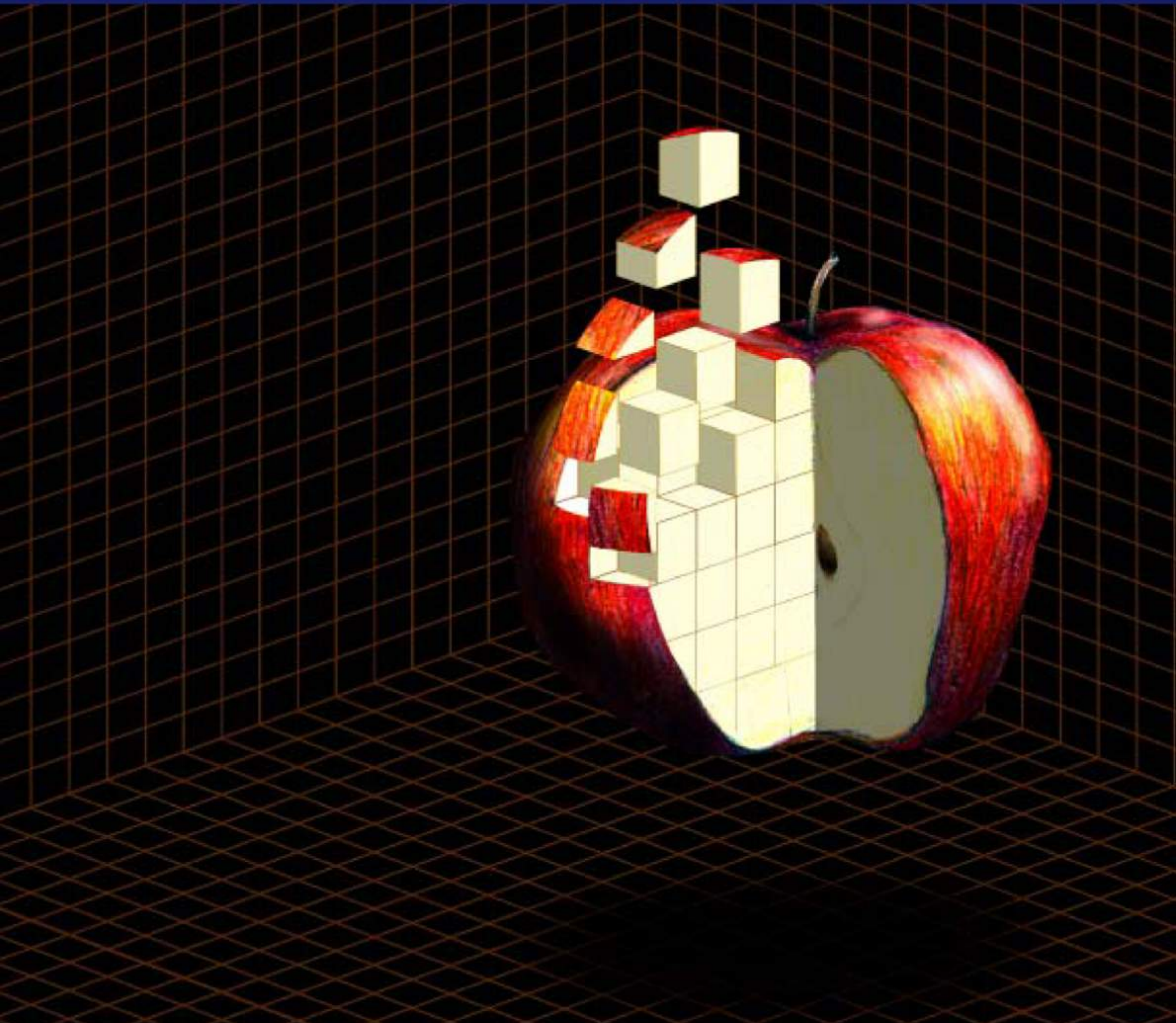
Visualizando Figuras Espaciais



Coordenação: Claudia Segadas

Instituto de Matemática - UFRJ
Projeto Fundão

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROJETO FUNDÃO

Visualizando Figuras Espaciais

Coordenação: Claudia Segadas

IM - UFRJ

Rio de Janeiro

1ª edição (impressa), 2008
2ª edição (e-book), 2024

Equipe Responsável

Autoras:
Claudia Coelho de Segadas Vianna (IM/UFRJ)
Denise Felippe da Rocha (SME/RJ e C. Brig. Newton Braga)
Fátima Regina A. da Silva (SME/RJ e C. Brig. Newton Braga)
Márcia Moutinho Pereira (SME/RJ)

Projeto gráfico, capa e ilustrações:
Marcelo Bueno (CAp/UFRJ)

Colaboradoras:
Beatriz Paixão Verly da Silva (licencianda IM/UFRJ)
Paula Márcia Barbosa (Instituto Benjamin Constant)

Gráfica:
Nunes

Patrocínio:
Petrobras

Projeto Fundão
UFRJ

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Fabio Osmar de Oliveira Maciel – CRB-7 6284

V834

Visualizando figuras espaciais [recurso eletrônico] / coordenação: Claudia Segadas. – 2. ed. – Rio de Janeiro : Editora IM/UFRJ – Projeto Fundão, 2024.
Recurso digital

Formato: PDF
Requisitos do sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-86502-10-7

1. Geometria – Estudo e ensino. I. Segadas, Claudia, coord.

CDD: 516

Índice para catálogo sistemático:
Geometria 516

Sumário

Apresentação

Este livro destina-se a professores que desejam desenvolver em seus alunos a habilidade de visualizar figuras espaciais e, para tanto, gostariam de ter exemplos de atividades que possam aplicar.

Quando nos referimos a visualizar figuras espaciais não estamos preocupados com nomes de elementos destas figuras ou leis numéricas associadas a elas. Nosso objetivo é que o aluno saiba ver a figura como um todo através da sua representação no plano e saiba também decompô-la, reconhecendo os elementos que a formam. Assim, deverá imaginar partes ocultas da figura e verificar o que acontece com sua representação quando esta se movimenta.

De certo modo, nosso interesse em estudar este tema começou em 1999, quando aplicamos um teste diagnóstico piloto a alguns alunos do 6º ano (antiga 5ª série) do Ensino Fundamental. Este teste constava de questões nas áreas de geometria, números e tratamento da informação. Em 2000 ampliamos esta pesquisa aplicando este teste (com pequenas alterações) a 1763 alunos, aproximadamente 10% do total de alunos inscritos na rede municipal do Rio de Janeiro, selecionados por amostragem. Durante a correção do teste, notamos deficiências em diversas áreas e chamou-nos atenção dificuldades encontradas em questões que envolviam visualização de figuras espaciais: os alunos não conseguiam, em sua maioria, perceber elementos escondidos na representação da figura espacial, confundiam a figura real com sua representação.

Iniciamos, então, pesquisa bibliográfica, procurando verificar a relevância do tema e buscando a fundamentação teórica que nos auxiliasse a selecionar atividades para a sala de aula. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais consta Espaço e Forma como uma área curricular a ser trabalhada desde as primeiras séries do Ensino Fundamental. Especificamente é dito que devem ser exploradas atividades que levem o aluno a “estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações” (BRASIL, 1998, p.65).

Pesquisadores diversos também reforçam a necessidade de desenvolver nos alunos a habilidade de visualizar figuras espaciais, afirmando que deveria ser considerada uma atividade matemática tal qual é considerado o desenvolvimento de habilidades numéricas ou algébricas. Entretanto, lamentam que, ao contrário destas, vem sendo negligenciada no currículo escolar (HERSHKOWITZ, PARZYSZ E VAN DORMOLEN, 1996). Afirmam ainda que este trabalho deve ser iniciado desde o princípio da educação escolar, já que o desenvolvimento do raciocínio visual pode contribuir para o desenvolvimento cognitivo em diversas áreas, incluindo matemática e ciências.

Wheatley e Wheatley (1979) também ressaltam que matemática não é somente raciocínio numérico ou lógico, mas também espacial. Mais ainda, chamam nossa atenção para o fato que, muitas vezes, mesmo a geometria é ensinada sem ênfase em desenvolvimento de habilidades espaciais.

A partir da leitura destes e de outros textos, tornou-se mais claro para nós a necessidade de ensinar o aluno a raciocinar visualmente. Para enxergar o objeto tal qual ele é, através da sua representação, é necessário aprender esta habilidade.

Selecionamos ou criamos diversas atividades e aplicamos em turmas em que as professoras da equipe lecionavam. A partir da aplicação pudemos rever os enunciados e modificá-los, quando necessário. As atividades aplicadas estão seguidas de comentários sobre o resultado em sala de aula. A intenção é que o professor possa verificar quais as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolvê-las. Decidimos também incluir um capítulo com uma coletânea de questões retiradas da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Embora não tenham sido utilizadas em nossas salas de aula, achamos que deveríamos enriquecer nosso repertório, mostrando também que, em certos contextos, estes tipos de questões são valorizadas.

A seguir, tecemos alguns comentários sobre as atividades e sobre a aplicação das mesmas.

As Atividades e a Aplicação

As dez atividades aplicadas foram selecionadas de formas diversas. Algumas criamos, outras encontramos em um ou mais textos. Fizemos sobre estas algumas ou muitas adaptações, inclusive incluindo novos itens.

As atividades foram escolhidas de modo a desenvolverem habilidades diversas, tais como: montar e desmontar figuras; movimentá-las e verificar como suas representações se alteram como resultado destes movimentos; seccionar figuras espaciais observando quais as figuras planas obtidas como resultado destas secções; visualizar os sólidos através de suas vistas e contar elementos de figuras espaciais. É importante ressaltar que, para contar elementos de uma figura, o aluno deverá saber organizar uma forma de contagem, caso contrário irá contar o mesmo elemento mais de uma vez ou poderá omitir algum elemento. Assim, outras habilidades essenciais do ponto de vista do raciocínio matemático surgem como conseqüência.

Outro ponto primordial se refere às justificativas apresentadas. Sempre que pertinente, solicitávamos aos alunos que individualmente ou em dupla apresentassem uma justificativa para a resposta dada. Observamos que nas turmas em que os alunos estavam habituados a esta exigência, as justificativas não somente eram mais claras como também mais criativas.

As atividades foram aplicadas em turmas do Ensino Fundamental e algumas em turmas do Ensino Médio. Também foram utilizadas com alunos da licenciatura em matemática e professores que são alunos do curso de Especialização em Ensino de Matemática da UFRJ. Divulgamos algumas delas em diversos mini-cursos oferecidos em congressos, desde 2001, como nos Encontros Nacionais de Educação Matemática e nos encontros do Projeto Fundão. Colocamos no decorrer do texto somente o resultado da aplicação em turmas da Educação Básica, já que nelas recolhemos e analisamos as respostas. Cabe observar que, por suas características, algumas atividades podem ser realizadas com maior ou menor complexidade dependendo da pergunta que se faz ao aluno. Na atividade do cubinho, por exemplo, podemos pedir que verifique o caso n x n x n e que, ao resolver, utilize argumentos geométricos.

Não podemos deixar de mencionar os estudantes com deficiência visual do Instituto Benjamin Constant, no Rio de Janeiro, com os quais algumas destas atividades foram utilizadas. Para estes fizemos várias adaptações, mas ficamos felizes em verificar que é possível visualizar uma figura espacial sem enxergar, já que um forte componente de abstração está presente nesta capacidade.

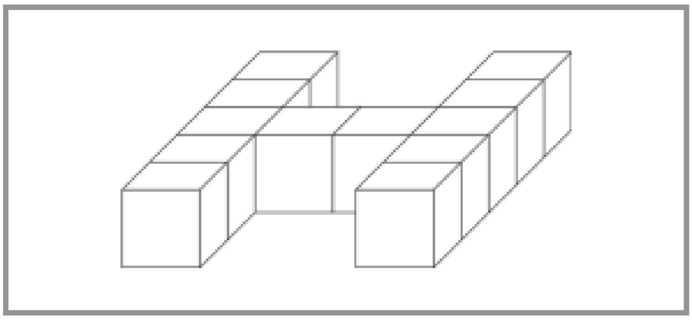
Esperamos que este livro seja útil e qualquer sugestão será bem-vinda!

Atividade 1

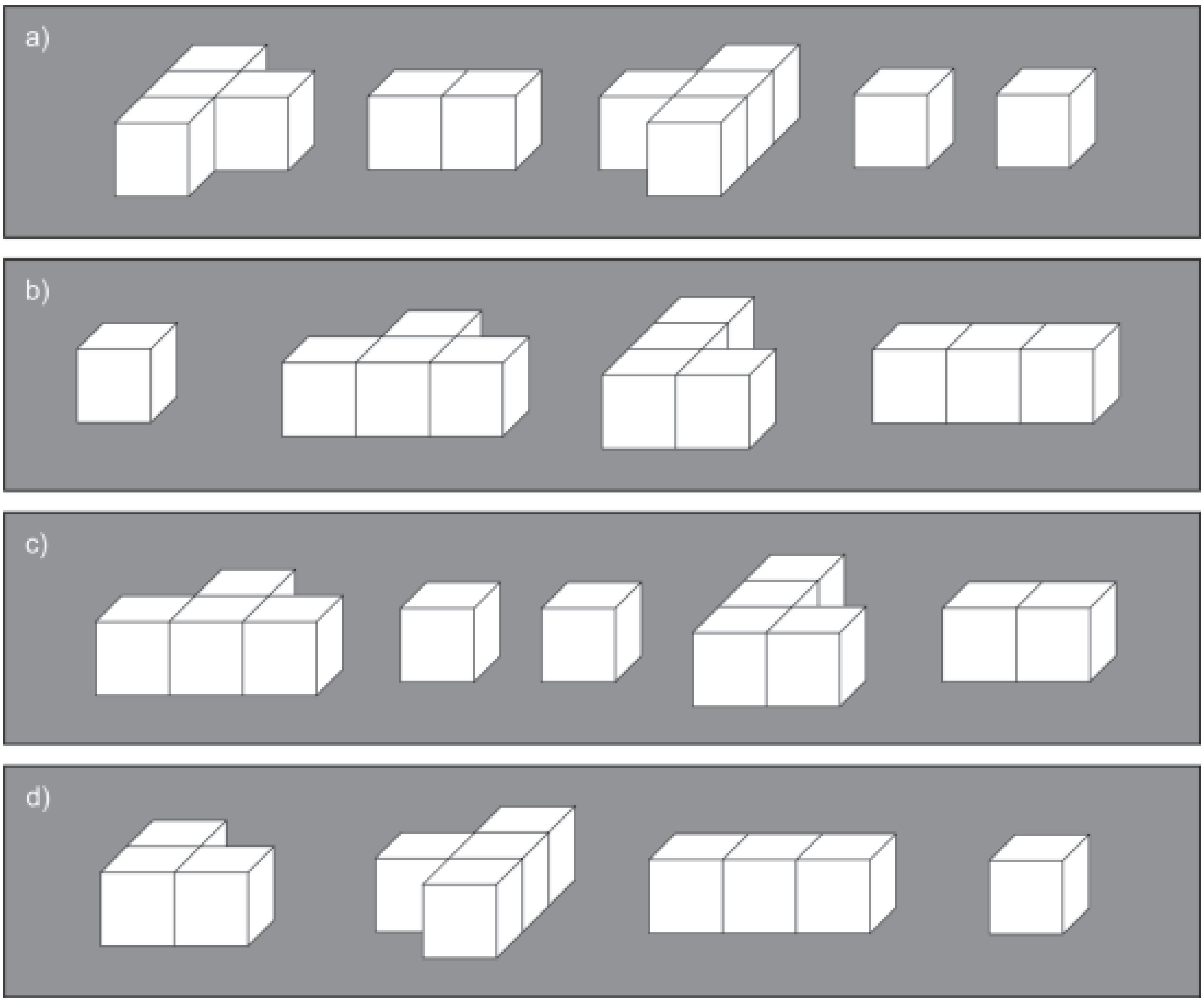
O quebra-cabeça da letra H

Enunciado

Observe o sólido abaixo, que mostra a letra H.



Que conjunto de peças a seguir foi usado para montar este sólido? Explique como você chegou a esta conclusão.

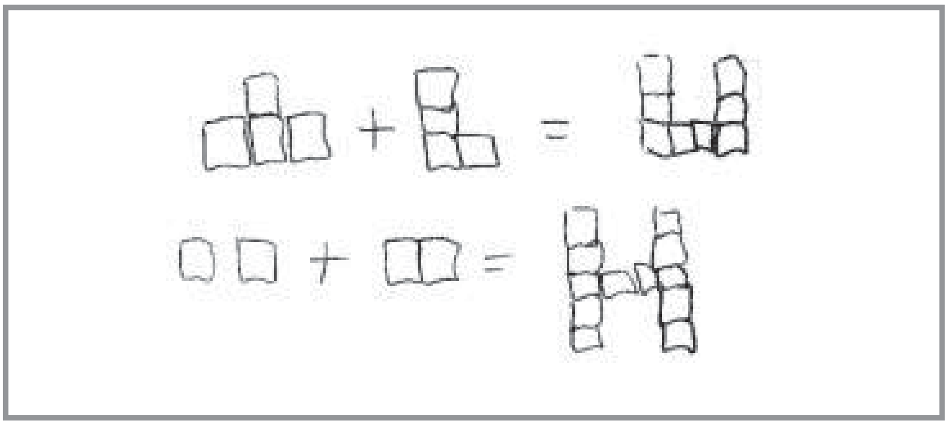


Turmas em que foi aplicada: 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental

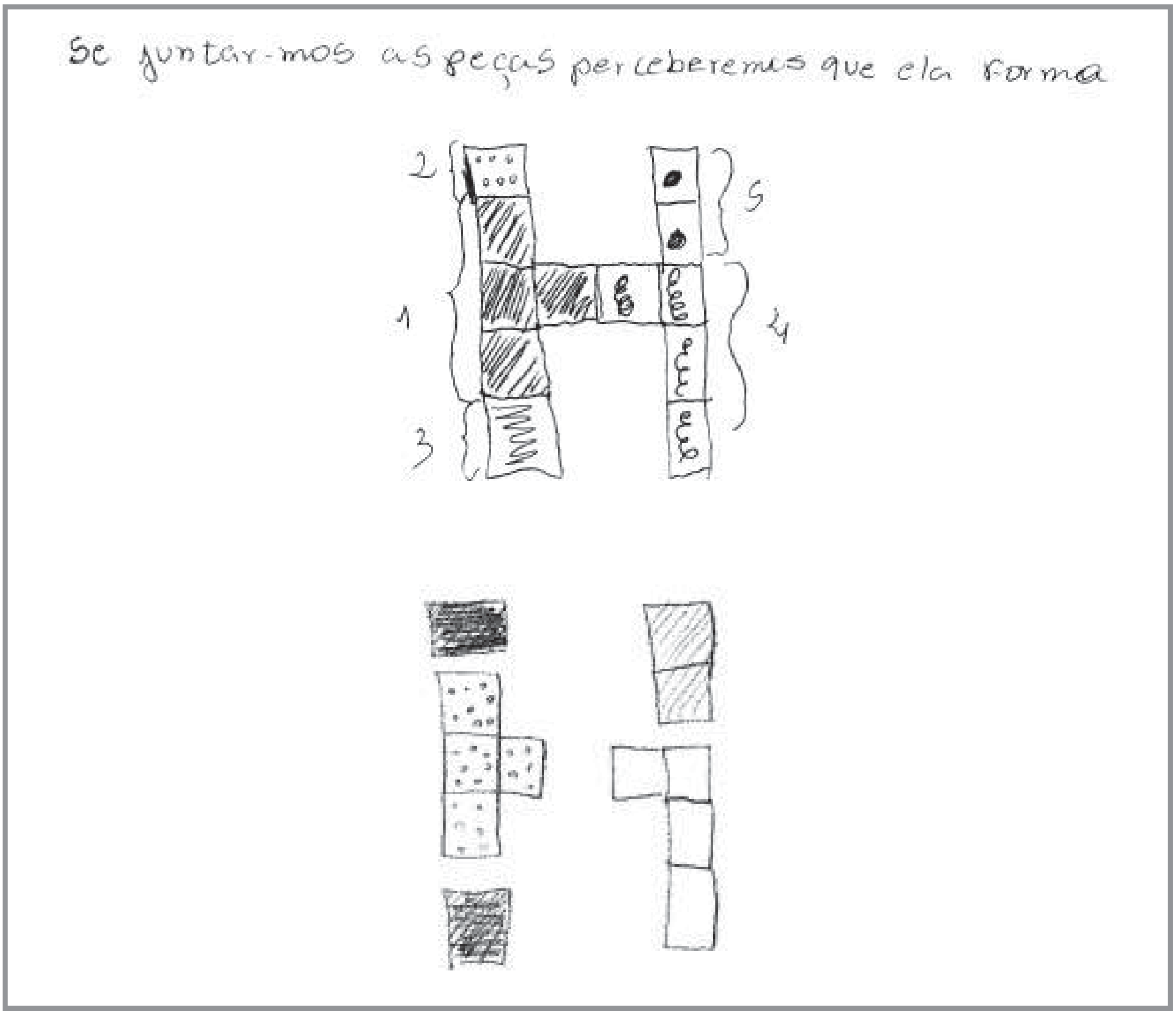
.

Comentários

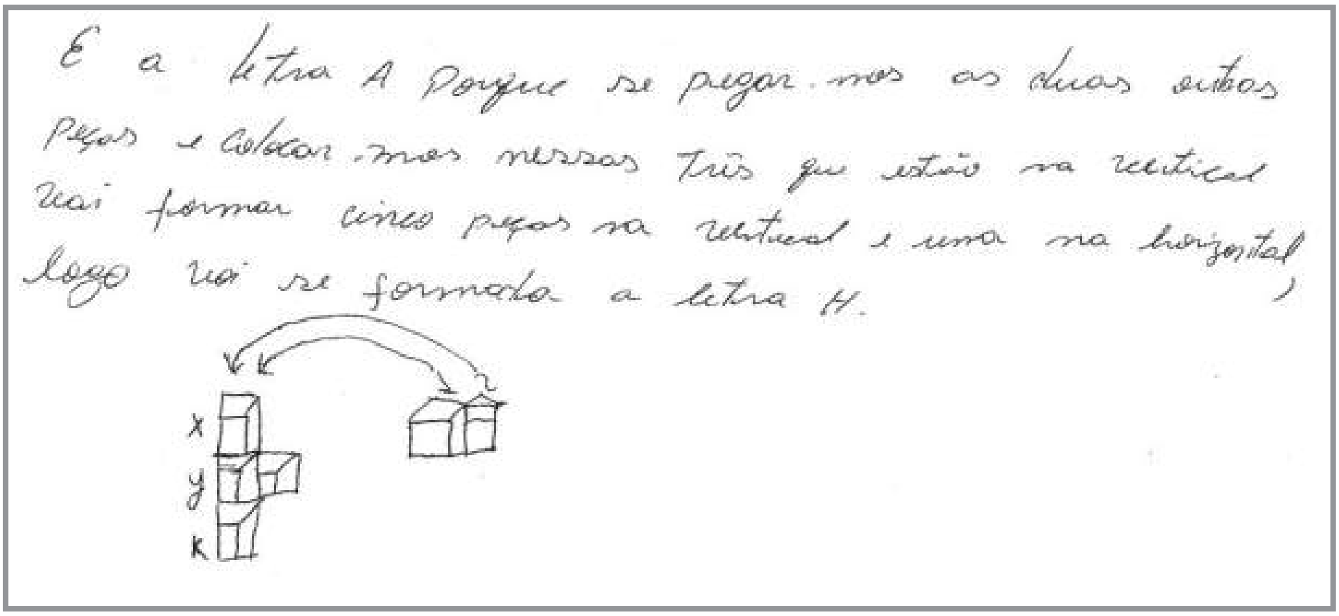
O índice de acertos foi muito bom nas turmas em que a atividade foi aplicada, embora nem todos conseguissem justificar corretamente. No exemplo abaixo o aluno marcou a opção (C), mas o encaixe apresentado no primeiro desenho que fez não está correto.



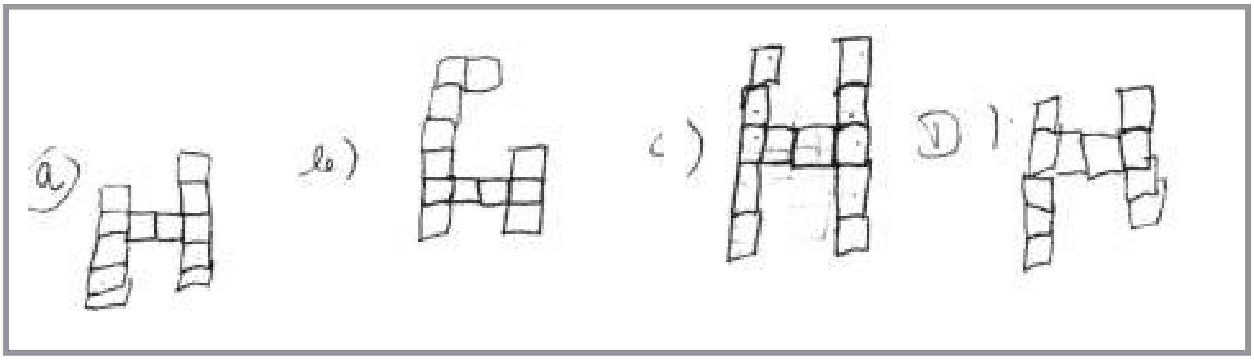
Alguns indicaram, através de legendas nas peças, como foi feito o encaixe, como nos dois exemplos abaixo.



Os alunos que erraram marcaram a opção (A).Um dos alunos que escolheu esta opção deixou claro que contou o número de peças na “vertical” (conforme escreveu), mas não observou a simetria na figura.



A maioria dos alunos que acertou apenas justificou a solução que estaria certa. Entretanto, um aluno do 9^0 ano justificou também porque a opção (D) não serviria, contando o número de cubinhos. Assim também, um aluno do 8^0 ano apresentou para cada item um possível bloco sólido formado com um conjunto de peças. Vejamos abaixo seus desenhos:



Conforme percebemos, a idéia da legenda é muito boa, no sentido de registrar em cada peça uma marca que a identifique independente do movimento que se faça com esta e da posição que ela venha a ocupar.

Sugestões para a sala de aula

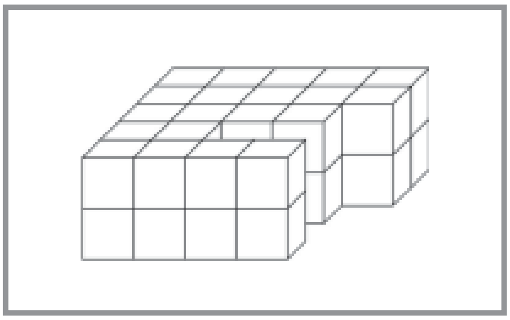
– Levar o material dourado para os alunos construírem o modelo (embora não deva ser oferecido logo a princípio).

Atividade 2

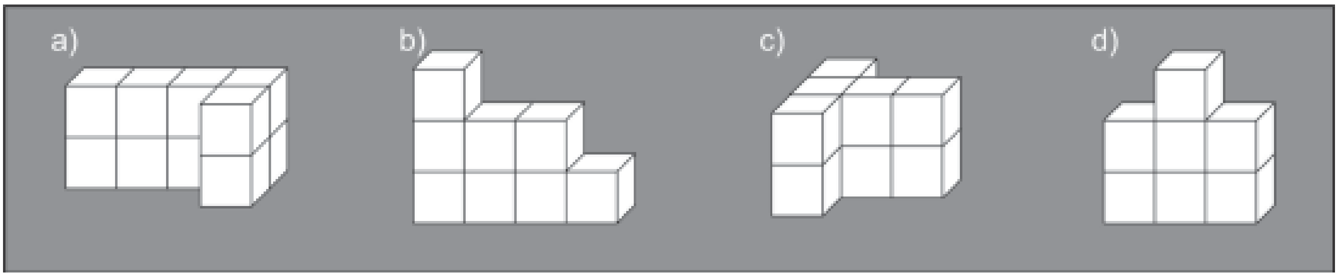
A peça que falta

Enunciado

De um bloco retangular formado com 5 x 5 x 2 cubinhos foi retirada uma parte, obtendo-se o sólido abaixo:



Qual das peças a seguir foi retirada do sólido? Explique como você chegou a esta conclusão.



Turmas em que foi aplicada: 6º, 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental

Comentários

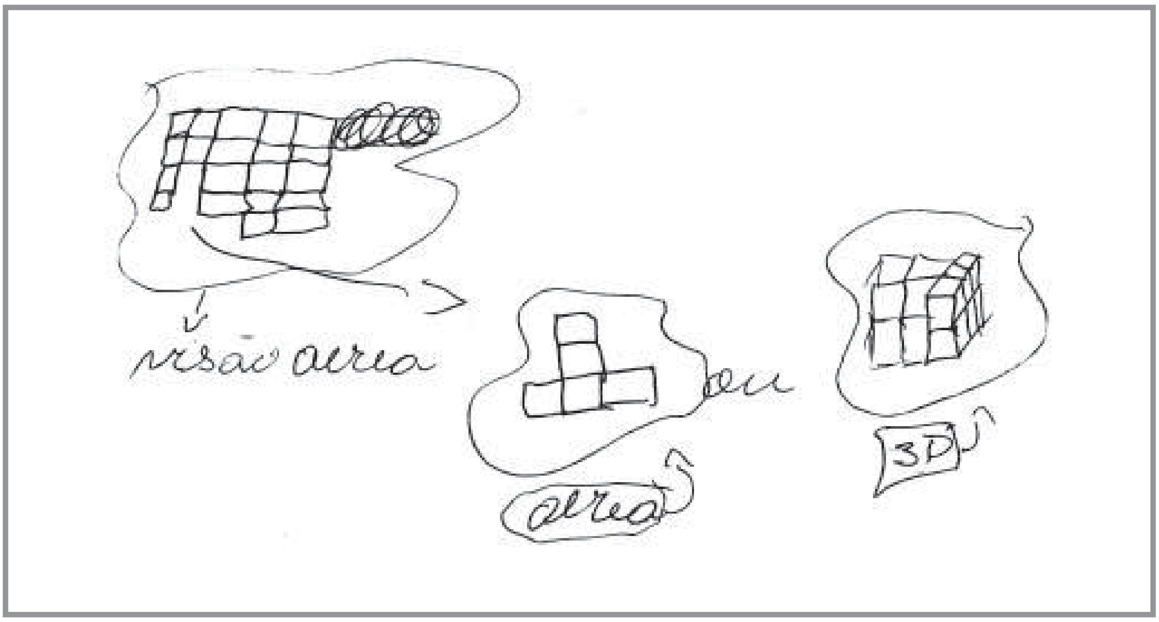
A maioria dos alunos acertou a questão, escrevendo frases do tipo:

> *"Porque este bloco é o que encaixa no desenho."*

Outros tentaram de fato justificar de formas diversas:

– contando a quantidade de cubinhos em cada item (segundo estes critérios são eliminadas as peças B e D);

– utilizando vistas, como no exemplo abaixo:



– argumentando que a forma da peça é de uma letra T;

– explicitando que houve um movimento na peça correta para esta ser encaixada no sólido:

> *"letra C se botar ao contrário vai completar o sólido"*

Alguns trocaram termos na justificativa, o que provavelmente reflete dificuldades com conceitos como área, volume, cubo e quadrado. Vejamos os exemplos abaixo:

> *"Primeiro eu achei a área total que é = 50 depois achei a resposta "C", porque completa formando os 50 quadrados."*

> *"Sabendo que a reta vertical tem 5 cubos e a horizontal tem 5 cubos e altura 2 cubos. Da altura do bloco retangular foram retirados 4 cubos que formam um quadrado e 6 cubos que formam um retângulo essas figuras juntas formam uma letra T que somada no bloco retangular forma um sólido completo."*

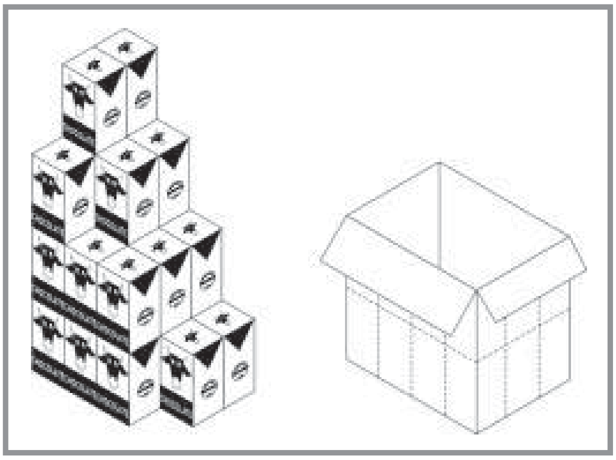
Atividade 3

Movimentando caixas de chocolate

Adaptada de Van den Heuvel-Panhuizen e Gravemeijer (1993)

Enunciado

A figura abaixo mostra caixas de chocolate empilhadas. Quantas caixas de chocolate sobram depois de encher a caixa grande? Explique como você chegou a esta resposta.



Turmas em que foi aplicada: 6º, 7º e 8º Anos do Ensino Fundamental

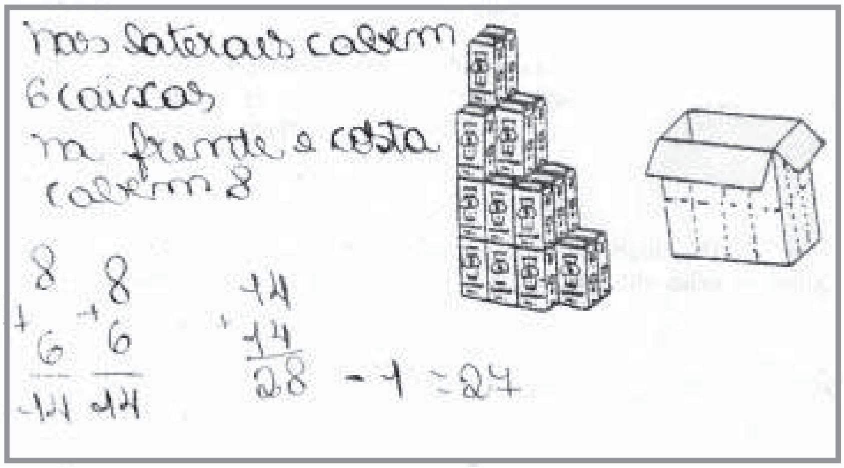
Comentários

Na maioria das turmas em que a atividade foi aplicada, o número de acertos foi maior do que o número de erros, tendo os alunos demonstrado muito interesse em resolvê-la.

Exemplos de respostas incorretas

As estratégias destacadas a seguir levaram ao cálculo errado do número de caixas de chocolate que caberiam na caixa grande.

– Contar o número de retângulos nas faces da caixa (exceto os do tampo e os do fundo), o que sugere pouco domínio do conceito de volume.



– Multiplicar o número de retângulos da face frontal pelo número de retângulos de uma face lateral, obtendo, ao final, 8 x 6.

Exemplos de respostas corretas

A maioria dos alunos que acertou contou independentemente as caixas de chocolate na pilha e as que caberiam na caixa grande, fazendo a seguir a subtração entre as duas somas. Houve alunos que juntaram as caixas em grupos para lhes facilitar a contagem, traduzindo este agrupamento em uma expressão numérica. O exemplo abaixo ilustra um agrupamento:

Na pilha tem 27 e na caixa cabem 24 e aí restam 3

Pilha:	*Caixa:*
7 x 3 + 3 x 2 = 21 + 6 = 27	*12 x 2 = 24*

Percebemos que em algumas respostas certas transparecia a idéia de movimento. Este movimento podia ser:

da pilha de caixas de chocolate para a caixa grande:

“Sobraram 3 caixas. Eu fui pensando na caixa e botando as caixas de chocolate dentro da outra caixa e cheguei a esse número.”

na própria pilha de caixas de chocolate, refazendo o seu formato até obter a mesma forma da caixa grande:

“... eu fui tirando as caixas lá de cima e fui enchendo aqui em baixo nas duas últimas pilhas, aí eu vi que sobraram 2 caixas de chocolate.”

Embora, nesta última resposta, o aluno tenha errado o número de caixas que sobrou, seu raciocínio foi adequado à questão.

Sugestões para a sala de aula

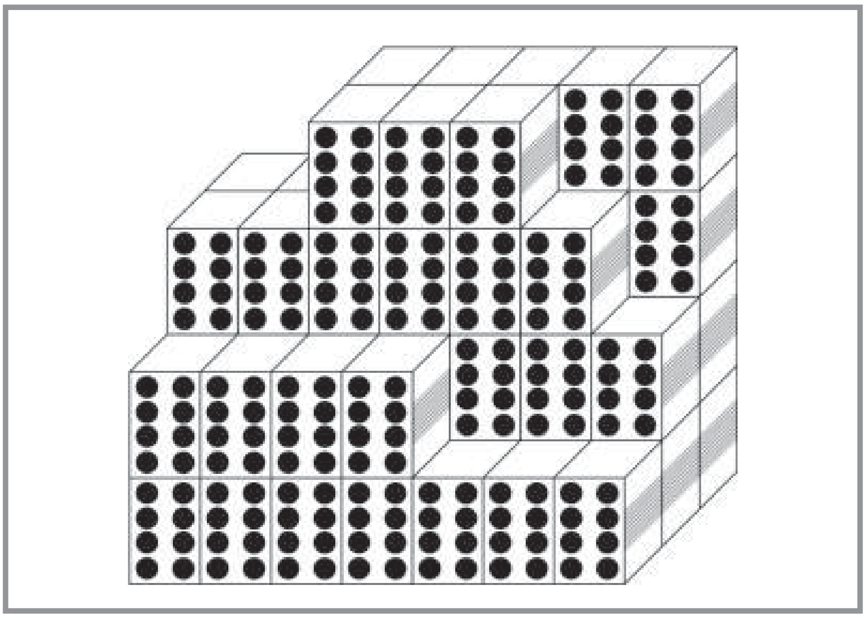
Em séries iniciais, o professor deve trabalhar com esta atividade concretamente para que os alunos possam resolvê-la movimentando as caixas de chocolate da pilha para a caixa grande.

Atividade 4

A pilha de tijolos

Enunciado

Observe na figura abaixo como foram arrumados os tijolos e responda:



a) Quantos tijolos há na pilha?

b) Escreva como você achou a resposta do item (a). Indique o cálculo que você fez.

Turmas em que foi aplicada: 6º, 7º e 8º Anos do Ensino Fundamental

Comentários

Nesta atividade, as formas de contagem dos tijolos foram bastante diversificadas. Alguns erros que nos chamaram a atenção:

– contar somente os tijolos visíveis;

– falha na contagem;

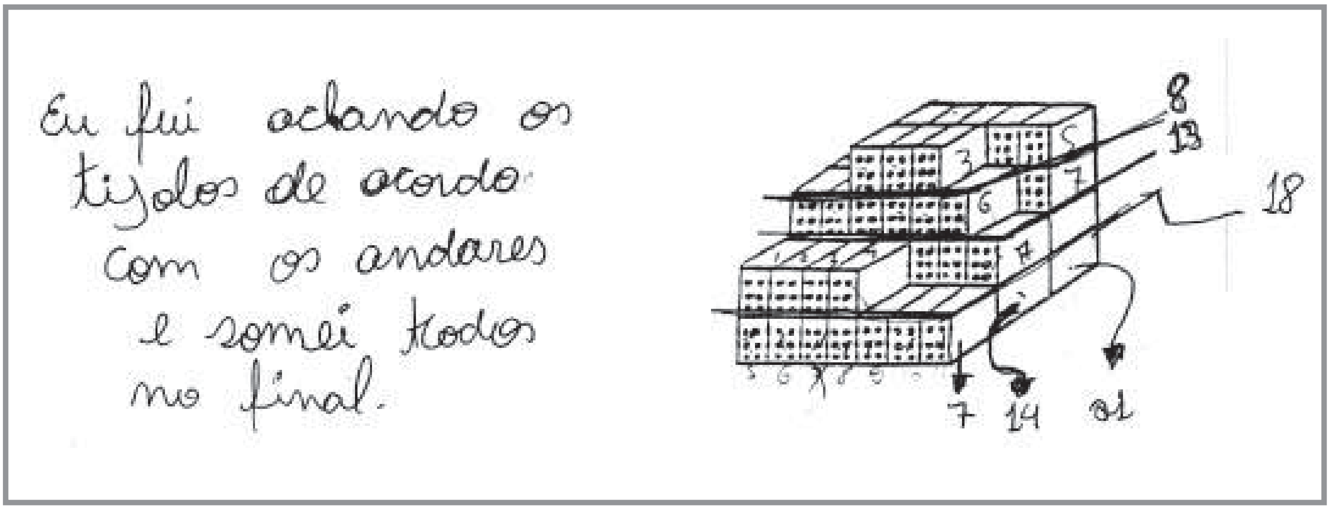
– apresentar como resposta final o número 84, resultado da conta 7 x 3 x 4 (imaginando um paralelepípedo com 84 tijolos).

Dentre as respostas corretas, destacamos as seguintes formas de contagem:

– imaginar um paralelepípedo com 84 tijolos e subtrair em seguida o número de espaços vazios, como ilustra a resposta de um aluno do 8º ano:

“Eu multipliquei altura e largura e depois o comprimento deu 84, depois contei os tijolos que estavam faltando e deu 24 e subtrai com 84 e deu 60.”

– contar o número de tijolos em cada fileira (horizontal ou vertical) e depois somar os resultados obtidos, como no exemplo abaixo de uma aluno do 8º ano:



– contar grupos de tijolos (não necessariamente fileiras), indicando ao lado o total de cada grupo, para depois fazer a soma final, como mostra a expressão a que chegou uma aluna do 8º ano:

$$7 . 3 + 4 . 3 + 3 . 2 + 6 . 2 + 1 + 3 . 2 + 2$$
$$21 + 12 + 6 + 12 + 1 + 6 + 2$$
$$60$$

– contar os tijolos um a um, como um aluno do 6º ano bem explicou:

“Eu não fiz nenhum cálculo contei todos os tijolos. De 1 em 1 tijolo, somando cada um.”

Notamos que enquanto há formas mais simples de contagem (um a um), outras demonstram uma organização visual mais desenvolvida. Um ponto interessante desta questão é que remete a uma figura que provavelmente já viram em alguma construção na rua: pilha de tijolos. Neste sentido fica mais fácil perceberem a existência dos tijolos não aparentes. Conforme a resposta de um aluno do 8º ano:

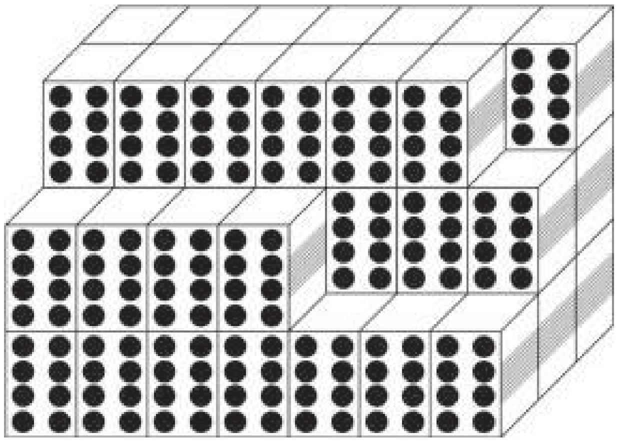
“Contei os tijolos da frente e depois fui imaginando os de trás”

Sugestões para a sala de aula

– Levar objetos para a sala de aula, como caixas, e pedir aos alunos que organizem pilhas com estes objetos. Em seguida deverão se movimentar em torno destas pilhas para que observem as diferentes vistas, deverão também desmontar a pilha e contar o número de objetos nestas.

– Pedir que "decomponham" a pilha de tijolos desenhada na questão em pequenas pilhas que facilitem a contagem.

– Se a turma não estiver acostumada a trabalhar com questões deste tipo, sugerimos um modelo mais simples de pilha de tijolos, como o que se segue:



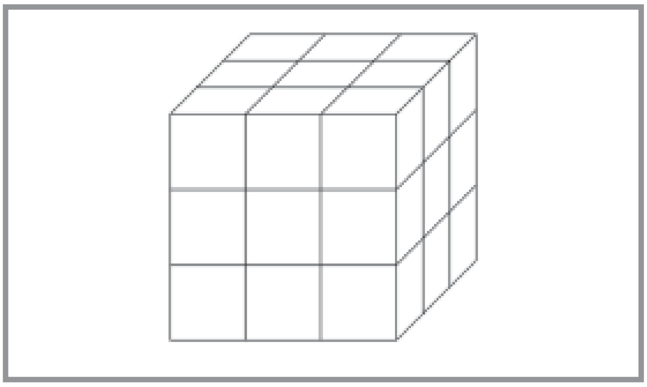
Atividade 5

Contando cubinhos

Adaptada de Abrantes (1999)

Enunciado

Considere o cubo da figura abaixo construído a partir de cubinhos. Decidiu-se pintá-lo exteriormente de vermelho e a seguir decompô-lo em cubinhos. Pergunta-se:



a) Quantos cubinhos existem no cubo formado? ________________________________

b) Quantos cubinhos ficam com uma única face pintada? ________________________

c) E com duas? ____

d) E com três? ____

e) E com nenhuma? ____

Turmas em que foi aplicada: 6º, 7º e 8º Anos do Ensino Fundamental

Comentários

Todas as turmas tiveram dificuldade em resolver esta questão. Em algumas turmas, já havia sido trabalhado com os alunos visualização de sólidos geométricos em diferentes posições. Em outras, nada havia sido estudado deste assunto.

Exemplos de respostas incorretas

Um erro comum foi responder os itens (b), (c), (d) e (e) com os números 9, 18, 27, 0, respectivamente. Estas respostas correspondem aos cálculos: 9 x 1, 9 x 2, 9x 3, 9 x 0. Estes alunos contaram o número de quadrados em cada face (9) e a seguir multiplicaram este número pelo número de faces mencionado em cada item. Veja a justificativa dada por um aluno do 6º ano que respondeu desta forma:

> *"Eu consegui o resultado pensando assim: eu peguei uma face do cubinho e só contei quantos quadradinhos tinham na face e depois fui acrescentando os múltiplos do número que achei."*

Os alunos que cometeram este tipo de erro responderam de fato a uma outra pergunta: quantos quadrados têm em, respectivamente, uma, duas, três e nenhuma face do cubo formado?

Outro erro foi a troca dos termos “cubo” com “quadrado”, até mesmo em argumentos que levariam à resposta correta, a menos da troca de palavras, como ilustra a resposta dada por uma aluna do 6º ano ao item d:

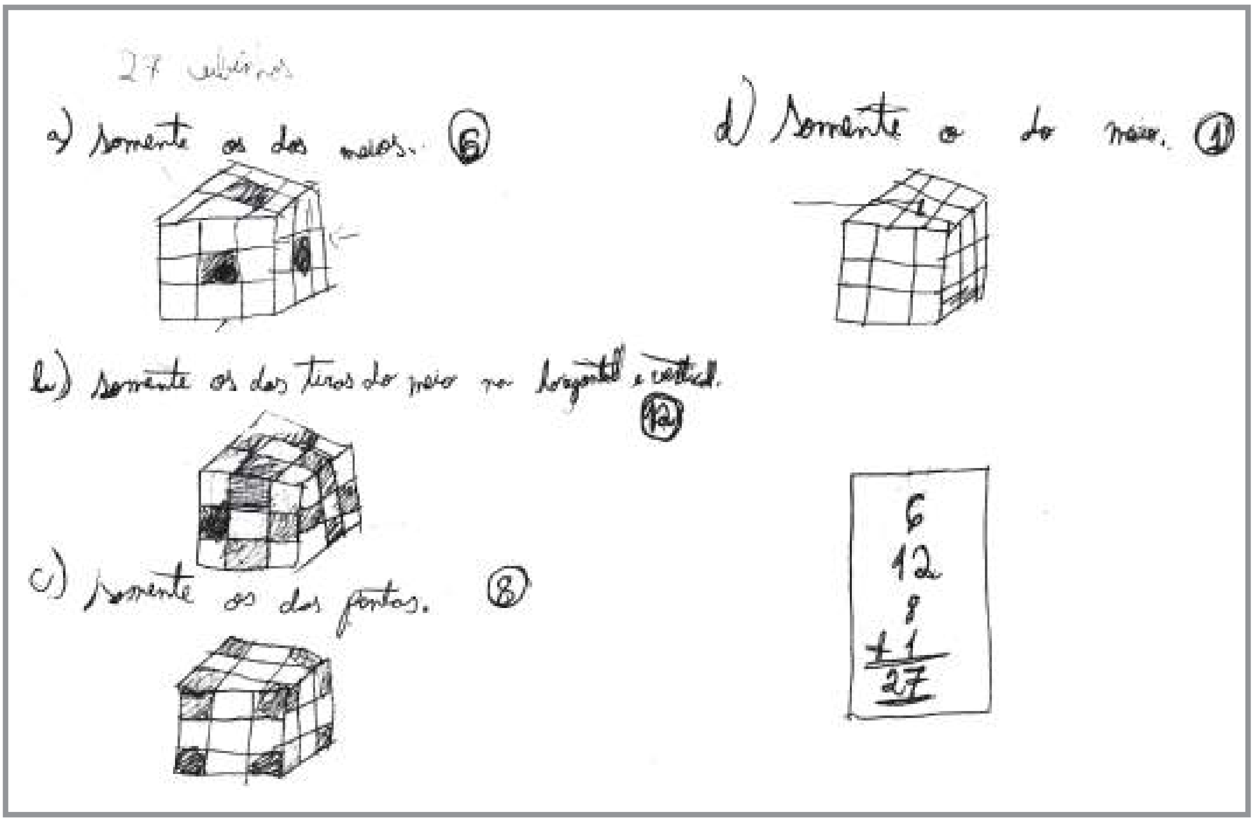
> *“Em cada ponta do cubo há um quadrado com três faces pintadas.”*

Exemplos de respostas corretas

Nas turmas em que havia sido feito um trabalho anterior com visualização, alguns alunos apresentaram estratégias pertinentes com argumentações coerentes, como mostram os exemplos a seguir, ilustrados pelas respostas dos alunos.

– Estabelecer, com cores ou símbolos no desenho do cubo, a representação dos cubinhos que atendiam a cada item.

– Somar o número de cubinhos encontrados nos itens (b), (c) (d) e (e) e conferir se essa soma dá 27.



– Usar o número total de cubinhos para descobrir a resposta de algum item em que houve maior dificuldade.

“12 porque eu fiz por último e como os cubinhos no total dá 27 eu fiz a “prova real”, vi quanto faltava p/ completar 27 e coloquei aí.”

“ Eu cheguei à conclusão destas respostas contando os cubinhos e a última só sobra 1, porque é o que está no centro do cubo.”

Embora nem sempre a linguagem seja precisa, é possível discriminar quando o pensamento do aluno foi correto, deixando claro que entendeu o objetivo da questão. Numa análise geral, percebemos que, embora não seja uma questão fácil para alunos do ensino fundamental, é interessante para que o professor possa explorar com a turma as diferentes estratégias de resolução e verificação das respostas. Por outro lado, é também uma oportunidade de se diferenciar termos e conceitos usados para figuras no plano e figuras no espaço.

Sugestões para a sala de aula

– Levar o material dourado para os alunos construírem o cubo (embora não deva ser oferecido logo a princípio).

– Iniciar com atividades mais simples como formar o cubo 2 x 2 x 2

– Para alunos de ensino médio ou cursos de graduação, estender para cubos 4 x 4 x 4, 5 x 5 x 5 e, dependendo da turma, n x n x n.

Atividade 6

Área de superfície: qual a maior possível?

Adaptada de For the Classroom - cube models (1994)

Enunciado

Tome seis cubos, considere que a área da face de cada um desses cubos vale 1 u.a. Monte um sólido cuja área da superfície (soma das áreas das faces do sólido) seja a maior possível. Cada dois cubos contíguos (vizinhos) têm em comum uma face. Justifique sua resposta.

Material a ser utilizado: cubinhos do material dourado

Turmas em que foi aplicada: 6º e 8º Anos do Ensino Fundamental

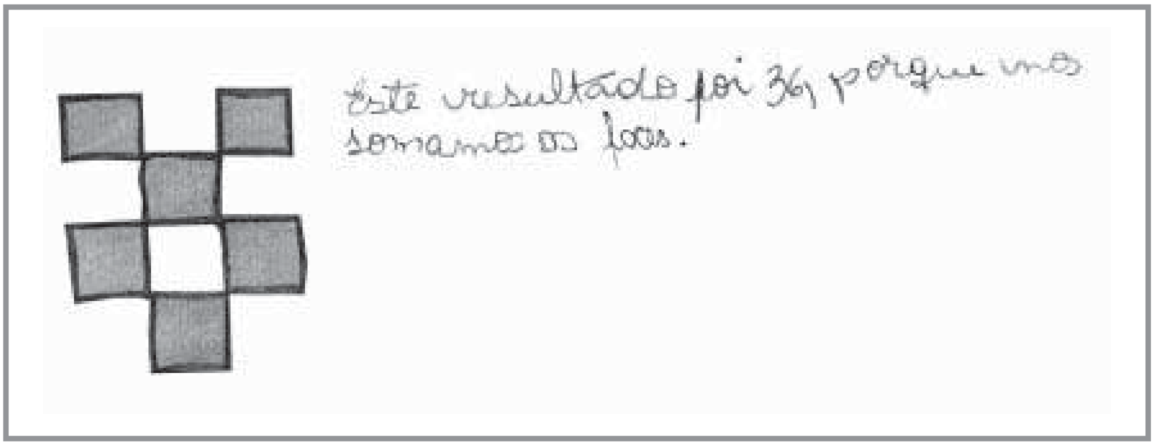
Comentários

Esta atividade deve ser trabalhada com alunos que já conheçam o conceito de área de superfície de um sólido geométrico. O índice de acertos foi bom nas turmas em que foi aplicada, sendo que no 8º ano, a maioria fez corretamente. Verificamos que há uma grande dificuldade em justificar por palavras, embora tenhamos percebido pelo desenho que a idéia estava correta.

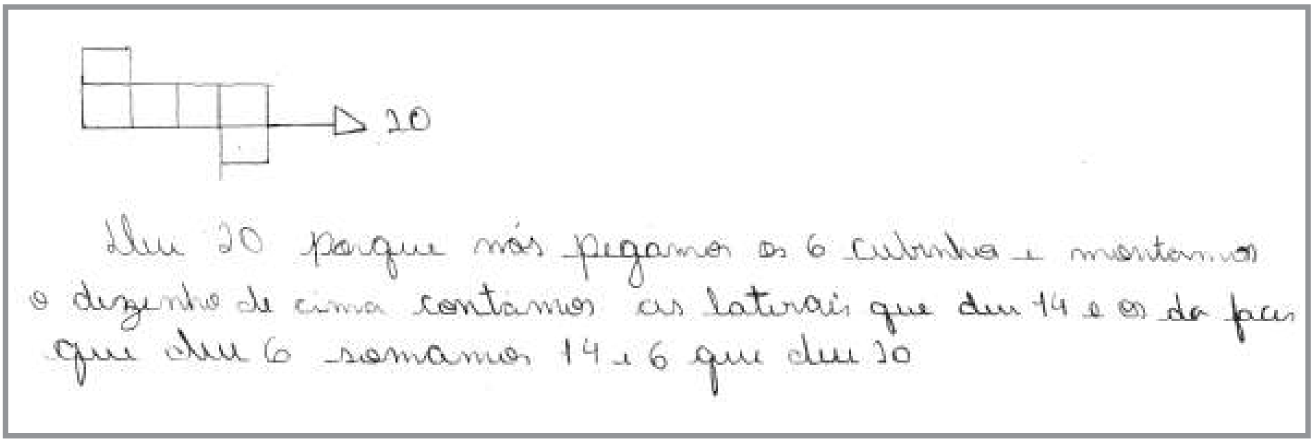
Exemplos de respostas incorretas

Poucos alunos erraram, entre os erros cometidos destacam-se os mencionados a seguir.

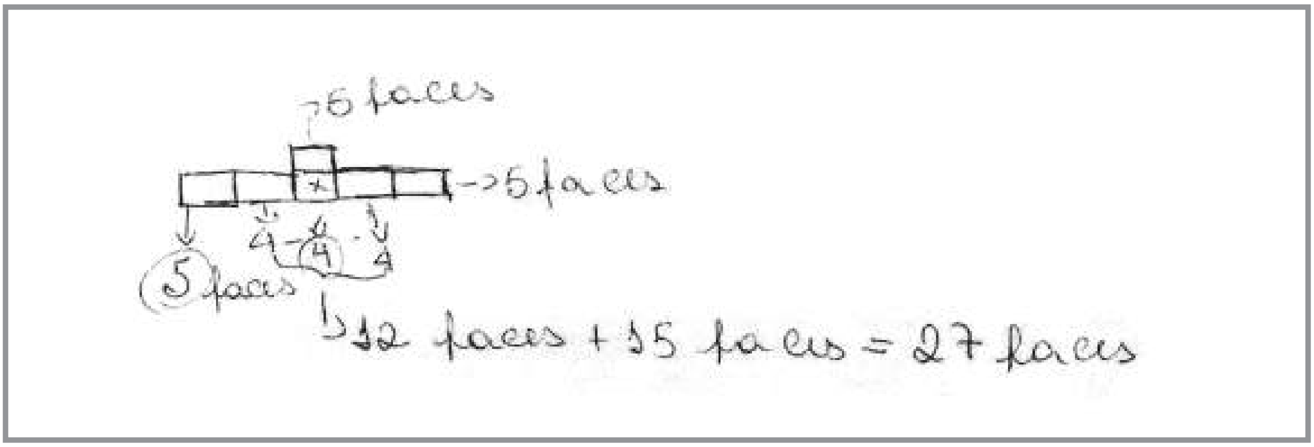
– Apresentar 36 como resposta, devido à não observação da condição do enunciado (dois cubos vizinhos terem uma face em comum), veja a solução abaixo:



– Não contabilizar as faces apoiadas dos cubinhos na mesa, totalizando 20 u.a.



– Contagem errada do número de faces a serem consideradas em cada cubinho.



Exemplos de respostas corretas

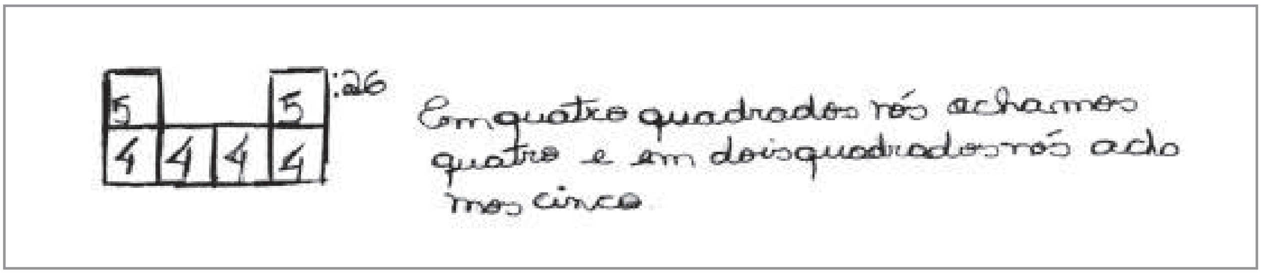
Alguns alunos chegaram a uma expressão numérica, como uma dupla do 8^0 ano:

“Para cada dois cubos vizinhos se anulam duas faces(8), sendo que, no 1° e no 6º cubo só se anula uma face de cada um(2). Total de faces anuladas: 10 faces. 6 x 4 + 2 = 26”

Embora não tenha escrito como forma de expressão, uma dupla de alunos do 8º ano percebeu como se alterava o número de faces na junção dos cubinhos, conforme mostra a justificativa apresentada:

“Cada cubo tem 6 lados, só que na junção desses se perde 10 faces (2 a cada junção) sendo que somando todos os cubos (6 x 6 = 36) e subtraindo as faces perdidas: 36 - 10 = 26.”

É interessante registrar a idéia de mostrar no desenho o número de faces a serem contadas em cada cubinho, criando para isto um esquema, como no caso do aluno abaixo:



Nos dois exemplos anteriores observamos troca de termos. No primeiro, logo no início, troca de “face” por “lado”. No segundo, troca de “cubo” por “quadrado”.

Sugestões para a sala de aula

– Propor inicialmente que resolvam esta atividade com número de cubinhos menor do que seis (três, quatro e cinco).

– Propor que registrem através de uma expressão numérica como fizeram os cálculos.

– Propor que esbocem os desenhos que os levam a obter a maior área de superfície possível.

– Dependendo do desempenho dos alunos durante a realização da atividade, pode-se propor que tentem chegar à fórmula geral: $S(n)= 4n + 2$, onde S é a área de superfície do modelo e n, o número de cubinhos. Diferentes modos de raciocinar levam a esta fórmula, já vimos alunos chegarem inicialmente a $S(n)= 2 \cdot 5 + 4(n - 2)$ e outros a $S(n)= 6n - 2(n -1)$.

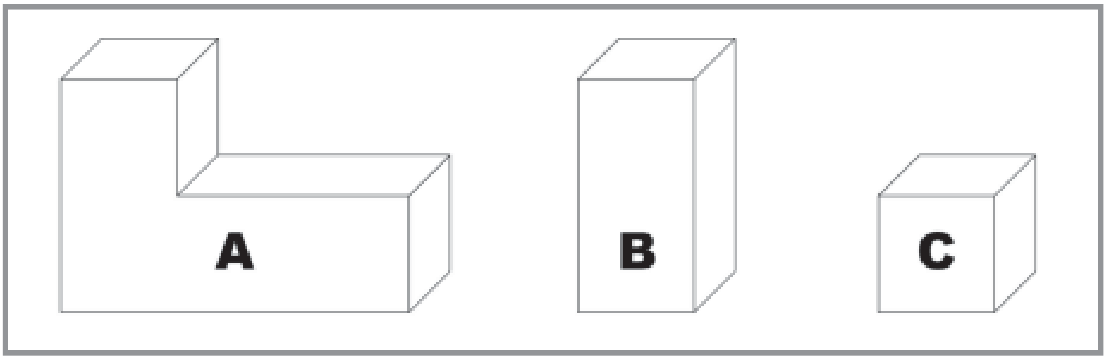
Atividade 7

Contagem de blocos

Questões 1 e 2 adaptadas de [Testes NFER] (1972)

Enunciado

1. Observe os desenhos dos sólidos A, B e C abaixo.



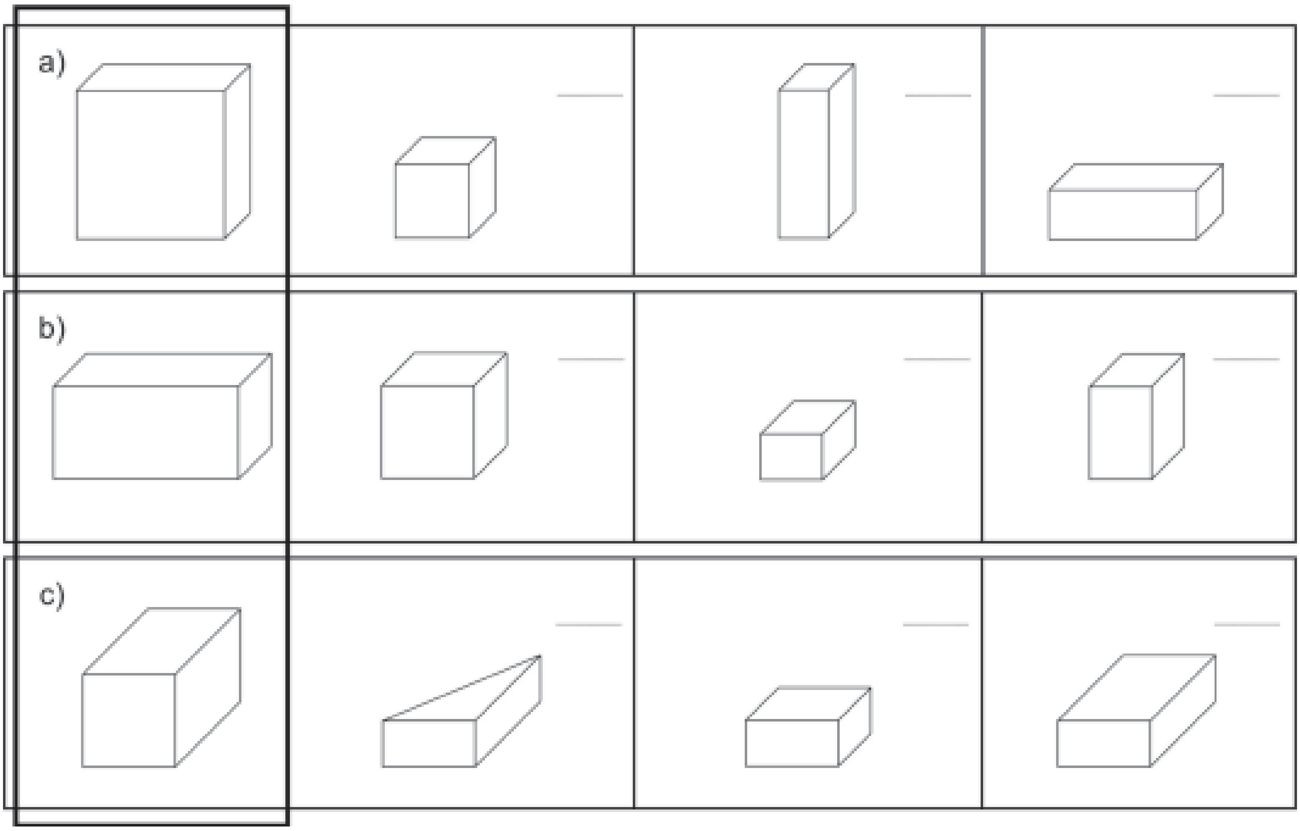
(a) Quantos sólidos B são necessários para formar o sólido A?______________________

(b) Quantos sólidos C são necessários para formar o sólido A?______________________

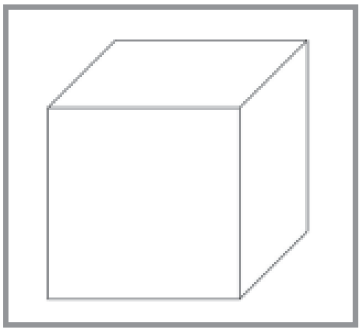
(c) Quantos sólidos C formam o sólido B?____

(d) Se quisermos construir o sólido A usando os blocos B e C, quantos de cada um serão necessários?____

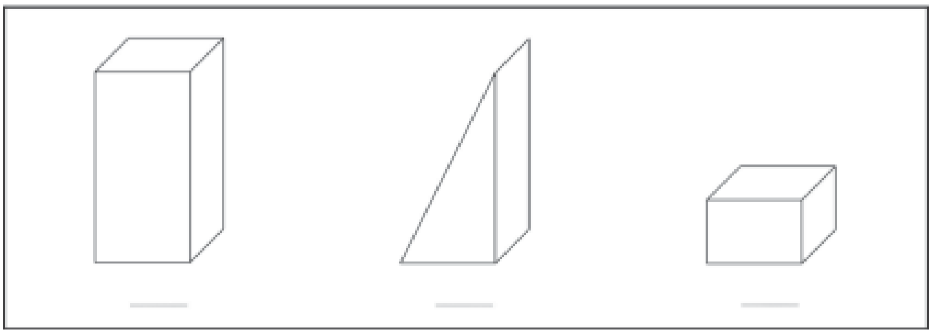
2. Observe o bloco grande da esquerda de cada uma das filas. Quantos blocos da direita, de mesmo formato, são necessários para construir o bloco grande? Escreva sua resposta na linha pontilhada ao lado de cada um dos blocos.



3. Observe o bloco desenhado abaixo:



Se quisermos desenhar este bloco utilizando TODAS as três peças a seguir, quantas serão utilizadas de cada uma? Coloque abaixo de cada peça o número correspondente.



Turmas em que foi aplicada: 6º, 7º e 9º Anos do Ensino Fundamental

Comentários

A primeira questão foi a que apresentou maior número de acertos. Na questão 2 os alunos de todas as séries tiveram mais dificuldade para responder. Observamos que erraram mais quando o bloco menor difere do maior por mais de uma dimensão. Assim, por exemplo, no item 2b, houve mais acertos na primeira resposta do que na seguinte.

Na terceira questão o desempenho não foi bom, parece que sequer compreenderam o enunciado. Na aplicação desta questão não houve interferência do professor. Acreditamos que é interessante, neste caso, o professor discutir o objetivo da questão com o aluno, de modo que entendam o enunciado. Não é uma formulação usual e há mais de uma solução possível.

Nesta atividade, a substituição da **perspectiva cavaleira** pela **perspectiva isométrica,** pode ajudar os alunos a avaliar melhor as relações métricas entre o bloco e as peças (ver Apêndice).

Sugestões para a sala de aula

– Levar blocos para a sala de aula para que visualizem os sólidos, observando suas dimensões.

– Na última questão comparar as respostas dos alunos para que percebam que há mais de uma solução possível.

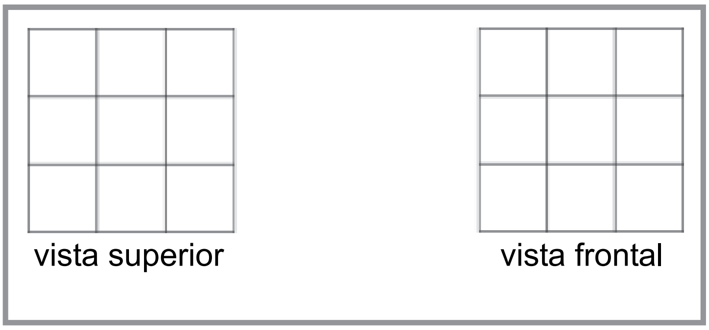
Atividade 8

Construindo sólidos a partir de suas vistas

Adaptada de Pinheiro (1997)

Enunciado

Um sólido formado por cubinhos tem as seguintes vistas:



a) Utilize cubinhos para formar o sólido que você imagina que tenha originado estas duas vistas.

b) Faça um esboço deste sólido.

c) Desenhe a vista lateral esquerda deste sólido.

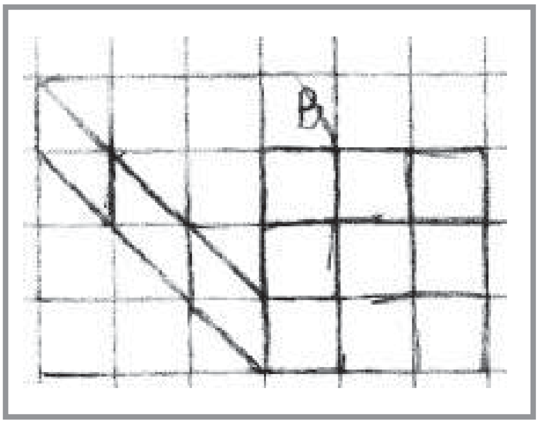
d) Compare sua solução com a de seus colegas. Eles obtiveram a mesma solução? A que conclusões vocês chegaram?

Turmas em que foi aplicada: 6º Ano do Ensino Fundamental

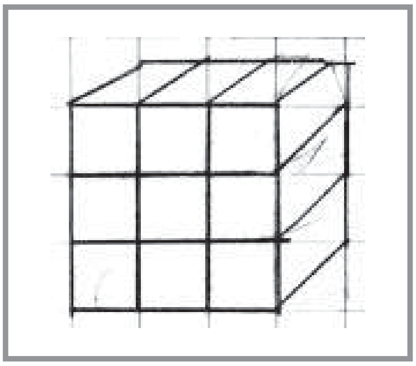
Comentários

Nesta atividade foi solicitado aos alunos que trabalhassem individualmente nos itens (a), (b) e (c) e depois em duplas para responder o item (d). Os alunos já haviam trabalhado com vistas, ainda assim muitos tiveram dificuldade em esboçar um sólido a partir das vistas apresentadas. No enunciado original era solicitado que utilizassem papel quadriculado, entretanto, achamos que este recurso não facilitou o esboço do sólido.

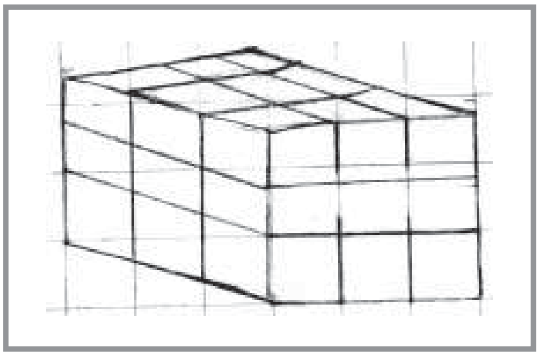
No item (b) alguns alunos não souberam representar uma figura tridimensional no plano, como ilustra o desenho abaixo:



Outros desenharam modelos que não satisfaziam as condições dadas na questão. Observe no desenho abaixo feito em resposta ao item (b), que a vista superior do sólido esboçado pela aluna não corresponde a do enunciado da questão.

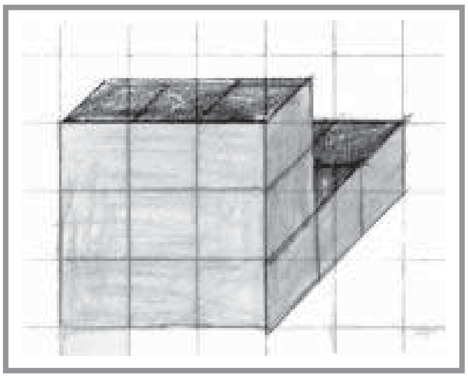


No item (c) muitos desenharam o sólido ao invés de sua vista lateral.



Na letra (d) percebemos que ao invés de compararem as duas soluções e chegarem a uma conclusão comum, os alunos relataram como cada um resolveu.

A maioria dos alunos que acertou esta questão desenhou um cubo formado por 27 cubinhos (3x3x3), embora houve algumas exceções, como a do aluno abaixo:



Sugestões para a sala de aula

– Deixar o aluno se movimentar ao redor do sólido montado para que observe melhor as diferentes vistas.

– Antes de aplicar questões em que são apresentadas as vistas para que se esboce os sólidos, é conveniente explorar primeiro o processo inverso, ou seja, questões em que são dados os sólidos para que sejam desenhadas as vistas.

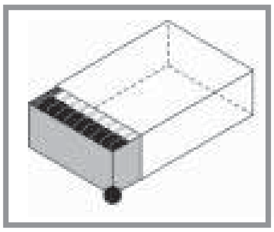
Atividade 9

Onde está a pinta preta?

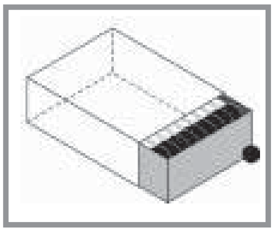
Questão 1 adaptada de [Testes NFER] (1972)

Enunciado

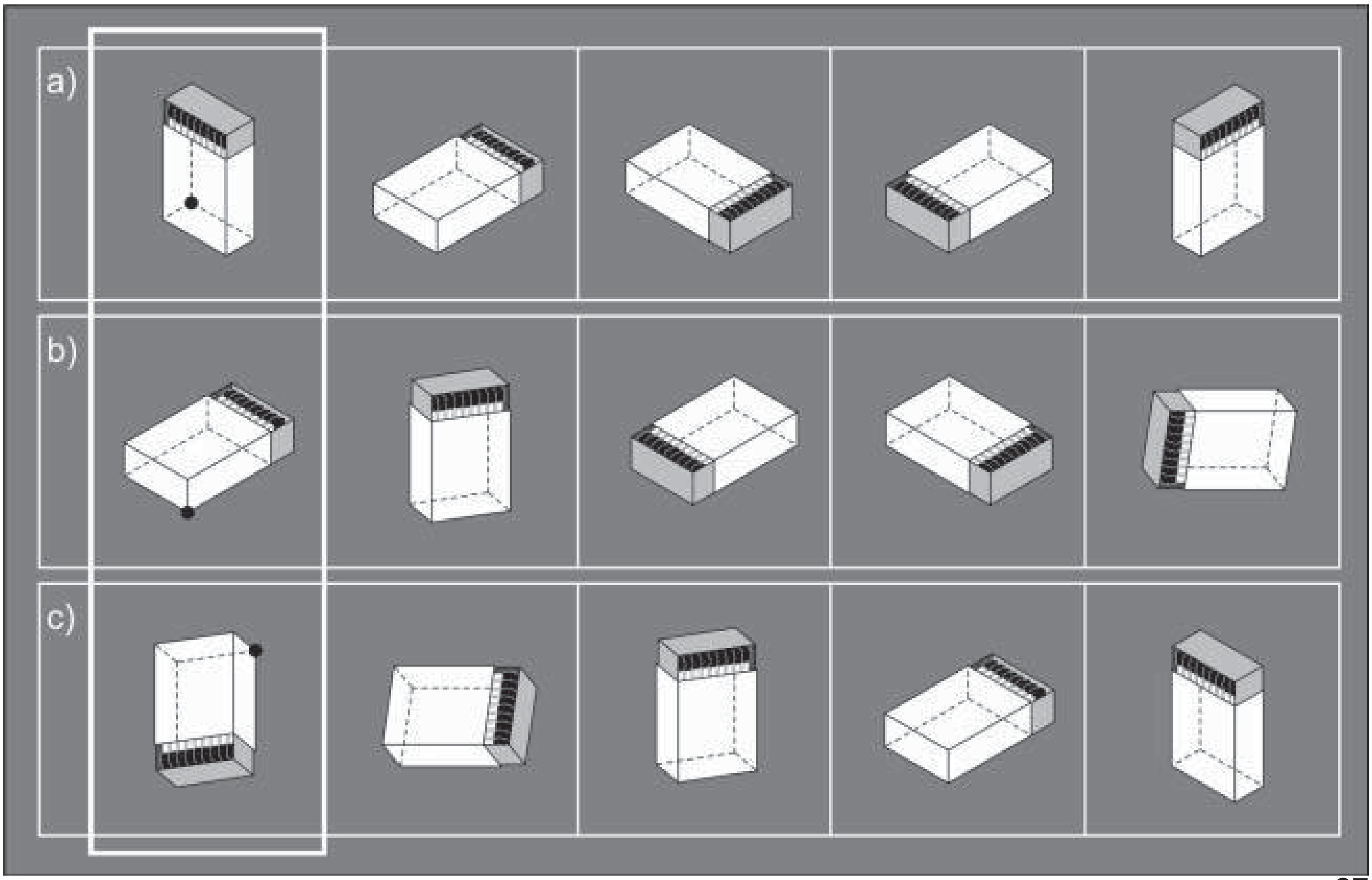
Na caixa de fósforos desenhada a seguir está marcada uma pinta preta:



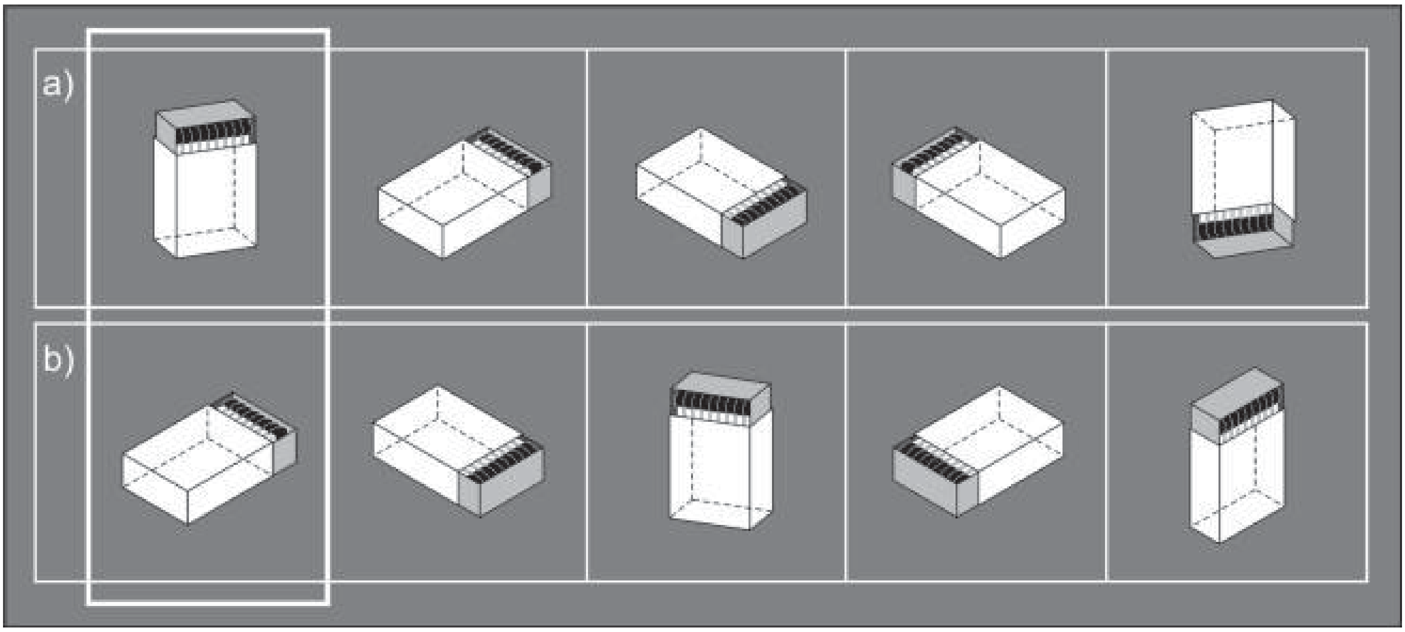
Abaixo temos a mesma caixa de fósforos em outra posição:



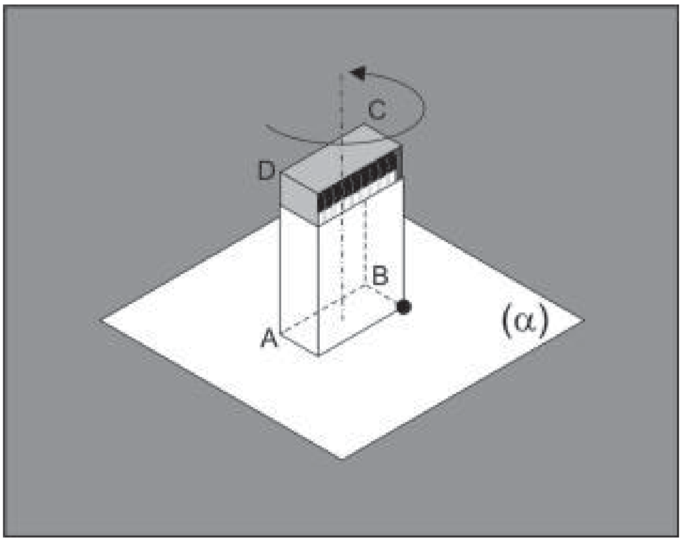
1. Na primeira caixa de cada item abaixo está localizada uma pinta. Você deverá marcar onde ela ficou em cada uma das quatro caixas seguintes, após os movimentos realizados com a primeira caixa.



2. Agora você irá colocar a pinta preta no vértice de cada caixa, de modo que as cinco caixas de uma mesma fila tenham a pinta na mesma posição.



3. Observe a caixa desenhada abaixo:



Siga as instruções a seguir, uma após a outra.

– Gire a caixa 180º no sentido anti-horário sobre o eixo de rotação indicado, mantendo sua base apoiada sobre o plano.

– Desenhe como ela ficou, observe bem a posição da pinta preta.

– A seguir, gire a caixa 90º sobre a aresta AB no sentido horário de modo que a face ABCD fique apoiada sobre o plano. Desenhe então a caixa na posição final após a realização destas duas instruções.

4. É a sua vez de elaborar uma questão.

– Faça o desenho de uma caixa de fósforos com uma pinta preta em um de seus vértices.

– Desenhe duas novas caixas em posições diferentes da primeira, sem marcar nestas a pinta preta.

Entregue esta questão a seu colega e peça para ele marcar onde ficou localizada a pinta nas duas últimas caixas desenhadas.

Turmas em que foi aplicada: 6º, 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental

Comentários

Na primeira atividade os alunos tiveram mais facilidade de resolver o item (a). Não foi vetado o uso de qualquer material concreto que simulasse a caixa de fósforos como recurso para melhor visualização. A segunda atividade foi resolvida sem problemas. Entretanto, a terceira apresentou um grande grau de dificuldade. No enunciado original não solicitávamos aos alunos que fizessem o desenho após a primeira etapa. Na questão original os alunos tiveram dificuldade em:

– representar na folha de papel a caixa de fósforos, alguns desenharam retângulos sem preocupação em mostrar que o objeto é espacial;

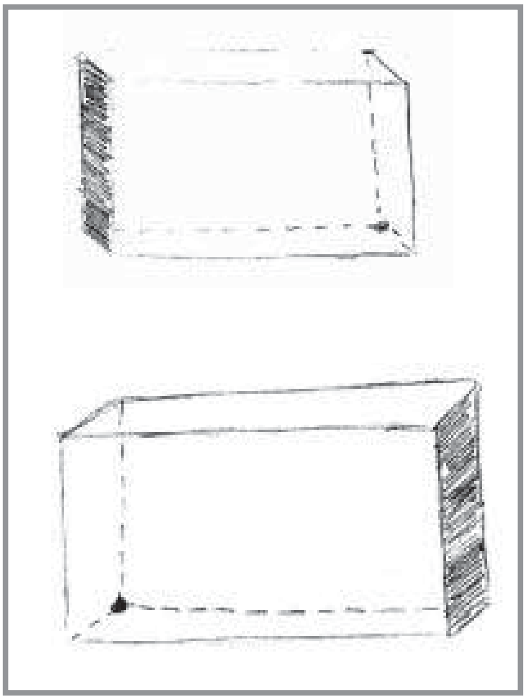
– seguir uma seqüência de comandos;

– entender e aplicar a noção de giro no espaço.

A dificuldade dos alunos em seguir seqüência de comandos foi o que nos motivou a dividir em duas etapas a questão.

A última questão, em que cada aluno deveria escrever uma questão e passar ao colega, foi a que mais gostaram. Alguns alunos porém tiveram problemas ao desenhar a figura em perspectiva, como apontado abaixo;

Outros não diferenciaram, no desenho, a face em que está a abertura da caixa à face oposta a esta;



Sugestões para a sala de aula

– Pedir aos alunos que levem caixas de fósforos vazias para que as utilizem, caso não consigam resolver a questão sem um material de apoio. Outra alternativa é utilizarem um objeto com a forma de bloco retangular, como uma borracha, e fazer neste uma marca onde deveria estar a abertura da caixa.

– Rever ou introduzir para a turma noções de giro, ângulo e eixo de rotação.

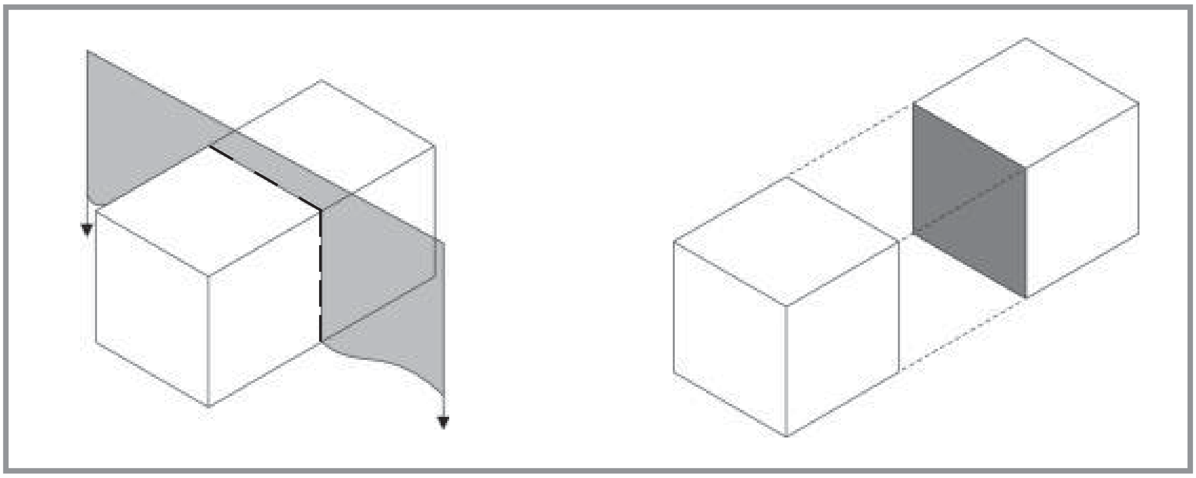
Atividade 10

Seccionando sólidos

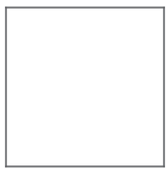
Questões 1 e 2 adaptadas de [Testes NFER] (1972)

Enunciado

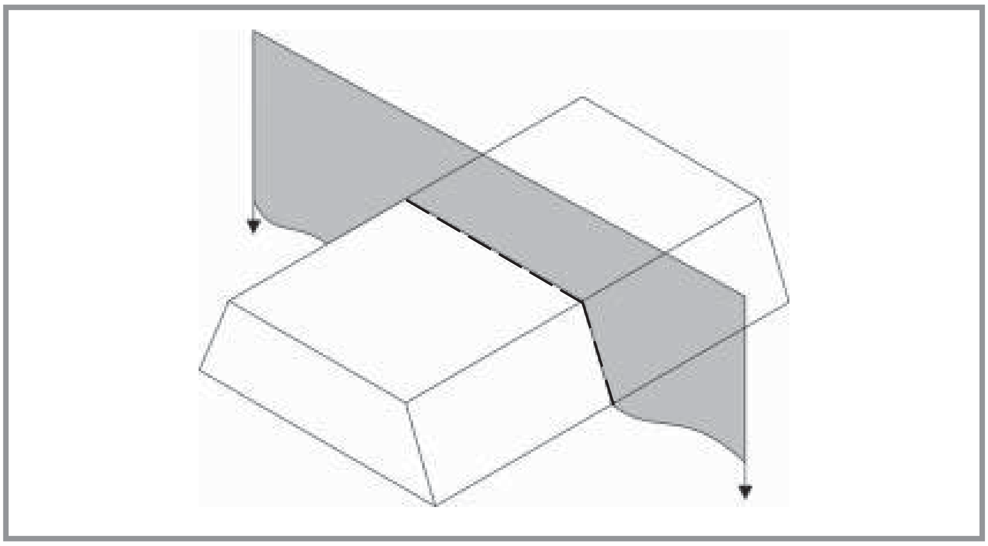
1. Os desenhos abaixo representam o mesmo sólido de madeira antes e depois de ser serrado verticalmente como mostra a linha tracejada. A figura produzida pelo corte está sombreada na imagem à direita.



Neste caso o produto do corte tem a forma do retângulo desenhado a seguir:

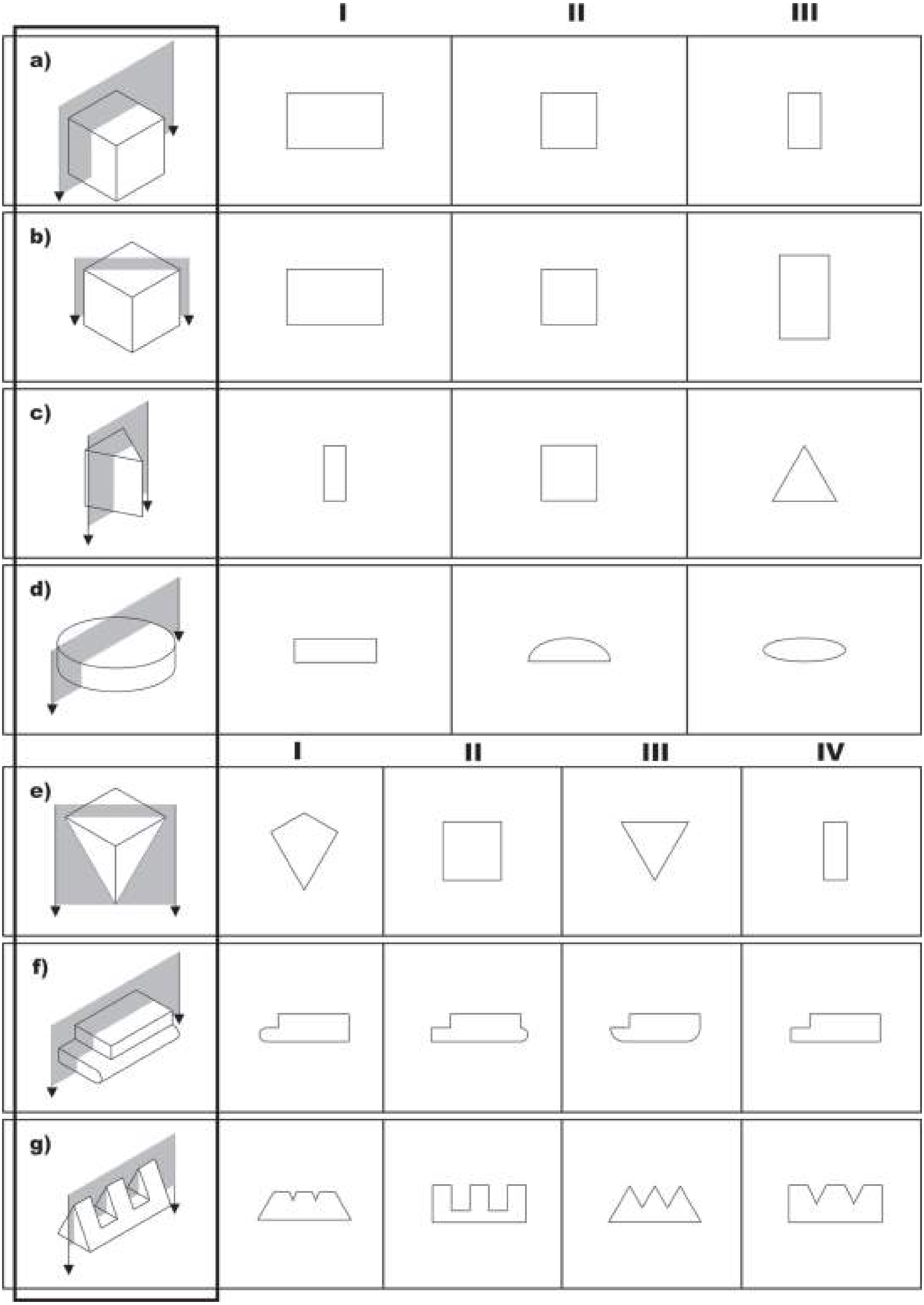


O sólido abaixo foi serrado conforme indica a linha tracejada.

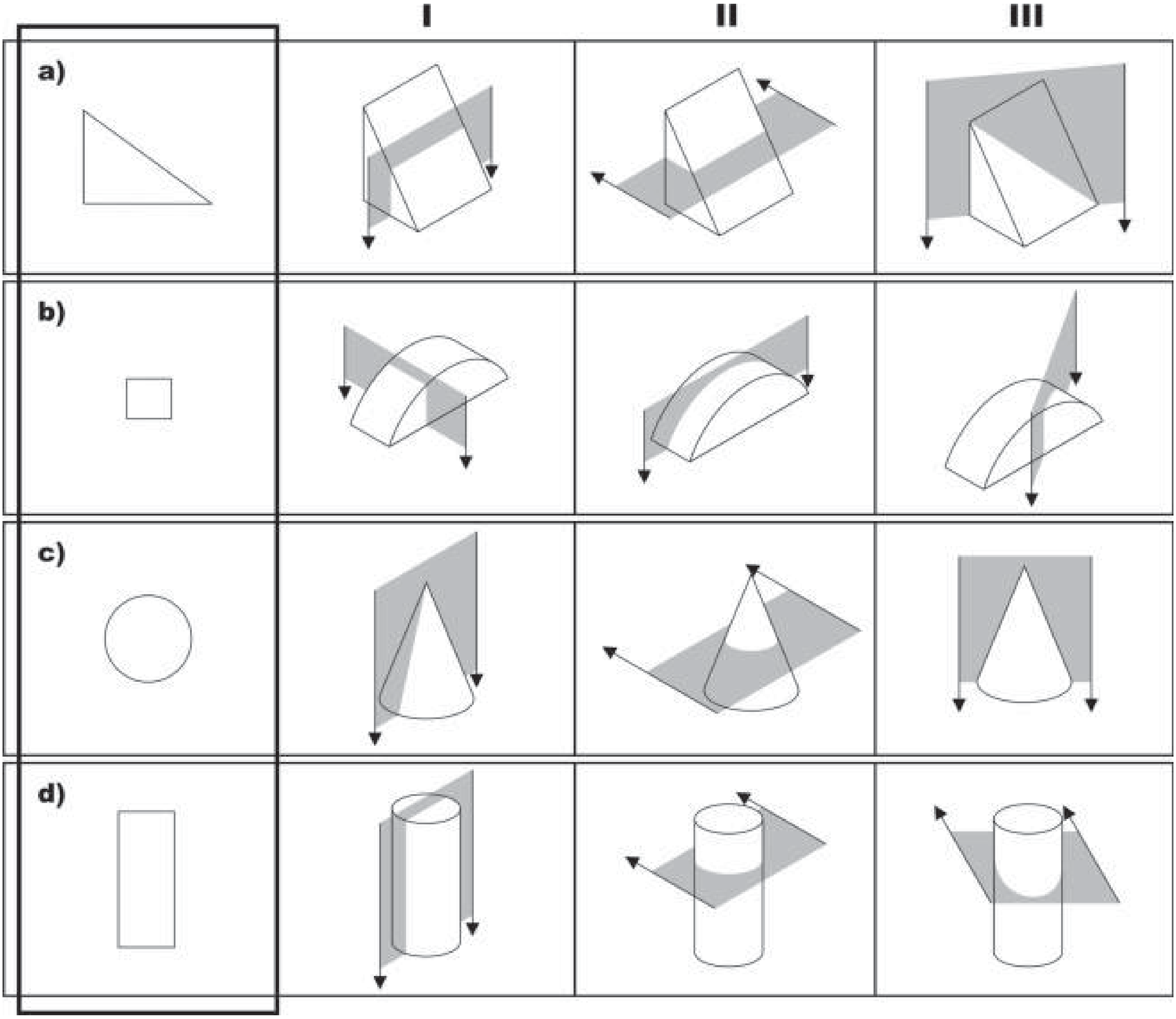


Desenhe a figura plana que representa o resultado da seção.

2. Abaixo, na coluna da esquerda, estão desenhados sólidos de madeira que serão cortados conforme indicado pelos planos de seção. Nas colunas à direita, uma das figuras corresponde à representação do corte obtido. Marque com um X a opção correta.



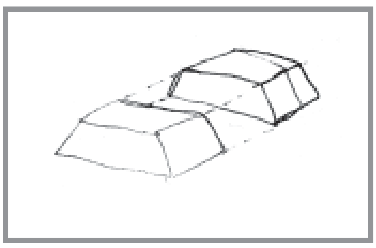
3. Abaixo, na coluna da direita, estão desenhadas três figuras que representam o mesmo sólido sendo serrado de três formas distintas. Uma destas seções resulta na figura desenhada na coluna da esquerda. Marque com um X a alternativa correta.



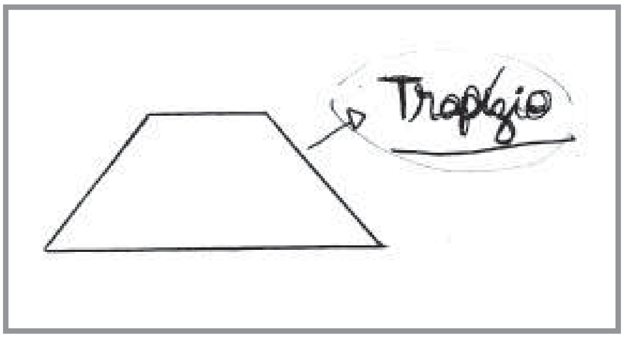
Turmas em que foi aplicada: 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental e 1º Ano do Ensino Médio

Comentários

A maioria dos alunos acertou a primeira questão. No enunciado da questão aplicada, não escrevemos a palavra plana quando solicitamos que fizessem o desenho da figura resultante do corte. Decidimos então incluí-la, pois alguns alunos, não tendo observado o modelo anterior, fizeram desenhos como o que se segue:



Alguns desenharam trapézios que diferiam um pouco do formato correto.



A maioria acertou as questões 2 e 3. O item **c** da questão 2 apresentou uma incidência de erros um pouco maior que os demais.

Sugestões para a sala de aula

– Antes de introduzir esta questão, levar para a sala um bloco de isopor e cortá- lo de formas distintas, mostrando as seções obtidas.

– Solicitar que os alunos representem as seções dos sólidos da questão 3 que não foram assinalados.

– Explorar cortes no cone e no cilindro, distintos dos que foram feitos nos itens 3c e 3d, com o objetivo de encaminhá-los para o estudo de cônicas no Ensino Médio.

Questões de Olimpíadas e Exames

Apresentamos a seguir oito questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBM) e das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e duas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Para resolvê-las o aluno deverá ser capaz de: contar peças que faltam ou que compõem as figuras, saber como planificá-las ou ainda imaginar o resultado de movimentos realizados com estas. Todas objetivam verificar a habilidade de visualizar figuras espaciais representadas no plano.

1) (OBMEP- Banco de questões 2006) Num armazém foram empilhadas algumas caixas que formaram o monte mostrado na figura. Se cada caixa pesa 25 kg quanto pesa o monte com todas as caixas?

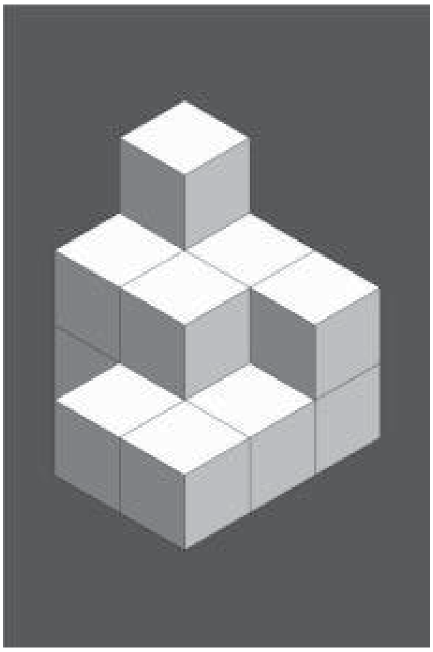
A) 300 kg

B) 325 kg

C) 350 kg

D) 375 kg

E) 400 kg



2) (OBM 1998) Dezesseis cubos de 1cm de lado são colocados juntos, formando o paralelepípedo representado abaixo.

A superfície do mesmo foi pintada de verde e, em seguida, os cubos foram separados. O número de cubos com exatamente duas faces verdes é:

A) 2

B) 6

C) 4

D) 8

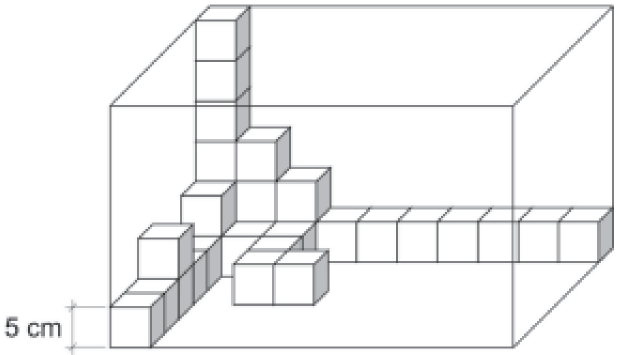
E) 10

3) (OBMEP- 2005) Emília quer encher uma caixa com cubos de madeira de 5cm de aresta. Como mostra a figura, a caixa tem a forma de um bloco retangular, e alguns cubos já foram colocados na caixa.

A) Quantos cubos Emília já colocou na caixa?

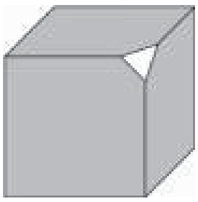
B) Calcule o comprimento, a largura e a altura da caixa.

C) Quantos cubos ainda faltam para Emília encher a caixa completamente, se ela continuar a empilhá-los conforme indicado na figura?

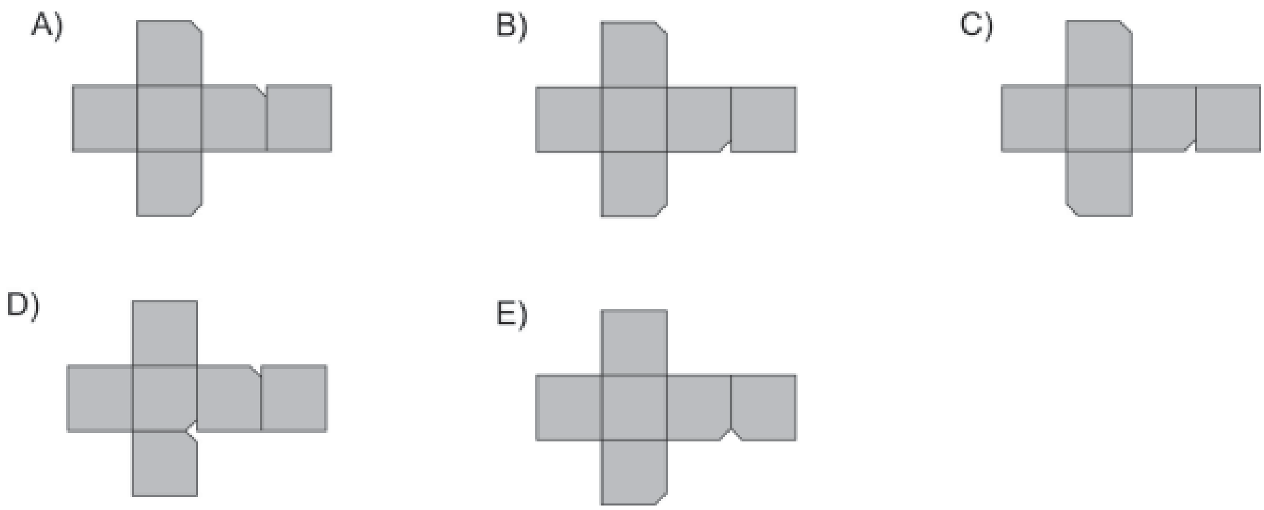


4) (OBM- 2004) Um cubo pode ser construído, a partir dos dois pedaços de papelão apresentados em uma das alternativas a seguir, bastando apenas dobrar nas linhas tracejadas e unir nas linhas contínuas. Esses dois pedaços são:

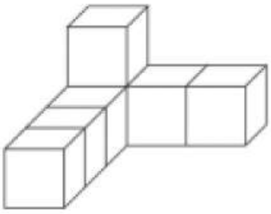
5) (OBMEP- Banco de questões- 2006) Cortamos um canto de um cubo, como mostrado na seguinte figura:



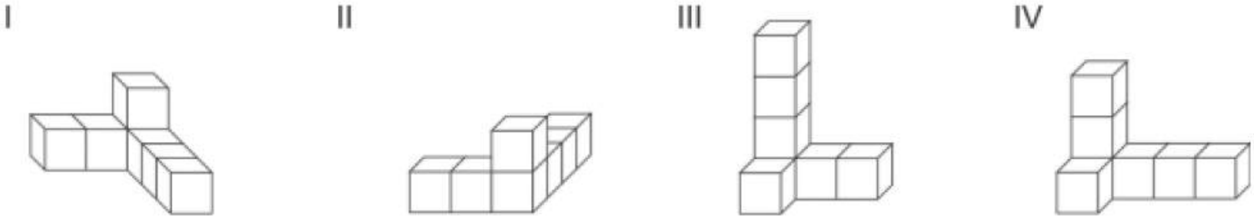
Qual das representações abaixo corresponde ao que restou do cubo?



6) (OBM- 2004) Observe a figura:

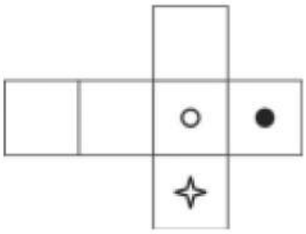


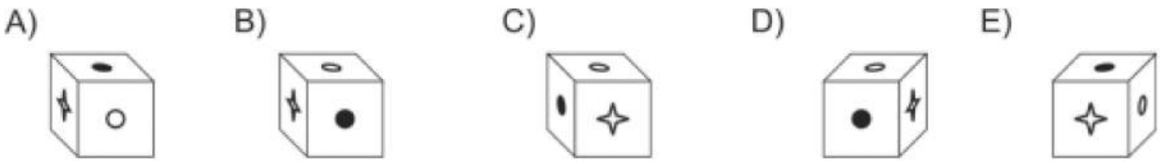
Duas das figuras abaixo representam o objeto acima colocado em outras posições.



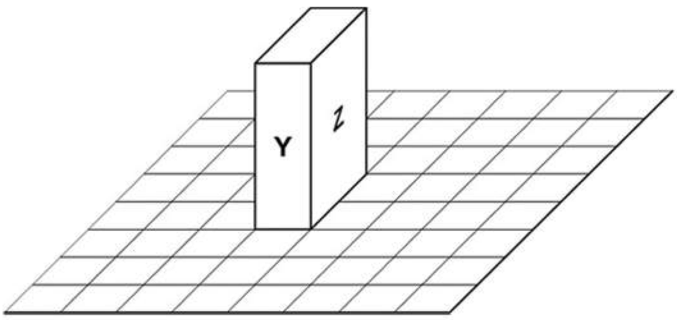
Elas são: A) I e II B) I e IV C) II e IV D) I e III E) II e III

7) (OBM - 2000) A figura abaixo foi desenhada em cartolina e dobrada de modo a formar um cubo. Qual das alternativas mostra o cubo assim formado?



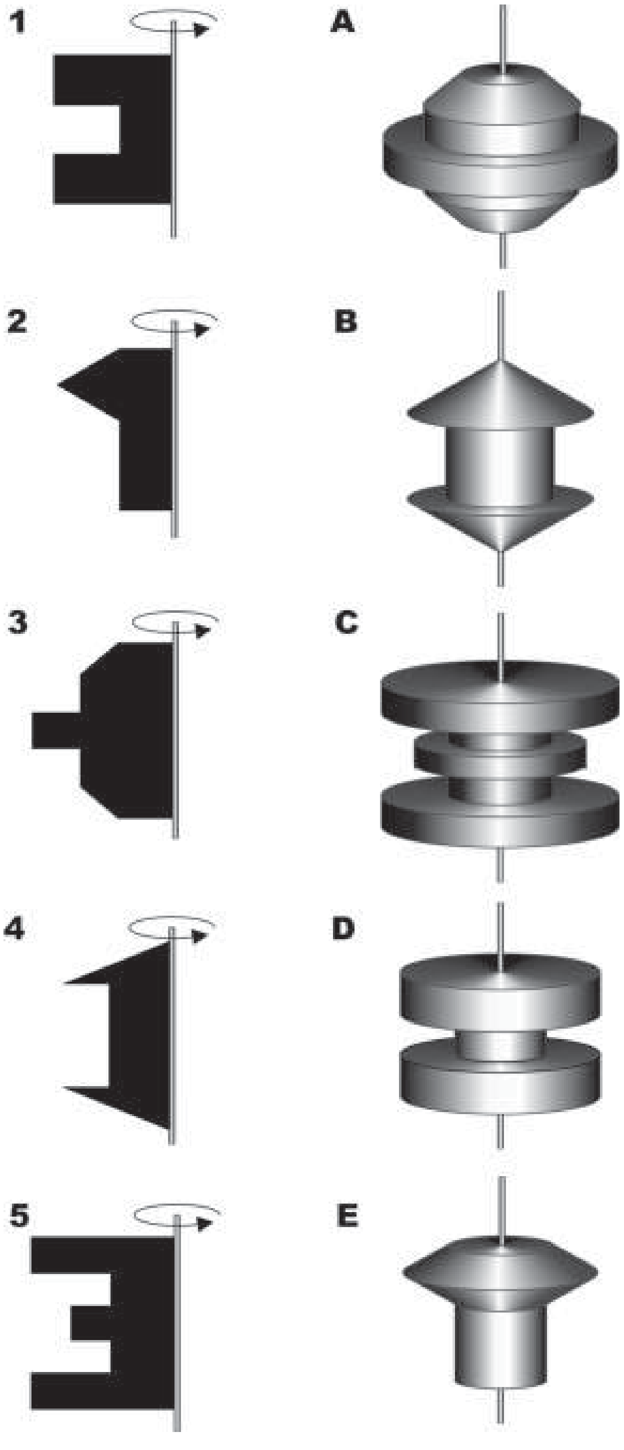


8) (OBM- 2005) Um bloco de dimensões 1 x 2 x 3 é colocado sobre um tabuleiro 8 x 8, como mostra a figura, com a face *X*, de dimensões 1 x 2, virada para baixo. Giramos o bloco em torno de uma de suas arestas de modo que a face *Y* fique virada para baixo. Em seguida, giramos novamente o bloco, mas desta vez de modo que a face *Z* fique virada para baixo. Giramos o bloco mais três vezes, fazendo com que as faces *X*, *Y* e *Z* fiquem viradas para baixo, nessa ordem. Quantos quadradinhos diferentes do tabuleiro estiveram em contato com o bloco?



A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E)22

9) (ENEM – 99) Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras abaixo em torno da haste indicada obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



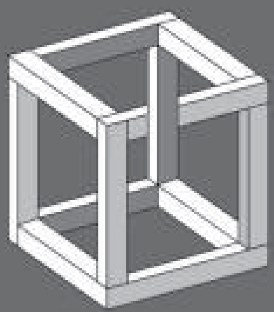
A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

(A) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E
(B) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A
(C) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C
(D) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C
(E) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A

10) (ENEM –2007) Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia Belvedere, reproduzida ao lado.

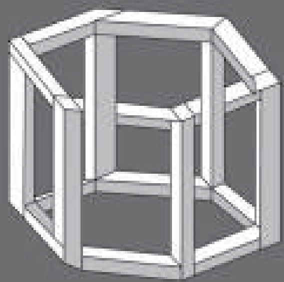
Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

(A)



(B)

(C)



(D)

(E)

Comentários e respostas

A seguir apresentamos soluções (ou parte de soluções) da maioria das atividades do livro. Nos capítulos anteriores constam algumas destas soluções, não de forma direta, mas no decorrer dos comentários sobre a aplicação de cada atividade. Apresentamos também as soluções das questões das Olimpíadas (OBM e OBMEP) e do ENEM.

Atividade 1: O Quebra-cabeça da Letra H

Opção c

Atividade 2: A Peça que Falta

Opção c

Atividade 3: Movimentando Caixas de Chocolate

Na pilha há 27 caixas de chocolate e na caixa grande cabem 24 (4 x 3 x 2) caixas, sobram assim 3 caixas.

Atividade 4: A Pilha de Tijolos

Há 60 tijolos na pilha apresentada no enunciado. Diversas formas de contagem levam a esta solução.
Nas sugestões há uma outra pilha desenhada e nesta há 52 tijolos.

Atividade 5: Contando Cubinhos

a) 27 b) 6 c) 12 d) 8 e) 1

Para o caso n x n x n, que consta na sugestão desta atividade, é importante que se estimule o aluno a resolver de maneira geométrica.

a) No total há n^3 cubinhos.

b) Possuem uma única face pintada aqueles cubinhos cujas arestas não coincidem com a aresta do cubo maior (examine cada face e veja os quadradinhos na “parte interna” de cada uma). Concluímos assim que em cada face temos $(n - 2)^2$ cubinhos e, no total, $6 \times (n - 2)^2$ cubinhos.

c) Possuem duas faces pintadas os que estão ao longo de cada aresta, mas não nos vértices do cubo, sendo então 12 x (n - 2) cubinhos .

d) Estão com três faces pintadas aqueles que estão nos vértices, ou seja, 8 no total.

e) Sem nenhuma face pintada estão os cubinhos que estão no interior do cubo maior. Portanto, se retirarmos uma fila de cima, uma de baixo, uma da frente e uma de trás, uma da esquerda e outra da direita ficamos com um cubo de aresta n - 2 composto por $(n - 2)^3$ cubinhos (pense que "descascamos" o cubo e imagine o que enxergamos no miolo).

Note que pode ser montada uma tabela com os casos 3 x 3 x 3, 4 x 4 x 4 e assim sucessivamente. A tabela pode servir para o aluno organizar os dados e verificar regularidades algébricas. Reafirmamos, entretanto, que devem ser motivados a raciocinar geometricamente.

Atividade 6: Área de Superfície: qual a maior possível?

Para que a área de superfície seja a maior possível, é necessário que haja o menor número possível de faces em contato entre si. Os sólidos que atendem ao que foi solicitado devem ter área de superfície igual a 26. Generalizando para n temos que a área de superfície será 4n + 2.

Atividade 7: Contagem de Blocos

1) a) 2 b) 4 c) 2 d) 1 do B e 2 do C

2) a) 4, 3, 3 b) 2, 6, 3 c) 4, 4, 2

3) Há algumas soluções possíveis, uma delas é 2, 2, 3.

Atividade 8: Construindo sólidos a partir de suas vistas

Há várias soluções possíveis, uma por exemplo é a do cubo da questão “Contando Cubinhos”. Caso tenham apresentado esta solução, devem ser estimulados a apresentar também alguma outra.

Atividade 9: Onde está a Pinta Preta?

Nesta questão, embora a situação ideal é que o aluno consiga responder sem a utilização de material, pode-se utilizar uma caixa de fósforos ou qualquer objeto que possa imitá-la. Com o uso da caixa, as respostas podem ser facilmente verificadas.

Atividade 10: Seccionando Sólidos

1) A figura desenhada será um trapézio isósceles

2) a) II b) I c) I d) I e) III f) IV g) II

3) a) III b) I c) II d) I

Soluções das Questões de Olimpíadas (OBM e OBMEP) e ENEM

1) Há 14 caixas no monte, portanto o peso total é 350 kg (opção C).

2) 8 cubos (opção D).

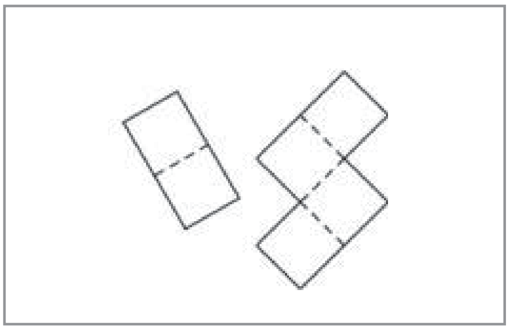
3)

(A) Foram colocados 31 cubos, deve-se tomar cuidado para se contar também os cubos não visíveis.

(B) O comprimento corresponde a 10 cubos e logo é igual a 10 x 5 = 50cm; a largura é igual a 7 x 5 = 35cm e a altura é igual a 6 x 5 = 30cm.

(C) O número total de cubos que cabem na caixa é 10 x 7 x 6 = 420, se retirarmos os que já foram colocados obteremos 420 - 31 = 389 cubos. Uma outra forma de resolver é realizando diretamente a contagem dos que faltam.

4) Com as peças da opção E.



5) Cada vértice do cubo está ligado a três arestas, assim a opção correta deve indicar que, ao ser retirado um dos vértices, três cortes foram realizados ao redor do mesmo vértice (opção E).

6) As figuras II e IV representam o mesmo objeto (opção C).

7) A única opção correta é a B.

8) O bloco foi girado 5 vezes. Indicaremos os quadradinhos em contato com o bloco. Se no quadradinho estiver escrito X_2, por exemplo, este quadradinho esteve em contato com a face X no segundo giro. Se o índice da letra que indica a face for 0 então o quadradinho esteve em contato com o bloco na sua posição inicial. Um mesmo quadradinho pode ter tido contato com mais de uma face.

			X_0				
	Y_4	Y_4	X_0 Y_4	X_3	X_3		
	Z_5	Z_5	Y_1 Z_5	Z_2	Z_2		
	Z_5	Z_5	Y_1 Z_5	Z_2	Z_2		
			Y_1	Z_2	Z_2		

Assim, o bloco esteve em contato com 19 quadradinhos do tabuleiro.

9) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C (opção D).

10) A opção E representa um octaedro regular e é a única que o marceneiro poderia reproduzir em um modelo tridimensional real.

Apêndice

Sobre o uso da representação em perspectiva

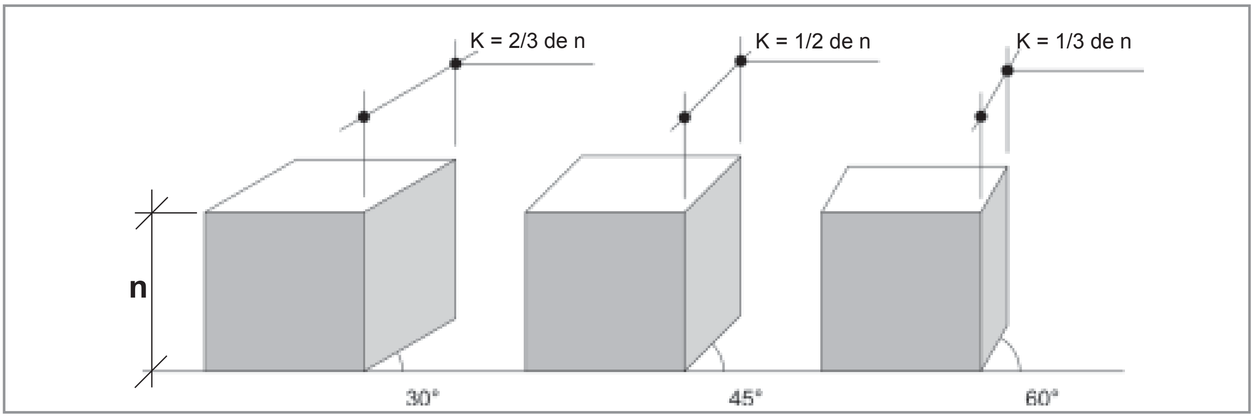
Por Marcelo Bueno, Professor de Desenho do CAp/UFRJ

Existem várias modalidades de perspectiva, obtidas a partir das projeções cônicas ou cilíndricas de uma forma geométrica sobre uma superfície de projeção.

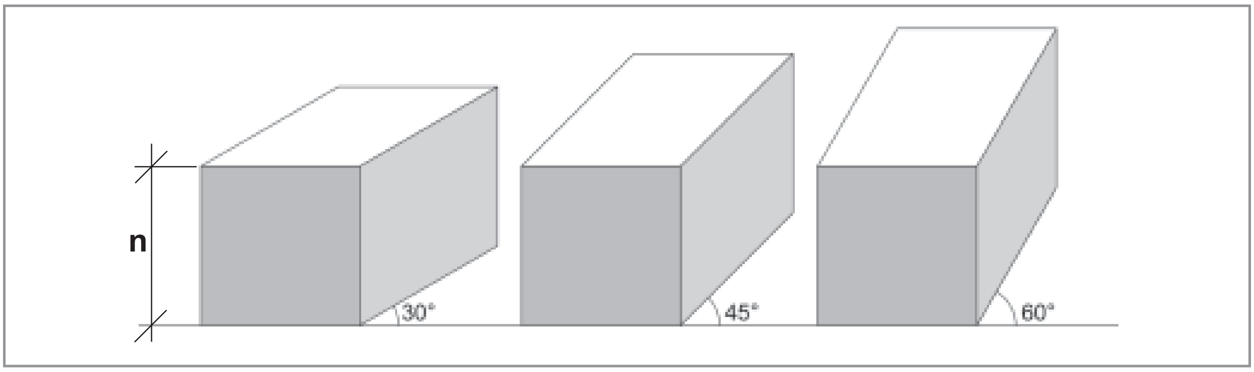
Na elaboração de questões onde se faz necessária a representação de formas tridimensionais, a escolha do tipo mais adequado de perspectiva pode ser determinante para que o aluno consiga visualizar corretamente os sólidos desenhados. De modo geral, as perspectivas mais utilizadas para ilustrar questões de geometria são a **cavaleira** e a **isométrica**.

Na perspectiva cavaleira, uma das vistas do objeto - geralmente a frontal - é representada em verdadeira grandeza, enquanto às outras é aplicado um coeficiente de redução (k), segundo o ângulo utilizado para criar a ilusão de profundidade. Este coeficiente possibilita a produção de uma imagem mais natural, corrigindo as distorções resultantes da utilização da medida real nas faces do sólido representadas oblíquamente.

Para exemplificar o uso da perspectiva cavaleira, consideremos um cubo com aresta igual a **n**.



Sem a utilização do coeficiente de redução, a representações do cubo ficariam do seguinte modo:

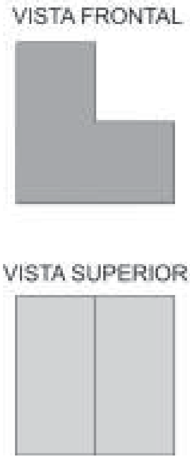


Embora qualquer ângulo possa ser utilizado na perspectiva cavaleira, os ângulos presentes nos esquadros - 30°, 45° e 60° - apresentam-se como as opções mais práticas. Dentre esses, o mais comumente empregado é o de 45°, não só pela evidente facilidade no cálculo da redução, mas, principalmente pelo aspecto equilibrado da representação obtida.

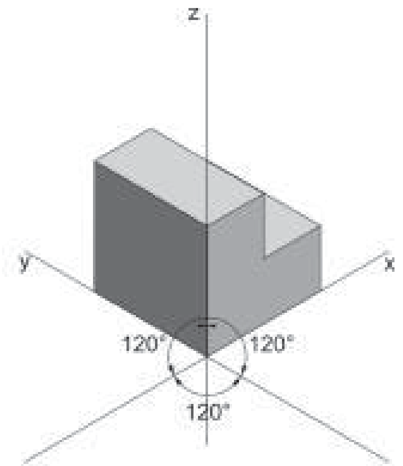
No caso da perspectiva isométrica, as faces do objeto apresentam-se oblíquas em relação ao plano onde a imagem do sólido é projetada. Assim, as vistas são construídas sobre três eixos, cujas projeções formam, entre si, 120°. Como na perspectiva cavaleira, aplica-se um coeficiente de redução às dimensões do sólido, embora, na perspectiva isométrica, a correção se faça, por igual, nos três eixos.

Pode-se utilizar, ainda, uma forma simplificada desse tipo de perspectiva, chamada Desenho Isométrico. Nesse caso, não se aplica o coeficiente de redução em nenhuma das medidas, e, apesar de o resulatdo obtido ser bastante semelhante, ao confrontar o objeto com suas vistas, estas parecerão ter dimensões menores do que as empregadas na representação espacial.

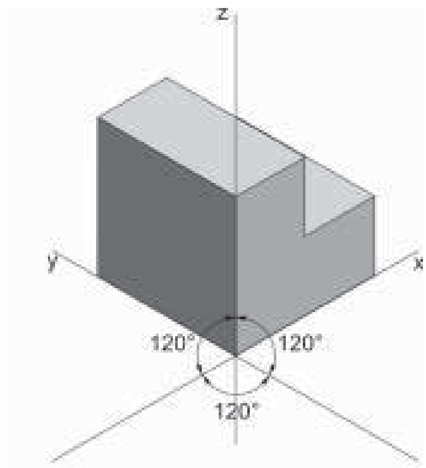
Observemos os exemplos abaixo:



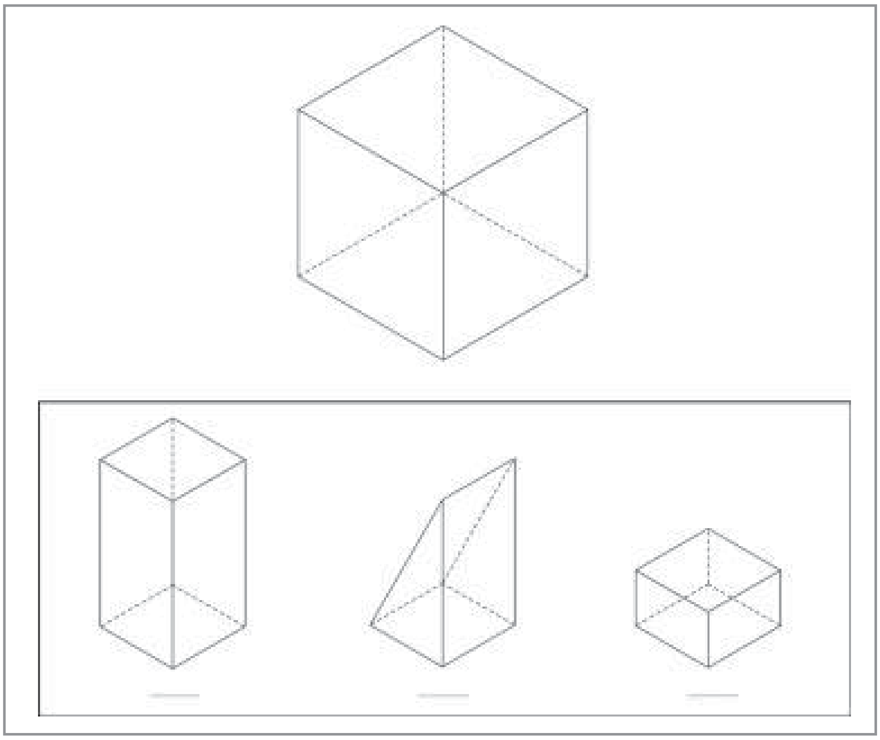
Perspectiva Isométrica (coeficiente de redução k = 0,82)



Desenho Isométrico (sem coeficiente de redução)



Nas questões onde é necessária a comparação de medidas entre dois sólidos, a perspectiva isométrica mostra-se mais adequada do que a cavaleira, por apresentar todas as faces visíveis reduzidas pelo mesmo coeficiente, ou ainda, no caso do desenho isométrico, sem redução alguma. No enunciado 3 da atividade 7(Contagem de blocos), por exemplo, a substituição da perspectiva cavaleira por uma das representações isométricas facilitaria muito a visualização das relações métricas entre o bloco original e os três blocos de construção.



Bibliografia

ABRANTES, Paulo. Investigações em geometria na sala de sula. In: VELOSO, Eduardo et al (Eds). *Ensino da geometria no virar do milênio*. Lisboa: DEFCUL, 1999.

ASSOCIAÇÃO Olimpíada Brasileira de Matemática. *Provas.* Disponível em: <http://www.obm.org.br/frameset-associacao.htm>. Acesso em 22 de julho de 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *ENEM /Estudante /Provas e gabaritos.* Disponível em <http://www.enem.inep.gov.br>. Acesso em 12 de junho de 2008.

FOR the Classroom - cube models. *Mathematics Teaching*. Cambridge: ATM, 148, p.22, set 1994.

HERSHOWITZ, Rina.; PARZYSZ, Bernard e VAN DORMOLEN, Joop. Space and shape. In: BISHOP, Alan et al (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, p.161-204.

IMPA – OBMEP. *Banco de questões*. Disponível em: <http://server04.obmep.org.br/banco_de_questoes.html> . Acesso em 22 de julho de 2008.

IMPA – OBMEP. *Provas e soluções*. Disponível em: <http://server04.obmep.org.br/provas.html>. Acesso em 22 de julho de 2008.

PINHEIRO, Alexandra. Visualização, representação e comunicação numa aula do 8º ano, *Educação e Matemática*, Lisboa: APM, 44, p. 31-34, set/out 1997.

SANTOS, Vânia (Coord.). *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática:* métodos alternativos Rio de Janeiro: UFRJ /Projeto Fundão), 1997.

SEGADAS, Claudia; ROCHA, Denise; PEREIRA, Marcia. Desenvolvendo a capacidade de visualização no terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. *Anais* .... Rio de Janeiro: SBEM, 2002. CD-ROM

SEGADAS, Claudia; PEREIRA, Marcia; SILVA, Fátima. Explorando atividades de visualização e representação de figuras no espaço. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. *Anais...* Rio de Janeiro:SBEM, 2004. CD-ROM.

[TESTES NFER]. Berkshire, Windsor-Berkshire: NFER- Nelson, (c) 1951/1972.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Maria e GRAVEMEIJER, Koeno. Tests aren't all bad: an attempt to change the face of written tests in primary school mathematics instruction. In: WEBB, Norman e COXFORD, Arthur (Eds.). *Assessment in the mathematics classroom*. Reston, VA: NCTM, 1993, p. 54-64.

WHEATHEY, Charlotte e WHEATHEY, Grayson. Developing spatial ability. Mathematics in School, vol.8 (1), p.10-11, jan1979.

O Projeto Fundão desenvolve, desde 1984, na UFRJ, atividades de Educação Matemática e Ensino de Ciências, com os seguintes objetivos:

– Estimular e estender a interação entre a UFRJ e o sistema de ensino básico.

– Apoiar os professores das redes oficial e privada de ensino no sentido do aprimoramento da sua prática pedagógica, e a conseqüente melhoria do ensino da Matemática e Ciências.

Como produto dos seus estudos e pesquisas, a partir da década de 90, o Setor Matemática do Projeto Fundão publicou os seguintes livros:

Geometria na Era da Imagem do Movimento
Números: Linguagem Universal
Razões e Proporções
Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele
Argumentação e Provas no Ensino de Matemática
Construindo Conceito de Função
Tratamento da Informação: Explorando Dados Estatísticos e Noções de Probabilidade a Partir das Séries Iniciais
Avaliação de Aprendizagem e Raciocínio em Matemática: Métodos Alternativos
Geometria Euclidiana por meio da Resolução de Problemas
Geometria Euclidiana: Resolução dos Problemas
Tratamento da Informação: Atividades para o Ensino Básico
Histórias para Introduzir Noções de Combinatória e Probabilidade.
Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático

- Módulo I – Formação de Conceitos Geométricos
- Módulo II – Visão Dinâmica da Congruência de Figuras
- Módulo III – Visão Dinâmica de Semelhança de Triângulos

As atividades propostas nesses livros são subsídios para professores de Ensino Fundamental e Médio. A participação de professores desses níveis de ensino foi essencial, tanto na sua elaboração, como na sua testagem em sala de aula, tornando-as assim adequadas à realidade e às condições de trabalho das escolas.