mathcal{X}$, então $|f(x)| \leq Lx \leq L$, para todo $x \in [0,1]$. Logo, $\|f\|_\infty \leq L$ para toda $f \in \mathcal{X}$.

$\mathcal{X}$ é fechado. De fato, se f_n é sequência de $\mathcal{X}$ que converge uniformemente para f em $[0,1]$, é fácil concluir que $f \in \mathcal{X}$.

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, $\mathcal{X}$ é compacto. Como J é contínuo, J atinge o mínimo em algum $\overline{f} \in \mathcal{X}$.

(c) A função $g(s) = 1/(1+s^2)$ é par, positiva, decrescente em $[0,+\infty)$ e tende a zero quando $|s| \to +\infty$. Portanto, devemos escolher $\overline{f} \in \mathcal{X}$ tal que $\overline{f}(x)$ seja máximo em $\mathcal{X}(x) = [-Lx, Lx]$. Como a função $x \mapsto Lx$ pertence a $\mathcal{X}$, temos $\overline{f}(x) = Lx$ e

$$J(\overline{f}) = \int_0^1 \frac{1}{1+L^2x^2}\,dx = \frac{1}{L}\arctan\left(\frac{1}{L}\right).$$

<u>Exercício 11.10</u>: *Seja $V = C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$ e $J\colon V \to \mathbb{R}$ o funcional definido por*

$$J(f) = \begin{cases} \int_a^b |f(x)|\,dx & \text{se } f \not\equiv 0, \\ \alpha & \text{se } f \equiv 0, \end{cases}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Para que valores de α J é funcional semicontínuo em V?

Solução: Por argumentos análogos aos usados na solução do Exercício 4.26, prova-se que J é s.c.i. se, e somente se, para cada $f \in V$ temos $J(f) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(f_n)$ para toda sequência $\{f_n\}_n$ de V que converge uniformemente para f em $[a,b]$.

Vimos no Exercício 1 deste Capítulo que o funcional

$$f \mapsto \int_a^b |f(x)|\,dx$$

é contínuo em V. Logo, se $f_n \overset{\mathrm{u}}{\to} f$ em $[a,b]$, então

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Portanto, J é s.c.i. em V se, e somente se, $\alpha \leq 0$.

<u>Exercício 11.11</u>: *Sejam $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ função contínua e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função de classe C^1. Mostre que o funcional*

$$J\colon C\big([a,b];\mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}$$
$$J(f) = \int_a^b \psi(x)g\big(f(x)\big)\,dx$$

é diferenciável em $C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$ e que $J'(f)h = \int_a^b \psi(x)g'(f(x))h(x)\,dx$.

Solução: Fixemos $f \in V = C([a,b];\mathbb{R})$. É claro que se $h \in V$, a aplicação

$$x \mapsto \psi(x)\Big[g\big(f(x)+h(x)\big) - g\big(f(x)\big) - g'\big(f(x)\big)h(x)\Big]$$

é contínua em $[a,b]$. Portanto, podemos definir o funcional $\epsilon\colon V \to \mathbb{R}$

$$\epsilon(h) = \int_a^b \psi(x)\Big[g\big(f(x)+h(x)\big) - g\big(f(x)\big) - g'\big(f(x)\big)h(x)\Big]\,dx \tag{11.12}$$

Pelo TVM, temos

$$g\big(f(x)+h(x)\big) - g\big(f(x)\big) = g'\big(f(x)+t_x h(x)\big)h(x),$$

para algum $t_x \in (0,1)$. Portanto,

$$\epsilon(h) = \int_a^b \psi(x)\Big[g'\big(f(x)+t_x h(x)\big) - g'\big(f(x)\big)\Big]h(x)\,dx.$$

Tomando o valor absoluto na igualdade acima, temos

$$|\epsilon(h)| \leq \left(\int_a^b |\psi(x)|\,\big|g'\big(f(x)+t_x h(x)\big) - g'\big(f(x)\big)\big|\,dx\right)\|h\|_\infty,$$

e consequentemente

$$\frac{|\epsilon(h)|}{\|h\|_\infty} \leq \int_a^b |\psi(x)|\,\big|g'\big(f(x)+t_x h(x)\big) - g'\big(f(x)\big)\big|\,dx.$$

Seja $R = \|f\|_\infty + 1$, $M = \int_a^b |\psi(x)|\,dx$ e $\varepsilon > 0$. Como g' é uniformemente contínua em $[-R,R]$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|g'(\xi) - g'(\eta)| < \varepsilon/M$ $\forall\, \xi,\eta \in [-R,R]$ satisfazendo $|\xi - \eta| < \delta_1$.
Se considerarmos $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$ e $h \in V$ tal que $\|h\|_\infty < \delta$, então

$$|f(x)+t_x h(x)| \leq R \quad \text{e} \quad |h(x)| \leq R, \quad \forall x \in [a,b].$$

e consequentemente

$$\big|g'\big(f(x)+t_x h(x) - g'\big(f(x)\big)\big)\big| < \varepsilon/M, \quad \forall x \in [a,b].$$

Assim, se $\|h\|_\infty < \delta$, concluímos que

$$\frac{|\epsilon(h)|}{\|h\|_\infty} < \varepsilon. \tag{11.13}$$

Para $f \in V$ fixado, o funcional

$$h \mapsto \int_a^b \psi(x)g'\big(f(x)\big)h(x)\,dx$$

é linear e contínuo. Portanto, de (11.12) e (11.13) concluímos que J é diferenciável e

$$J'(f)h = \int_a^b \psi(x)g'\big(f(x)\big)h(x)\,dx.$$

Exercício 11.12: *Seja $V = C\big([0,2];\mathbb{R}\big)$ e considere o funcional $J\colon V \to \mathbb{R}$ definido por*

$$J(f) = \int_0^2 \frac{xf(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}dx.$$

a) Mostre que J é funcional contínuo em V;

b) Mostre que J é diferenciável em V e calcule $J'(f)\varphi$;

c) Seja $\mathcal{X} = \big\{f \in V\,;\, f(0) = 0, |f(2)| \le 1 \text{ e } |f(x) - f(y)| \le |x-y| \quad \forall x, y \in [0,2]\big\}$. Mostre que $\mathcal{X}$ é compacto em V.

d) Calcule f_0 em $\mathcal{X}$ tal que $J(f_0) = \max\big\{J(f)\,;\, f \in \mathcal{X}\big\}$.

Solução: (a) A continuidade de J decorre diretamente do Exercício 11.1, pois $g(s) = s/\sqrt{1+s^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e $\psi(x) = x$ é contínua em $[0,2]$.

Como $g(s)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e $g'(s) = 1/(1+s^2)^{3/2}$, concluímos do Exercício 11.11 que J é diferenciável e

$$J'(f)h = \int_0^2 \frac{xh(x)}{(1+f(x)^2)^{3/2}}\,dx.$$

A compacidade de $\mathcal{X}$ decorre do Teorema de Arzelà-Ascoli. De fato, $\mathcal{X}$ é equicontínuo, pois para $\varepsilon > 0$ dado, basta tomar $0 < \delta \le \varepsilon$. Como $\mathcal{X}$ é fechado e limitado em V, temos a compacidade.

(c) Da compacidade de $\mathcal{X}$ e da continuidade de J, podemos garantir que existe $f_0 \in \mathcal{X}$ ponto de máximo global de J em $\mathcal{X}$.

Para calcular f_0, devemos observar que $g(s) = s/\sqrt{1+s^2}$ é crescente em $[0,+\infty)$. Assim, f_0 deve ser tal que, para cada $x \in [0,2]$, $f_0(x)$ seja o maior valor possível em $\mathcal{X}(x)$. Portanto, devemos tomar

$$f_0(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \frac{3}{2}] \\ 3 - x & \text{se } x \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$

Exercício 11.13: *Seja $V = C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$ munido da norma $\|\ \|_\infty$ e considere o conjunto $\mathcal{X} \subset V$ das funções que satisfazem as seguintes priopriedades:*

(a) $f(a) = 0$;

(b) para cada $f \in \mathcal{X}$, existe $\alpha_f \in [1/2, 1]$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y|^{\alpha_f},\ \forall x, y \in [a,b].$$

Mostre que $\mathcal{X}$ é compacto em V.

Solução: Provemos que $\mathcal{X}$ é lmitado. Se $f \in \mathcal{X}$, existe $\alpha_f \in [1/2, 1]$ tal que

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| \le |x-a|^{\alpha_f} \le \max\{b-a, \sqrt{b-a}\}.$$

Provemos agora que $\mathcal{X}$ é equicontínuo. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta_\varepsilon > 0$ solução de $\delta + \sqrt{\delta} = \varepsilon$. Se $|x-y| < \delta_\varepsilon$ e $f \in \mathcal{X}$, então

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y|^{\alpha_f} \le |x-y| + \sqrt{|x-y|} < \delta_\varepsilon + \sqrt{\delta_\varepsilon} = \varepsilon.$$

Logo, $\mathcal{X}$ é relativamente compacto em V. Para provar que $\mathcal{X}$ é compacto, é suficiente mostrar que $\mathcal{X}$ é fechado. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{X}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$. Por hipótese, existe $\alpha_n \in [1/2, 1]$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le |x-y|^{\alpha_n}, \quad \forall x, y \in [a,b]. \tag{$*$}$$

Como $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, podemos extrair uma subsequência α_{n_k} que converge para $\alpha_0 \in [1/2, 1]$. Então, passando ao limite em $(*)$ com $k \to +\infty$, temos

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y|^{\alpha_0}, \quad \forall x, y \in [a,b].$$

Logo, $f \in \mathcal{X}$ e assim concluímos a prova.

Exercício 11.14: *Seja $x_0 \in [a,b]$ e $J\colon C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$ o funcional de Dirac definido por $J(f) = f(x_0)$. Mostre que J é linear e contínua. Em particular, J é diferenciável e $J'(f)h = J(h)$.*

Solução: É claro que $J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$, para todo $f, g \in C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$ e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$|J(f) - J(g)| = |f(x_0) - g(x_0)| \le \|f - g\|_\infty$$

e concluímos que J é Lipschitz contínua. Portanto, J é diferenciável e

$$J'(f)h = h(x_0), \quad \forall h \in C\big([a,b];\mathbb{R}\big).$$

isto é, $J'(f) = J$ para todo $f \in C\big([a,b];\mathbb{R}\big)$.

Exercício 11.15: *Seja $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua satisfazendo a seguinte propriedade: para cada $M \ge 0$, existe $L_M \ge 0$ tal que se $\|x\|, \|y\| \le M$, então*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L_M\|x-y\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{11.14}$$

a) Mostre que para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $T^*(x_0) > 0$ e uma única curva $\gamma\colon [0, T^*(x_0)[\to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $]0, T^*(x_0)[$ satisfazendo

$$\begin{cases} \gamma'(t) = f\big(t, \gamma(t)\big), & \forall t \in]0, T^*(x_0)[, \\ \gamma(0) = x_0. \end{cases} \tag{11.15}$$

b) Mostre que se $T^*(x_0) < +\infty$, então

$$\lim_{t\to T^*(x_0)^-} \|\gamma(t)\| = +\infty.$$

c) Mostre que a aplicação $T^*\colon \mathbb{R}^n \to]0, +\infty]$ é semicontínua inferiormente.

Solução: Vamos denotar $B_M = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x\| \le M\}$. Por hipótese, para cada $M \ge 0$ existe $L_M \ge 0$ tal que se $x, y \in B_M$, então

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L_M\|x-y\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vamos definir a função $L\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$L(M) = \inf\big\{L_M \,;\, \|f(t,x) - f(t,y)\| \le L_M\|x-y\|,\, \forall x,y \in B_M,\, \forall t \in \mathbb{R}\big\}$$

É claro que L é crescente em $[0,+\infty)$, $L(0) = 0$ e

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L(M)\|x-y\|, \quad \forall x,y \in B_M,\, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se a função $L(M)$ é limitada, então f é globalmente Lipschitz uniformemente em t (veja Teorema 11.2).

(a) A prova deste item será feita em três etapas:

Etapa 1: *Continuidade em relação aos dados inciais e unicidade de solução.*

Seja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in C\big([0,T];\mathbb{R}^n\big)$ tais que

$$\begin{cases} \gamma_j'(t) = f\big(t, \gamma_j(t)\big), & t \in (0,T),\, j = 1,2 \\ \gamma(0) = x_j \end{cases}$$

Denotemos $M_j = \max\{\|\gamma_j(t)\| \,;\, t \in [0,T]\}$ e $M = \max\{M_1, M_2\}$. Então,

$$\begin{aligned} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| &\le \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \|f(s,\gamma_1(s)) - f(s,\gamma_2(s))\|\, ds \\ &\le \|x_1 - x_2\| + L(M)\int_0^t \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\|\, ds. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall (vela Lema 11.12), temos

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| \le \|x_1 - x_2\| e^{L(M)t}, \quad \forall t \in [0,T],$$

de onde conluímos que

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty \le \|x_1 - x_2\| e^{L(M)T}$$

e a continuidade das soluções em relação aos dados iniciais. Em particular, se $x_1 = x_2$, temos $\gamma_1 = \gamma_2$ e a unicidade.

Etapa 2: *Existência de soluções locais.*

Seja $\alpha = \max\{\|f(s,0)\| \,;\, s \in [0,1]\}$. Para cada $M > 1$ definimos

$$\tau(M) = \min\left\{1, \frac{1}{\alpha + ML(M)}, \frac{1}{2L(M)}\right\}.$$

Afirmativa: $\forall x_0 \in B_{M-1}$, existe uma única curva $\gamma_0 \in C\big([0,\tau(M)];\mathbb{R}^n\big)$ solução de

$$\begin{cases} \gamma_0'(t) = f\big(t, \gamma_0(t)\big), & t \in (0,\tau(M)) \\ \gamma_0(0) = x_0 \end{cases} \tag{11.16}$$

Para provar a afirmativa, denotemos por $V = C\big([0,\tau(M)];\mathbb{R}^n\big)$ e $\Phi\colon V \to V$ o operador definido por

$$\Phi(\gamma)(t) = x_0 + \int_0^t f(s,\gamma(s))\,ds, \quad t \in [0,\tau(M)].$$

Então Φ é uma contração em

$$\mathcal{B}_M = \{\gamma \in V\,;\ \|\gamma\|_\infty \le M\}.$$

De fato, se $\gamma \in \mathcal{B}_M$, então

$$\begin{aligned}\|\Phi(\gamma)(t)\| &\le \|x_0\| + \int_0^t \|f(0,\gamma(s))\|\,ds + \int_0^t \|f(s,\gamma(s)) - f(s,0)\|\,ds \\ &\le M - 1 + (\alpha + ML(M))\tau(M) \le M\end{aligned}$$

e verificamos que $\Phi(\mathcal{B}_M) \subset \mathcal{B}_M$. Além disso, se $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathcal{B}_M$, então

$$\|\Phi(\gamma_1(t)) - \Phi(\gamma_2(t))\| \le M\tau(M)\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty \le \frac{1}{2}\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty, \quad \forall t \in [0,T].$$

Pelo Teorema de Banach (veja Teorema 4.28), existe uma única $\gamma_0 \in C\big([0,\tau(M)];\mathbb{R}^n\big)$ ponto fixo de Φ, que necessariamente é solução de (11.16).

Convém aqui observar que $\tau(M)$ depende da constante $M > 1$ fixada acima, de modo que o problema do valor inicial (11.16) admite solução única no intervalo $[0,\tau(M)]$, qualquer que seja o dado inicial $x_0 \in B_{M-1}$.

Etapa 3: *Construção da solução maximal.*

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Tomemos $M_0 = \|x_0\| + 1$. Como $x_0 \in B_{M_0-1}$, segue da Etapa 2 a existência de uma úncia $\gamma_0 \in C\big([0,\tau_0];\mathbb{R}^n\big)$ solução de

$$\begin{cases} \gamma_0'(t) = f\big(t,\gamma_0(t)\big), & t \in (0,\tau_0) \\ \gamma_0(0) = x_0 \end{cases}$$

onde

$$\tau_0 = \min\left\{1, \frac{1}{\alpha + M_0L(M_0)}, \frac{1}{2L(M_0)}\right\}.$$

Seja $x_1 = \gamma_0(\tau_0)$ e $M_1 = \|x_1\| + 1$. Pela Etapa 2 existe uma única $\gamma_1 \in C\big([0,\tau_1];\mathbb{R}^n\big)$ solução de

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) = f\big(t,\gamma_1(t)\big), & t \in (0,\tau_1) \\ \gamma_1(0) = x_1 \end{cases}$$

onde

$$\tau_1 = \min\left\{1, \frac{1}{\alpha + M_1L(M_1)}, \frac{1}{2L(M_1)}\right\}.$$

E assim, sucessivamente, construímos uma sequência de números positivos $\{\tau_k\}_k$, onde

$$\tau_k = \min\left\{1, \frac{1}{\alpha + K_kL(M_k)}, \frac{1}{2L(M_k)}\right\} \tag{11.17}$$

e uma família de funções $\gamma_k \in C\big([0,\tau_k];\mathbb{R}^n\big)$ soluções de

$$\begin{cases} \gamma_k'(t) = f(t,\gamma_k(t)), & 0 < t < \tau_{k-1} \\ \gamma_k(0) = x_k = \gamma_{k-1}(\tau_{k-1}) \end{cases} \tag{11.18}$$

Seja $T_k = \tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_k$ a sequência das somas parciais de $\{\tau_k\}_k$ e consideremos

$$T^*(x_0) = \lim_{k\to+\infty} T_k = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_j$$

($T^*(x_0)$ é um número real positivo se a série converge e é infinito senão).
Definimos $\widetilde{\gamma}\colon [0,T^*(x_0)) \to \mathbb{R}^n$ por

$$\widetilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & \text{se } 0 \le t \le T_0 \\ \gamma_1(t-T_0) & \text{se } T_0 \le t \le T_1 \\ \gamma_2(t-T_1) & \text{se } t_1 \le t \le T_2 \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \end{cases} \tag{11.19}$$

Então é fácil ver que $\widetilde{\gamma} \in C^1$ no intervalo $(0,T^*(x_0))$ e é a única solução de

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma}'(t) = f(t,\widetilde{\gamma}(t)), & 0 < t < T^*(x_0) \\ \widetilde{\gamma}(0) = x_0 \end{cases} \tag{11.20}$$

(b) *A alternativa de explosão.*
Suponhamos $T^*(x_0)$ finito. Então a série $\sum \tau_k$ converge e, consequentemente,

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = 0.$$

É claro que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\tau_k = \min\left\{\frac{1}{\alpha + K_k L(M_k)}, \frac{1}{2L(M_k)}\right\}$$

para todo $k \ge k_0$. Logo,

$$\frac{1}{\tau_k} = \max\{\alpha + M_k L(M_k), 2L(M_k)\} \le \alpha + (2+M_k)L(M_k)$$

e concluímos que

$$\lim_{k\to+\infty} (2+M_k)L(M_k) = +\infty$$

Como $L(M)$ é função crescente, temos necessariamente $M_k \to +\infty$, de modo que

$$\|\widetilde{\gamma}(T_k)\| = \|x_k\| = M_k - 1 \to +\infty.$$

Seja ξ_k sequência de $[0, T^*(x_0))$ convergindo para $T^*(x_0)$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $j_k \in \mathbb{N}$ tal que $T_{j_k} \leq \xi_k < T_{j_k+1}$ e

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}(\xi_k) &= \widetilde{\gamma}(T_{j_k}) + \int_{T_{j_k}}^{\xi_k} f(s, \widetilde{\gamma}(s))\, ds \\ &= \widetilde{\gamma}(T_{j_k}) + \int_0^{\xi_k - T_{j_k}} f\big(s, \gamma_{j_k}(s)\big)\, ds\end{aligned}$$

de modo que

$$\|\widetilde{\gamma}(\xi_k)\| \geq \|\widetilde{\gamma}(T_{j_k})\| - \big(\alpha + M_{j_k} L(M_{j_k})\big)\tau_{j_k} \geq \|\widetilde{\gamma}(T_{j_k})\| - 1 \to +\infty$$

e concluímos que

$$\lim_{t \to T^*(x_0)^-} \|\gamma(t)\| = +\infty$$

como queríamos provar.

A título de observação, vamos mostrar que $T^*(x_0)$ não depende do método utilizado na Etapa 3, isto é, $T^*(x_0)$ não depende da série $\sum \tau_k$. Seja

$$\widetilde{T}(x_0) = \sup\big\{T > 0\,;\ (11.20) \text{ admite solução em } [0, T]\big\}.$$

Seja $\{T_k\}_k$ a sequência (a série $\sum \tau_k$) cujo limite é $T^*(x_0)$. Para $\varepsilon > 0$ dado, existe k_0 tal que $T^*(x_0) - \varepsilon < T_k \leq T^*(x_0)$ para todo $k \geq k_0$. A função $\widetilde{\gamma}$ definida em (11.19) é solução de (11.20) no intervalo $[0, T_k]$. Logo

$$T^*(x_0) - \varepsilon < T_k \leq \widetilde{T}(x_0), \quad \forall k \geq k_0$$

Como ε é arbitrário, concluímos que $T^*(x_0) \leq \widetilde{T}(x_0)$.

Suponhamos $T^*(x_0) < \widetilde{T}(x_0)$. Então $T^*(x_0) < \infty$ e, por definição de $\widetilde{T}(x_0)$, o problema (11.20) admite uma solução $\widehat{\gamma}$ no intervalo $[0, T^*(x_0)]$. Em particular,

$$\max\{\|\widehat{\gamma}(t)\|\,;\ t \in [0, T^*(x_0)]\} < \infty. \tag{11.21}$$

Pela unicidade de solução obtida na Etapa 1, temos

$$\widehat{\gamma}(t) = \widetilde{\gamma}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T < T^*(x_0).$$

Portanto,

$$\|\widehat{\gamma}(t)\| = \|\widetilde{\gamma}(t)\| \overset{t \to T^*(x_0)}{\longrightarrow} +\infty$$

o que está em contradição com (11.21).

(c) *semicontinuidade de* $T^*(x_0)$.

Seja $\{x_m\}_m$ sequência de $\mathbb{R}^n$ convergindo para x_0. Seja γ_m, $m = 1, 2, \ldots$ as soluções maximais de (11.20) com dados iniciais x_m. Vamos mostrar que

$$T^*(x_0) \leq \liminf_{m \to +\infty} T^*(x_m).$$

Consideremos $T_1 < T_2 < \cdots$, $T_k \to T^*(x_0)$. Fixado k arbitrário, seja

$$M = \max\big\{\|\gamma_0(t)\|\,;\, t \in [0, T_k]\big\} + 2,$$

onde γ_0 é a solução maximal com dado inicial x_0. Como $\|x_0\| \leq M - 2 < M - 1$ e como estamos supondo que $x_m \to x_0$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m\| \leq M - 1$ para todo $m \geq m_1$. Pela Etapa 2 do item (a), se tomarmos

$$\tau(M) = \min\left\{1, \frac{1}{\alpha + ML(M)}, \frac{1}{2L(M)}\right\},$$

então γ_m está definida em $[0, \tau(M)]$, $\forall m \geq m_1$. Se $\tau(M) \geq T_k$ concluímos que $T^*(x_m) > T_k$ para todo $m \geq m_k$. Senão, como γ_m converge uniformemente para γ_0 em $[0, \tau(M)]$ (veja Etapa 1), existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\gamma_m(t)\| \leq M - 1$, para todo $t \in [0, \tau(M)]$ e para todo $m \geq m_2$. Em particular, $\|\gamma_m(\tau(M))\| \leq M - 1$ para todo $m \geq m_2$. Novamente, pela Etapa 2, podemos estender γ_m ao intervalo $[0, 2\tau(M)]$, para todo $m \geq m_2$. E assim, sucessivamente, encontramos $m_{j_k} \in \mathbb{N}$ tal que $j\tau(M) > T_k$ e γ_m pode ser estendida ao intervalo $[0, j\tau(M)] \supset [0, T_k]$ para todo $m \geq m_{j_k}$. Assim,

$$T_k \leq j\tau(M) < T^*(x_m), \quad \forall m \geq m_{j_k}.$$

Em particular, $T_k \leq \inf\{T^*(x_m)\,;\, m \geq m_{j_k}\}$. Passando ao limite em k, obtemos

$$T*(x_0) \leq \lim_{k\to+\infty} \inf\{T^*(x_m)\,;\, m \geq m_{j_k}\} = \liminf_{k\to+\infty} T^*(x_m).$$

<u>**Exercício 11.16**</u>: *Seja $f\colon [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(t, x) = \begin{cases} (1-t)x^3 & \textit{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \textit{se } 1 \leq t \leq 2 \\ (t-2)x^3 & \textit{se } t \geq 2 \end{cases}$$

Considere o problema de valor incial

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(t, x(t)\big), & 0 < t < T^*(x_0) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{11.22}$$

Determine a função $T^*\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Solução: Resolvendo a equação por separação de varáveis para t no intervalo $[0, 1]$, temos

$$\frac{dx}{x^3} = (1-t)dt \quad \Rightarrow \quad x^{-2} = t^2 - 2t + x_0^{-2},$$

de onde obtemos

$$x(t) = \frac{|x_0|}{\sqrt{x_0^2(1-t)^2 + 1 - x_0^2}}, \quad 0 \leq t < T^*(x_0). \tag{11.23}$$

Vemos diretamente de (11.23) que se $|x_0| \geq 1$ então

$$T^*(x_0) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x_0^2}}.$$

Por outro lado, se $|x_0| < 1$, temos

$$x(t) = \frac{|x_0|}{\sqrt{x_0^2\big[(1-t)^+\big]^2 + 1 - x_0^2}}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

é solução de (11.22) no intervalo $(0, 2)$.
Resolvendo a equação por separação de varáveis para $t \geq 2$,

$$\frac{dx}{x^3} = (t-2)dt \quad \Rightarrow \quad x^{-2} = \frac{1 - x_0^2}{x_0^2} - (t-2)^2,$$

de onde obtemos

$$x(t) = \frac{|x_0|}{\sqrt{1 - x_0^2 - x_0^2(t-2)^2}}, \quad 2 \leq t < T^*(x_0). \tag{11.24}$$

Portanto

$$T^*(x_0) = 2 + \sqrt{\frac{1}{x_0^2} - 1}.$$

Concluindo, temos a função descontínua (s.c.i.) $T^*\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ (veja Figura 11.1 abaixo),

$$T^*(x_0) = \begin{cases} 2 + \sqrt{1 - x_0^2}/|x_0| & \text{se } |x_0| < 1, \\ 1 - \sqrt{x_0^2 - 1}/|x_0| & \text{se } |x_0| \geq 1. \end{cases}$$

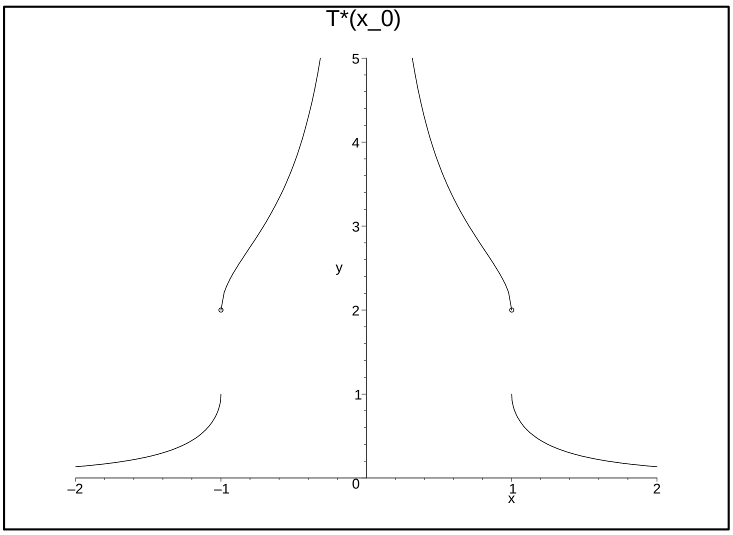


Figura 11.1

12

A integral de Riemann em $\mathbb{R}^n$

<u>**Exercício 12.1**</u>:

(a) *Dê um exemplo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ limitado tal que $\overline{c}(\partial A) > 0$.*

(b) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e $\boldsymbol{I}$ um n-pavê tal que $\boldsymbol{I} \supset A$. Considere uma partição $P \in \mathcal{P}(\boldsymbol{I})$. Mostre que*

$$\overline{J}(\partial A, P) = \overline{J}(A, P) - \underline{J}(A, P).$$

(c) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado tal que A' é finito. Mostre que A é J-mensurável e $c(A) = 0$.*

Solução: (a) Considere $A = \big([0,1] \setminus \mathbb{Q}\big)^2$. Então $\partial A = [0,1]^2$ e $c(\partial A) = 1$.

(b) Afirmo: $\mathrm{Cat}_2(\partial A, P) = \mathrm{Cat}_2(A, P) \setminus \mathrm{Cat}_1(A, P)$.

Se $j \in \mathrm{Cat}_2(\partial A, P)$, então $\boldsymbol{I}_j \cap \partial A \neq \emptyset$. Como $\partial A \subset \overline{A}$, temos $\boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \neq \emptyset$ e consequentemente $j \in \mathrm{Cat}_2(A, P)$. Além disso, $\boldsymbol{I}_j \cap \partial A \neq \emptyset$ implica $\boldsymbol{I}_j \not\subset \overset{\circ}{A}$, de modo que $j \notin \mathrm{Cat}_1(A, P)$.

Por outro lado, se $j \in \mathrm{Cat}_2(A, P) \setminus \mathrm{Cat}_1(A, P)$, então $\boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \neq \emptyset$ e $\boldsymbol{I}_j \not\subset \overset{\circ}{A}$. Logo, $\boldsymbol{I}_j \cap \big(\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}\big) \neq \emptyset$. De fato, observe que $\boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \neq \emptyset$ e $\boldsymbol{I}_j \not\subset \overset{\circ}{A}$ implicam $\boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \cap \big(\overset{\circ}{A}\big)^c \neq \emptyset$ e como $\overline{A} \cap \big(\overset{\circ}{A}\big)^c = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \partial A$, concluímos a afirmativa.

Como consequência da afirmativa, temos a igualdade: $\overline{J}(\partial A, P) = \overline{J}(A, P) - \underline{J}(A, P)$.

(c) Suponhamos inicialmente $A' = \emptyset$. Então, A possui um número finito de pontos: $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Seja $r > 0$. Então,

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_r(x_j),$$

onde B_r denota a bola de raio r com respeito à norma $\| \ \|_\infty$. Assim,

$$0 \leq \overline{c}(A) \leq \sum_{j=1}^{m} \overline{c}\big(B_r(x_j)\big) = m(2r)^n \to 0 \quad \text{se} \quad r \to 0.$$

Suponhamos agora $A' = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Seja $r > 0$ e

$$B = A \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_r(x_j).$$

Então B é vazio ou possui um número finito de elmentos e, pelo item anterior, $\overline{c}(B) = 0$. Como

$$A \subset B \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_r(x_j) \right),$$

temos

$$\overline{c}(A) \leq \overline{c}(B) + \sum_{j=1}^{m} \overline{c}\big(B_r(x_j)\big) \leq m(2r)^n$$

e a conclusão segue.

<u>Exercício 12.2</u>: *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável, o mesmo vale para $\overline{A}$. A recíproca é verdadeira?*

Solução: Fixe um n-pavê tal que $\overline{A} \subset \boldsymbol{I}$ e uma partição P de $\boldsymbol{I}$. Seja $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_m\}$ a família gerada por P. Então, $\mathrm{Cat}_2(\overline{A}, P) = \{j\,;\, \boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \neq \emptyset\} = \mathrm{Cat}_2(A, P)$. Logo, $\overline{J}(\overline{A}, P) = \overline{J}(A, P)$. Além disso, como $A \subset \overline{A}$, temos $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$, de modo que

$$\mathrm{Cat}_1(A, P) = \{j\,;\, \boldsymbol{I}_j \subset \overset{\circ}{A}\} \subset \{j\,;\, \boldsymbol{I}_j \subset \overset{\circ}{\overline{A}}\} = \mathrm{Cat}_1(\overline{A}, P) \quad \Rightarrow \quad \underline{J}(\overline{A}, P) \geq \underline{J}(A, P).$$

Assim,

$$\overline{J}(\overline{A}, P) - \underline{J}(\overline{A}, P) \leq \overline{J}(A, P) - \underline{J}(A, P)$$

de onde concluimos que se A é J-mensurável, $\overline{A}$ também é.

A recíproca é falsa, vide Exercício 12.1(a).

<u>Exercício 12.3</u>: *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ conjunto J-mensurável. Mostre que:*

(a) existe $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sequência de conjuntos elementares tal que

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} c(A_k) = c(A);$$

(b) existe $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sequência de conjuntos elementares tal que

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} c(B_k) = c(A).$$

Solução: (a) Seja $\boldsymbol{I}$ um n-pavê tal que $\boldsymbol{I} \supset A$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(\boldsymbol{I})$ tal que

$$\overline{J}(A, P) - \underline{J}(A, P) < \varepsilon, \quad \forall P \supset P_\varepsilon.$$

Para $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$, podemos escolher $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots$ partições de $\boldsymbol{I}$ tais que

$$\overline{J}(A, P_k) - \underline{J}(A, P_k) < \frac{1}{k}.$$

Seja $\mathcal{I}_k = \{\boldsymbol{I}_{k,1}, \ldots, \boldsymbol{I}_{k,n_k}\}$ a família de n-pavês gerada pela partição P_k e consideremos

$$A_k = \bigcup_{j \in \mathrm{Cat}_1(A,P_k)} \boldsymbol{I}_{k,j}.$$

Como $P_k \subset P_{k+1}$, cada n-pavê de $\mathcal{I}_{k+1}$ está contido em algum n-pavê de $\mathcal{I}_k$. logo, $A_k \subset A_{k+1}$. Além disso, temos por definição, $c(A_k) = \underline{J}(A, P_k)$. Portanto

$$0 \leq c(A) - c(A_k) \leq \overline{J}(A, P_k) - \underline{J}(A, P_k) < \frac{1}{k}$$

e, consequentemente, temos

$$\lim_{k\to\infty} c(A_k) = c(A).$$

(b) Segue do mesmo argumento acima com

$$B_k = \bigcup_{j \in \mathrm{Cat}_2(A,P_k)} \boldsymbol{I}_{k,j}.$$

Exercício 12.4: *Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de Cantor, isto é, aquele obtido pelo seguinte processo recursivo:*

$$\mathcal{C}_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \ \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right), \ \text{etc...}$$

Mostre que $\partial\big([0,1] \setminus \mathcal{C}\big) = \mathcal{C}$ e conclua que $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ é J-mensurável.

Solução: É claro que $\mathcal{C}_n \supset \mathcal{C}_{n+1}$ e $\mathcal{C}_n$ é compacto, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.19, temos

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k \neq \emptyset.$$

Observe que

$$c(\mathcal{C}_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad c(\mathcal{C}_2) = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2, \quad c(\mathcal{C}_3) = \frac{4}{9} - \frac{4}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3, \ldots$$

e assim por diante, obtemos

$$c(\mathcal{C}_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_k$ para todo k, temos

$$0 \leq \overline{c}(\mathcal{C}) \leq c(\mathcal{C}_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

de onde se conclui que $\overline{c}(\mathcal{C}) = 0$.

Para mostrar que $A = [0,1] \setminus \mathcal{C}$ é J-mensurável, mostremos que $\partial A \subset \mathcal{C}$. Observe inicialmente que, por construção, $\mathcal{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, onde I_i denota o i-ésimo intervalo retirado. Logo, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$.

Suponhamos $x \in \partial A$. Então, para todo $r > 0$ temos

$$(a) \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset, \quad (b) \quad B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Mas se $x \notin \mathcal{C}$, então

$$x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \left(\bigcup_{=1}^{\infty} I_i \right).$$

Se $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, então existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(x) \subset (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, o que implica $B_{r_0}(x) \cap A = \emptyset$ e temos uma contradição com (a).

Logo, $x \in I_{i_0}$ para algum $i_0 \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(x) \subset I_{i_0}$, o que implica $B_{r_0}(x) \subset A$, assim temos também uma contradição com (b). Portanto, $x \in \mathcal{C}$ e A é J-mensurável, pois $\overline{c}(\partial A) \leq \overline{c}(\mathcal{C}) = 0$.

<u>Exercício 12.5</u>: *Prove o Corolário 12.1 (pag. 220 do texto)*

Solução: Por hipótese, f' é contínua em Ω. Logo, existe $M > 0$ tal que

$$\|f'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{M}{2}, \quad \forall x \in K.$$

Se $x \in \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^n$ é tal que $x + h \in \Omega$, então

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \epsilon(x,h),$$

onde $f' : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e, para cada $x \in \Omega$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\epsilon(x,h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{12.1}$$

Se $K \subset \Omega$ é compacto, então o limite em (12.1) é uniforme em $x \in K$, isto é (veja Exercício 5.12), para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ independente de x tal que se $\|h\| < \delta$,

$$\frac{\|\epsilon(x,h)\|}{\|h\|} < \varepsilon, \quad \forall x \in K. \tag{12.2}$$

Assim, por (12.2) (com $\varepsilon = M/2$), existe $\delta_0 > 0$ tal que se $x \in K$ e $y \in \Omega$, com $\|y - x\| < \delta_0$, então $\|f(y) - f(x)\| < M\|y - x\|$ e a conclusão segue do Teorema 12.2 (pag. 219).

<u>**Exercício 12.6**</u>: *Mostre as seguintes propriedades sobre medida zero:*

(a) Se $m(A) = 0$ e $B \subset A$, então $m(B) = 0$;

(b) Se $c(A) = 0$, então $m(A) = 0$;

(c) A união enumerável de conjuntos de medida zero tem medida zero;

(d) $m(A) = 0$ se, e somente se, existe uma família enumerável de n-paralelepípedos satisfazendo as seguintes condições:

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{\boldsymbol{I}}_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} c(\mathring{\boldsymbol{I}}_j) < \varepsilon.$$

(e) Seja $\boldsymbol{I} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ um n-paralelepípedo tal que $a_j < b_j$ e $\partial \boldsymbol{I}$ a fronteira der $\boldsymbol{I}$. Mostre que $m(\partial \boldsymbol{I}) = 0$, mas que $\boldsymbol{I}$ não tem medida zero.

Solução: O item (a) é trivial.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_m\}$ família finita de n-paralelepípedos tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} \boldsymbol{I}_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m} c(\boldsymbol{I}_j) \leq \varepsilon/2.$$

Considere então uma família enumerável qualquer $\{\boldsymbol{I}_{m+1}, \boldsymbol{I}_{m+2}, \ldots\}$ tal que

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} (\boldsymbol{I}_j) \leq \varepsilon/2.$$

Então é claro que a família $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{I}_{m+1}, \ldots\}$ satisfaz a propriedade:

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_j) \leq \varepsilon.$$

(c) Seja $\{A_1, A_2, \ldots\}$ uma família enumerável de conjuntos de medida nula. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe para cada $i \in \mathbb{N}$ uma família enumerável de n-paralelepípedos $\mathcal{I}_i = \{\boldsymbol{I}_1^i, \boldsymbol{I}_2^i \ldots\}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j^i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_j^i) \leq \varepsilon/2^i.$$

Então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j^i.$$

Como a união enumarável de conjuntos enumeáveis é enumerável, a família $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}_i$ é enumerável e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_j^i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

(d) A condição é suficiente, pois $c(\overset{\circ}{\boldsymbol{I}}) = c(\boldsymbol{I})$ e $\overset{\circ}{\boldsymbol{I}} \subset \boldsymbol{I}$. Provemos então que a condição é necessária. Seja $\varepsilon > 0$ e $\{\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \ldots\}$ uma família enumerável de n-paralelepípedos tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_j) \leq \varepsilon/2.$$

Se $\boldsymbol{I}_k = [a_1^k, b_1^k] \times \cdots \times [a_n^k, b_n^k]$, denotemos $l_i^k = b_i^k - a_i^k$, de modo que $c(\boldsymbol{I}_k) = l_1^k l_2^k \cdots l_n^k$. É claro que $c(\boldsymbol{I}_k) = c(\overset{\circ}{\boldsymbol{I}}_k)$. Para cada $s \geq 0$, consideremos o n-paralelepípedo aberto

$$\boldsymbol{I}_k^s = \left(a_1^k - \frac{s}{2}, b_1^k + \frac{s}{2}\right) \times \left(a_2^k - \frac{s}{2}, b_2^k + \frac{s}{2}\right) \times \cdots \times \left(a_n^k - \frac{s}{2}, b_n^k + \frac{s}{2}\right).$$

de modo que $c(\boldsymbol{I}_k^s) = (l_1^k + s)(l_2^k + s) \cdots (l_n^k + s)$.
A aplicação $s \mapsto c(\boldsymbol{I}_k^s)$ é um polinômio $p_k(s)$ de grau n e, pelo Teorema do Valor Médio, existe $0 < \xi < s$ tal que

$$c(\boldsymbol{I}_k^s) - c(\boldsymbol{I}_k) = c(\boldsymbol{I}_k^s) - c(\boldsymbol{I}_k^0) = p_k(s) - p_k(0) = p_k'(\xi)s.$$

Denotando $l_{\max}^k = \max\{l_1^k, \ldots l_n^k\}$, temos

$$p_k'(\xi)s = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (l_j^k + \xi)s \leq n(l_{\max}^k + \xi)^{n-1}s \leq n2^{n-1} l_{\max}^{n-1} s.$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos $s_k > 0$ tal que $n2^{n-1} l_{\max}^{n-1} s_k < \varepsilon/2^{k+1}$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_k^s) < \sum_{k=1}^{\infty} \Big(c(\boldsymbol{I}_k) + n2^{n-1} l_{\max}^{n-1} s_k\Big) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Como os n-paralelepípedos $\boldsymbol{I}_k^s$ são abertos, concluímos a prova do item (d).
(d) Trivial! De fato, $\boldsymbol{I}$ é elementar e, consequenetmente, J-mensurável. Logo, pelo Teorema 12.1 (pag. 218), $c(\partial \boldsymbol{I}) = 0$. Pelo item (c) acima, concluímos que $\text{med}(\partial \boldsymbol{I}) = 0$. Se $\text{med}(\boldsymbol{I}) = 0$, existe para todo $\varepsilon > 0$ uma cobertura enumerável de n-paralelepípedos com soma total dos conteúdos menor que ε. Em particular, se $\varepsilon = c(\boldsymbol{I})/2$ temos

$$\boldsymbol{I} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_i \quad \Rightarrow \quad c(\boldsymbol{I}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_i) < c(\boldsymbol{I})/2,$$

o que é impossível se $a_i < bi$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

<u>Exercício 12.7</u>: *Seja $\boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ um n-pavê e $f : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ função contínua. Considere o gráfico de f:*

$$\text{Graf}(f) = \big\{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\, x' \in \boldsymbol{I},\ x_n = f(x')\big\}.$$

Mostre que $\text{Graf}(f)$ *tem conteúdo nulo em* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Solução: Como f é uniformemente contínua em $\boldsymbol{I}$, dado $\varepsilon > 0$, existe δ tal que

$$\|x-y\|_2 < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(\boldsymbol{I})}.$$

Seja $P \in \mathcal{P}(\boldsymbol{I})$ tal que $|P| < \delta$ e $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_m\}$ a família gerada por P. Se

$$f(x_j) = \min\{f(x)\,;\, x \in \boldsymbol{I}_j\}, \quad f(y_j) = \max\{f(x)\,;\, x \in \boldsymbol{I}_j\}$$

então

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{j=1}^{m} \big(f(y_j) - f(x_j)\big)\mu(\boldsymbol{I}_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sejam

$$m = \min\{f(x)\,;\, x \in \boldsymbol{I}\}, \quad M = \max\{f(x)\,;\, x \in \boldsymbol{I}\}$$

e considere $\widetilde{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I} \times [n, M]$. Então $\widetilde{\boldsymbol{I}}$ é um $(n+1)$-pavê e $\mathrm{Graf}(f) \subset \widetilde{\boldsymbol{I}}$. Seja $\mathcal{I} = \{m = s_0 < s_1 < \cdots < s_l = M\}$ uma partição de $[m, M]$ tal que $\Delta s_i < \varepsilon$ e denotemos $\widetilde{P} = P \times \mathcal{I}$. Então $\widetilde{P}$ é uma partição de $\widetilde{\boldsymbol{I}}$ cuja família gerada é

$$\Big\{\widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j} = \boldsymbol{I}_i \times [s_{j-1}, s_j]\,;\, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots l\Big\}.$$

Observe que se $\mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j} \neq \emptyset$, então $\mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j-2} = \mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j+2} = \emptyset$. De fato, se

$$\big(x, f(x)\big) \in \mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j}, \quad \big(y, f(y)\big) \in \mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j-2}$$

então $\|x-y\| < \delta$ e $|f(x)-f(y)| > \varepsilon$, o que contradiz a continuidade uniforme de f. Portanto, a quantidade de $(n+1)$-pavês da família gerada por $\widetilde{P}$ que interceptam o gráfico de f é, no máximo, $3m$ e como $\mu(\widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j}) = \varepsilon\mu(\boldsymbol{I}_i)$, temos

$$\overline{J}\big(\mathrm{Graf}(f), \widetilde{P}\big) \leq 3\big(U(f,P) - L(f,P)\big) < 3\varepsilon.$$

<u>**Exercício 12.8**</u>: *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva retificável e $\Gamma = \big\{\gamma(t)\,;\, t \in [a,b]\big\}$. Mostre que Γ tem conteúdo de Jordan nulo em $\mathbb{R}^n$.*

Solução: Seja $\mathrm{med}(\Gamma)$ o comprimento da curva Γ. Como a aplicação $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua, dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_2 < \varepsilon$ se $|t-s| < \delta$.

Seja $P_\varepsilon = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b\}$ uma partição de $[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Seja Γ_ε a poligonal com vértices nos pontos $x_i = \gamma(t_i)$. Então, é claro que

$$\|\gamma(t) - x_i\|_2 < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \tag{$*$}$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2 \leq L.$$

Considere a seguinte visinhança tubular da poliginal Γ_ε:

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \bigcup_{x \in \Gamma_\varepsilon} B_\varepsilon(x).$$

Afirmativa 1: $\Gamma \subset \mathcal{V}_\varepsilon$

Afirmativa 2: $\overline{c}(\mathcal{V}_\varepsilon) \leq \dfrac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{n-1}\mathrm{med}(\Gamma)\varepsilon^{n-1} + \dfrac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\varepsilon^n. \qquad (**)$

A afirmariva 1 é consequência direta de $(*)$ e a desigualdade da afirmativa 2 implica que, no caso $\varepsilon < 1$, $\overline{c}(\Gamma) \leq C\varepsilon$, onde $C > 0$ independe de ε. Assim, uma vez demostrada a afirmativa 2, teremos concluída a prova, fazendo $\varepsilon \to 0$.

Não faremos a prova da desiguladade $(**)$ no caso geral. Entretanto, as figuras e as explicações abaixo são suficientemente convincentes no caso n=3 (em vez de demonstrar o óbvio complicado, eu aqui prefiro praticar com desenhos minhas aptidões artísticas).

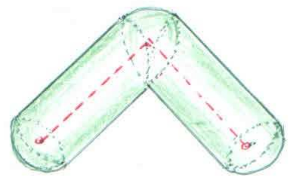


Figura 1

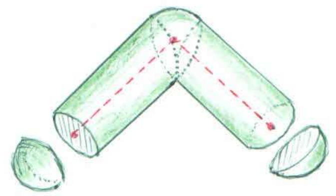


Figura 2

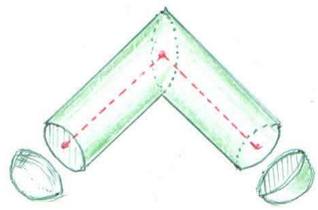


Figura 3

A Figura 1 ilustra a visinhança $\mathcal{V}_\varepsilon$ no caso $m = 2$ (i.e., com dois segmentos $[\gamma(a), \gamma(t_1)] \cup [\gamma(t_1), \gamma(b)]$), onde a linha pontilhada representa a poligonal Γ_ε. Neste caso, observamos (veja Figura 2) que as semiesferas das expremidades somam o volume $\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$, que correponde à parcela $|\mathbb{S}^{n-1}|\varepsilon^n/n$ na desigualdade $(**)$, onde $|\mathbb{S}^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

A Figura 3 mostra uma visinhança $\mathcal{W}_\varepsilon$ que contém a poliginal Γ_ε. Observe que $\mathcal{W}_\varepsilon$ é semelhante à $\mathcal{V}_\varepsilon$, exceto no entorno do ponto $\gamma(t_1)$ comum nos dois segmentos. Nessa região, $\mathcal{W}_\varepsilon$ é formada pela interseção dos cilindros. É fácil ver que o volume de $\mathcal{W}_\varepsilon$ é igual ao volume do cilindro circular reto cuja base é o círculo de raio ε e altura igual ao comprimento da poligonal, isto é, $\pi\varepsilon^2\mathrm{med}(\Gamma_\varepsilon)$, que corresponde a $|\mathbb{S}^{n-2}|\mathrm{med}(\Gamma_\varepsilon)\varepsilon^{n-1}/(n-1)$ no caso geral. Como $\mathrm{med}(\Gamma_\varepsilon) \leq \mathrm{med}(\Gamma)$, obtemos a outra parcela na desiguladade $(**)$.

Para concluir o argmento, basta constatar que $\mathcal{V}_\varepsilon \subset \mathcal{W}_\varepsilon$. A Figura 4 ilustra esta fato.

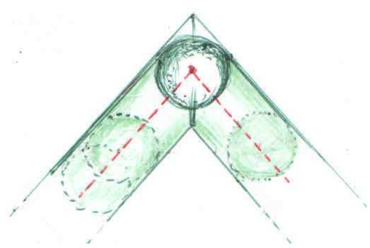


Figura 4

Exercício 12.9: *(a) Seja P uma partição de $\boldsymbol{I} = [0,1] \times [0,1]$. Mostre que existe $N \in \mathbb{N}$ e uma partição $\widetilde{P_N} \supset P$ cuja família gerada contém N^2 quadrados de lado $1/N$.*

(b) Estenda o resultado de (a) para o retângulo $\boldsymbol{I} = [a, b] \times [c, d]$.

Solução: (a) Se P é uma partição de $\boldsymbol{I}$, então existem

$$P_1 = \big\{0 < t_1 < t_2 \cdots < t_k < 1\big\},$$
$$P_2 = \big\{0 < s_1 < s_2 \cdots < s_l < 1\big\},$$

partições de $[0, 1]$ tais que $P = P_1 \times P_2$. Pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, podemos supor sem perda de generalidade que $t_i, s_j \in \mathbb{Q}$, para todo $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, l$. Então

$$t_i = \frac{p_i}{q_i} \quad \text{e} \quad s_j = \frac{p'_j}{q'_j},$$

com $p_i, q_i, p'_j, q'_j \in \mathbb{N}$ e $p_i < q_i$, $p'_j < q'_j$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ e $j \in \{1, \ldots, l\}$.
Seja $q := q_1 q_2 \cdots q_k q'_1 q'_2 \cdots q'_l$ e considere o conjunto

$$P_q := \left\{0 < \frac{1}{q} < \frac{2}{q} < \cdots < \frac{q-1}{q} < 1\right\}.$$

É claro que P_q é uma partição de $[0, 1]$ e $\widetilde{P} = P_q \times P_q$ é uma partição der $\boldsymbol{I}$ cuja família gerada é formada por $N = q^2$ quadrados de lado $L = 1/q$. Para concluir que $\widetilde{P} \supset P$, consideremos os números racionais

$$\widehat{q_i} = \frac{q}{q_i} \quad \text{e} \quad \widehat{q'_j} = \frac{q}{q'_j}.$$

Então é claro que

$$t_i = \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_i \widetilde{q_i}}{q_i \widetilde{q_i}} = \frac{p_i \widetilde{q_i}}{q}$$

Como $p_i < q_i$, $i = 1, \ldots, k$, temos $p_i \widetilde{q_i} < q_i \widetilde{q_i} = q$, de modo que $t_i \in P_q$.

Com o mesmo argumento, podemos mostrar que $s_j \in P_q$. Logo, $\widetilde{P} = P_q \times P_q \supset P$.

(b) Se $\boldsymbol{I} = [a, b] \times [c, d]$, consideremos as funções $f_1, f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidos por

$$f_1(t) = tb + (1 - t)a,$$
$$f_2(s) = sd + (1 - s)c.$$

É claro que $f_1\big([0, 1]\big) = [a, b]$, $f_2\big([0, 1]\big) = [c, d]$ e como são injetivas, admitem as inversas $f_1^{-1}; [a, b] \to [0, 1]$ e $f_2^{-1}; [c, d] \to [0, 1]$, definidas por

$$f_1^{-1}(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad \text{e} \quad f_2^{-1}(y) = \frac{y - c}{d - c}.$$

Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição de $[a, b] \times [c, d]$ e considere o conjunto $Q = Q_1 \times Q_2 = f_1^{-1}(P_1) \times f_2^{-1}(P_2)$. Como f_1 e f_2 são funções estritamente crescentes, o conjunto Q é uma partição do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Pelo item (a), existe $N \in \mathbb{N}$ e um refinamento Q' de Q cuja família gerada é formada por N^2 quadrados de lado $1/N$. Então $Q' = Q_N \times Q_N$, onde Q_N é uma partição de $[0, 1]$. Para concluir, basta então considerar o conjunto $P_N = f_1(Q_N) \times f_2(Q_N)$.

Exercício 12.10: *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ conjunto J-mensurável e $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções Riemann-integráveis. Mostre que fg é Riemann-integrável em A.*

Solução: Consequência imediata do Teorema 12.6, pag. 224.

Exercício 12.11: *Seja $\boldsymbol{I} = [0,1] \times [0,1]$ e considere a função $f : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ assim definida:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

f é Riemann integrável em $\boldsymbol{I}$? As integrais iteradas existem? Justifique suas repostas.

Solução: Fixemos $x \in [0,1]$ e consideremos a função, $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi(y) = f(x,y)$.

- se $x \in \mathbb{Q}$, então $\psi(y) \equiv 1$ e $\int_0^1 \psi(y)\,dy = 1$;
- se $x \notin \mathbb{Q}$, então $\psi(y) = 2y$ e $\int_0^1 \psi(y)\,dy = 1$;

Portanto, $\int_0^1 f(x,y)\,dy = 1$ para todo $x \in [0,1]$ e podemos calcular a integral iterada:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = 1.$$

Por outro lado, se ficarmos $y \in [0,1]$ e considerarmos a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x,y)$, φ não é Riemann-integrável, pois é descontínua em todos os pontos de seu domínio (com exceção, é claro, se $y = 1/2$). Neste caso, não está definida a integral iterada

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Exercício 12.12: *Seja $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Para cada $x \in A$, $x = p/q$ fração irredutível, considere o conjunto $S(x)$ assim definido: $S(0) = \{(0,0)\}$ e se $x \neq 0$,*

$$S(x) = \left\{ \left(\frac{n}{q}, \frac{m}{q} \right) ; n, m = 0, 1, \ldots, p \right\}.$$

Considere a função $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \text{ e } (x,y) \in S(x), \\ 1 & \text{senão.} \end{cases}$$

Mostre que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy = 1,$$

mas f não é Riemann-integrável em $[0,1] \times [0,1]$.

Solução: Fixe $x \in [0,1]$ e considere a função $f_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x,y)$. Se $x \notin A$, então a aplicação $y \mapsto f_x(y) = f(x,y) = 1$ para todo $y \in [0,1]$. Se $x \in A$, então $x = p/q$ fração irredutível e

$$f_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \in \{0, 1/q, \ldots, p/q\} \\ 1 & \text{senão.} \end{cases}$$

Em ambos os casos, a aplicação $y \mapsto f_x(y)$ é Riemann integrável em A e

$$F(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = 1, \quad \forall x \in [0,1]$$

e, consequentemente,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = 1.$$

O mesmo argumento vale para a aplicação $x \mapsto f_y(x)$, com $y \in [0,1]$ fixado. Portanto, valem as integrais iteradas.

Para mostrar que f não é integrável no quadrado $[0,1]^2$, considere uma partição P de $[0,1]^2$ e $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_k\}$ a família gerada. Podemos então escolher $q \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que, para um qualquer pavê $\boldsymbol{I}_j$, existem $n, m \le p$ tais que o par $(n/q, m/q)$ pertença a $\boldsymbol{I}_j$. Como em cada um desses pavês há pontos com coordenadas irracionais, temos $L(f,P) = 0$ e $U(f,P) = 1$.

<u>**Exercício 12.13**</u>: *Demonstre o Lema 12.1 da página 245 .*

Solução: Seja $\boldsymbol{I} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ um dado n-pavê e $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Se $\det(A) = 0$, o resultado é mediato, visto que $A(\boldsymbol{I}) \subset A(\mathbb{R}^n)$, cuja dimensão é menor que n. Vamos então supor $\det(A) \neq 0$. Observemos que se

$$\boldsymbol{I}_0 = \big[0, b_1 - a_1\big] \times \cdots \times \big[0, b_n - a_n\big] \quad \text{e} \quad u_0 = (a_1, \ldots, a_n),$$

então

$$c(\boldsymbol{I}_0) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = c(\boldsymbol{I}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{I} = u_0 + \boldsymbol{I}_0.$$

Como $A(\boldsymbol{I}) = A(u_0) + A(\boldsymbol{I}_0)$ e o conteúdo é invariante por translações, podemos nos restringir ao caso dos n-pavês com vértice na origem.

Faremos a prova em duas etapas.

<u>*Etapa 1*</u>: Suponhamos A simétrica. Então, em consequência do Teorema Espectral, existe uma matriz ortogonal U e uma matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tais que $A = U^T A U$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A.

Observemos que

$$\boldsymbol{I}_0 = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, x = \sum_{i=1}^n \mu_i (b_i - a_i) \boldsymbol{e}_i,\ \mu_i \in [0,1] \Big\},$$

onde $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Logo,

$$\mathscr{J}_0 := U\big(\boldsymbol{I}_0\big) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, x = \sum_{i=1}^n \mu_i (b_i - a_i) U(\boldsymbol{e}_i),\ \mu_i \in [0,1] \Big\}.$$

Sendo U ortogonal, o conjunto $\beta := \{U(\boldsymbol{e}_1), \ldots, U(\boldsymbol{e}_n)\}$ define uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, de modo que $\mathscr{J}_0$ é um n-pavê relativamente ao sistema de coordenadas na base β. Assim,

$$c\big(\mathscr{J}_0\big) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = c(\boldsymbol{I}_0),$$

isto é, matrizes ortogonais preservam o conteúdo de Jordan de n-pavês.
Temos, portanto, a seguinte relação:

$$c\big(A(\boldsymbol{I}_0)\big) = c\big(U^T D(\boldsymbol{J}_0)\big) \quad \text{e} \quad c\big(\boldsymbol{J}_0\big) = c(\boldsymbol{I}_0).$$

Por outro lado,

$$D(\boldsymbol{J}_0) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\lambda_i(b_i - a_i)U(\boldsymbol{e}_i),\ \mu_i \in [0,1]\Big\},$$

de modo que $D(\boldsymbol{J}_0)$ é um n-pavê relativamente ao sistema de coordenadas β, cujo conteúdo é

$$c\big(D(\boldsymbol{J}_0)\big) = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|(b_1 - a_i) = |\det(D)|c(\boldsymbol{I}_0) = |\det(A)|c(\boldsymbol{I}_0).$$

Como $U^T = U^{-1}$é matriz ortogonal, temos

$$c\big(A(\boldsymbol{I}_0)\big) = c\Big(U^T\big(D(\boldsymbol{J}_0)\big)\Big) = c\big(D(\boldsymbol{J}_0)\big) = |\det(A)|c(\boldsymbol{I}_0).$$

Etapa 2: Suponhamos A invertível mas não necessariamente simétrica. Então, em consequência do Teorema da Decomposição Polar, existe uma matriz ortogonal V e uma matriz simétrica e positiva definida B tais que $A = VB$. Como $|\det V| = 1$, segue dos argumentos da Etapa 1,

$$c\big(A(\boldsymbol{I}_0)\big) = c\big(B(\boldsymbol{I}_0)\big) = |\det(B)|c(\boldsymbol{I}_0) = |\det(A)|c(\boldsymbol{I}_0).$$

Exercício 12.14: *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e $T \subset \mathbb{R}^2$ o tiângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Mostre que*

$$\int_T f(x+y)\,dxdy = \int_0^1 uf(u)\,du.$$

Solução: Considere $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $G(u,v) = (u - v, v)$ e os conjuntos

$$D = \big\{(u,v)\,;\, 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le u\big\},$$
$$T = \big\{(x,y)\,;\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\big\},$$

Observe que T é o triângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$, D é o triângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ e $G(D) = T$. Considere também a função $F(x,y) = f(x+y)$.
Pelo Teorema de Mudança de variáveis, temos

$$\int_T F(x,y)\,dxdy = \int_D F\big(G(u,v)\big)|J_G(u,v)|\,dudv.$$

Como G é linear, $J_G(u,v) = \det[G] = 1$. Assim, aplicando a fórmula acima e o Teorema de Fubini, temos

$$\int_T f(x,y)\,dxdy = \int_D f(u)\,dudv = \int_0^1 \bigg(\int_0^u f(u)\,dv\bigg)\,du = \int_0^1 uf(u)\,du.$$

<u>**Exercício 12.15**</u>: *Sejam $B_1(0)$ a bola aberta de $\mathbb{R}^2$ (relativa à norma euclidiana), de raio 1 e centro em zero, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e R_θ a matriz de rotação:*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Considere a função g definida por

$$g(\theta) = \int_{B_1(0)} f(R_\theta x)\, dx.$$

Mostre que $g(\theta) = g(0)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Solução: A bola $B_1(0)$ é invariante pelas rotações, isto é, $R_\theta\big(B_1(0)\big) = B_1(0)$, qualquer que seja $\theta \in \mathbb{R}$. Como $\det[R_\theta] = 1$, a mudança de variável $y = R_\theta x$ nos dá $dy = dx$ e

$$g(\theta) = \int_{B_1(0)} f\big(R_\theta x\big)\, dx = \int_{B_1(0)} f(y)\, dy = g(0).$$

Logo, g é constante.

<u>**Exercício 12.16**</u>: *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < a < b < +\infty$ e*

$$D = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, a < \|x\|_2 < b\big\}.$$

Considere $f : D \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \|x\|_2^\alpha$. Mostre que

$$\int_D f(x)\, dx = \begin{cases} |S^{n-1}|(n+\alpha)^{-1}(b^{\alpha+n} - a^{\alpha+n}) & \text{se } \alpha + n \neq 0, \\ |S^{n-1}| \ln(b/a) & \text{se } \alpha + n = 0. \end{cases}$$

Solução: Usando coordenadas esféricas, $f(x) = \|x\|_2^\alpha = \rho^\alpha$. Logo,

$$\int_D f(x)\, dx = |S^{n-1}| \int_a^b \rho^{\alpha+n-1} d\rho$$

e o resutado segue por integração elementar.

<u>**Exercício 12.17**</u>: *Seja $\|x\|_p = \big(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\big)^{1/p}$, $p \geq 1$, a norma p de $\mathbb{R}^n$. Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais é finita a integral*

$$\int_{B_1} \|x\|_p^\alpha\, dx, \quad \text{onde } B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_2 \leq 1\}.$$

Solução: Como as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, existem constantes positivas m e M tais que $m\|x\|_2 \leq \|x\|_p \leq M\|x\|_2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
Aplicando coordenadas esféricas, temos (veja (12.46):

$$\int_{B_1(0)} \|x\|_2^\alpha\, dx = \frac{2\pi^{\pi/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^1 \rho^{\alpha+n-1} d\rho = \begin{cases} \dfrac{2\pi^{\pi/2}}{(n+\alpha)\Gamma(n/2)} & \text{se } n + \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } n + \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Portanto, segue da equicalência das normas que a integral é finita, se, e somente se, $\alpha > -n$.

Exercício 12.18: *Seja $B_R(0)$ a bola fechada de centro em zero e raio $R > 0$ de $\mathbb{R}^n$, relativamente à norma $\| \ \|_1$, isto é,*

$$B_R(0) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq R\}.$$

Seja $V_n(R)$ o volume de $B_R(0)$.

(a) Prove que $V_n(R) = R^n V_n(1)$.

(b) Mostre que $V_n(1) = 2^n/n!$.

Solução: (a) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é definida por $Tx = Rx$, então T é linear (homotetia) e $\det[T] = R^n$ e

$$V_n(R) = \int_{T(B_1(0))} dx = \int_{B_1(0)} R^n du = R^n V_n(1).$$

(b) Observe que $V_n(1) = 2^n V_n^+$, onde V_n^+ é o volume de

$$B_n^+ = \big\{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, \|x\|_1 = 1, \, x_i \geq 0, \, i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} V_n^+ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_n} dx_n \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n) \, dx_n. \end{aligned}$$

Repare que a última inegral, cuja variável de integração é x_n, pode ser escrita da seguinte forma, denotando $\alpha = 1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}$:

$$\int_0^\alpha (\alpha - x_n) \, dx_n = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^2}{2}$$

Assim, temos

$$V_n^+ = \frac{1}{2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^2 \, dx_{n-1}$$

e podemos repetir o processo considernado $\alpha = 1 - x_1 - \cdots - x_{n-2}$ na última integral:

$$\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^2 \, dx_{n-1} = \int_0^\alpha (\alpha - x_{n-1})^2 \, dx_{n-1} = \frac{\alpha^3}{3}.$$

E assim, sucessivamente, obtemos a fórmula

$$V_n(1) = 2^n V_n^+ = \frac{2^n}{n!}.$$

<u>**Exercício 12.19**</u>: *Sejam $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ função de classe C^1 e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto J-mensurável. Considere a função $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$M(t) = \int_\Omega f(t,x)\,dx.$$

Mostre que M é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e

$$M'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Solução: Seja $Q = [0,T] \times \Omega$ e denotemos $X = (t,x) \in Q$, $\Delta X = (h, \Delta t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Com f é de classe C^1, temos

$$f(X + \Delta X) = f(X) + f'(X)\Delta X + \epsilon(X, \Delta X),$$

com

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{|\epsilon(X,\Delta X)|}{\|\Delta X\|} = 0$$

uniformemente nos compactos de Q. Em particular, se $K \subset Q$ é compacto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(t + \Delta t, x) = f(t,x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\Delta t + \epsilon(t,x,\Delta t)$$

com

$$\left| \frac{\epsilon(t,\Delta t,x)}{\Delta t} \right| < \varepsilon, \quad \forall (t,x) \in K.$$

Portanto, se $|\Delta t| < \delta$,

$$\left| \frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} - \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx \right| \le \left| \int_\Omega \frac{\epsilon(t,\Delta t,x)}{\Delta t} \right| < \varepsilon c(\Omega).$$

<u>**Exercício 12.20**</u>: *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ curva de classe C^1 tal que $\gamma(0) = 0$. Considere a função $F : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(t,r) = \int_{B_r(\gamma(t))} f(x)\,dx,$$

onde $B_r\big(\gamma(t)\big)$ denota a bola de aberta de centro em $\gamma(t)$ e raio $r > 0$. Mostre que F é de classe C^1 e calcule

$$\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial r}.$$

Solução: (a) Seja $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definida por $x = g(t,y) = y + \gamma(t)$. Então, g é de classe C^1 e $|J_g(t,y)| = 1$, o que implica $dx = dy$. Como $g(t, B_r(0)) = B_r(\gamma(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$F(t,r) = \int_{B_r(0)} f(g(t,y))\,dy = \int_{B_r(0)} f(y + \gamma(t))\,dy.$$

Pelo exercício anterior, F é de classe C^1 e

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} &= \int_{B_r(0)} \frac{\partial}{\partial t} f\big(y+\gamma(t)\big)\,dy\\ &= \int_{B_r(0)} \big\langle \nabla f\big(y+\gamma(t)\big) : \gamma'(t)\big\rangle\,dy\\ &= \int_{B_r(\gamma(t))} \big\langle \nabla f(x) : \gamma'(t)\big\rangle\,dx\end{aligned}$$

(b) Seja $g : (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ definida por $x = g(r,y) = ry+\gamma(t)$. Então, g é de classe C^1 e $|J_g(r,y)| = r^n$, o que implica $dx = r^n dy$. Como $g(r,B_1(0)) = B_r(\gamma(t))$ para todo $t\in\mathbb{R}$, temos

$$F(t,r) = \int_{B_1(0)} f(g(t,y))r^n\,dy = \int_{B_1(0)} f(ry+\gamma(t))r^n\,dy.$$

Logo, F é de classe C^1 e

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r} &= \int_{B_1(0)} \frac{\partial}{\partial r}\big[f\big(ry+\gamma(t)\big)r^n\big]\,dy\\ &= \int_{B_1(0)} \big[\big\langle \nabla f\big(ry+\gamma(t)\big) : r^n y\big\rangle + nr^{n-1}f(ry+\gamma(t))\big]\,dy\\ &= \int_{B_1(0)} \big[\big\langle \nabla f\big(ry+\gamma(t)\big) : y\big\rangle + \frac{n}{r}f(ry+\gamma(t))\big]\,r^n dy\end{aligned}$$

Como $ry+\gamma(t) = x \iff y = \frac{1}{r}(x-\gamma(t)$, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \int_{B_r(\gamma(t))} \big[\big\langle \nabla f(x) : \frac{1}{r}(x-\gamma(t)\big\rangle + \frac{n}{r}f(x)\big]\,dx.$$

<u>**Exercício 12.21**</u>: *Para cada $R>0$ e $n\in\mathbb{N}$, consideremos os conjuntos*

$$B_R(n) = \big\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,\|x\|_2\le R\big\},\quad C_R(n) = \big\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,\|x\|_\infty\le R\big\}.$$

(1) Use coordenadas polares para calcular

$$I_R(2) = \int_{B_R(2)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\,dx.$$

(2) Mostre que $B_R(2)\subset C_R(2)\subset B_{\sqrt{2}R}(2)$ e conclua que

$$\sqrt{I_R(2)} \le \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-r^2}dr \le \sqrt{I_{\sqrt{2}R}(2)}.$$

(3) Usando (2) e o Teorema de Fubini , mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R(n)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\,dx = \pi^{n/2}.$$

(4) Considere $f_R : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_R(\alpha) = \int_{C_R(n)} \mathrm{e}^{-\alpha \|x\|_2^2}\, dx.$$

Mostre que $f_R(\alpha)$ é derivável em relação a α e calcule a derivada $f_R'(\alpha)$.
(5) Mostre que existe o limite

$$\lim_{R \to +\infty} f_R'(\alpha), \quad \forall \alpha > 0.$$

(6) Use os resultados anteriores para calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx.$$

(7) Com o resultado de (3), a fórmula pode ser obtida diretamente a partir da seguinte astúcia: use coordenadas esféricas e o Teorema de Fubini para obter

$$\pi^{n/2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{(n/2)-1} d\rho \left(\int_{S^{n-1}} d\omega \right) = \frac{1}{2}\Gamma(n/2) \left(\int_{S^{n-1}} d\omega \right).$$

Solução: (1) Usando coordenadas polares,

$$I_R(2) = 2\pi \int_0^R \mathrm{e}^{-r^2} r\, dr = \pi \int_0^{R^2} \mathrm{e}^{-u}\, du = \pi\big(1 - \mathrm{e}^{R^2}\big).$$

(2) Pelo Teorema de Fubini (em $\mathbb{R}^2$),

$$\int_{C_R(2)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx = \left(\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-r^2} dr \right)^2.$$

Como $B_R(2) \subset C_R(2) \subset B_{\sqrt{2}R}(2)$, temos a estimativa

$$\left(\pi\big(1 - \mathrm{e}^{R^2}\big)\right)^{1/2} \leq \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-r^2} dr \leq \left(\pi\big(1 - \mathrm{e}^{2R^2}\big)\right)^{1/2}.$$

(3) Novamente, pelo Teorema de Fubini (agora em $\mathbb{R}^n$),

$$\left(\pi\big(1 - \mathrm{e}^{R^2}\big)\right)^{n/2} \leq \int_{C_R(n)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx \leq \left(\pi\big(1 - \mathrm{e}^{2R^2}\big)\right)^{n/2},$$

de onde se conclui que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R(n)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\|x\|_2^2}\, dx = \pi^{n/2}.$$

Obs: Repetindo o mesmo argumento acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2}.$$

(4) Se definirmos $g : (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $g(\alpha,x) = \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}$, então g é de classe C^∞ e segue do Exercício 12.18,

$$f_R'(\alpha) = \int_{C_R(n)} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha,x)\, dx = -\int_{C_R(n)} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx.$$

Observe que, formalmente, temos

$$\lim_{R\to\infty} f_R'(\alpha) = -\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx =: g(\alpha).$$

Se pudermos garantir que a convergência acima é uniforme em α, então, como $f_R(\alpha)$ converge pontualmente para $f(\alpha) = (\pi/\alpha)^{n/2}$, teremos

$$g(\alpha) = f'(\alpha) = -\frac{n}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2}. \tag{12.3}$$

Mas, em vez de estudar essa possível convergência uniforme, vamos calcular (12.3) diretamente.
É claro que

$$\int_{B_R(n)} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx \le -f_R'(\alpha) \le \int_{B_{\sqrt{2}R(n)}} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx \tag{12.4}$$

Usando coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_R(n)} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx &= |S^{n-1}|\int_0^R \rho^{n+1}\, \mathrm{e}^{-\alpha\rho^2}\, d\rho = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^R \rho^{n+1}\, \mathrm{e}^{-\alpha\rho^2}\, d\rho \\ &= \frac{1}{\alpha\Gamma(n/2)}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2}\int_0^{\alpha R^2} u^{n/2}\, \mathrm{e}^{-u}\, du\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\alpha R^2} u^{n/2}\, \mathrm{e}^{-u}\, du = \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Portanto, da desigualdade (12.4), obtemos

$$\lim_{R\to\infty} f_R'(\alpha) = -\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx = -\frac{n}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2}.$$

<u>**Exercício 12.22**</u>: Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções contínuas, $A \subset \mathbb{R}^n$ conjunto J-mensurável, $p, q \in (1, +\infty)$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Mostre que

$$\left| \int_A fg \right| \leq \left(\int_A |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_A |g|^p \right)^{1/q}. \tag{12.5}$$

Estenda a desigualdade (12.5) para $A = \mathbb{R}^n$ supondo que as integrais impróprias de $|f|^p$ e $|g|^q$ existam.

Solução: Repita o argumento da prova do Corolário 2.2, pag. 16.

<u>**Exercício 12.23**</u>: *Seja G_n^+ o subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(R)$ das matrizes simétricas e positivas.*

a) Mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{\det(A)}} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x \rangle}{2} \right) dx, \quad \forall A \in G_n^+.$$

b) Mostre que G_n^+ é convexo e que a aplicação $A \mapsto \det(A)$ é log-côncava, isto é, $A \mapsto \ln\big(\det(A)\big)$ é côncava.

Solução: (a) Como A é matriz simétrica e positiva, o Teorema Espectral nos garante que A possui n autovalores positivos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Mais precisamente, existe uma matriz unitária U tal que

$$U^T A U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{12.6}$$

Consideremos $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $G(u) = Uu$. Então, para a substituição $x = G(u)$ temos $dx = |\det U| du = du$ e

$$\langle Ax : x \rangle = \langle AUu : Uu \rangle = \langle U^T AUu : u \rangle = \langle Du : u \rangle = \sum_{i-1}^{n} \lambda_i u_i^2.$$

Observe que a bola $B_R(0)$ (relativamente à norma euclidiana) é invariante por U, de modo que

$$\int_{B_R(0)} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x \rangle}{2} \right) dx = \int_{B_R(0)} \exp\left(-\frac{\langle Du : u \rangle}{2} \right) du.$$

Com argumentos análogos aos da solução do Exercício 12.22, podemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Du : u \rangle}{2} \right) du = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\lambda_i u_i^2/2} \, du_i = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}}.$$

Lembrando que $\det[A] = \det[D] = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, concluímos a solução.

Observação: Uma segunda solução é considerar que toda matriz simétrica e positiva possui uma raiz quadrada, isto é, se $A \in G_n^+$, então existe $B \in G_n^+$ tal qe $B^2 = A$.

Isso é consequência imediata do Teorema Espectral. De fato, se $A \in G_n^+$, então existe U unitária satisfazendo (12.6). Seja $\sqrt{D}$ a matriz definida por

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Então $B = U^T\sqrt{D}U$ é raiz quadrada de A.

Voltando ao problema, se $u = Bx$, temos $du = |\det(B)|\,dx$ e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle B^2x : x\rangle}{2}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Bx : Bx\rangle}{2}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\|u\|_2^2}{2}\right) \left|\frac{1}{\det(B)}\right| du = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(B)}\end{aligned}$$

e concluímos a solução, já que $\det(B) = \sqrt{\det(A)}$.

(b) Queremos mostrar que

$$\det\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) \geq (\det A)^{\lambda}(\det B)^{1-\lambda}, \quad \forall \lambda \in [0,1]. \tag{12.7}$$

Seja $C = \lambda A + (1-\lambda)B$. Então $C \in G_n^+$ e

$$\frac{1}{\sqrt{\det(C)}} = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Cx : x\rangle}{2}\right) dx.$$

Para simplificar a notação, consideremos $\alpha = (2\pi)^{-n/2}$ e,

$$f(x) = \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right), \quad g(x) = \exp\left(-\frac{\langle Bx : x\rangle}{2}\right).$$

Então,

$$\exp\left(-\frac{\langle Cx : x\rangle}{2}\right) = f(x)^{\lambda}g(x)^{1-\lambda}.$$

Pela deigualdade de Hölder (veja Exercício 12.22

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\det(C)}} &= \alpha\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{\lambda}g(x)^{1-\lambda}a, dx \\ &\leq \alpha\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\right)^{1-\lambda} \\ &= \left(\alpha\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right)^{\lambda}\left(\alpha\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\right)^{1-\lambda} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\det(C)}}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{\det(C)}}\right)^{1-\lambda},\end{aligned}$$

e a temos a desigualdade (12.7).

<u>**Exercício 12.24**</u>: *Seja $\boldsymbol{u}$ um vetor de $\mathbb{R}^n$ e considere a matriz $A = [\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}]$.*
(a) Mostre que A é diagonalizável e seus autovalores são

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \quad \lambda_n = \|\boldsymbol{u}\|_2^2.$$

(b) Use este fato para mostrar que $\det(A) = 1 + \|\boldsymbol{u}\|_2^2$.
Solução: Se $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, a matrix A é, por definição,

$$A = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_2 & u_nu_2 & \cdots & u_n^2 \end{pmatrix}$$

Portanto, sendo A simétrica, ela é diagonalizável.
Observe que se $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$,

$$\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_2 & u_nu_2 & \cdots & u_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Portanto, o produto tensorial $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$ define uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $L(\boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{u} : \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{u}$. Em particular, podemos verificar diretamente que $\boldsymbol{u}$ é autovetor de L associaldo ao autovalor $\|\boldsymbol{u}\|_2^2$. Por outro lado, se $\boldsymbol{w}$ é ortogonal a $\boldsymbol{u}$, então $L(\boldsymbol{w}) = 0 = \langle \boldsymbol{u} : \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{u}$. Como existem $n-1$ vetores ortogonais a $\boldsymbol{u}$, concluímos o item (a).
Seja $\beta = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-1}\}$ uma base de autovetores de L. Então, a matriz de L em relação a essa base é diagonal, tendo na diagonal seus autovalores, isto é,

$$[L]_\beta = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{u}\|_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$[I + L]_\beta = \begin{pmatrix} 1 + \|\boldsymbol{u}\|_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Como o determinante é invariante por mudança de bases, temos

$$\det\big(I + [\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}]\big) = \det\big([I + L]_\beta\big) = 1 + \|\boldsymbol{u}\|_2^2.$$

13

Gauss, Green e Stokes

Exercício 13.1: *Demonstre a fórmula (13.11) (pag. 281) no caso $n = 3$.*

Solução: O gráfico da função diferenciável $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(x, y) \in \mathbb{R}$ é uma superfície definida pelo mergulho $F(x, y) = \big(x, y, \varphi(x, y)\big)$. Sabemos do Cálculo Diferencial que a se $K \subset U$ é compacto e φ é de classe C^1, a integral

$$A = \int_K \sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x, y)\|^2}\, dxdy$$

é a área de $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = \varphi(x, y)\big\}$.
Neste caso, para cada $(x, y) \in U$, $F'(x, y) : U \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear cuja representação em coordenadas é

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Calculando diretamente, temos (omitindo as coordenadas para simplificar a notação)

$$\big[F'(x, y)^T F'(x, y)\big] = \begin{pmatrix} 1 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & 1 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\det\big[F'(x, y)^T F'(x, y)\big] = 1 + \|\nabla\varphi(x, y)\|^2\,.$$

Exercício 13.2: *Mostre que todo aberto limitado de classe C^1 é J-mensurável.*

Solução: Seja Ω um aberto de classe C^1. Pela observação 13.5 (pag. 279), a fronteira $\partial\Omega$ é localmente o gráfico de uma função de classe C^1. Logo, se $\boldsymbol{I}$ é um n-paralelepípedo que intersepta $\partial\Omega$, então a fronteira do conjunto $\boldsymbol{I} \cap \partial\Omega$ é o gráfico de uma função de classe C^1. A conclusão segue do Exercício 12.7.

Exercício 13.3: *Usando projeções estereográficas, construa um sistema completo de cartas locais contendo exatamente dois megulhos para a esfera unitária de* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\mathbb{S}^{n-1} = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_2 = 1\big\}.$$

Mostre que $\mathbb{S}^{n-1}$ *é uma superfície orientável.*

Solução: Para $x \in \mathbb{R}^n$, denotemos $x = (x', x_n)$, onde $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Vamos considerar F_+ e F_- as inversas das projetções estereográficas com respeito aos polos $\boldsymbol{e}_n$ e $-\boldsymbol{e}_n$, respectivamente. Então, calculando diretamente obtemos $F_+, F_- : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ definidos por

$$\begin{aligned} F_+(x') &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{2x_i}{\|x'\|_2^2 + 1} \right) \boldsymbol{e}_i + \left(\frac{\|x'\|_2^2 - 1}{\|x'\|_2^2 + 1} \right) \boldsymbol{e}_n, \\ F_-(x') &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{2x_i}{\|x'\|_2^2 + 1} \right) \boldsymbol{e}_i - \left(\frac{\|x'\|_2^2 - 1}{\|x'\|_2^2 + 1} \right) \boldsymbol{e}_n, \end{aligned} \tag{13.1}$$

onde $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

É claro que as funções F_+ e F_- são de classe C^∞ e

$$F_+(\mathbb{R}^{n-1}) \cup F_-(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1}.$$

Portanto, para concluir que $\{F_+, F_-\}$ é um sistema de cartas locais da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, basta mostrar que elas e suas derivadas são injetivas. Vamos mostrar isso para F_+; o outro caso é idêntico.

(a) $\underline{F_+ \text{ é injetiva}}$. De fato, F_+ é uma bijeção, pois, por um cálculo direto, obtemos $F_+^{-1} : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{\boldsymbol{e}_n\} \to \mathbb{R}^{n-1}$, onde

$$F_+^{-1}(x', x_n) = \frac{1}{1 - x_n} x' = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{13.2}$$

(b) $\underline{F_+'(x') \text{ é injetiva}}$. Para mostrar isso, é suficiente mostrar que a matriz $[F_+'(x')]$ tem posto $n-1$ para qualquer $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Calculando diretamente, temos para $1 \leq i \leq n-1$:

$$\frac{\partial F_{+,i}}{\partial x_j}(x') = \begin{cases} \dfrac{2}{\|x'\|_2^2 + 1} - \dfrac{4x_i^2}{(\|x'\|_2^2 + 1)^2} & \text{se } i = j, \\ -\dfrac{4x_i x_j}{(\|x'\|_2^2 + 1)^2} & \text{se } i \neq j, \end{cases} \tag{13.3}$$

e

$$\frac{\partial F_{+,n}}{\partial xj}(x') = \frac{4x_i}{(\|x'\|_2^2 + 1)^2}$$

Portanto, a diferencial de F_+ é a matriz de ordem $n \times (n-1)$

$$[F_+'](x') = \begin{pmatrix} \left[\dfrac{\partial F_+}{\partial x'}(x') \right] \\ \nabla F_{+,n}(x') \end{pmatrix}. \tag{13.4}$$

De acordo com (13.3), obtemos

$$\left[\frac{\partial F_+}{\partial x'}(x')\right] = \frac{2}{\|x'\|_2^2+1}\left(I - \frac{2}{\|x'\|_2^2+1}(x'\otimes x')\right).$$

Portanto (veja Teorema e o Exemplo ou o Exercício 12.23),

$$\begin{aligned}
\det\left[\frac{\partial F_+}{\partial x'}(x')\right] &= \left(\frac{2}{\|x'\|_2^2+1}\right)^{n-1}\det\left(I - \frac{2}{\|x'\|_2^2+1}(x'\otimes x')\right)\\
&= \left(\frac{2}{\|x'\|_2^2+1}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{\|x'\|_2^2+1}\operatorname{tr}(x'\otimes x')\right)\\
&= \left(\frac{2}{\|x'\|_2^2+1}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{\|x'\|_2^2+1}\|x'\|_2^2\right)\\
&= \left(\frac{2}{\|x'\|_2^2+1}\right)^{n-1}\left(1 - \|x'\|_2^2\right)
\end{aligned} \tag{13.5}$$

o que demonstra a afirmativa (b) no caso $\|x'\|_2 \neq 1$. Se $\|x'\|_2 = 1$, a matriz (13.4) toma a forma

$$[f'_+(x')] = \begin{pmatrix} 1-x_1^2 & -x_1x_2 & \cdots & -x_1x_{n-2} & -x_1x_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -x_{n-2}x_1 & -x_{n-2}x_2 & \cdots & 1-x_{n-2}^2 & -x_{n-2}x_{n-1}\\ -x_{n-1}x_1 & -x_{n-1}x_2 & \cdots & -x_{n-1}x_{n-2} & 1-x_{n-1}^2\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{pmatrix} \tag{13.6}$$

Podemos supor sem perder a generalidade que $x_{n-1} \neq 0$. Então, multiplicando a última linha da matriz (13.6) por x_{n-1} e somando com a penúltima linha, obtemos

$$A = \begin{pmatrix} 1-x_1^2 & -x_1x_2 & \cdots & -x_1x_{n-2} & -x_1x_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -x_{n-2}x_1 & -x_{n-2}x_2 & \cdots & 1-x_{n-2}^2 & -x_{n-2}x_{n-1}\\ -x_{n-1}x_1 & -x_{n-1}x_2 & \cdots & -x_{n-1}x_{n-2} & 1-x_{n-1}^2\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminando a penúltima linha de A, obtemos a matriz quadrada

$$B = \begin{pmatrix} 1-x_1^2 & -x_1x_2 & \cdots & -x_1x_{n-2} & -x_1x_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -x_{n-2}x_1 & -x_{n-2}x_2 & \cdots & 1-x_{n-2}^2 & -x_{n-2}x_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1-x_1^2 & -x_1x_2 & \cdots & -x_1x_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -x_{n-2}x_1 & -x_{n-2}x_2 & \cdots & 1-x_{n-2}^2 \end{vmatrix} = \det\Big(I - (\widetilde{x}\otimes\widetilde{x})\Big) = 1 - \|\widetilde{x}\|_2^2,$$

onde $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-2})$. Como $1 - \|\widetilde{x}\|_2^2 > 1 - \|x'\|_2^2 = 0$, $\det(B) > 0$ e concluímos a prova de (b).

É claro que $F_+(\mathbb{R}^{n-1}) \cap F_-(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{\boldsymbol{e}_n, -\boldsymbol{e}_n\}$ (que é conexo). Então, usando as fórmulas (13.1) e (13.2) acima, obtemos $T = F_-^{-1} \circ F_+ : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$, com

$$T(x') = (F_-^{-1} \circ F_+)(x') = \frac{1}{\|x'\|_2^2} x'. \tag{13.7}$$

Para calcular o jacobiano de T, observemos que para $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq 0$, temos

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x') = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x'\|_2^2} - \dfrac{2x_i^2}{\|x'\|_2^4} & \text{se } j = i, \\ \dfrac{-2x_i x_j}{\|x'\|_2^4} & \text{se } j \neq i, \end{cases}$$

Assim, temos

$$T'(x') = \frac{1}{\|x'\|_2^2}\left(I - \frac{2}{\|x'\|_2^2}(x' \otimes x')\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det\big[T'(x')\big] &= \frac{1}{\|x'\|_2^{2n-2}} \det\left(I - \frac{2}{\|x'\|_2^2}(x' \otimes x')\right) \\ &= \frac{1}{\|x'\|_2^{2n-2}}\left(1 - \frac{2}{\|x'\|_2^2}\|x'\|_2^2\right) = -\frac{1}{\|x'\|_2^{2n-2}}. \end{aligned}$$

Portanto, $J_T(x') \neq 0$ para todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e a demostração está completa.

Exercício 13.4: *Considere a faixa de Möbius S definida pela parametrização $F : (-1,1) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,*

$$\begin{cases} x_1 = F_1(r,\theta) = \cos(\theta)\left(2 + r\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right) \\ x_2 = F_2(r,\theta) = \operatorname{sen}(\theta)\left(2 + r\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right) \\ z = F_1(r,\theta) = r\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases} \tag{13.8}$$

Deduza a parametrização F considerando as seguintes três etapas: para cada $\theta \in [0, 2\pi]$,

(a) faça uma rotação de ângulo $\theta/2$ do conjunto $\{(r,0,0), r \in (-1,1)\}$ em torno da reta gerada por $(0,1,0)$;

(b) faça uma translação do resultado de (a) com o vetor $(2,0,0)$;

(c) faça uma rotação de ângulo θ em torno da reta gerada por $(0,0,1)$ do resultado de (b).

Então:

(1) verifique que F não é um mergulho;

(2) determine um sistema completo de cartas locais para S contendo dois mergulhos;

(3) mostre que S não é orientável.

Solução: (1) F não é um mergulho pois $F(0,0) = F(0,2\pi)$.

(b) Considere

$$U_1 = \{(r,\theta)\,;\,|r| < 1\,,\,\theta \in (0,2\pi)\}$$
$$U_2 = \{(r',\theta')\,;\,|r'| < 1\,,\,\theta' \in (\pi,3\pi)\}$$

e as seguintes aplicações: $F_1 : U_1 \to \mathbb{R}^3$ e $F_2 : U_2 \to \mathbb{R}^3$, sendo F_1 e F_2 definidos como em (13.8). Então F_1 e F_2 são dois mergulhos distintos tais que $S = F_1(U_1) \cup F_2(U_2)$ (verifique!). Seja $W = F_1(U_1) \cap F_2(U_2)$. Então, temos

$$D_1 = F_1^{-1}(W) = (-1,1) \times [(0,\pi) \cup (\pi,2\pi)],$$
$$D_2 = F_2^{-1}(W) = (-1,1) \times [(\pi,2\pi) \cup (2\pi,3\pi)],$$

Seja $T : D_1 \to D_2$ a aplicação de conexão associada aos mergulhos F_1 e F_2. Observe que $F_1\big((-1,1) \times (\pi,2\pi)\big) = F_2\big((-1,1) \times (\pi,2\pi)\big)$. Se $(r',\theta') \in (-1,1) \times (\pi,2\pi)$ e $T(r,\theta) = (r',\theta')$, vê-se que $r = r'$ e $\theta = \theta'$. Por outro lado, se $(r',\theta') \in (-1,1) \times (2\pi,3\pi)$, então $\theta' = 2\pi + \theta$ com $\theta \in (0,\pi)$. Observe agora que $\cos(\theta'/2) = -\cos(\theta/2)$ e $\operatorname{sen}(\theta'/2) = -\operatorname{sen}(\theta/2)$. Portanto, temos

$$T(r,\theta) = \begin{cases} (r,\theta) & \text{se } (r,\theta) \in (-1,1) \times (\pi,2\pi); \\ (-r,\theta+2\pi) & \text{se } (r,\theta) \in (-1,1) \times (0,\pi); \end{cases}$$

Portanto,

$$J_T(r,\theta) = \begin{cases} 1 & \text{se } (r,\theta) \in (-1,1) \times (\pi,2\pi); \\ -1 & \text{se } (r,\theta) \in (-1,1) \times (0,\pi); \end{cases}$$

de onde se conclui que S não é orientável.

Exercício 13.5: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto limitado de classe C^1 e γ nas condições do Teorema de Green. Mostre que*

$$c(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\Big)\,dt = \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\,dt \tag{13.9}$$

Solução: Considere o campo $\boldsymbol{f}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(-x_2,x_1)$. Então

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

Pelo Teorema de Green

$$c(\Omega) = \int_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1dx_2 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f}\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\Big)\,dt$$

Considerando $\boldsymbol{f}(x_1,x_2) = (0,x_1)$, o mesmo argumento nos dá:

$$c(\Omega) = \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\,dt.$$

Integramos por partes, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\,dt.$$

Exercício 13.6: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto de Jordan cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma poligonal fechada com vértices nos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_m$, onde $P_i = (a_i, b_i)$. Mostre que*

$$\text{área}(\Omega) = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_m & b_m \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right).$$

Solução: Fazendo a identificação $P_{m+1} = P_1$, podemos parametrizar cada segmento $\overline{P_iP_{i+1}}$ por

$$\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_i(t) = P_i + t(P_{i+1} - P_i).$$

Desta forma, $\partial\Omega = \gamma_1\big([0,1]\big) \cup \cdots \cup \gamma_m\big([0,1]\big)$ e por (13.9), temos

$$\text{área}(\Omega) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 x_i\,dy_i - y_i\,dx_i,$$

onde

$$\begin{cases} x_i = a_i + t(a_{i+1} - a_i) \\ y_i = b_i + t(b_{i+1} - b_i) \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{área}(\Omega) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 \Big(\big[a_i + t(a_{i+1} - a_i)\big](b_{i+1} - b_i) - \big[b_i + t(b_{i+1} - b_i)\big](a_{i+1} - a_i) \Big) dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Big(a_i(b_{i+1} - b_i) + \frac{1}{2}(a_{i+1} - a_i)(b_{i+1} - b_i) \\ &\qquad\qquad - b_i(a_{i+1} - a_i) - \frac{1}{2}(b_{i+1} - b_i)(a_{i+1} - a_i) \Big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} a_i b_{i+1} - b_i a_{i+1}. \end{aligned}$$

Exercício 13.7: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto limitado e convexo. Um segmento rígido $\overline{AB}$ de comprimento $0 < L < \operatorname{diam}(\Omega)$ se desloca mantendo suas extremidades A e B sobre a fronteira $\partial\Omega$. Após uma volta completa, um ponto M do segmento descreve uma curva fechada Γ no interior de Ω. Mostre a área da região compreendida entre as curvas $\partial\Omega$ e Γ é igual a πab, onde a e b são respectivamente os comprimentos de $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$.*

Solução: Sejam $A, B : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ parametrizações das extremidades A e B do segmento $\overline{AB}$. Então, o ponto M pode ser parametrizado por $M : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$M(t) = A(t) + \frac{a}{a+b}\big(B(t) - A(t)\big) = \frac{a}{a+b}B(t) + \frac{b}{a+b}A(t).$$

Por (13.9), temos

$$c(\Omega) = \int_0^1 A_1(t)A_2'(t)\,dt = \int_0^1 B_1(t)B_2'(t)\,dt.$$

Seja Ω_M o aberto contido no interior da curva $M([0,1])$. Então,

$$\begin{aligned}
c(\Omega_M) &= \int_0^1 M_1(t)M_2'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{a}{a+b}B_1(t) + \frac{b}{a+b}A_1(t)\right)\left(\frac{a}{a+b}B_2'(t) + \frac{b}{a+b}A_2'(t)\right) dt \\
&= \left[\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2\right] c(\Omega) + \frac{ab}{(a+b)^2}\int_0^1 \big(B_1(t)A_2'(t) + A_1(t)B_2'(t)\big)\,dt
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo a parcela $\frac{2ab}{(a+b)^2}c(\Omega)$ no lado direito da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
c(\Omega_M) &= c(\Omega) + \frac{ab}{(a+b)^2}\int_0^1 \big(B_1(t)A_2'(t) + A_1(t)B_2'(t) - A_1(t)A_2'(t) - B_1(t)B_2'(t)\big)\,dt \\
&= c(\Omega) - \frac{ab}{(a+b)^2}\int_0^1 \big(B_1(t) - A_1(t)\big)\big(B_2(t) - A_2(t)\big)'\,dt \\
&= c(\Omega) - \pi ab,
\end{aligned}$$

visto que a parametrização $B(t) - A(t)$ descreve uma circunferência completa de raio $a+b$. Logo, $c(\Omega) - (\Omega_M) = \pi ab$.

<u>**Exercício 13.8**</u>: *Considere* $\Omega = \big\{(x_1,x_2)\,;\, x_1^2 + x_2^2 < 1\big\}$ *o disco unitário de* $\mathbb{R}^2$ *e* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ *tais que* f' *é contínua em* $\overline{\Omega}$ *e é de classe* C^2 *em* Ω.

(a) *Com a parametrização de* $\partial\Omega$ *dada por* $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, *mostre que:*

$$\int_\Omega \det\big[f'(x)\big]\,dx = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial\theta} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial\theta}\right) ds$$

onde ds *denota o elemento comprimento de arco.*

(b) *Se* $f(x) = Mx$ *sobre* $\partial\Omega$ *(onde* M *é uma matriz* 2×2 *constante), use o item (a) para mostrar que:*

$$\int_\Omega \det\big[f'(x)\big]\,dx = \pi\det(M).$$

(c) *Estenda os resultados dos itens (a) e (b) para* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *aberto limitado cuja fronteira é uma curva de Jordan de classe* C^1 *e conclua que, neste caso,*

$$\int_\Omega \det\big[f'(x)\big]\,dx = \det(M)\text{área}(\Omega).$$

Solução: (a) Para $i = 1,2$, considere a aplicação $h_i(\theta) = f_i(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Então

$$\frac{dh_i}{d\theta}(\theta) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\cos\theta.$$

Assim, o integrando na integral de linha do item (a) pode ser escrito na forma

$$f_1\frac{dh_2}{d\theta} - f_2\frac{dh_1}{d\theta} = \left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\cos\theta - \left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\operatorname{sen}\theta$$

Considerando o campo de vetores

$$\boldsymbol{g} = \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1},\ f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \tag{13.10}$$

e denotando $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, a integral de linha toma a forma

$$\int_{\partial\Omega} \left(f_1 \frac{dh_2}{d\theta} - f_2 \frac{dh_1}{d\theta}\right) ds = \int_0^{2\pi} \big\langle \boldsymbol{g}(\gamma(\theta)) : \gamma'(\theta) \big\rangle\, d\theta.$$

pelo Teorema de Green

$$\int_{\partial\Omega} \left(f_1 \frac{dh_2}{d\theta} - f_2 \frac{dh_1}{d\theta}\right) ds = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = 2\int_{\Omega} \det[f'(x)]dx.$$

(b) Sejam a_{ij}, $j = 1, 2$, os coeficientes da matriz M e $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$ o campo definido em (13.10). Então,

$$\begin{cases} g_1(\cos\theta \operatorname{sen}\theta) = \big(a_{21}(a_{11}\cos\theta + a_{12}\operatorname{sen}\theta) - a_{11}(a_{21}\cos\theta + a_{22}\operatorname{sen}\theta)\big) \\ \qquad\qquad\qquad = -\det M \operatorname{sen}\theta, \\ g_2(\cos\theta \operatorname{sen}\theta) = \big(a_{22}(a_{11}\cos\theta + a_{12}\operatorname{sen}\theta) - a_{12}(a_{21}\cos\theta + a_{22}\operatorname{sen}\theta)\big) \\ \qquad\qquad\qquad = \det M \cos\theta. \end{cases}$$

Portanto $\boldsymbol{g}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \det M(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Como $\gamma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, temos

$$2\int_{\Omega} \det[f'(x)]dx = \int_0^{2\pi} \big\langle \boldsymbol{g}(\gamma(\theta)) : \gamma'(\theta) \big\rangle\, d\theta = 2\pi \det M.$$

(c) Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização de $\partial\Omega$. Defina $h_i(t) = f_i\big(\gamma(t)\big)$. Então,

$$h_i'(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

e

$$f_1 h_2'(t) - f_2 h_1'(t) = \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\gamma_1'(t) + \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\gamma_2'(t)$$

Como no item (b), consideramos

$$\boldsymbol{g} = \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1},\ f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \tag{13.11}$$

de modo que

$$\int_{\partial\Omega} \big(f_1(t)h_2'(t) - f_2(t)h_1'(t)\big)\, dt = \int_0^1 \big\langle \boldsymbol{g}(\gamma(t)) : \gamma'(t) \big\rangle\, dt.$$

pelo Teorema de Green

$$\int_0^1 \big(f_1(t)h_2'(t) - f_2(t)h_1'(t)\big)dt = \int_\Omega \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = 2\int_\Omega \det[f'(x)]dx.$$

Sejam a_{ij}, $j = 1, 2$, os coeficientes da matriz M e $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$ o campo definido em (13.11). Então,

$$\begin{cases} g_1\big(\gamma(t)\big) = \big(a_{21}(a_{11}\gamma_1(t) + a_{12}\gamma_2(t)\big) - a_{11}\big(a_{21}\gamma_1(t) + a_{22}\gamma_2(t)\big) \\ \qquad\qquad = -\det M\gamma_2(t), \\ g_2\big(\gamma(t)\big) = \big(a_{22}(a_{11}\gamma_1(t) + a_{12}\gamma_2(t)\big) - a_{12}\big(a_{21}\gamma_1(t) + a_{22}\gamma_2(t)\big) \\ \qquad\qquad = \det M\gamma_1(t). \end{cases}$$

Portanto, $\boldsymbol{g}\big(\gamma(t)\big) = \det M\gamma'(t)$, de onde se conclui que

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega \det[f'(x)]dx &= \int_0^1 \big\langle \boldsymbol{g}(\gamma(t)) : \gamma'(t)\big\rangle\, dt \\ &= \det M \int_0^1 \big(\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\big)\, dt = \det M c(\Omega) \end{aligned}$$

Exercício 13.9: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de fronteira regualar S. Dados $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : S \to \mathbb{R}$ funções contínuas, considere o problema de Neumann que consiste em determinar $u{:}\,\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em Ω tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g \text{ em } S, \end{cases} \tag{13.12}$$

onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal unitário definido sobre Ω e exterior a Ω.

Use o Teorema de Gauss para mostrar que nem sempre (13.12) possui solução.

Solução: Como $\Delta u(x) = \operatorname{div}\big(\nabla u(x)\big)$, segue do Teorema de Gauss:

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u(\sigma)\cdot \boldsymbol{n}(\sigma)\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\sigma)\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} g(\sigma)\, d\sigma.$$

Portanto,

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} g(\sigma)\, d\sigma$$

é uma condição necessária.

Exercício 13.10: *Considere os números reais* $0 < a < b$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *o aberto definido por*

$$\Omega = \big\{x \in \mathbb{R}^3\,;\, a < \|x\|_2 < b\big\}.$$

Seja $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *o campo de vetores definido por*

$$\boldsymbol{f}(x) = \frac{x}{\|x\|_2^3}.$$

Verifique que $\boldsymbol{f}$ *é um campo solenoidal, mas não é um campo rotacional em* Ω.

Solução: Denotemos δ_{ij} o *delta de Kronecker*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Um cálculo direto nos dá:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\delta_{ij}\|x\|_2^2 - 3x_i x_j}{\|x\|_2^5}. \tag{13.13}$$

Se $i = j$, (13.13) nos dá:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\|x\|_2^2 - 3x_i^2}{\|x\|_2^5} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \boldsymbol{f} = 0. \tag{13.14}$$

Se $i \neq j$, temos

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{f} = 0. \tag{13.15}$$

Portanto, $\boldsymbol{f}$ é solenoidal e irrotacional em Ω. Como Ω é simplesmente conexo, segue do Teorema 6.2 (pag. 106) veja as observações que seguem a Definição 6.6) e (13.15) que $\boldsymbol{f}$ é campo gradiente (cujo potendial é $\varphi(x) = -1/\|x\|_2$).

No entanto, $\boldsymbol{f}$ não é um campo rotacional, i.e., não existe $\boldsymbol{g}$ tal que $\operatorname{rot} \boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}$. De fato, se $a < r < b$ e S a esfera de raio r e centro em zero, então $S \subset \Omega$. Assim, se $\sigma = r\omega$, temos

$$d\sigma = r^2 d\omega, \quad \boldsymbol{f}(\sigma) = r^{-2}\omega, \quad \boldsymbol{n}(\sigma) = \omega$$

e

$$\int_S \boldsymbol{f}(\sigma) \cdot \boldsymbol{n}(\sigma)\, d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} \omega \cdot \omega\, d\omega = 4\pi.$$

mas sendo S uma superfície fechada,

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{g}(\sigma) \cdot \boldsymbol{n}(\sigma)\, d\sigma = 0,$$

quaquer que seja o campo $\boldsymbol{g}$ de classe C^1 em Ω.

Exercício 13.11: *Seja $B = B_R(0) \setminus \{0\}$, com $B_R(0)$ a bola aberta de $\mathbb{R}^n$ de raio $R > 0$ e centro na origem. Considere a função $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definida por*

$$K(x) = \frac{R^2}{\|x\|_2^2} x.$$

K é denominada **fórmula de inversão de Kelvin**. *Mostre que*

a) $K(B) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$;

b) $K(\partial B) = \partial B$;

c) K é contínua e invertível, com $K^{-1} = K$.

Seja f uma função harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f\big(K(x)\big)$. Mostre que g é harmônica. O resultado vale para $n \geq 3$?

Solução: Observemos inicialmente da definição de K que

$$\|K(x)\| \, \|x\| = R^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Portanto,

$$\|x\| > R \iff \|K(x)\| < R \quad \text{e} \quad \|x\| = R \iff \|K(x)\| = R.$$

(a) $y \in K(B)$ se, e somente se, existe $x \in B$ tal que $y = \big(R^2/\|x\|^2\big)x$. Logo, $\|y\| \, \|x\| = R^2$. Como $\|x\| < R$ segue que $\|y\| > R$ e consequentemente, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Reciprocamente, se $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$, seja $x = \big(R^2/\|y\|^2\big)y$. Então $y = \big(\|y\|^2/R^2\big)x$. Como

$$\|x\| \, \|y\| = R^2 \quad \Rightarrow \quad \|y\|^2 = \frac{R^4}{\|x\|^2},$$

temos

$$y = \frac{\|y\|^2}{R^2} x = \frac{R^4}{R^2 \|x\|^2} x = \frac{R^2}{\|x\|^2} x = K(x) \tag{13.16}$$

e concluímos que $K(B) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$.

Analogamente, com os mesmos argumentos, prova-se que $K(\partial B) = \partial B$ e também que $K\big(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}\big) = B$.

(b) A continuidade de K é consequência imediata do Teorema 4.1 e 4.3 (pags. 37 e 38). Provemos que K é injetiva.

$$K(x_1) = K(x_2) \quad \Rightarrow \quad \|x_1\| = \|x_2\| \quad \Rightarrow \quad \frac{R^2}{\|x_1\|^2} x_1 = \frac{R^2}{\|x_1\|^2} x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

A sobrejetividade de K segue diretamente da prova do inte (a). Portanto, K é invertível e consequentemente $K^{-1} = K$ segue de (13.16).

Denotemos $y = K(x)$. Então, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
\Delta g(x) = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} \left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} \left[\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] \\
& + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} \left[\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right] \\
& + \frac{\partial f}{\partial y_1} \left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} \right] + \frac{\partial f}{\partial y_2} \left[\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} \right].
\end{aligned} \tag{13.17}$$

Observando que $y_i = x_i(R^2/|x|^2)$, $i = 1, 2$, temos

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^4} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{2x_1 x_2}{|x|^4} = \frac{\partial y_2}{\partial x_1}. \tag{13.18}$$

Das identidades (13.17) e (13.18), obtemos

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{1}{|x|^4}, \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} = 0.\end{gathered}$$

Portanto,

$$\Delta g(x) = \frac{1}{|x|^4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}\right) = \frac{1}{|x|^4}\Delta f(x) = 0$$