Curso Básico de Geometria

- Enfoque Didático

Coordenação: Lilian Nasser
Lucia Tinoco

Módulo III
Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras

UFRJ
Instituto de Matemática
Projeto Fundão

CURSO BÁSICO DE GEOMETRIA

ENFOQUE DIDÁTICO

MÓDULO III
VISÃO DINÂMICA DA SEMELHANÇA DE FIGURAS

Coordenação: Lilian Nasser e Lucia A. A. Tinoco

Rio de Janeiro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

ED. INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROJETO FUNDÃO

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Fabio Osmar de Oliveira Maciel – CRB-7 6284

C977

Curso básico de geometria: enfoque didático, módulo III, visão dinâmica da semelhança de figuras [recurso eletrônico] / [Redação e Coordenação: Lilian Nasser e Lucia Tinoco; Cláudio Henrique da Costa Pereira ; Geneci Alves de Sousa ; João Paulo Gioseffi Vassallo ; José Alexandre Ramos Pereira ; Marcus Vinícius Ferreira Soares ; Maria Palmira da Costa Silva ; Marina Martins da Silva ; Mírian Salgado]. – 4. ed. – Rio de Janeiro : Editora IM/UFRJ – Projeto Fundão, 2023.
Recurso digital

Formato: PDF
Requisitos do sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-00-87287-3

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Geometria. I. Nasser, Lilian. II. Tinoco, Lucia. III. Pereira, Cláudio Henrique da Costa. IV. Sousa, Geneci Alves de. V. Vassallo, João Paulo Gioseffi. VI. Pereira, José Alexandre Ramos. VII. Soares, Marcus Vinícius Ferreira. VIII. Silva, Maria Palmira da Costa. IX. Silva, Marina Martins da. X. Salgado, Mírian.

CDD : 372.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino 372.7
2. Geometria 516

Realização: Projeto Fundão – IM/UFRJ

3ª Edição – Impresso – 2004

4º Edição – Digital – 2023

Redação e Coordenação: Lilian Nasser
Lucia Tinoco

Professores: Cláudio Henrique da Costa Pereira
Geneci Alves de Sousa
João Paulo Gioseffi Vassallo
José Alexandre Ramos Pereira
Marcus Vinícius Ferreira Soares
Maria Palmira da Costa Silva
Marina Martins da Silva
Mírian Salgado

Assessoria: Professora Moema Sá Carvalho

ÍNDICE

CURSO BÁSICO DE GEOMETRIA - ENFOQUE DIDÁTICO

MÓDULO III

VISÃO DINÂMICA DA SEMELHANÇA DE FIGURAS

Apresentação

A experiência de mais de 20 anos do Projeto Fundão (IM-UFRJ) em cursos de capacitação, formação continuada e especialização para professores de Matemática permitiu observar que grande parte dos professores em exercício, principalmente no Ensino Fundamental, apresentam interesse e sentem necessidade de aprimorar sua formação em Geometria. Constata-se também a necessidade de apresentar aos professores os conteúdos básicos da geometria euclidiana com uma roupagem moderna e dinâmica conforme é sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998). Essa tem sido a abordagem adotada em diversas publicações do Projeto Fundão que servem de base para este curso, e que são resultados de pesquisas desenvolvidas pela sua equipe junto a professores e licenciandos.

A escassez de tempo e a dificuldade de locomoção dos professores de todo o Estado do Rio de Janeiro para participar de cursos na UFRJ motivaram a criação deste curso semipresencial, composto de três módulos e intitulado **Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático.**

Esta experiência em caráter semipresencial foi concluída com êxito, o que levou a equipe a acreditar que o curso pode ser feito, individualmente, à distância, tendo como base os textos elaborados para os três módulos.

Nestes textos, vamos estudar os conceitos básicos da geometria euclidiana, ao mesmo tempo em que refletimos sobre o processo pelo qual estes conceitos são adquiridos. Neles serão explorados, simultaneamente, aspectos conceituais e didáticos, por meio de atividades e questionamentos que algumas vezes lhe parecerão muito simples e que exigirão manipulações de material dos tipos: copiar, dobrar, recortar, etc.

O conteúdo é veiculado por meio de atividades, ou seja, não há um texto apresentando a matéria e depois exercícios. A realização dessas atividades e a reflexão sobre elas conduzirão a uma sistematização desses conceitos básicos e constituirão uma forma concreta de você compreender como o seu aluno aprende, ou por que não aprende geometria. Daí a importância de você experimentar.

Mãos à obra! Vai valer a pena.

O Edifício Geométrico

Podemos interpretar o conteúdo de geometria a ser ensinado como um “edifício geométrico”, cujos alicerces devem ser solidamente construídos desde os primeiros anos de escolaridade. Desde o pré-escolar as crianças podem criar a base para o seu edifício geométrico, vivenciando atividades que permitam observar imagens da natureza, como as folhas, que em alguns casos possuem uma simetria perfeita. Devem também explorar o espaço, comparando objetos com as formas geométricas. A prática de jogos corporais pode ajudar a desenvolver a habilidade espacial, enquanto a criação e a compreensão de regras de jogos é uma preparação para o domínio, no futuro, do processo axiomático. Ao invés de receber o material concreto pronto, os alunos devem ser incentivados a confeccionar jogos e quebra-cabeças.

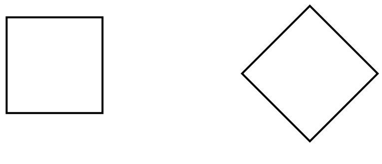
Assim, o aluno estará preparado para alcançar os andares mais altos do edifício, quando será capaz de observar definições e propriedades das figuras e as relações entre elas. Paralelamente, será capaz de operar com medidas, calcular áreas, perímetros e volumes e, principalmente, argumentar. Essas atividades devem estar sempre ligadas à realidade, procurando representar matematicamente situações reais. Não podemos esquecer que, ao longo de todo esse processo, o aluno deve ser levado a pensar, raciocinando logicamente, e justificando suas afirmativas. É importante desenvolver a habilidade de argumentação dos alunos, preparando-os para desempenhar seu papel na sociedade moderna.

Geometria: Estática ou Dinâmica?

Um aspecto importante no ensino da geometria é o incentivo a uma postura dinâmica. Em geral o termo "*geometria dinâmica*" tem sido usado com referência ao enfoque que utiliza o computador como ferramenta. As experiências com esses recursos têm mostrado resultados positivos. Se a sua escola dispõe de laboratório de informática, o trabalho proposto a seguir pode ser enriquecido com o uso de *"softwares"* específicos para a geometria, como o *Cabri*, *Geometer's Sketchpad* e o *Tabulae*, mas não é essa a questão essencial. O importante é que, com ou sem computador, você pode e deve desenvolver a geometria em sua sala de aula seguindo o enfoque dinâmico sugerido neste curso. As experiências de manipulação devem ser mantidas, pois as atividades no computador não podem substituí-las, mas apenas complementá-las.

Muitos experimentos mostram que esta postura dinâmica ajuda a sanar a dificuldade na aprendizagem de geometria. Na era da imagem e do movimento, a geometria não pode continuar a ser ensinada de forma estática, seguindo o estilo introduzido por Euclides. Em geral, os alunos não manipulam os objetos geométricos, estando habituados apenas a ver as figuras nos livros. Nesse caso, os conceitos geométricos são apresentados apenas através de figuras bem regulares e simétricas, com lados paralelos às bordas das páginas do livro. Como conseqüência, as crianças podem formar uma imagem incompleta de determinado conceito.

Por exemplo, o quadrado, é reconhecido apenas na posição em que os lados são paralelos às bordas da folha do livro. Quando é apresentado em outra posição, é confundido com um losango genérico.



Esta situação pode ser evitada se os alunos tiverem o hábito de recortar as figuras e manuseá-las. Assim, fica claro que as duas figuras acima coincidem por superposição e, portanto, ambas representam um quadrado, independentemente da posição.

Este livro é o Módulo III de uma coleção de três livros, publicado em 2004 em versão impressa, e ora reeditado pela Editora do Instituto de Matemática com ISBN. A coleção aborda com os seguintes conteúdos:

MÓDULO I
FORMAÇÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS

Capítulo 1 – Considerações sobre o Ensino da Geometria
Capítulo 2 – Reconhecimento e Caracterização de Sólidos Geométricos
Capítulo 3 – Triângulos e Quadriláteros
Capítulo 4 – O Raciocínio em Geometria e a Teoria de van Hiele

MÓDULO II
VISÃO DINÂMICA DA CONGRUÊNCIA DE FIGURAS

Capítulo 1 – Isometrias
Capítulo 2 – Congruência
Capítulo 3 – Propriedades dos Triângulos
Capítulo 4 – Propriedades dos Quadriláteros

MÓDULO III
VISÃO DINÂMICA DA SEMELHANÇA DE FIGURAS

Capítulo 1 – Homotetia
Capítulo 2 – Semelhança de Figuras Planas
Capítulo 3 – O Triângulo Retângulo e o Teorema de Pitágoras
Capítulo 4 – Círculos

MÓDULO III

VISÃO DINÂMICA DA SEMELHANÇA DE FIGURAS

Introdução

A geometria pode ser abordada de forma dinâmica, e algumas *Transformações no Pla*no, as isometrias, podem ser usadas como ferramentas úteis na exploração do conceito de congruência de figuras. Neste módulo, veremos que outro tipo de transformação no plano, a homotetia, pode ser utilizada na introdução e exploração do conceito de **semelhança de figuras**.

É recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC, 1997), incluir entre os Conceitos e Procedimentos para a área de Espaço e Forma no 3º ciclo do ensino fundamental:

- *Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, da área da superfície, do perímetro).*

E para o 4º ciclo do ensino fundamental:

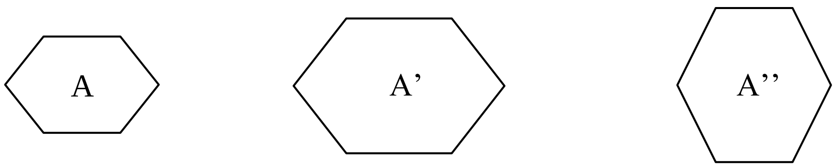
- *Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (dos ângulos) e as que se modificam (dos lados, da área da superfície, do perímetro).*

No senso comum, duas figuras são semelhantes se têm a mesma forma, mantendo a proporcionalidade entre os comprimentos de seus elementos.

Mas atenção! Não basta que duas figuras tenham a mesma "forma aparente" para que sejam semelhantes, ou seja, não basta que as figuras sejam "parecidas". É preciso que os ângulos e as proporções entre as distâncias sejam mantidos.

Em resumo, duas figuras planas são **semelhantes** se uma pode ser obtida como ampliação ou redução da outra.

Por exemplo, a figura A' é semelhante à figura A, enquanto a figura A'' não é semelhante à figura A. Embora A'' seja um hexágono como a figura A, vê-se claramente que as medidas dos lados correspondentes de A e A'' não guardam entre si a mesma razão, e que os ângulos correspondentes não são congruentes.



Ao longo deste módulo, esta noção será explorada e sistematizada do ponto de vista matemático, com ênfase em figuras planas.

A semelhança de figuras será abordada segundo uma visão dinâmica, cujo estudo constitui o Capítulo 1. No Capítulo 2 será construído o conceito de figuras semelhantes, destacando o estudo de triângulos semelhantes e de polígonos semelhantes de quatro lados ou mais. Como aplicação do conceito de semelhança, segue no Capítulo 3 a exploração do triângulo retângulo e do Teorema de Pitágoras. O Capítulo 4 refere-se ao estudo do círculo, e de alguns de seus elementos e propriedades. Esse capítulo, embora esteja incluído neste módulo, que é dedicado ao estudo de Semelhança, aborda vários resultados que envolvem a noção de congruência (que é um caso particular de semelhança).

Neste Módulo procuraremos valorizar bastante a dedução. Ainda assim, principalmente para os dois primeiros capítulos, você precisa estar, durante todo o tempo de estudo, de posse de materiais como: lápis, borracha, papel quadriculado, papel transparente (qualquer um, que dê para você copiar uma figura do texto ou do seu caderno), tesoura, e algumas folhas em branco de papel sem pauta. Também seria bom que você tivesse acesso a uma copiadora (xerox ou outra), pois algumas figuras têm que ser multiplicadas. São especialmente úteis folhas com malhas de mais de um tamanho, quadriculadas ou triangulares, e instrumentos de desenho, como: régua, esquadros, compasso e transferidor.

MÓDULO III

VISÃO DINÂMICA DA SEMELHANÇA DE FIGURAS

Capítulo 1 - Homotetia

Neste capítulo vamos estudar uma transformação no plano que não é uma isometria, isto é, que não preserva distâncias. Trata-se da homotetia, em que a figura obtida pela transformação é uma ampliação ou redução da figura original. Logo, a nova figura tem a mesma forma que a figura original. Além disso, as duas figuras são posicionadas da mesma maneira, já que:

Homotetia: *homo* significa mesma e *tetia* está relacionada a posicionamento.

Portanto, para que duas figuras sejam homotéticas é necessário que uma seja uma ampliação ou redução da outra, e que elas estejam na mesma posição.

Como no caso das isometrias, a homotetia não fazia parte do currículo do ensino fundamental, e não aparecia nos livros didáticos dedicados a esse segmento até pouco tempo atrás. Mas, devido a pesquisas realizadas nesta área da Educação Matemática, inclusive por Nasser e Sant'Anna (1997), houve a recomendação dos PCN's para que a geometria seja enfocada por meio das transformações no plano, a homotetia está aos poucos chegando aos livros didáticos e à sala de aula. Portanto, esse assunto pode constituir uma novidade para você. Recomendamos que leia este capítulo com atenção, e explore todas as atividades propostas, mesmo as que lhe parecerem mais fáceis. Você precisará de material de desenho geométrico: régua, transferidor e, principalmente, compasso.

Tente motivar seus alunos para o estudo da homotetia, chamando atenção para suas aplicações como a ampliação e/ou redução de desenhos nas histórias em quadrinhos, de logotipos e fotografias.

ATIVIDADE 1

As três fotografias a seguir, da mesma imagem, são de tamanhos distintos:

3 x 4

4,5 x 6

5 x 8

1) Determine as razões entre as duas dimensões de cada foto. Qual a relação entre essas razões?
2) Que dimensões pode ter uma outra ampliação da foto 3 x 4?

Até agora você usou as duas dimensões de cada foto para compará-las. Vamos ver outra maneira de verificar se uma foto é ampliação fiel da outra, comparando cada dimensão de uma foto com a correspondente da outra.

3) Considere agora as duas fotos menores e compare as suas larguras: 3 e 4,5 e as respectivas alturas: 4 e 6. Observe que $\frac{3}{4{,}5} = \frac{4}{6}$. *Verifique se o mesmo acontece se você comparar a foto 4,5 x 6 com uma foto 9 x 12.*
4) O mesmo acontece se você comparar a razão entre as larguras com a razão entre as alturas das fotos 3 x 4 e 5 x 8?

COMENTÁRIOS

1) Como você deve ter observado, a foto 5 x 8 não é uma ampliação exata das outras fotos. De fato, nela e na foto 3 x 4, os lados correspondentes não guardam entre si a mesma razão: $\frac{3}{5} \neq \frac{4}{8}$. Além disso, a razão entre as duas dimensões da foto 5 x 8 não é igual às razões entre as dimensões correspondentes das outras 2 fotos: $\frac{3}{4} = \frac{4{,}5}{6} \neq \frac{5}{8}$.
2) Você também observou a igualdade das razões entre as duas dimensões de cada figura e entre as dimensões correspondentes de duas figuras semelhantes. Isto não acontece por acaso. De fato, $\frac{3}{4} = \frac{4{,}5}{6} \Leftrightarrow \frac{3}{4{,}5} = \frac{4}{6}$, pelas propriedades das proporções.

ATIVIDADE 2

1) Desenhe um polígono sobre um papel quadriculado.
2) A partir de um ponto O fora do polígono trace semi-retas partindo de O e passando pelos vértices do polígono.
3) Em cada semi-reta, marque outro ponto cuja distância ao ponto O seja o dobro da distância do vértice do polígono que está nesta semi-reta ao ponto O. Ligue esses "novos pontos", obtendo um polígono.
4) Quais as relações entre os lados do polígono obtido e os lados do polígono original?
5) Você pode garantir que o polígono obtido é uma ampliação do polígono original? Por quê?

COMENTÁRIOS

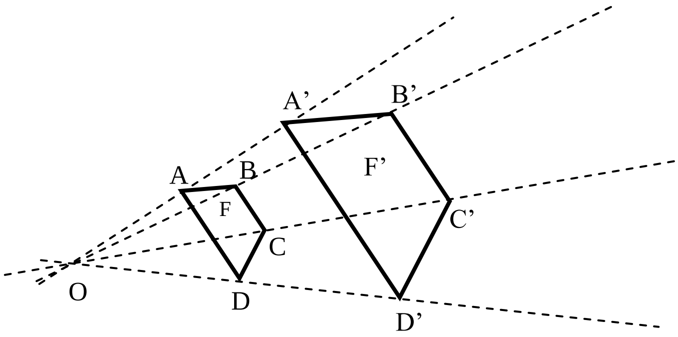
Nesta atividade você deve ter observado que os dois polígonos têm a mesma forma, e que os ângulos correspondentes são congruentes, e também que os lados correspondentes nos dois polígonos são paralelos.

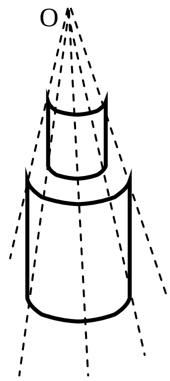
Dizemos que o novo polígono foi obtido a partir do original por meio de uma transformação de homotetia, ou que os dois polígonos são homotéticos.
Afinal, o que é uma homotetia?

Considere um ponto O e os pontos A, B, C . . . de uma figura F. Construímos os pontos correspondentes A' , B', C', . . . etc, que dão origem à figura F' de tal modo que:

- os pontos O, A e A' estejam alinhados,
  O, B e B' estejam alinhados,
  O, C e C' estejam alinhados, . . . etc.
- as razões entre as distâncias sejam iguais: $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \cdots\cdots = k$.

As duas características acima devem ser satisfeitas por todos os pontos das figuras F e F'.





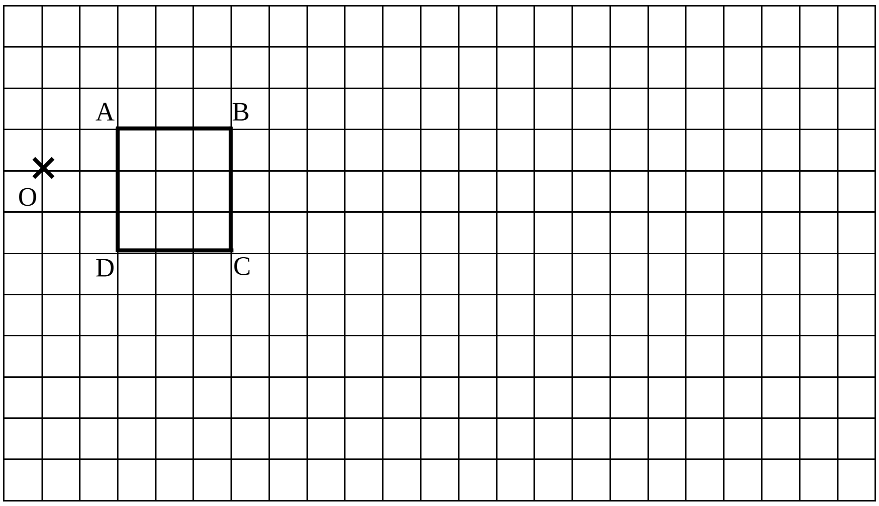
A correspondência que associa os pontos A $\mapsto$A' , B $\mapsto$ B', C $\mapsto$C', . . . etc, e que leva a figura F na figura F' chama-se **HOMOTETIA de centro O e razão k.**

Se 0 < k < 1 obtém-se uma redução, e se k > 1 obtém-se uma ampliação. Deve-se dar atenção especial ao caso k = 1. Nesse caso, a figura F' coincide com a figura F. Embora não haja ampliação nem redução, isto também é considerado um caso particular de homotetia.

Duas figuras são ditas *homotéticas* se é possível definir uma homotetia que leva uma figura na outra.

ATIVIDADE 3

1) Usando o quadriculado abaixo, encontre o polígono A'B'C'D' a partir do quadrado ABCD, através de um homotetia de centro O e razão 3.



2) Calcule as razões entre as medidas dos segmentos:

$\frac{OA'}{OA} = \_\_$; $\frac{OB'}{OB} = \_\_$; $\frac{OC'}{OC} = \_\_$; $\frac{OD'}{OD} = \_\_$

3) Você pode concluir que o polígono A'B'C'D' é uma ampliação do quadrado ABCD ?
Qual a razão de ampliação?
4) Que tipo de polígono é A'B'C'D'?
5) O que você pode concluir sobre as medidas dos lados de A'B'C'D'?
6) Compare os perímetros dos dois polígonos. Qual a razão entre eles?
7) Compare as áreas dos dois polígonos. Qual a razão entre elas?

COMENTÁRIOS

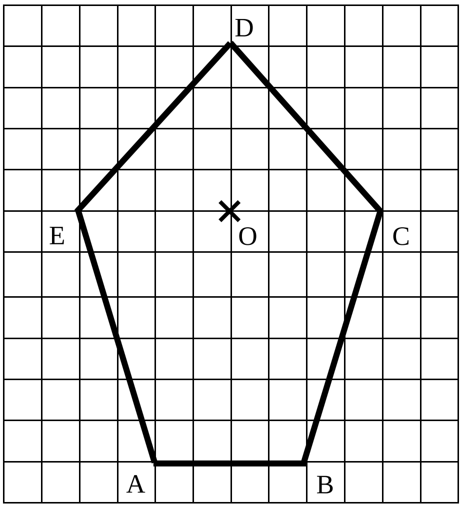
1) Como vimos na atividade anterior, ao aplicar uma homotetia de razão k a um polígono, obtemos um polígono com a mesma forma, cujas medidas dos lados ficam multiplicadas por k. Além disso, os lados do polígono obtido pela homotetia são respectivamente paralelos aos lados do polígono original. Por outro lado, sua área fica multiplicada por k^2.

2) Uma homotetia fica bem definida quando se conhece seu centro e sua razão. Isso significa que, fixados o centro e a razão k de uma homotetia *H*, é possível determinar a imagem de qualquer ponto ou figura por *H*.

3) Nos exemplos que vimos até agora o centro de homotetia estava fora da figura, mas não é sempre assim: o centro de homotetia pode estar também sobre o contorno da figura, ou no seu interior, como veremos nas atividades a seguir.

ATIVIDADE 4

Considere o polígono ABCDE desenhado no quadriculado abaixo, e o ponto O no seu interior.

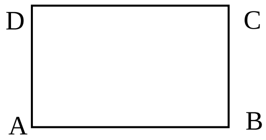


1) Desenhe a imagem do polígono ABCDE por uma homotetia de centro O e razão ½ .
2) Qual a relação entre os ângulos internos dos dois polígonos?
3) Compare as medidas de cada lado do polígono ABCDE com a medida do lado correspondente no polígono homotético. O que você conclui?
4) Determine as áreas dos dois polígonos e encontre a razão entre elas.
(Sugestão: divida cada um dos polígonos em um triângulo e um trapézio)

A unidade de área considerada é a área do quadradinho do quadriculado.

ATIVIDADE 5

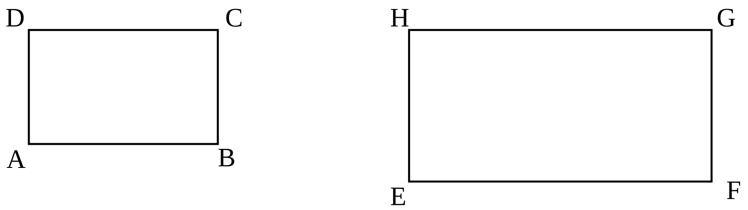
Considere o retângulo ABCD ao lado.
1) Determine sua imagem A'B'C'D' por uma homotetia de centro A e razão 1,5.



2) Trace a diagonal AC do retângulo dado e a diagonal A'C' do retângulo homotético. Qual a posição relativa entre as duas diagonais?

ATIVIDADE 6

Observe os retângulos ABCD e EFGH abaixo:



1) *Verifique se é possível obter uma homotetia que leve o retângulo ABCD no retângulo EFGH.*
2) *Desenhe um retângulo A'B'C'D' congruente ao retângulo ABCD de modo que o vértice A' coincida com o vértice E, o lado A'B' fique sobre o lado EF e o lado A'D' fique sobre lado EH. Trace as diagonais dos retângulos EFGH e A'B'C'D'. Elas têm a mesma inclinação em relação ao lado EF?*

COMENTÁRIO

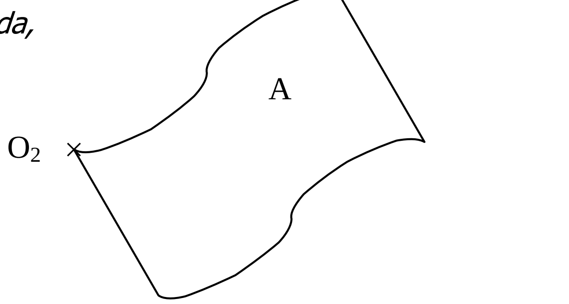
Os resultados das atividades 5 e 6 são conseqüência da seguinte propriedade:

"Considere dois retângulos de lados correspondentes paralelos. Se estes retângulos forem homotéticos, então, fazendo dois vértices correspondentes coincidirem e os dois lados adjacentes a esses vértices se sobreporem, as diagonais correspondentes a esse vértice comum recairão sobre a mesma reta suporte."

ATIVIDADE 7

1) Construa as imagens da figura A pelas homotetias de centros O_1 e O_2. e razão ½.
2) Compare as imagens encontradas. e responda, justificando:

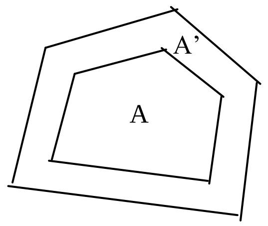
- *Elas são congruentes?*
- *Elas são homotéticas?*



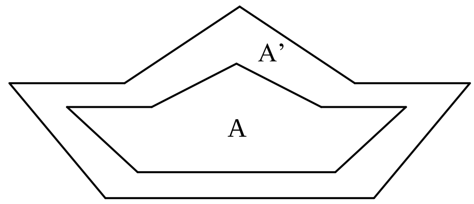
ATIVIDADE 8

Verifique se em cada item as figuras A e A’ são homotéticas. Em caso afirmativo, determine a razão e o centro de homotetia, e em caso negativo, justifique.

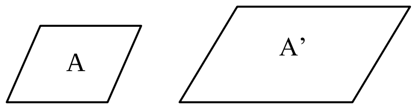
1)



2)



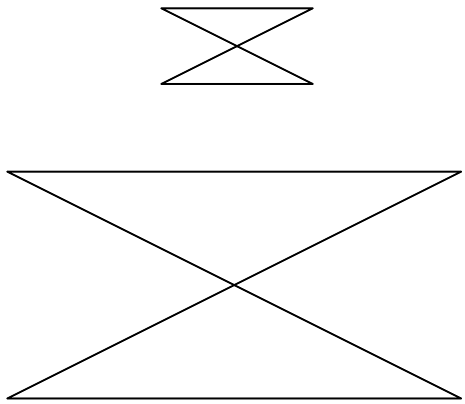
3)



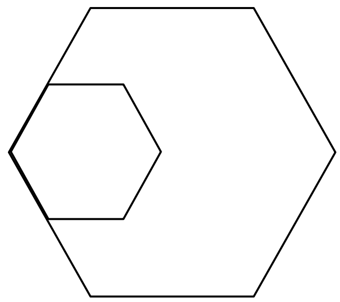
ATIVIDADE 9

Em cada item as duas figuras são homotéticas. Determine o centro e a razão de homotetia.

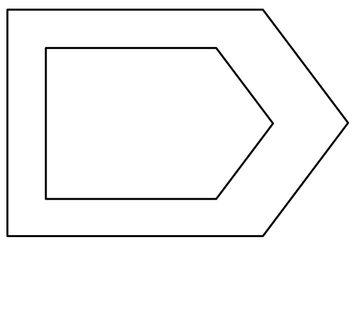
1)



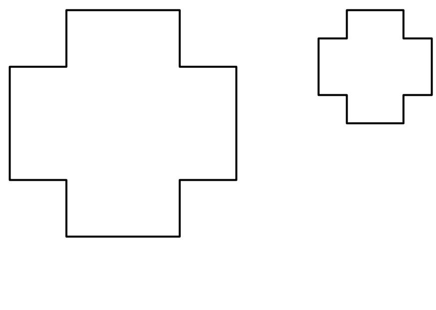
2)



3)



4)



ATIVIDADE 10

Considere um triângulo retângulo ABC de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm. Ao triângulo ABC é aplicada uma homotetia de razão $k = \frac{3}{4}$, *obtendo-se o triângulo A'B'C'.*

1) *É possível determinar a área do triângulo A'B'C' sem calcular as medidas dos seus lados?*
2) *Qual a relação entre a razão de homotetia e a razão das áreas dos dois triângulos?*

COMENTÁRIO

Muitos autores consideram também homotetias de razão negativa, em que a imagem fica do lado oposto ao da figura original, em relação ao centro de homotetia. Optamos por não tratar desses tipos de homotetias neste texto.

Capítulo 2 - Semelhança de Figuras Planas

2.1 – Introdução

A semelhança de figuras constitui um tópico muito importante na aprendizagem de Matemática, devido às suas aplicações. Ela é fundamental na representação de objetos e na confecção de plantas e mapas, para que se obtenha uma redução fiel, "guardando as mesmas proporções", isto é, de modo que a razão entre as dimensões da figura original e da sua representação seja constante. Vale lembrar que o termo "semelhante" em Matemática é usado com significado diferente no cotidiano. Na linguagem natural, duas figuras são *semelhantes* quando são apenas *parecidas*; semelhança, em Matemática, significa ter exatamente a mesma forma, podendo os tamanhos ser diferentes.

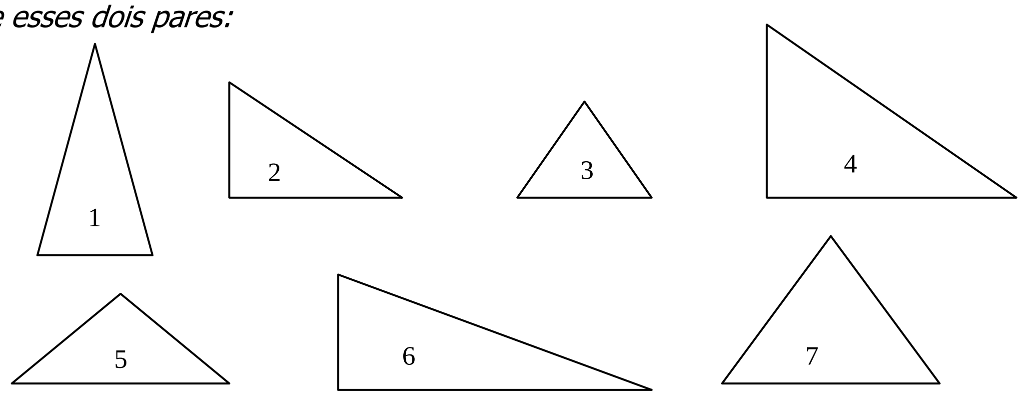
Muitas vezes nos referimos, inadequadamente, a polígonos com a mesma forma, querendo nos referir ao número de lados. Isto acontece, por exemplo, ao nos referirmos à forma triangular. Mas atenção! Em Matemática, para que polígonos sejam semelhantes, não basta que eles tenham o mesmo número de lados, ou que os lados tenham as mesmas medidas: é necessário que esses polígonos tenham a mesma forma, com as mesmas proporções.

Assim como o conceito de congruência está relacionado com as isometrias, o de semelhança está ligado ao de homotetia. Esta ligação é explorada na atividade 4.

Para resolver algumas das atividades deste capítulo é recomendável que você use papel transparente para comparar as figuras. Você também pode precisar usar compasso e transferidor em algumas delas.

ATIVIDADE 1

Na figura abaixo há sete triângulos, que não são todos semelhantes. No entanto, entre eles, há dois pares de triângulos semelhantes.
Identifique esses dois pares:

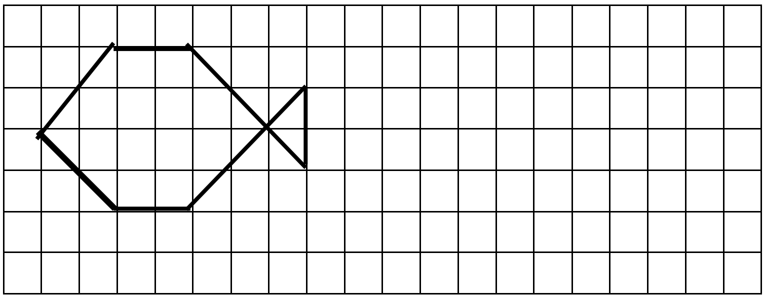


COMENTÁRIO

Ao resolver a atividade, você pode concluir que os triângulos retângulos não são todos semelhantes. O mesmo acontece com os isósceles ou os acutângulos. Para que sejam semelhantes eles devem ter a mesma forma, o que significa que os ângulos devem ser respectivamente congruentes.

ATIVIDADE 2

Considere a figura abaixo, desenhada numa malha quadriculada de 0,5 cm.



1) Usando a mesma malha, reduza essa figura a uma outra, cujas dimensões sejam a metade da dimensão correspondente.
2) Amplie a figura, usando uma malha quadriculada de 1 cm.

COMENTÁRIO

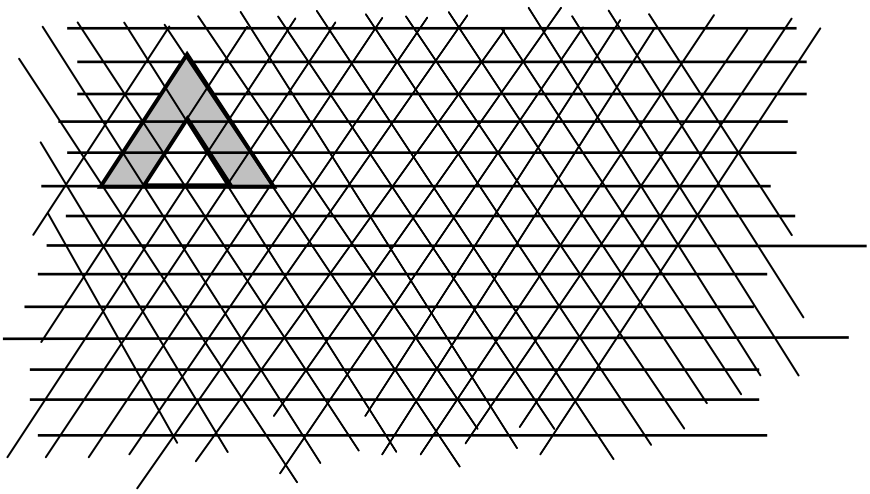
A atividade 2 mostra que há duas maneiras de obter figuras semelhantes desenhadas em malhas. No caso do item **1**, o número de quadradinhos de cada dimensão fica multiplicado pela razão de semelhança. No caso da alteração da malha, isto acontece automaticamente. Em ambos os casos, os ângulos ficam inalterados.

ATIVIDADE 3

Considere a figura abaixo, desenhada numa malha formada por triângulos de 0,5 cm de lado.

1) *Amplie essa figura na razão 3, usando a mesma malha.*
2) *Desenhe uma malha com triângulos de 1 cm de lado e reproduza a figura nessa malha, com o mesmo número de unidades de medida em cada lado.*
3) *As figuras obtidas nos itens 1 e 2 são congruentes? Que relação há entre elas?*

.

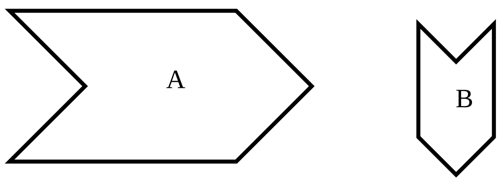


COMENTÁRIO

Alguns livros didáticos trazem uma folha com a malha triangular para ser reproduzida. Mas você pode construir facilmente uma malha desse tipo. Basta desenhar um triângulo equilátero com a medida desejada para os lados, e traçar paralelas aos lados, passando pelos vértices opostos. A malha é formada pelos três feixes de paralelas assim determinados.

ATIVIDADE 4

Observe as figuras abaixo:



1) *Verifique se A e B são homotéticas.*
2) *Copie a figura B em papel transparente e compare-a com a figura A, verificando se elas são semelhantes, isto é se B é uma redução de A.*
3) *Decida se as afirmativas são verdadeiras ou falsas, justificando:*
   a) *Duas figuras homotéticas são sempre semelhantes.*
   b) *Duas figuras semelhantes são sempre homotéticas.*

COMENTÁRIOS

1) Como vimos no Capítulo 1, a imagem de uma figura por meio de uma homotetia é uma figura que é uma ampliação ou uma redução dela, dependendo da razão da homotetia. Portanto, uma figura é sempre semelhante à sua imagem por uma homotetia. Isto significa que para encontrar uma figura semelhante a uma figura dada, basta aplicar a ela uma homotetia.

O item **3** da atividade 4 explora a recíproca desta afirmação, mostrando que a afirmativa b: "duas figuras semelhantes são sempre homotéticas" é falsa. Ou seja, dadas duas figuras semelhantes, nem sempre é possível encontrar uma homotetia que leve uma figura na outra. Depende da posição que elas ocupam. Lembre-se que se duas figuras são homotéticas, seus lados correspondentes são paralelos. No caso da atividade 4, foi aplicada à figura A uma redução seguida de uma rotação, dando origem à figura B, que não é homotética à figura A, já que os lados correspondentes nas duas figuras não são paralelos.

2) A semelhança também pode ser usada para a ampliação ou redução de objetos tri-dimensionais, como na construção de maquetes. Mas atenção: muitas vezes os dois objetos têm formas parecidas, mas as dimensões não guardam entre si a mesma proporção. Isso é explorado na atividade a seguir.

ATIVIDADE 5

Compare as embalagens e verifique se são semelhantes:
1) Garrafas de Coca-cola de 600 ml e de 2 litros;
2) Latas de Nescau de dois tamanhos diferentes;
3) Caixas de fósforos de palitos comuns e de palitos longos.

2.2 – Semelhança de Polígonos

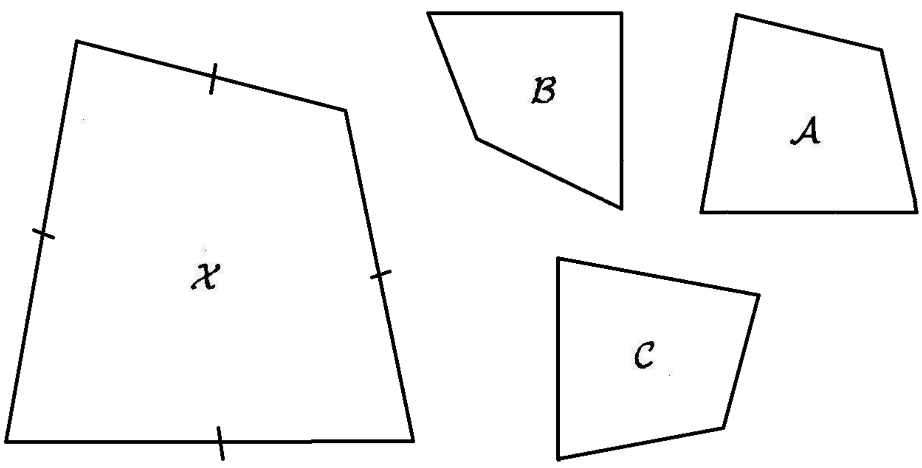
Nas atividades seguintes você vai comparar polígonos de quatro lados ou mais, para concluir quais as condições que garantem a semelhança de dois polígonos.

ATIVIDADE 6

Copie e recorte as figuras abaixo e, por meio de superposição, compare-as para responder:

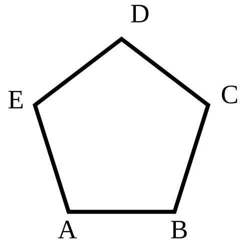
1) *Quais das figuras A, B e C têm a mesma forma da figura X, ou seja, quais delas representam uma redução da figura X?*
2) *Estabeleça a relação entre os lados de cada uma das figuras A, B e C com os lados da figura X, completando a segunda coluna da tabela.*
3) *Estabeleça a relação entre os ângulos de cada uma das figuras A, B e C com os ângulos da figura X, completando a terceira coluna da tabela.*
4) *Analisando as respostas aos 3 itens acima na tabela, você:*
   - *confirma o que respondeu em **1**?*
   - *é capaz de estabelecer as condições necessárias e suficientes para que dois quadriláteros sejam semelhantes?*

Polígono	Relação com os lados de X	Relação com os ângulos de X	O polígono é semelhante a X?
A			
B			
C			



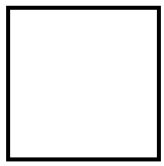
ATIVIDADE 7

Considere o pentágono ABCDE da figura.
Construa um pentágono com os ângulos respectivamente congruentes aos de ABCDE, mas que não seja semelhante a ele.



ATIVIDADE 8

Construa um polígono cujos lados sejam respectivamente proporcionais aos do quadrado ao lado, mas de modo que os dois polígonos não sejam semelhantes.



COMENTÁRIO

A atividade 7 indica que o paralelismo de lados correspondentes não é suficiente para garantir a semelhança de dois polígonos. Por outro lado, a atividade 8 indica que também não basta que lados correspondentes sejam proporcionais. Na realidade, essas duas condições é que vão garantir a semelhança de dois polígonos.

Podemos, então, definir polígonos semelhantes.

Definição: Dois polígonos são semelhantes quando têm:
- Os ângulos respectivamente congruentes

e

- As medidas dos lados correspondentes proporcionais.

Notação:
Usaremos o símbolo
~
para designar figuras semelhantes.

A razão de proporcionalidade entre os lados correspondentes é chamada de razão de semelhança.

Assim como foi observado na homotetia, a razão de semelhança entre duas figuras pode ser um número ou o seu inverso, de acordo com a ordem das figuras consideradas.

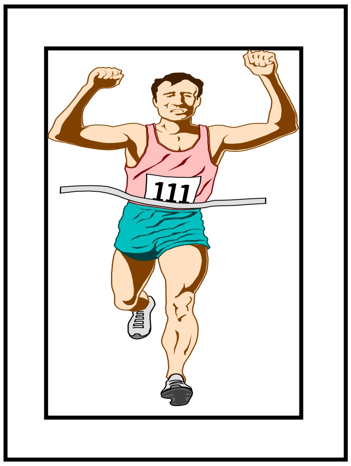
Por exemplo, na atividade 6, a razão de semelhança de X para C é 2, enquanto a razão de semelhança de C para X é 1/2.

ATIVIDADE 9

Verifique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, e justifique. Apresente contra-exemplos para as afirmativas falsas.
1) *Dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são sempre semelhantes.*
2) *Dois quadriláteros cujos ângulos são respectivamente congruentes são semelhantes.*

ATIVIDADE 10

Uma tela pintada mede 40 cm x 60 cm. Ela foi colocada numa moldura, de modo que o quadro pronto mede 60 cm x 80 cm. Verifique se os contornos da tela e do quadro são semelhantes.



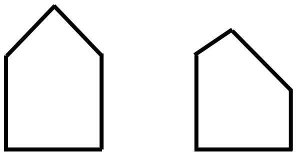
COMENTÁRIO

Para resolver a atividade 10, pode-se verificar se as dimensões dos dois retângulos, da tela e da moldura, são proporcionais. Como os lados desses retângulos são paralelos, outra maneira de verificar a semelhança é checar se há uma homotetia que leva o retângulo da tela no retângulo da moldura ou vice-versa. Isso pode ser feito, como vimos no capítulo 1, verificando se as inclinações das diagonais dos dois retângulos em relação aos lados correspondentes são as mesmas.

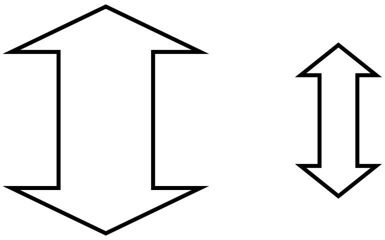
ATIVIDADE 11

Observe os pares de polígonos abaixo, e verifique se os polígonos de cada par são semelhantes. Justifique suas respostas, indicando a razão de semelhança em caso afirmativo, ou explicando porque não são semelhantes.

1)



2)



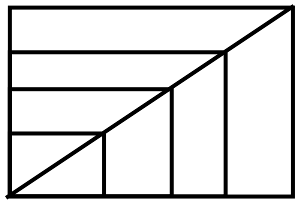
ATIVIDADE 12

As televisões podem ter diversos "tamanhos", como 14, 20 ou 29 polegadas.

1) *Você sabe o que representa essa medida? De quantas polegadas é a sua televisão?*
2) *Meça uma diagonal da tela da sua televisão, e transforme a medida em polegadas (1 polegada é aproximadamente igual a 2,5 cm). Essa medida confirma o que você respondeu no item **1**?*
3) *Meça o comprimento e a largura da **tela** da sua televisão, e ache a razão entre essas medidas.*

COMENTÁRIO

Medindo o comprimento e a largura das telas de televisões de diversos “tamanhos”, e calculando a razão entre essas dimensões, encontramos sempre a mesma razão: 1,33, ou, aproximadamente, 4 para 3.



Isto significa que as telas das televisões são retângulos semelhantes, o que garante que as imagens são corretas, sem distorções.

Mas atenção! Isto se aplica apenas às dimensões da tela, e não do aparelho.

Já as telas de cinema não são semelhantes às de televisão: a razão entre as dimensões da tela de cinema é de 1,78, ou, aproximadamente, de 16 para 9.

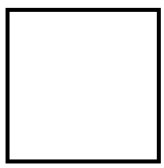
Por isso, ao exibir um filme feito para o cinema na TV, ele deve ser adaptado. Caso contrário, aparecerão faixas pretas horizontais no topo e na base da tela de TV. Isso acontece sempre que um "trailer" de cinema é exibido na TV.
(Adaptado de Educação Matemática, 8ª série, Ed. Atual)

ATIVIDADE 13

Se dois polígonos são semelhantes, com razão de semelhança k, o que se pode afirmar sobre a razão entre:
1) *seus perímetros?*
2) *suas áreas?*

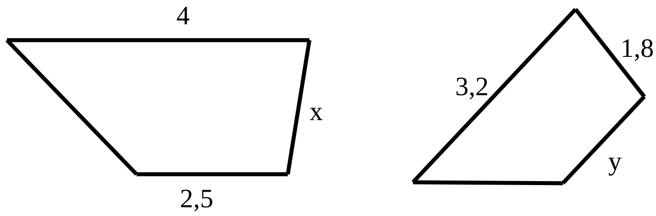
ATIVIDADE 14

1) *Se um quadrado tem lado ℓ, qual deve ser a medida do lado de um quadrado que tem o dobro da sua área?*
2) *Construa um quadrado semelhante ao da figura, que tenha o dobro de sua área.*



ATIVIDADE 15

Sabendo que os dois trapézios são semelhantes, determine as medidas dos lados x e y:



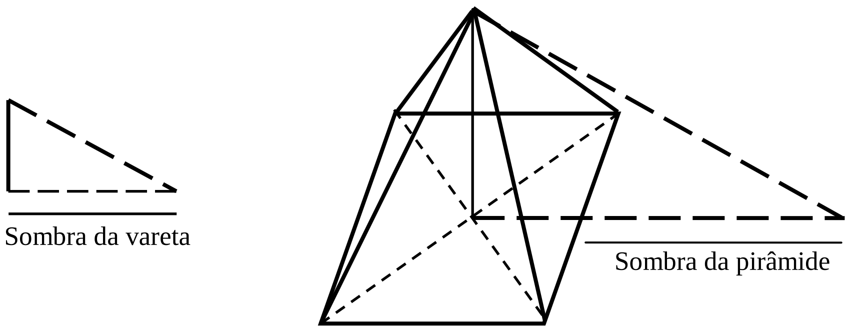
COMENTÁRIO

Exercícios do tipo da atividade 15 aparecem muito nos livros didáticos. Eles são úteis para fixar a identificação de lados correspondentes e para relembrar regra de três e o trato algébrico. Mas cuidado para não ser muito repetitivo. Se você acha que seus alunos precisam exercitar esses tópicos, proponha atividades variadas, usando competições ou jogos.

2.3 – Semelhança de Triângulos

Como veremos a seguir, tanto do ponto de vista da matemática, como em relação às aplicações práticas, os triângulos ocupam um lugar especial no estudo da semelhança de polígonos. Do ponto de vista da matemática, devido à sua rigidez, pode-se garantir a semelhança de dois triângulos a partir de apenas uma das condições estabelecidas na definição de polígonos semelhantes.

Na prática, a semelhança de triângulos é usada para calcular distâncias inacessíveis, como fez Tales de Mileto (624 a.C. – 547 a.C.) para calcular a altura da pirâmide de Quéops, no Egito. Ele comparou o comprimento da sombra da pirâmide com a sombra de uma vareta vertical fincada na areia, e através da semelhança de triângulos conseguiu descobrir a altura da pirâmide de Quéops.



ATIVIDADE 16

Copie e recorte os triângulos da figura que segue a tabela e, por meio de superposição, compare-os para responder:

1) Quais dos triângulos A, B e C têm a mesma forma do triângulo X, ou seja, quais deles representam uma redução de X?

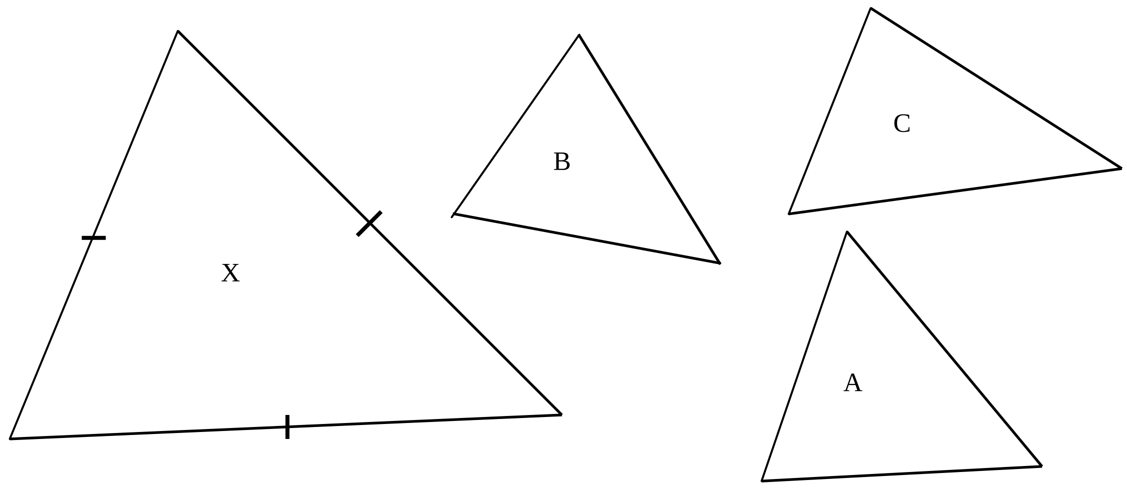
2) Estabeleça a relação entre os lados de cada um dos triângulos A, B e C com os lados do triângulo X, completando a segunda coluna da tabela.

3) Estabeleça a relação entre os ângulos de cada um dos triângulos A, B e C com os ângulos do triângulo X, completando a terceira coluna da tabela.

4) Analisando as respostas aos 3 itens acima na tabela, você:

- *confirma o que respondeu em **1**?*
- *é capaz de estabelecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes?*

Triângulo	Relação com os lados de X	Relação com os ângulos de X	O triângulo é semelhante a X?
A			
B			
C			



ATIVIDADE 17

Desenhe um triângulo ABC e faça o que se pede:
1) *Trace uma paralela B'C' ao lado BC e verifique se os triângulos ABC e AB'C' são semelhantes.*
2) *Construa, usando régua e compasso, um triângulo PQR cujos lados medem respectivamente o dobro dos lados do triângulo ABC, e verifique se eles são semelhantes.*

COMENTÁRIOS

Você deve ter observado nas atividades 16 e 17 que, para triângulos, não é possível ter lados proporcionais e ângulos correspondentes diferentes. Também não é possível ter ângulos correspondentes congruentes sem que os lados sejam proporcionais.

Na verdade,

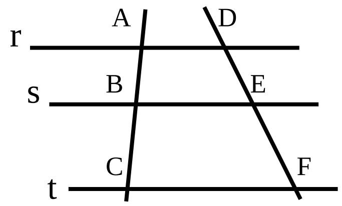
> Dois triângulos são semelhantes quando têm:
>
> - Os ângulos correspondentes congruentes
>
> **ou**
>
> - As medidas dos lados correspondentes proporcionais.

Essas duas condições são conhecidas como os casos AA e LLL de semelhança de triângulos. Há ainda um terceiro caso (LAL) que não é tão fácil de ser verificado experimentalmente.

As demonstrações desses casos de semelhança não fazem parte deste Curso, mas podem ser encontradas em textos como Geometria Euclidiana Plana (João Lucas Barbosa, SBM) e outros. Tais demonstrações se baseiam no Teorema de Tales, que pode ser enunciado de duas maneiras:

Teorema de Tales:
Quando três retas paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos determinados numa das transversais são proporcionais aos segmentos correspondentes determinados na outra.

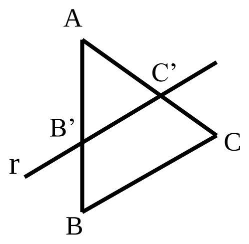
$$r // s // t \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



Teorema de Tales:

Toda paralela a um dos lados de um triângulo, que intercepta os outros dois lados, determina um outro triângulo semelhante ao primeiro.

$$r // BC \Rightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta\, AB'C'$$



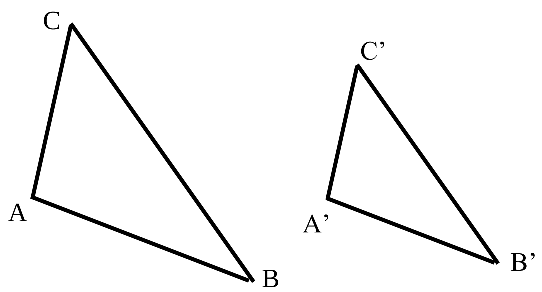
Esses dois teoremas são equivalentes; isto porque cada um deles pode ser provado a partir do outro.

Para alunos do ensino básico, as demonstrações desses teoremas podem parecer artificiais, pois a verificação experimental é muito intuitiva. Para o primeiro teorema, os alunos podem desenhar feixes de paralelas e verificar, aproximadamente, a proporcionalidade entre os segmentos com o uso de régua graduada e máquina de calcular. O segundo deles é a generalização do que você observou no item **1** da atividade 17. Na sua sala de aula, a diversidade de triângulos que podem aparecer reforça a conjectura de que, ao se traçar uma paralela a um dos lados de um triângulo, obtém-se um triângulo semelhante.

Casos de semelhança de triângulos:

1º) AA: Se dois ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos de outro, então os triângulos são semelhantes.

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$$



<u>Observação</u> – Como a soma dos ângulos internos do triângulo é 180^o, dois deles sendo congruentes, o terceiro também será.

2º) LLL:

Se dois triângulos possuem os três pares de lados respectivamente proporcionais , então os triângulos são semelhantes.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$$

3º) LAL:

Se dois lados de um triângulo são respectivamente proporcionais a dois lados de outro triângulo, e se os ângulos formados por esses lados forem congruentes, então os triângulos são semelhantes.

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$$

Atenção! Esses casos de semelhança valem apenas para triângulos, e não para polígonos de quatro ou mais lados. As atividades 6 e 7 e os comentários que as seguem ressaltam isso.

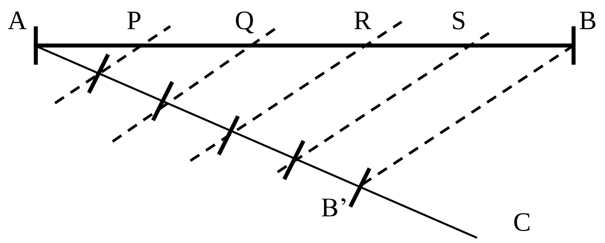
Muitas vezes, depois de serem apresentados aos casos de semelhança de triângulos, os alunos confundem esses casos com os de congruência de triângulos. É preciso um cuidado especial com isso. Neste sentido, sugere-se dar mais ênfase aos dois primeiros casos (mais intuitivos) e aos seus conteúdos, sem usar as siglas.

ATIVIDADE 18

Uma das aplicações do Teorema de Tales é a divisão de um segmento em partes iguais, como veremos nesta atividade.

Para dividir um segmento AB em , digamos, 5 partes iguais, procedemos do seguinte modo:

- *por uma das extremidades do segmento, A, por exemplo, traçamos uma semi-reta auxiliar AC;*
- *com o compasso, marcamos, sobre a semi-reta, a partir de A , 5 segmentos de mesmo comprimento, qualquer;*
- *traçamos um segmento ligando a outra extremidade do segmento dado, B, com a extremidade B'do último dos 5 segmentos congruentes marcados sobre a semi-reta;*
- *traçamos paralelas a esse segmento BB', passando pelas extremidades dos segmentos marcados na semi-reta, até atingir o segmento AB.*
- *Observe que o segmento AB ficou dividido em 5 partes iguais:*
  AP = PQ = QR = RS = SB

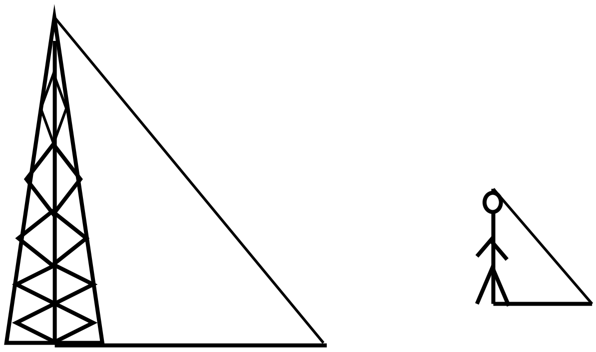


Explique por que esse procedimento é conseqüência do Teorema de Tales.

2.4 – Aplicações da Semelhança de Triângulos

ATIVIDADE 19

Um menino de 1,60 m de altura observa, num dia de sol, a sua sombra e a sombra de uma torre, verificando que a sombra da torre é três vezes maior que a sua.
Qual a altura da torre? Por quê?

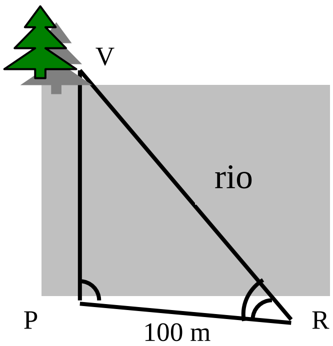


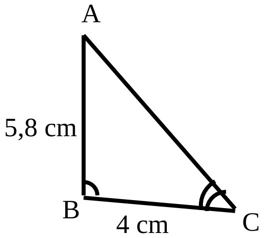
ATIVIDADE 20

A pirâmide de Quéops, do Egito, tem como base um quadrado de cerca de 230 m de lado, e sua altura é de aproximadamente 146 m.
Em Ouro Preto, MG, encontramos miniaturas de pirâmides de vários tamanhos, em pedra sabão.
1) Como se pode garantir que uma pirâmide de pedra sabão é miniatura da pirâmide de Quéops?
2) Uma piramidezinha de pedra sabão tem altura de 7 cm, e aresta da base com 11,5 cm.
Ela é miniatura da pirâmide de Quéops? Por quê?
3) Que alteração deve ser feita nela, para que seja uma miniatura fiel da pirâmide de Quéops?
(Adaptado de Machado, 1990)

ATIVIDADE 21

Um agrimensor precisa calcular a largura aproximada de um rio. Marcou dois pontos em uma margem (na figura, P e R), distantes 100m, e escolheu uma árvore como ponto de referência na outra margem (na figura, V). Com o teodolito, mediu os ângulos marcados na figura, e construiu um triângulo ABC semelhante a VPR, com esses ângulos tendo em comum um lado de 4 cm de comprimento (BC). Mediu então o lado AB do triângulo ABC desenhado, obtendo 5,8 cm.
Com esses dados, foi possível descobrir a largura do rio? Justifique.

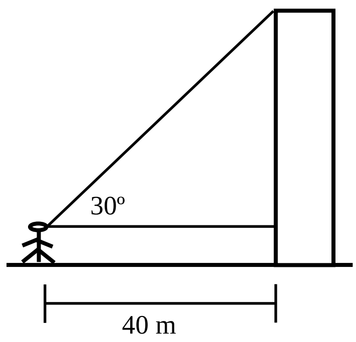




ATIVIDADE 22

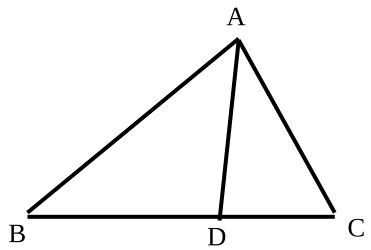
Podemos calcular a altura aproximada de um prédio procedendo como os topógrafos, usando o ângulo de visão e a distância na horizontal.

Construa com régua, compasso e transferidor um triângulo semelhante ao representado na figura, meça os catetos e encontre a altura aproximada do prédio. Considere que o ângulo de visão foi medido a 1,5 m do chão.



ATIVIDADE 23

Uma propriedade importante das bissetrizes de um triângulo é conhecida como o Teorema da Bissetriz Interna:
"A bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos respectivamente proporcionais aos lados adjacentes".



AD bissetriz do ângulo A $\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

Prove este teorema.

Tente provar sozinho. Se não conseguir, trace a paralela a AD por C, que encontra o prolongamento de BA em E. Mostre então que o triângulo ACE é isósceles e aplique o Teorema de Tales.

ATIVIDADE 24

O Teorema de Tales considerado no segundo enunciado tem um caso particular importante. É o caso em que a paralela a um lado de um triângulo contém o ponto médio de um dos outros dois.

Seja EF uma paralela ao lado BC de um triângulo ABC, sendo E o ponto médio de AB e F $\in$ AC.
Mostre que:

1) *F é o ponto médio de AC e*
2) *EF = ½ BC.*

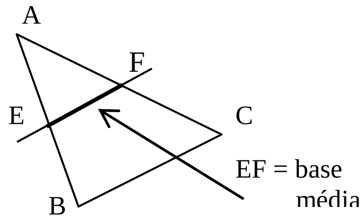
COMENTÁRIOS

1) Pelo que foi demonstrado no item 1 desta Atividade,

"A paralela a um lado de um triângulo, pelo ponto médio de outro, conterá o ponto médio do terceiro lado"(*).

Este resultado permite afirmar que:

"a reta determinada pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado desse triângulo"(**).



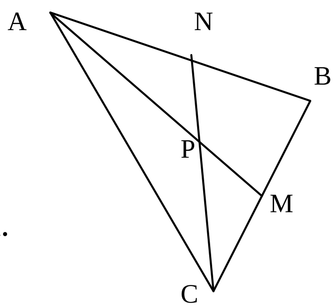
De fato, raciocinemos com base na figura, na qual E e F são pontos médios de AB e AC, respectivamente. De acordo com (*), a paralela a BC que contém E, passará por F. Essa paralela coincide então com a reta determinada por E e F, o que garante a veracidade da afirmação (**).

2) Pelo fato de o segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo ser a metade do terceiro lado, ele é chamado de **base média** do triângulo. Observa-se que um triângulo tem três bases médias.

ATIVIDADE 25

Assim como as alturas e as bissetrizes, as medianas de qualquer triângulo se encontram em um ponto. No caso das medianas, este ponto é chamado **baricentro** do triângulo. Ele é na verdade o centro de gravidade do triângulo. Se você pendurar um triângulo de cartolina por um fio preso exatamente no seu baricentro, o triângulo deve ficar equilibrado, todo na horizontal.
O fato de que as medianas do triângulo se encontram em um ponto pode ser constatado experimentalmente, por meio de desenhos. Vamos agora demonstrar este fato, a partir da semelhança de triângulos.

1) Mostre que:
Se P é a interseção de duas medianas quaisquer, AM e CN, de um triângulo ABC, então PA = 2.PM e PC = 2.PN.
2) Use o que foi provado no item 1 para provar que:
"as três medianas de um triângulo se encontram em um ponto".



<u>Observação</u> – Se você não conseguiu provar o item **1** sozinho, ligue os pontos M e N e observe a formação de dois pares de triângulos semelhantes e suas respectivas razões de semelhança.

COMENTÁRIO

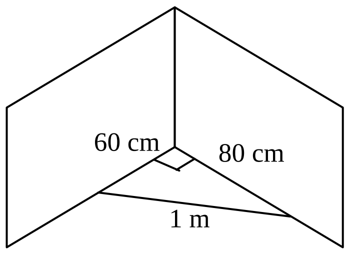
Os itens 1 e 2, juntos, permitem encontrar o baricentro de um triângulo a partir de duas de suas medianas, ou mesmo de uma só (explique como).

Capítulo 3 – O Triângulo Retângulo e o Teorema de Pitágoras

É comum entre as pessoas que trabalham em obras a preocupação pelo fato de uma parede ou um canto do assoalho estar "fora de esquadro". Isto pode atrapalhar, por exemplo, a colocação de uma porta ou do piso do assoalho. Estas e outras situações ilustram a necessidade de verificar se um certo ângulo é reto, e é por isso que os triângulos retângulos são tão importantes.

De fato, o canto do assoalho "estará em esquadro" se, e só se, o triângulo obtido ligando dois pontos quaisquer dos lados do assoalho, que formam este canto, for um triângulo retângulo.

É de conhecimento de muitos que um triângulo de lados medindo 3, 4 e 5, na mesma unidade de comprimento, é retângulo. Este triângulo aparece em exemplo do Capítulo 3 do Curso Básico de Geometria - Módulo I, e é usado nos processos experimentais para verificar se um ângulo é reto. Por exemplo, os pedreiros, quando querem verificar se um canto de chão está em ângulo reto, marcam segmentos de 80 cm sobre um lado do ângulo e 60 cm sobre o outro. Em seguida, verificam se o segmento que liga as extremidades dos segmentos marcados mede 1 metro.



Estes e outros exemplos justificam o fato de, há tantos séculos, a humanidade utilizar os triângulos retângulos e ter conhecimentos sobre o Teorema de Pitágoras, mesmo precedendo o enunciado e prova formal do Teorema.

No texto sobre as Orientações Gerais para o Trabalho com Geometria (Curso Básico de Geometria - Módulo I), aparecem exemplos de aspectos históricos referentes ao triângulo retângulo.

3. 1 – O Triângulo Retângulo

ATIVIDADE 1

1) Desenhe um triângulo cujos lados meçam 3, 4 e 5 centímetros.
2) Se um colega seu desenhar um triângulo satisfazendo essas condições, o triângulo desenhado por ele será congruente ao seu? Por quê?
3) Com o uso de um esquadro, verifique se este triângulo é retângulo.
4) Desenhe agora um triângulo cujos lados meçam 20cm, 12 cm e 16 cm. Ele será retângulo? Que relação tem esse triângulo com o que você desenhou no item 1? Justifique.
5) Você acha que qualquer triângulo retângulo que você desenhar será semelhante aos dois, desenhados nos itens 1 e 4?
6) Agora explique por que o método usado pelos pedreiros está correto.

ATIVIDADE 2

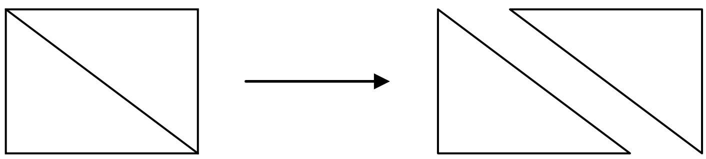
Como sabemos, as alturas de um triângulo retângulo são especiais.

1) Trace as três alturas de um triângulo retângulo. Em que ponto essas três alturas se encontram?
2) Embora não tenha sido provado neste texto, sabemos que as três alturas de qualquer triângulo se encontram em um mesmo ponto.
Podemos afirmar que esse ponto é sempre um vértice do triângulo? Justifique.

Vamos pensar um pouco na medida da área de um triângulo retângulo, dando mais ênfase ao aspecto geométrico do que às fórmulas.

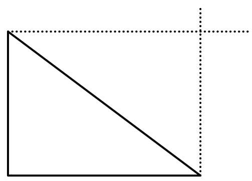
É muito fácil observar que todo retângulo pode ser dividido em dois triângulos retângulos e que todo triângulo retângulo é a metade de um retângulo. Vejamos:

- Dado um retângulo, qualquer de suas diagonais o divide em dois triângulos retângulos congruentes (verifique por quê).



- Dado um triângulo retângulo, traçando paralelas aos catetos pelas extremidades da hipotenusa, obtém-se um retângulo, do qual o triângulo dado é a metade.

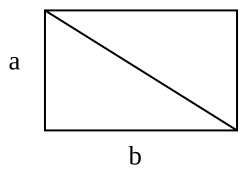
Note que os catetos do triângulo dado são dois lados desse retângulo.



Este fato torna fácil medir a área de qualquer triângulo retângulo: é a metade da medida da área do retângulo de dimensões iguais ao comprimento dos catetos do triângulo. Tendo então as medidas dos dois catetos, na mesma unidade, basta multiplicá-las e calcular a metade do produto obtido.

Área do retângulo: a.b

Área do triângulo retângulo: $\frac{a.b}{2}$



<u>*Observação*</u> – Quem conhece a fórmula para o cálculo da área de um triângulo qualquer, pode notar que a expressão acima coincide com a da fórmula geral, pois um dos catetos faz o papel da base do triângulo e o outro, o da altura.

ATIVIDADE 3

Separe os triângulos de um TANGRAM. Entre eles há dois pares de triângulos congruentes e mais um triângulo que não é congruente a nenhum outro do jogo. Todos os cinco triângulos são retângulos.

1) Mostre que os cinco triângulos do TANGRAM são semelhantes.
2) Compare o comprimento de cada lado dos triângulos pequenos (os menores) com os correspondentes dos triângulos grandes (os maiores). Qual a razão de semelhança entre um dos pequenos e um dos grandes? E a razão entre as áreas? Isto está de acordo com o que foi estudado no capítulo anterior?
3) Compare agora a área de um triângulo grande com a do triângulo médio. Qual a razão entre elas? Sabendo esta razão, você pode concluir qual é a razão entre os lados correspondentes desses triângulos?
4) Repita o que foi pedido no item 3, comparando um dos triângulos pequenos com o triângulo médio.

ATIVIDADE 4

Os triângulos do TANGRAM são muito especiais. São retângulos e isósceles.

1) Sem usar transferidor, determine a medida de cada ângulo agudo dos triângulos do TANGRAM, justificando.
2) Desenhe dois triângulos retângulos isósceles congruentes e recorte um deles.
3) Dobre o triângulo recortado ao longo da mediana relativa à hipotenusa. Essa mediana será também altura e bissetriz do triângulo. Por quê?
4) Corte o triângulo ao longo da dobra e compare os dois triângulos obtidos entre si, e cada um deles com o original que ficou sem recortar.

ATIVIDADE 5

Na Atividade 2, você deve ter notado que só uma das alturas do triângulo retângulo não é um de seus lados: a que parte do vértice do ângulo reto. Propriedades importantes dessa altura serão observadas na atividade a seguir, que deve ser proposta a seus alunos.

1) Trace, com o auxílio de uma régua, uma diagonal de uma folha de papel retangular. Recorte a folha ao longo do traço, obtendo dois triângulos retângulos congruentes.
2) Dobre um dos triângulos obtidos, de modo que a dobra comece no vértice do ângulo reto e que as duas partes da hipotenusa fiquem uma sobre a outra. Esta dobra coincidirá com uma altura do triângulo? Por quê?
3) Corte o triângulo por essa dobra e compare os triângulos obtidos entre si, e, cada um deles, com o triângulo que ficou inteiro em (2). O que você observou?
4) Prove que esses três triângulos são semelhantes.

COMENTÁRIOS

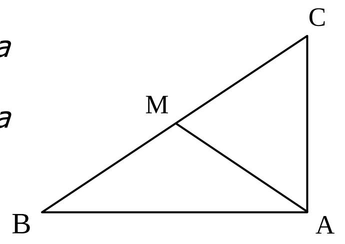
1) Os alunos de uma turma certamente obterão triângulos bem diferentes, o que enriquece a atividade.

2) O item 4 pode ser omitido, se a turma ainda não estiver em condições de realizar esta prova. Neste caso, devem produzir justificativas do tipo: *são da mesma forma, têm os três ângulos respectivamente congruentes, um parece ampliação do outro, etc.*

ATIVIDADE 6

Nesta atividade vamos explorar uma característica da mediana de um triângulo retângulo, relativa à sua hipotenusa.

Considere o triângulo retângulo ABC, com Â = 90º, e AM sua mediana.
1) Com o compasso, compare o comprimento de AM com a hipotenusa BC. O que você observa?
2) Demonstre que:
"Num triângulo retângulo, o comprimento da mediana AM, relativa à hipotenusa BC, mede a metade do comprimento dessa hipotenusa."



Tente demonstrar sozinho. Se não conseguir, examine a sugestão seguinte:

- Trace, por B, uma perpendicular a AB, e prolongue-a mediana AM até que este prolongamento encontre a perpendicular traçada. Chame este ponto de encontro de D.
- Use o Teorema das Paralelas e o caso ALA de congruência de triângulos para mostrar que os triângulos CMA e BMD são congruentes.
- Conclua então que os triângulos DBA e CAB também são congruentes e que DA = BC.
- Conclua a tese.

<u>*Observação*</u> – No próximo capítulo, dos círculos, voltaremos a esta proposição, demonstrando-a a partir de outro ponto de vista.

ATIVIDADE 7

Esta atividade trata de uma relação entre os ângulos e os lados do triângulo retângulo.

1) Trace um ângulo de 30º. Trace uma perpendicular a um dos lados desse ângulo, formando um triângulo retângulo.
2) Meça com a régua os comprimentos da hipotenusa e do cateto menor desse triângulo. Qual a relação entre os comprimentos obtidos?

COMENTÁRIOS

A sua conclusão, embora sujeita a imprecisões decorrentes das medidas aproximadas obtidas, não é uma coincidência. Se você propuser esta atividade a seus alunos, deixe que cada um escolha a localização que quiser para a perpendicular traçada.

Registre numa tabela (no quadro negro) as medidas encontradas pelos alunos. A diversidade de respostas tornará possível a eles generalizar a conclusão do item 2.

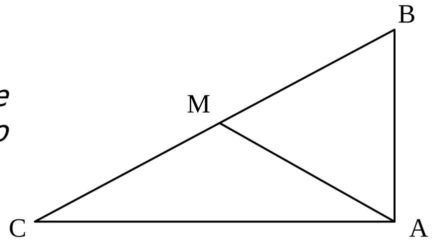
Como foi dito anteriormente, muitos exemplos podem ser úteis para que façamos uma conjectura. Para que ela se torne um teorema válido, é preciso que ela seja provada.

ATIVIDADE 8

1) Prove que:
"Se um triângulo tem ângulos agudos medindo 30° e 60° então esse triângulo é retângulo e o seu menor cateto tem a metade do comprimento da hipotenusa".

Sugestão: Trace a mediana AM, e, usando o teorema da Atividade 6 e a medida do ângulo B, mostre que o triângulo BAM é eqüilátero. Disto, conclua o teorema.

2) Escreva a recíproca do teorema do item 1.
3) Demonstre essa recíproca, usando a relação entre os lados do triângulo e o mesmo resultado mostrado na Atividade 6.



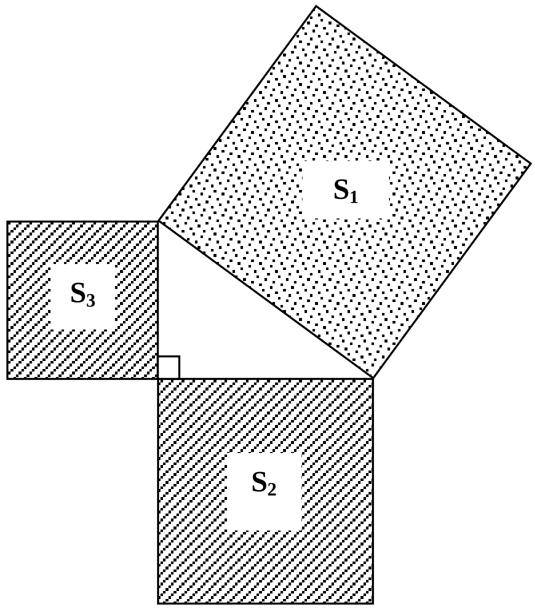
3. 2 – O Teorema de Pitágoras

> *"A área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois catetos desse triângulo".*
>
> $$S_1 = S_2 + S_3$$

A humanidade conhecia e usava o Teorema de Pitágoras, com o enunciado acima, estabelecendo uma relação entre áreas, muito antes de demonstrá-lo formalmente.

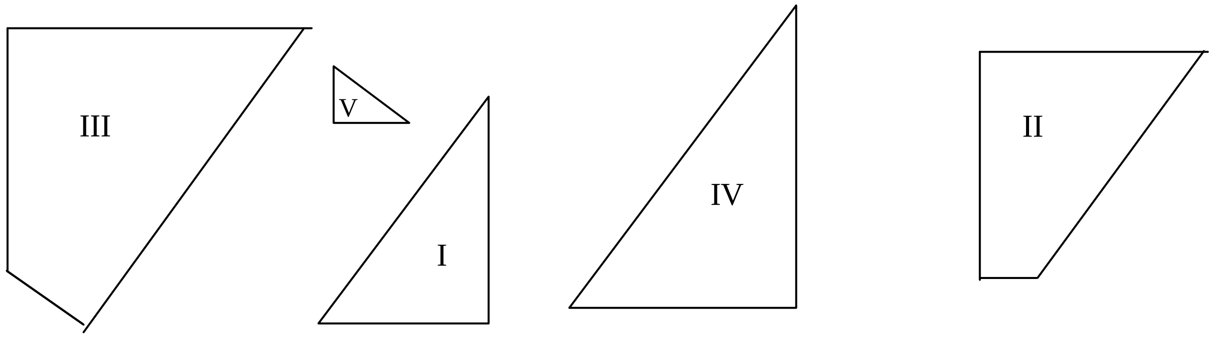
Sua demonstração, a partir da semelhança de triângulos, é atribuída à escola Pitagórica e, daí, vem o seu nome.

Isso também pode acontecer na sua sala de aula. Seus alunos podem verificar experimentalmente a validade do Teorema, para o caso do triângulo 3, 4, 5 e outros que possuam lados com medidas inteiras (chamados Pitagóricos), bem como concluí-lo a partir do quebra-cabeça proposto na Atividade 9 ou do cálculo de medidas de áreas (Atividades 10, 11 e 12).



ATIVIDADE 9

Esta atividade é uma adaptação da proposta de Imenes (1987) no livro Descobrindo o Teorema de Pitágoras, Ed. Scipione.



1) Com as peças I e II monte um quadrado.
2) Com as peças III, IV e V, monte outro quadrado.
3) Desenhe um triângulo retângulo que tenha os lados desses dois quadrados como catetos.
Com as peças I a V, monte um quadrado cujo lado seja a hipotenusa do triângulo que você desenhou.
4) Qual a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os três lados do triângulo?

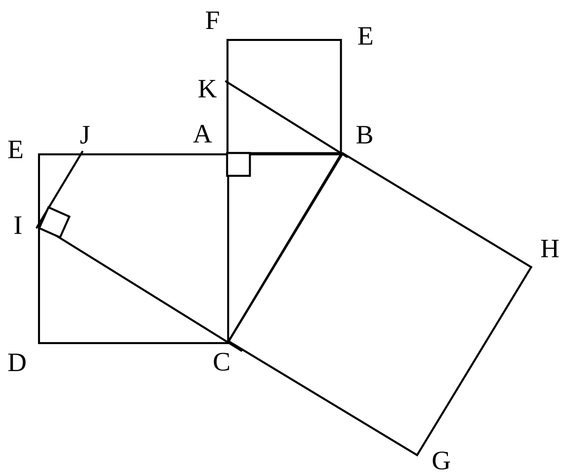
COMENTÁRIOS

1) Esta atividade não é um quebra-cabeça de fácil solução. Se você não conseguir montá-lo, não se preocupe; passe para outras atividades e, de vez em quando, tente de novo. Se você chegar ao final do capítulo sem conseguir montá-lo, olhe a resposta ao final do módulo.

2) Para os alunos, este quebra-cabeça apresenta uma forma agradável de verificar experimentalmente o Teorema de Pitágoras e salienta o seu conteúdo, do ponto de vista geométrico, e não como uma igualdade de expressões algébricas, como é comumente visto ($a^2 = b^2 + c^2$).

O fato de, muitas vezes, a geometria ser tratada apenas por meio de fórmulas e expressões, valorizando mais os procedimentos algébricos e aritméticos do que os geométricos é prejudicial ao desenvolvimento do raciocínio geométrico.

3) Na atividade, são dadas as peças I a V. Sendo professor, você deve querer saber como elas foram obtidas. Você pode construí-las a partir de qualquer triângulo retângulo, conforme descrição abaixo.



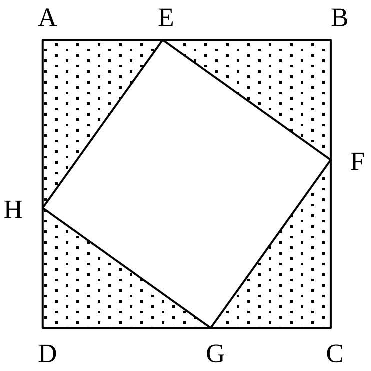
Considere o triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em A.

- ACDE, AFEB e BHGC são quadrados construídos sobre os lados de ABC.
- BK é prolongamento de HB, $K \in AF$.
- CI é prolongamento de GC, $I \in ED$.
- IJ é perpendicular a CI, $J \in EA$.

A seguir, são propostas mais três atividades de dedução do Teorema de Pitágoras, a partir de igualdades entre áreas, que podem ser realizadas em sala de aula, sem os alunos terem conhecimentos anteriores de semelhança de figuras.

ATIVIDADE 10

Muitos historiadores cogitam de que a demonstração do Teorema de Pitágoras, explorada nesta atividade, pode ter sido conhecida dos chineses, em época semelhante à de Pitágoras, independentemente deste.

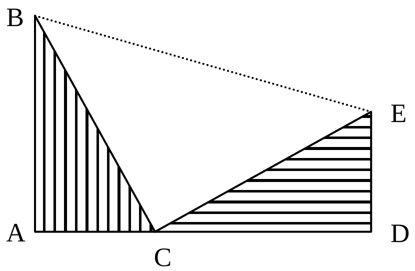


1) Recorte quatro triângulos retângulos congruentes de papel e coloque-os sobre uma mesa de modo a formar um quadrado, como ABCD, na figura.
*2) Note com a letra **a** a hipotenusa desses triângulos, e com as letras **b** e **c** o cateto maior e o menor de cada um deles, respectivamente.*
3) EFGH é um quadrado. Explique por quê.
4) Escreva duas expressões para a área de ABCD.
5) Comparando essas expressões, deduza o Teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE 11

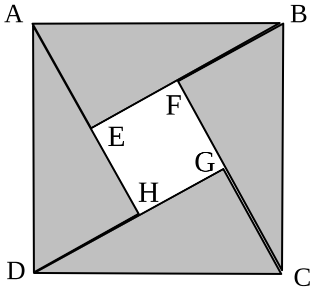
Na figura que se segue, ABC e DCE são triângulos retângulos congruentes não isósceles, de ângulos retos A e D, respectivamente, e AC e CD estão alinhados.

1) Ligando B a E por um segmento de reta, obtém-se um trapézio: ABED. Justifique essa afirmação.
2) Se os triângulos ABC e DCE, além de retângulos, forem isósceles, que figura será ABED?
3) Deduza o Teorema de Pitágoras igualando duas expressões algébricas que representem a área de ABED.



<u>Sugestão</u> – A área de um trapézio pode ser obtida multiplicando a média aritmética do comprimento de suas bases pela sua altura $\left(S = \dfrac{b_1 + b_2}{2} \, . \, h \right)$

ATIVIDADE 12



*Dado um triângulo retângulo qualquer, de catetos **b** e **c**, **b** > **c**, pode-se dispor quatro triângulos congruentes a ele, de modo a formar um quadrado como o da figura: cada lado de ABCD é a hipotenusa **a** do triângulo dado.*

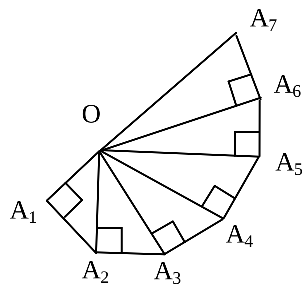
1) *Justifique o fato de ABCD e EFGH serem quadrados, determinando o lado de EFGH em função dos lados do triângulo original.*
2) *Deduza o Teorema de Pitágoras, a partir das expressões das áreas das figuras formadas.*

ATIVIDADE 13

Um bambu de 3m de altura é dobrado em dois pedaços pelo vento. O pedaço inferior permanece de pé, perpendicular ao plano do chão, enquanto o pedaço superior tomba até que a sua extremidade encosta no chão, num ponto distante 1,2 m da base do bambu.

1) *Faça um desenho representando essa situação.*
2) *Determine a que distância do chão se encontra a dobra do bambu.*

ATIVIDADE 14



Observe a espiral da figura.
O segmento OA_1 mede 1 u.c..
Os ângulos retos estão marcados na figura.
A partir de A_1, traça-se A_1A_2, perpendicular a OA_1, medindo 1 u. c..
A partir de A_2, traça-se A_2A_3, perpendicular a OA_2, medindo 1 u. c..
A partir de A_3, traça-se A_3A_4, perpendicular a OA_3, medindo 1 u. c..
A partir de A_4, traça-se A_4A_5, perpendicular a OA_4, medindo 1 u. c..
Assim por diante....

1) Determine as medidas dos segmentos OA_2 , OA_3, OA_4, OA_5, OA_6 e OA_7.
2) Desenhe uma reta e, nela, escolha um ponto para representar o 0. Escolha também um comprimento para representar o 1. Marque então, usando o compasso, e, sem usar régua numerada, os pontos correspondentes aos inteiros, desde –4 até +4.
3) Use o raciocínio da construção acima para determinar, com o uso de esquadro e compasso, os pontos que representam os números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\, e\, \sqrt{10}$.

ATIVIDADE 15

Como a maioria das raízes quadradas de números naturais é um número irracional, pode-se esperar que sejam raros os triângulos retângulos cujos três lados podem ter suas medidas expressas por números naturais. No entanto, como foi dito no início do Capítulo, o mais conhecido dos triângulos retângulos é aquele que tem os lados medindo 3, 4 e 5 unidades de comprimento. Este e todos os outros triângulos retângulos, cujas medidas dos lados são expressas por meio de números naturais, chamam-se **triângulos pitagóricos.** É curioso procurar que ternos de números poderão ser medidas de lados de triângulos pitagóricos. Esses ternos se chamam **ternos pitagóricos.**

1) Decida se todo triângulo com lados medindo 3n, 4n e 5n, sendo n um número natural, é um triângulo pitagórico, justificando.
*2) Considere a e b números naturais, com **a>b**, e um triângulo ABC, cujos lados medem **a-b**, **a** e **a+b**. Qual deve ser a relação entre **a** e **b**, para que ABC seja pitagórico?*
*3) Mostre que um triângulo retângulo satisfaz a condição do item 2 (lados medem **a-b**, **a** e **a+b**, com **a** e **b** números naturais e **a** = **4b**), se e só se esse triângulo é semelhante ao de lados 3, 4 e 5.*
*4) Dê um exemplo de um triângulo cujos lados medem **a-b**, **a** e **a+b**, com **a** e **b** números naturais, mas não seja semelhante ao triângulo de lados 3, 4 e 5.*

ATIVIDADE 16

Esta atividade permite obter ternos pitagóricos a partir de pares quaisquer de números naturais. Ela é particularmente adequada para alunos de 7ª e 8ª séries.

1) Monte uma tabela como a sugerida abaixo, atribuindo valores naturais para x e y, x>y>0.

x	y	$a = x^2 + y^2$	$b = x^2 - y^2$	$c = 2xy$	a^2	$b^2 + c^2$

2) Observando as duas últimas colunas da tabela, escreva uma maneira de encontrar ternos que sejam medidas dos lados de triângulos pitagóricos.

COMENTÁRIO

A atividade acima, apesar de simples, envolve muitas variáveis, o que pode gerar dificuldade para alunos de ensino fundamental. Cabe ao professor orientá-los devidamente para que concluam o pedido e questioná-los com perguntas do tipo: *Será que essa igualdade acontece sempre? Por que será?*

A demonstração exige a manipulação de expressões algébricas que muitas vezes só são trabalhadas no final da 8ª série. Esta é a época mais adequada para se propor a demonstração.

ATIVIDADE 17

Os babilônios, mais de mil anos antes de Cristo, já tinham conhecimentos sobre a relação entre os lados dos triângulos retângulos e sobre como obter ternos pitagóricos.

A escola de Pitágoras sistematizou o seguinte processo para obter ternos pitagóricos:

Qualquer que seja n, natural ímpar, o terno $(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2-1}{2}+1)$ *é pitagórico.*

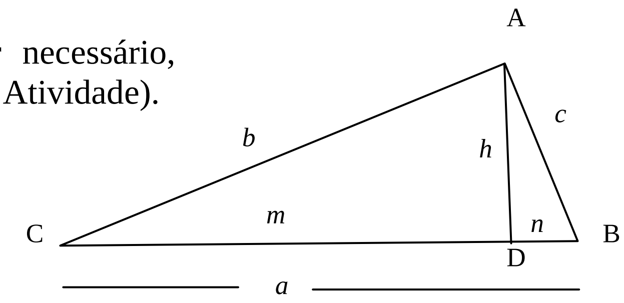
Prove isto, explicando o porquê da exigência de n ser ímpar.

ATIVIDADE 18

Concluímos este capítulo com a demonstração formal do Teorema de Pitágoras que se apóia na semelhança entre os triângulos construídos na Atividade 5. Vamos recordar:

- Provamos, naquela atividade, que a altura de um triângulo retângulo, relativa à hipotenusa, divide esse triângulo em dois outros semelhantes a ele (e, portanto, semelhantes entre si).

Observemos na figura (se você achar necessário, pegue de novo os triângulos recortados naquela Atividade).
AB – cateto: *c*
AC – cateto: *b*
BC – hipotenusa: *a*
AD – altura relativa a BC: *h*
AD divide BC nos segmentos CD (*m*) e DB (*n*).



*1) Os três triângulos ABC, DAC e DBA formam três pares de triângulos semelhantes. Escreva as igualdades decorrentes da semelhança entre os triângulos de cada par, em função de **a, b, c, h, m** e **n**.*
2) Mostre que: $\boldsymbol{b^2 = a \cdot m}$ *e que* $\boldsymbol{c^2 = a \cdot n}$.
3) Conclua que: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.
4) Estabeleça a relação entre a igualdade do item 3 e o enunciado da página 29, no início da Seção 3.2.

COMENTÁRIOS

O Teorema de Pitágoras, tal como enunciado na página 29 e demonstrado na Atividade 18, tem como **hipótese** que um triângulo é retângulo, e, como **tese**, que a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa ($a^2 = b^2 + c^2$).

Não demonstramos, em momento algum, que:

"Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo de lados a, b e c é retângulo".(*)

A proposição (*) é na verdade a recíproca do Teorema de Pitágoras.

Esta recíproca é usada muito freqüentemente, como se fosse o teorema. Um exemplo disso é o "*método*" do operário, citado no início deste Capítulo. De fato, o que ele verifica é se os lados do triângulo são 60 cm, 80 cm e 100 cm. Como se sabe que $60^2 + 80^2 = 100^2$, conclui-se que o triângulo é retângulo e o canto da parede está em esquadro.
.
Usamos esta recíproca para afirmar que o triângulo 3, 4, 5, bem como todos os triângulos cujas medidas, *a*, *b* e *c*, dos lados, satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$ são retângulos. Isto aconteceu, por exemplo, nas Atividades 15, 16 e 17.

Pela sua importância, a recíproca (*) deve ser provada. Nas atividades a seguir são propostas duas demonstrações para ela.

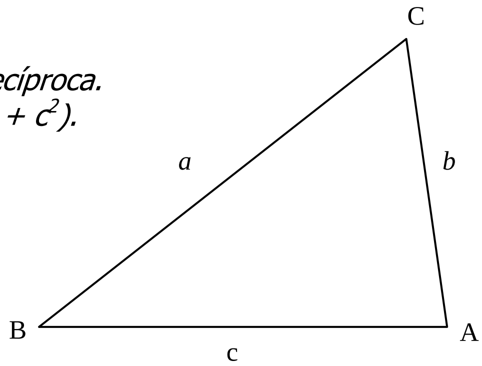
A primeira delas (Atividade 19), embora seja curta, envolve estratégias de construção que nem sempre são bem compreendidas por alunos do ensino fundamental.

Outra demonstração pode ser feita usando a Lei dos Cossenos (Atividade 20), que por sua vez é demonstrada a partir do Teorema de Pitágoras. Como a Lei dos Cossenos raramente é trabalhada no ensino fundamental, essa demonstração poderá não ser acessível aos alunos desse nível.

Mas, atenção! O importante não é fazer uma demonstração dessa **recíproca**, e sim discutir com os alunos o fato de que a estamos usando.

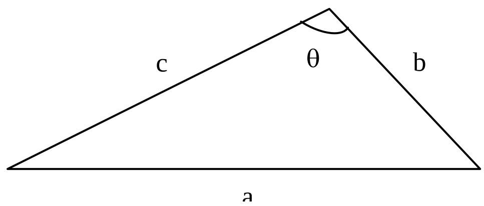
ATIVIDADE 19

1) Escreva a recíproca do Teorema de Pitágoras.
2) Siga o raciocínio indicado abaixo para demonstrar esta recíproca.
i) Seja ABC um triângulo tal que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ($a^2 = b^2 + c^2$). Construa um segmento AC′, de comprimento b, que faça um ângulo reto com AB.
ii) Por que o triângulo ABC′ satisfaz o Teorema de Pitágoras? Conclua que BC′ = a.
iii) Aplique o caso LLL de congruência de triângulos para concluir que ABC é retângulo.



ATIVIDADE 20

Lei dos Cossenos:
"Em um triângulo, o quadrado da medida de um de seus lados é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois menos o dobro do produto das medidas desses outros dois pelo cosseno do ângulo formado por eles".



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos\theta$$

A demonstração dessa lei pode ser encontrada em vários livros, como "Geometria Euclidiana por Meio da Resolução de Problemas", editado pelo Projeto Fundão em 1999.

Demonstre a recíproca do Teorema de Pitágoras, usando a Lei dos Cossenos.

Uma vez demonstrados o Teorema de Pitágoras e a sua recíproca, ambos podem ser usados, como usualmente se faz:

"Um triângulo ABC é retângulo em A, se, e só se, $a^2 = b^2 + c^2$".

Capítulo 4 – Círculo

4.1 - Caracterização

Antes mesmo de usar a roda como ferramenta ou nos meios de transporte, os homens conheciam a forma circular. Por exemplo, nas construções dos Maias, já há traços circulares para decoração e em práticas esportivas: um aro circular pelo qual deveriam fazer passar uma bola.

A roda continua fazendo parte das brincadeiras de crianças de todas as culturas. A idéia de *redondo* é mais do que intuitiva.

Mas, segundo van Hiele (Curso Básico de Geometria – Módulo I), desde o nível de reconhecimento, algumas confusões aparecem: o redondo é a bola (esfera) ou o círculo? Mas, ao progredir no pensamento geométrico, há que se fazer a distinção entre esses dois objetos geométricos: um é plano e o outro não, embora ambos possam continuar a ser considerados redondos.

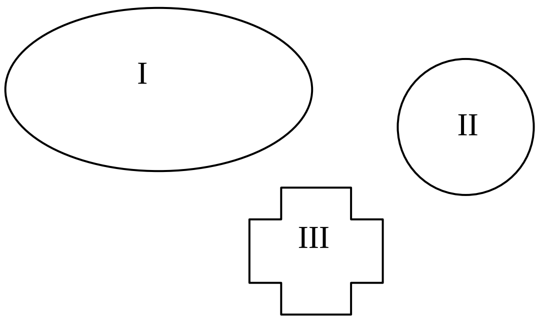
Para ajudar aos seus alunos a distinguir estes tipos de formas, o melhor caminho é o da observação do ambiente.

ATIVIDADE 1

Considere o seguinte conjunto de objetos:

A - lata de ervilha,
B - tampa de vidro de maionese,
C – contorno dessa tampa feito em uma folha de papel,
D - bola de gude,
E - biscoito redondo,
F - borda de um copo,
G - ovo de galinha.

Considere também as linhas da figura abaixo:



Destaque as diferenças e identifique as semelhanças entre os seguintes pares:

1) *A e E;*
2) *C e F;*
3) *E e II;*
4) *C e II;*
5) *B e F;*
6) *G e I;*
7) *D e II;*
8) *II e III.*

COMENTÁRIOS

Em sala de aula, é importante que os objetos sejam trazidos e manuseados pelos alunos, bem como, que cada um deles tenha uma folha com as linhas desenhadas.

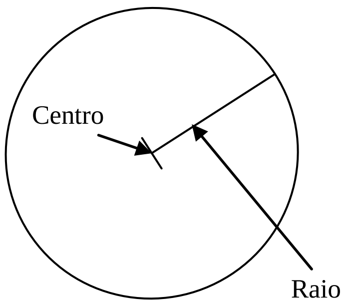
ATIVIDADE 2

1) Sugira uma forma de desenhar uma circunferência no quadro de giz, tendo apenas um giz e um barbante, justificando.
2) Como desenhar uma circunferência num pátio, com duas crianças e um barbante? Por que a linha obtida no chão é uma circunferência?

COMENTÁRIOS

1) Esta atividade é útil para que os alunos possam sugerir a forma de proceder, discutindo a justificativa durante o processo. Depois de fazer o desenho com giz e/ou no pátio, os alunos devem desenhar circunferências com o compasso.

A **circunferência** é o conjunto de pontos de um plano que estão a uma mesma distância <u>fixada</u> de um ponto <u>fixo</u> desse plano.
O ponto fixo é chamado **centro** da circunferência e a distância entre qualquer ponto da circunferência ao centro dela é chamado **raio** da circunferência.
A região do plano limitada por uma circunferência é chamada de **círculo**.



2) Qualquer segmento que tenha como extremidades o centro da circunferência e um dos pontos dessa circunferência também é chamado de **raio** da circunferência. Assim, o mesmo nome serve para denominar um segmento ou o seu comprimento.

3) Freqüentemente faz-se referência a um círculo, ao querer-se referir à circunferência deste círculo. Desde que isto não prejudique a compreensão das idéias que se quer comunicar, não tem muita importância. Na maioria das vezes, a distinção entre o círculo e a sua circunferência fica clara no contexto.

ATIVIDADE 3

1) Trace uma circunferência com um compasso.
2) Trace 4 eixos de simetria desta circunferência. Quantos eixos de simetria há? Quais são eles?
*3) Trace duas circunferências de mesmo raio **r**, com os centros distantes **d** um do outro, com **d>r**.*

a) Que transformação pode levar uma dessas circunferências na outra? Justifique.
b) Por que duas circunferências de mesmo raio são congruentes?

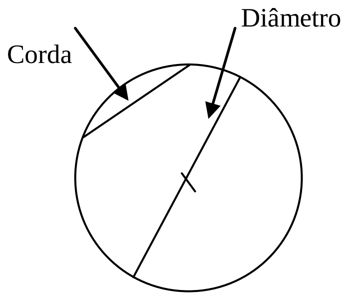
COMENTÁRIO

Usamos no exemplo **d>r** para que a figura ficasse mais nítida, mas a distância **d** pode ser qualquer número real positivo.

Um segmento que liga dois pontos quaisquer de uma circunferência chama-se **corda** desta circunferência.

Uma corda de uma circunferência, que contém o centro dela, chama-se **diâmetro** da circunferência.

O comprimento de qualquer diâmetro de uma circunferência é o dobro do seu raio.



4.2 - Arcos, Cordas e Ângulos

Esta atividade pode ser proposta para alunos a partir de 4ª ou de 5ª série, com o objetivo de permitir a observação da existência de um mesmo quociente entre o comprimento de uma circunferência e o de seu diâmetro, qualquer que seja ela.

ATIVIDADE 4

1) Envolva com uma linha nº 10 (de pipa) os contornos circulares de 4 objetos de tamanhos diferentes. Para cada objeto, corte a linha de modo que o pedaço cortado tenha o comprimento mais próximo possível do da circunferência contornada. Meça cada pedaço de linha com uma régua milimetrada.
2) Meça o mais precisamente possível, os diâmetros de cada uma das 4 circunferências contornadas.
3) Com uma calculadora de bolso, divida o comprimento obtido para cada circunferência pelo do diâmetro correspondente. Qual a relação entre os quocientes que você encontrou?

COMENTÁRIOS

1) É interessante que os objetos contornados sejam de diâmetros diferentes, para que seja possível a observação da regularidade do quociente. É importante lembrar que isto não é uma prova.

2) Devido à imprecisão das medidas e à aproximação dos quocientes pelas máquinas, os resultados não serão exatamente iguais, embora todos devam se aproximar do valor de π.

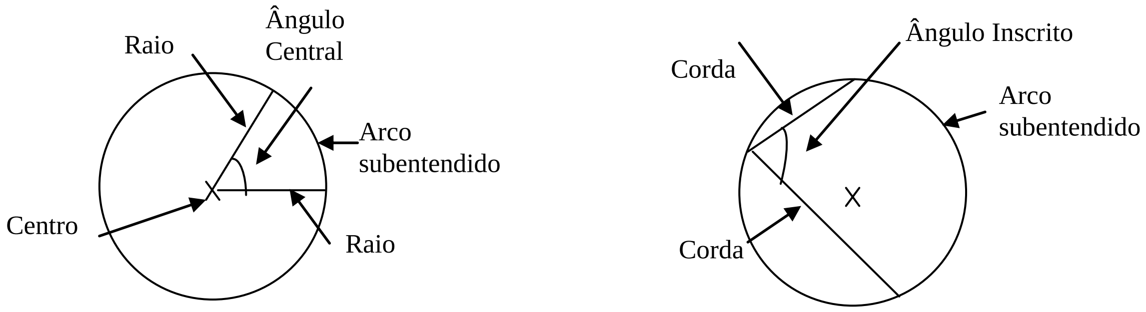
3) Alunos de 4ª a 6ª séries não conhecem os números irracionais, mas já podem e devem tomar conhecimento de que o quociente procurado é um número importante da Matemática, que não tem uma representação decimal exata nem periódica; que os resultados

obtidos são aproximações racionais desse número, pois as medidas que foram feitas, bem como os quocientes entre elas são números racionais.

Vamos explorar a seguir as relações da circunferência e seus arcos com os ângulos.

Os ângulos mais importantes nos círculos são os **centrais** e os **inscritos**.

- Em um ângulo **central**, o vértice é o centro do círculo e os lados são raios dele.
- Em um ângulo **inscrito**, o vértice é um ponto da circunferência e os lados são cordas dela.



Em ambos os casos, as extremidades dos lados do ângulo, que não são vértices dele, determinam dois arcos na circunferência.

Diz-se que o **menor desses arcos** é o **arco subentendido** pelo ângulo central ou pelo ângulo inscrito.

ATIVIDADE 5

1) Desenhe uma circunferência de raio de aproximadamente 3 cm. Trace nela um ângulo central.
2) Usando papel transparente, faça a reflexão desse ângulo central sobre um dos seus lados. O lado do ângulo original que não foi usado como eixo de reflexão formará, com o novo lado do ângulo imagem, um ângulo que é o dobro do original. Por quê?
3) Cubra com um barbante o arco da circunferência subentendido pelo ângulo original, e, marcando as extremidades do barbante com uma caneta, compare o comprimento desse arco com o do arco correspondente ao ângulo refletido. Que conclusão você é levado a tirar?

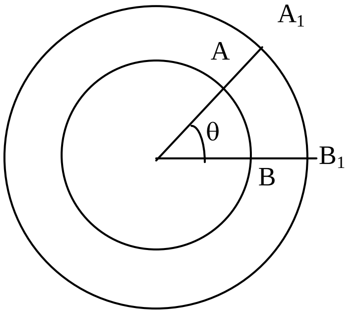
COMENTÁRIOS

Vimos nesta atividade que ângulos centrais iguais subentendem arcos iguais. Esta correspondência entre arcos de circunferência e ângulos centrais faz com que se considere uma outra forma de medir arcos:

A medida de um arco de circunferência   *é a medida do ângulo central que o subentende.*

De acordo com essa definição, as unidades de **medida de arcos** são unidades de **medida de ângulos e não de comprimento**.

<u>Observação</u> – Medir um arco, assim, tem o caráter de verificar que parte da circunferência ele representa. Por exemplo, como a circunferência tem 360º, um arco de 60^o é sempre a sexta parte da circunferência, embora o comprimento dele possa variar de acordo com o raio dessa circunferência.



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1B_1} = \theta$

Na figura, os arcos AB e A_1B_1 têm a mesma medida (a medida do ângulo θ), embora seus comprimentos dependam do raio da circunferêmcia a que eles pertencem.

ATIVIDADE 6

Sejam AB e CD duas cordas de um mesmo círculo de centro O. Mostre que são equivalentes as afirmações:
a) $\overline{AB} = \overline{CD}$*;*
b) AÔB = CÔD;
c) As distâncias de AB e de CD a O são iguais.

<u>Observação</u> – Para provar que duas afirmações *a* e *b* são equivalentes ($a \Leftrightarrow b$), deve-se provar que cada uma delas implica a outra. Isto é o mesmo que dizer que:
$a \Rightarrow b$ e que $b \Rightarrow a$.

No caso de três ou mais afirmações, teríamos muitos pares formados e portanto muitas implicações a provar. Isto pode ser simplificado, provando que cada afirmação implica a seguinte, e que a última implica a primeira. Assim, fecha-se o círculo e todas podem ser consideradas equivalentes. No caso da atividade, tem-se três afirmações. Logo, é necessário e suficiente provar que $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$.

ATIVIDADE 7

Nesta atividade vamos relacionar as medidas dos ângulos inscritos com as dos arcos subentendidos por eles (ou a dos ângulos centrais correspondentes).

1) Desenhe um ângulo agudo em um pedaço de papel transparente. Desenhe também uma circunferência de raio entre 5 e 8 centímetros, em uma folha de papel.
2) Sobreponha o papel transparente ao desenho da circunferência, de modo que o vértice do ângulo fique sobre um ponto da circunferência e seus lados fiquem sobre cordas dela (o ângulo assumirá a posição de um ângulo inscrito da circunferência). Marque na circunferência as extremidades A e B do arco subentendido pelo ângulo.
3) Coloque o mesmo papel transparente sobre a circunferência, de modo que o vértice do ângulo coincida com um ponto do interior do círculo ou exterior a ele e tente fazer com que os lados do ângulo sobreponham-se aos pontos A e B. O que você concluiu?

4) Coloque de novo o papel transparente sobre o da circunferência, de modo a conseguir o que você tentou no item 3: que os lados do ângulo se sobreponham aos pontos A e B. Faça isto, variando a posição do vértice do ângulo. Responda:

- *Dois ângulos inscritos, de vértices diferentes, subentendendo o arco AB, podem ser congruentes?*
- *E se o arco subentendido não for o arco AB, essa congruência é possível? Em que condições?*

5) Desenhe os lados do ângulo central que subentende o arco AB e meça este ângulo.
Meça também o ângulo desenhado no papel transparente. Que relação você encontrou entre as duas medidas?

COMENTÁRIOS

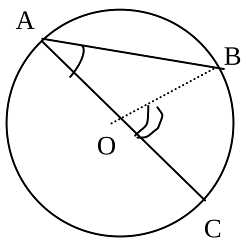
Esta atividade pode e deve ser proposta a alunos do ensino fundamental. A variedade de ângulos e círculos desenhados deverá reforçar as conjecturas:

> *–"A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é a metade do ângulo central desta circunferência que subentende o mesmo arco";*
> *–"As medidas de ângulos inscritos numa mesma circunferência, que subentendem um mesmo arco, são iguais".*

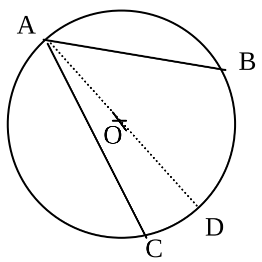
A demonstração da primeira das duas afirmações acima é proposta a seguir. A segunda, é uma conseqüência imediata da primeira.

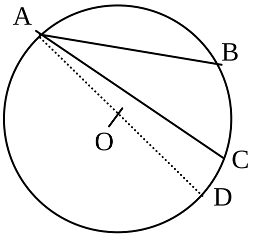
ATIVIDADE 8

1) Considere um ângulo BAC inscrito num círculo, tal que um de seus lados seja diâmetro do círculo (na figura, AC é diâmetro).Explique por que o triângulo AOB é isósceles e use isto para provar que a medida do ângulo BAC é a metade da do ângulo BOC (ou a metade do arco BC)



2) Considere um ângulo BAC inscrito em um círculo, com o centro desse círculo no interior do ângulo. Trace o diâmetro AD de extremidade no vértice do ângulo e escreva a medida do ângulo BAC como a soma de dois ângulos do tipo do considerado no item 1. Use esta expressão para provar que a medida de BÂC é a metade do arco BC.





3) Considere um ângulo BAC inscrito em um círculo, com o centro deste no exterior do ângulo.
Trace o diâmetro AD de extremidade no vértice do ângulo e escreva a medida do ângulo BAC como a diferença de dois ângulos do tipo do considerado no item 1.
Use esta expressão para provar que a medida de BÂC é a metade do arco BC.

COMENTÁRIOS

1) Reunindo os três casos considerados na atividade, conclui-se que a primeira conjectura feita anteriormente é verdadeira, e, conseqüentemente, a segunda também.

> - A medida de um ângulo inscrito em um círculo é a metade da do ângulo central que subentende o mesmo arco, ou
> - A medida de um ângulo inscrito em um círculo é a metade da medida do arco por ele subentendido.
>
> Em qualquer caso, tem-se : $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

2) A partir deste resultado, pode-se caracterizar com facilidade os ângulos retos inscritos num círculo. Para isto basta observar que o arco que mede 180^{o} é a metade da circunferência. Assim,

> - Um ângulo inscrito em um círculo é reto, se, e, somente se, o arco por ele subentendido é uma semicircunferência; ou
> - Um ângulo inscrito em um círculo é reto, se, e, somente se, a corda que liga as extremidades dos seus lados é um diâmetro do círculo.

ATIVIDADE 9

Um triângulo é inscrito em um círculo quando seus três vértices são pontos da circunferência desse círculo.

1) Escreva uma condição necessária e suficiente para que um triângulo inscrito em um círculo seja retângulo.
2) Construa, com régua e compasso, um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é dada.
3) Este triângulo é único? Por quê?

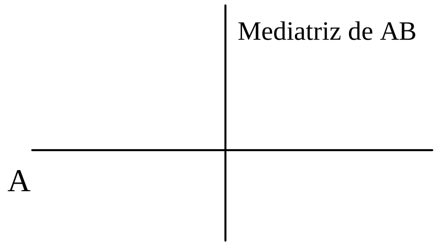
COMENTÁRIOS

Dado um triângulo qualquer, existe sempre um círculo no qual ele pode ser inscrito. Diz-se então que: *todo triângulo é* ***inscritível***.

Este fato se deve a uma propriedade característica da mediatriz de um segmento, e será explorado na atividade 12.

Sabe-se que:

> ***Mediatriz*** *de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio.*



Foi também enunciada e aplicada a caracterização da mediatriz de um segmento que afirma:

i) Para todo ponto P da mediatriz de um segmento AB, tem-se PA = PB.
ii) Todo ponto P tal que PA = PB pertence à mediatriz de AB.

Essas duas afirmativas garantem que, no plano, a **mediatriz** de um segmento AB é o **lugar geométrico** dos pontos que distam igualmente de A e de B.

Embora não provemos neste texto, você pode verificar isto experimentalmente.

*Um conjunto A é o **lugar geométrico** dos pontos que satisfazem uma propriedade P quando:*

- *todo ponto de A satisfaz a propriedade P;*
- *todo ponto que satisfaz a propriedade P pertence a A.*

ATIVIDADE 10

*1) Desenhe uma reta **r** e, nela, marque um ponto M.*
*Com a ponta seca de um compasso em M, e a mesma abertura, marque dois pontos A e B em **r**, um de cada lado em relação a M. Assim, o ponto M será o ponto médio de AB. Por quê?*
*2) Usando um esquadro, trace uma reta **m** perpendicular a AB por M. Pela definição acima, **m** é a mediatriz de AB.*
*3) Marque um ponto qualquer P de **m** e, com o compasso, verifique se PA = PB. Experimente com outros pontos de **m**, para verificar (i).*
*4) Para verificar (ii), você deverá determinar um ponto que diste igualmente de A e de B. Faça isto, com uso do compasso. O ponto determinado "caiu" na reta **m**? Experimente com outra distância.*

COMENTÁRIOS

A realização desta atividade em sala de aula permite que os alunos escolham pontos e distâncias diferentes, dando mais força para a afirmativa. Mas, vale sempre lembrar-se que: **isto não é uma demonstração.**

ATIVIDADE 11

1) Demonstre que a mediatriz de qualquer corda de um círculo passa pelo centro deste.
2) Uma pessoa encontrou o desenho de uma circunferência e deseja encontrar o seu centro. Explique um processo para isso, justificando.

ATIVIDADE 12

1) Desenhe três triângulos: um acutângulo, um retângulo e um obtusângulo.
2) Em cada um deles, trace as mediatrizes de dois dos seus lados.
3) Verifique com um compasso que o ponto de interseção das duas mediatrizes que você traçou dista igualmente dos três vértices do triângulo.
4) O que você verificou no item 3 não é coincidência. Pode ser provado usando a propriedade vista na Atividade 10. Faça isso.
5) Para cada triângulo desenhado, trace o círculo no qual ele está inscrito.
6) Você observou algo de diferente em relação à posição do centro do círculo, no caso do triângulo retângulo?

COMENTÁRIOS

Tendo realizado esta atividade, você pode então concluir que, para qualquer triângulo, existe um círculo, com centro na interseção das mediatrizes de seus lados, que contém os seus três vértices.

O triângulo está **inscrito** neste círculo ou o círculo é **circunscrito** ao triângulo.

Observamos também que, no caso do triângulo retângulo, o centro do círculo circunscrito é o ponto médio da hipotenusa do triângulo. Isto é conseqüência da caracterização dos ângulos retos inscritos, vista na página 45.

Nas duas atividades que se seguem, pedem-se as demonstrações de propriedades dos triângulos retângulos, vistas no Capítulo 3, que ficam facilitadas usando o círculo circunscrito ao triângulo.

ATIVIDADE 13

Use o fato de que todo triângulo pode ser inscrito em um círculo para provar que:

> *"um triângulo é retângulo se, e somente se, a mediana relativa ao lado maior é a metade desse lado."*

Sugestão – Essa demonstração tem ida e volta.

Primeiro suponha que um triângulo ABC é retângulo e prove que a mediana será um raio do círculo circunscrito, enquanto a hipotenusa (o maior lado) é um diâmetro dele.

Depois, suponha que a mediana relativa ao maior lado é a metade dele e conclua que este lado é o diâmetro do círculo circunscrito e que o triângulo é retângulo (justificando tudo!).

ATIVIDADE 14

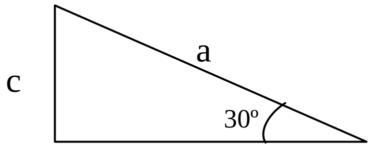
Prove que:

> *"Num triângulo retângulo, um ângulo mede 30^o se, e só se, o cateto oposto a ele é a metade da hipotenusa."*

COMENTÁRIOS

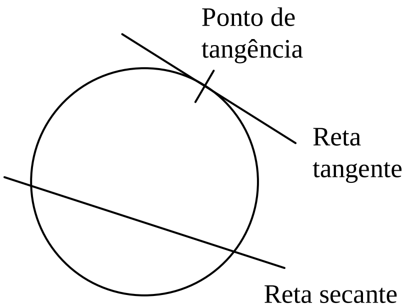
1) Como na Atividade 13, esta demonstração tem ida e volta, mas em ambas você deve supor que o triângulo é retângulo.

2) Se os alunos estiverem familiarizados com as funções trigonométricas, também podem justificar a Atividade 14 usando o fato de que sen 30º = ½.



$$sen\ 30^\circ = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{a}{2}$$

4.3 - Tangentes e Secantes



- Uma reta é **tangente a um círculo** (ou a uma circunferência) quando tem um único ponto comum com esse círculo (ou a essa circunferência).
- O ponto comum à reta e ao círculo chama-se **ponto de tangência** – este ponto pertence à circunferência.

Uma caracterização da reta tangente a um círculo, muito mais usada do que a definição, é dada pelo seguinte teorema, cuja demonstração não é feita neste texto.

Uma reta *r* é tangente a um círculo de centro O em T se, e só se, *r* é perpendicular ao raio OT.

ATIVIDADE 15

Demonstre que se PA e PB são segmentos tangentes a uma circunferência nos pontos A e B, respectivamente, então PA = PB.

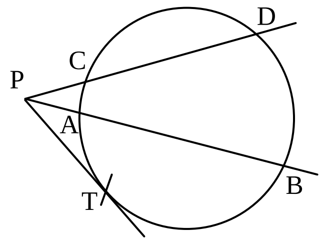
<u>Sugestão</u> – Ligue A e B ao centro da circunferência e reconheça dois triângulos retângulos congruentes.

ATIVIDADE 16

1) Sejam A, B, C e D pontos de uma circunferência e P um ponto exterior a ela, interseção das secantes AB e CD. Prove que PA . PB = PC . PD.

COMENTÁRIOS

Como foi provado na atividade, dados um círculo e um ponto P, exterior a ele, o produto PA.PB, para qualquer secante AB a esse círculo, pelo ponto P, é o mesmo.



Este número, que depende apenas do ponto P e do círculo, chama-se ***potência do ponto P em relação ao círculo.***

Pode-se provar que esse produto é também igual ao quadrado do comprimento do segmento tangente ao círculo por P: $PT^2 = PA \, . \, PB$

A potência pode ser definida também para um ponto P no interior de um círculo, a partir da demonstração pedida na atividade a seguir.

ATIVIDADE 17

1) Sejam A, B, C e D pontos de uma circunferência e P um ponto interior a ela, interseção das secantes AB e CD. Prove que PA . PB = PC . PD.
2) Considerando CD um diâmetro, é possível escrever o produto PC . PD em função do raio ***r*** *do círculo e da distância* ***d*** *de P ao centro dele. Escreva a expressão que representa esse produto.*
3) Uma expressão para a potência em função de ***r*** *e de* ***d*** *pode também ser escrita, no caso de P ser exterior ao círculo. Escreva-a.*
4) Explique o que acontece com a potência de P em relação a um círculo, quando o ponto P se aproxima da circunferência do círculo, pelo seu interior ou pelo seu exterior.
Explique o mesmo para o caso em que P se aproxima do centro do círculo.
O mesmo, considerando que P se afasta indefinidamente do centro do círculo.

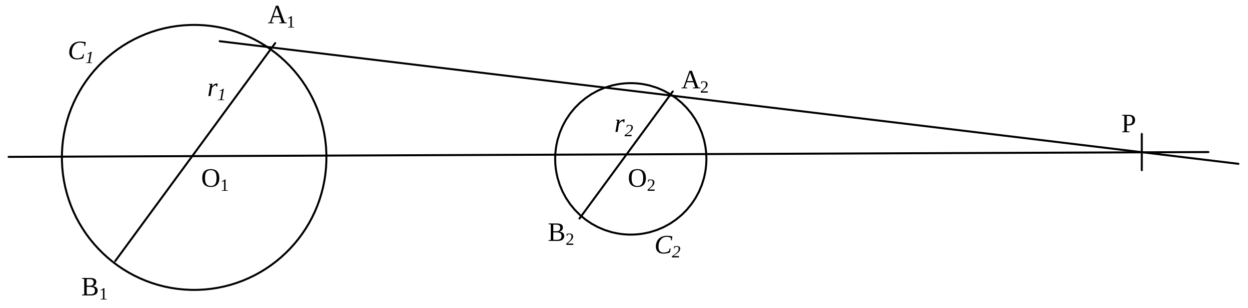
ATIVIDADE 18

Nesta atividade, mostraremos que duas circunferências quaisquer são semelhantes. Na atividade 3, vimos que, se as duas tiverem o mesmo raio, são congruentes (a congruência é um caso particular de semelhança: a de razão 1). Vejamos o caso em que os raios são diferentes.

Sejam C_1 e C_2 de raios r_1 e r_2 e centros O_1 e O_2, respectivamente, sendo $r_1 > r_2$.
1) Trace uma circunferência C_3, de raio r_2 e centro O_1.
Que isometria leva C_2 em C_3? Essas circunferências são congruentes?
2) Mostre que existe uma homotetia H que leva C_3 em C_1. Determine o seu centro e a sua razão.
3) Conclua que C_1 e C_2 são semelhantes.

COMENTÁRIO

Além de semelhantes, as circunferências C_1 e C_2 são homotéticas, como demonstrado a seguir.



- Considere as circunferências C_1 e C_2 e a reta O_1O_2 determinada pelos centros delas.
- Sejam A_1B_1 e A_2B_2 diâmetros paralelos de C_1 e C_2, respectivamente, de modo que A_1 e A_2 estejam em um mesmo semiplano em relação a O_1O_2 e B_1 e B_2 estejam no outro (como na figura).
- Sendo P o ponto de interseção entre as retas O_1O_2 e A_1A_2 vamos mostrar que:

a) $\dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = k$.

b) A imagem de qualquer ponto T_2, pertencente a C_2, pela homotetia H, de centro P e razão k, é um ponto T_1 de C_1.

c) Inversamente, todo ponto R_1 de C_1 é a imagem de um ponto R_2 de C_2 pela homotetia H.

Com isso, teremos completado a demonstração.

Vejamos as demonstrações das três afirmativas.

a) Como os diâmetros A_1B_1 e A_2B_2 são paralelos, os triângulos O_1PA_1 e O_2PA_2 são semelhantes, tendo, portanto, os lados correspondentes proporcionais. Assim, $\dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = k$.

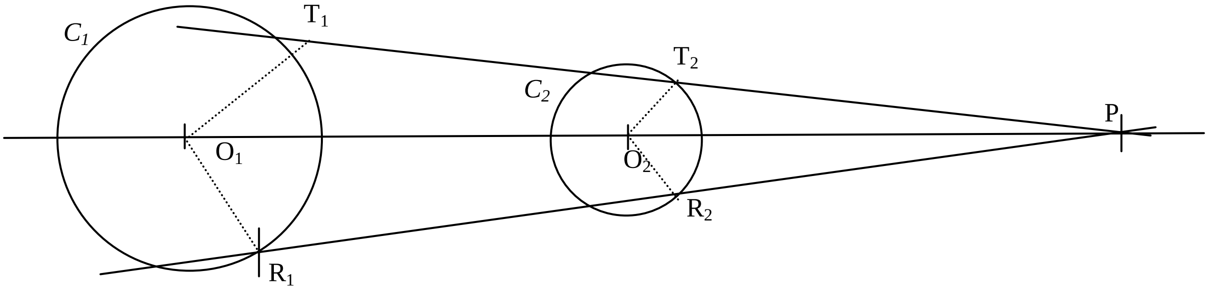
b) Seja T_2 um ponto de C_2. A imagem de T_2 por H será um ponto T_1, na semi-reta PT_2, tal que $\dfrac{PT_1}{PT_2} = k$. Como $k = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{PO_1}{PO_2}$, então $\dfrac{PT_1}{PT_2} = \dfrac{PO_1}{PO_2}$.

Os triângulos PO_1T_1 e PO_2T_2 têm o ângulo P em comum e os lados que formam este ângulo proporcionais. Pelo caso LAL de semelhança de triângulos, eles são semelhantes.

Assim, $\dfrac{OT_1}{OT_2} = k = \dfrac{r_1}{r_2}$.

Como $OT_2 = r_2$, tem-se que $OT_1 = r_1$, ou seja, T_1 é um ponto da circunferência C_1.

<u>*Observação*</u> – Na figura abaixo, T_1 está fora do círculo C_1 de propósito, pois ainda não se tinha provado que ele pertence ao círculo.



c) Seja R_1 um ponto de C_1. Ligue esse ponto a P e a O_1. Trace o segmento O_2R_2, paralelo a O_1R_1, por O_2, sendo R_2 um ponto de R_1P.

Vamos mostrar que R_2 pertence a C_2 e que sua imagem, por H, é R_1.

Pelo paralelismo entre O_1R_1 e O_2R_2, conclui-se que os triângulos PO_1R_1 e PO_2R_2 são semelhantes.

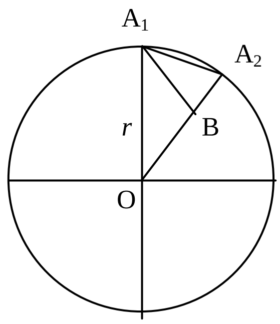
Logo $k = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{O_1R_1}{O_2R_2}$. Mas, como $O_1R_1 = r_1$, tem-se que $O_2R_2 = r_2$, ou seja, R_2 pertence à circunferência C_2.

Além disso, também pelo fato de os triângulos PO_1R_1 e PO_2R_2 serem semelhantes, tem-se $k = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{PR_1}{PR_2}$. Logo R_1 é o homotético de R_2 por H.

ATIVIDADE 19

*Seja $A_1A_2...A_{10}$ um decágono regular de lado l inscrito em um círculo de raio **r** e centro O.*

1) *Mostre que o triângulo A_1A_2O é isósceles e determine os seus ângulos.*
2) *Se A_1B é a bissetriz de $A_2\hat{A}_1O$ em A_1, mostre que $A_1B = A_1A_2 = l$.*
3) *Escreva uma proporção que relacione l com o raio **r** do círculo.*
4) *Mostre que l é dado em função de **r** por: $l = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) r$.*



5) *Explique por que a construção descrita abaixo para o lado do decágono regular está correta.*

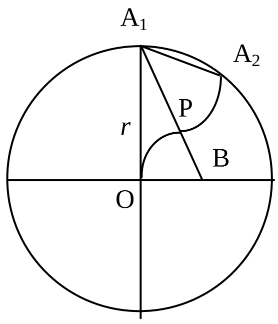
i – Trace uma circunferência de centro O e, nela, dois diâmetros perpendiculares.

ii – Seja A_1 uma extremidade de um dos diâmetros e B o ponto médio de um dos raios do outro. Ligue A_1 a B.

iii – Trace o arco OP, de centro em B e raio BO, sendo P um ponto de A_1B.

iv – Trace o arco PA_2, de centro A_1 e raio A_1P, sendo A_2 um ponto da circunferência inicial.

O segmento A_1A_2 é o lado do decágono regular inscrito nesta circunferência.



6) *Como você faria para construir o lado do pentágono regular inscrito nesta mesma circunferência? E o do icoságono regular?*

Não precisa começar tudo de novo. Aproveite o que foi feito até o item 5.

MÓDULO III
VISÃO DINÂMICA DA SEMELHANÇA DE FIGURAS

Capítulo 1 - Homotetia

ATIVIDADE 1

1) As razões entre as dimensões de cada foto são: $\frac{3}{4}, \frac{4{,}5}{6}$ e $\frac{5}{8}$.

   Comparando essas três razões, percebemos que $\frac{3}{4} = \frac{4{,}5}{6} \neq \frac{5}{8}$.

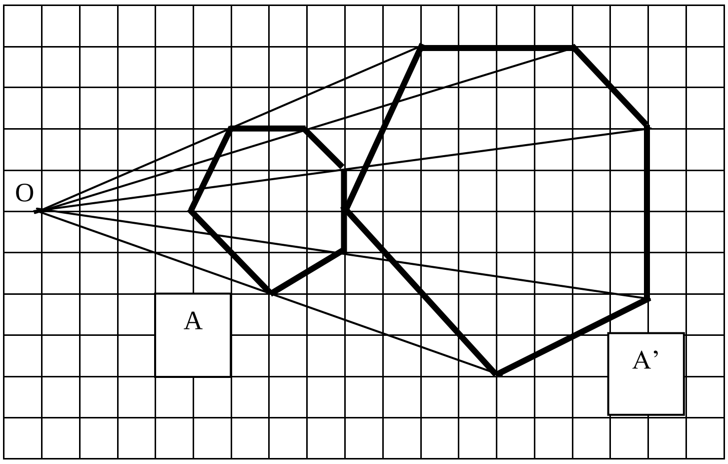
2) Uma foto cuja razão entre as dimensões seja igual é, por exemplo, uma foto 6 x 8, 9 x 12 ou 12 x 16, já que $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ e $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

3) Sim, a razão entre as larguras das fotos 4,5 x 6 e 9 x 12 coincide com a razão entre as alturas dessas duas fotos: $\frac{4{,}5}{9} = \frac{6}{12}$.

4) Não: a razão entre as larguras e a razão entre as alturas das fotos 3 x 4 e 5 x 8 não são iguais, pois $\frac{3}{5} \neq \frac{4}{8}$. Isso acontece porque não se trata de uma ampliação perfeita.

ATIVIDADE 2

1) 2) e 3) Este é um exemplo de resposta entre as muitas que podem ser dadas:



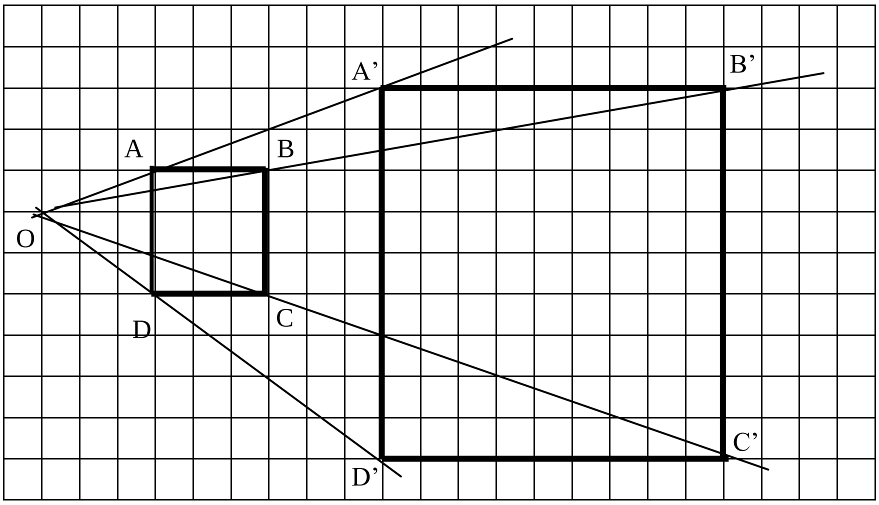
A – Figura inicial
A' – Figura obtida

4) Os lados do polígono obtido são respectivamente paralelos aos lados do polígono original. Além disso, cada lado do novo polígono mede o dobro do seu correspondente no polígono original.

5) Sim, podemos garantir que o polígono obtido é uma ampliação do polígono original, pois seus lados correspondentes são paralelos e guardam entre si a mesma razão.

ATIVIDADE 3

1) Fazendo OA' = 3. OA,
OB' = 3. OB,
OC' = 3. OC e
OD' = 3.OD, obtemos o quadrado A'B'C'D', que é o resultado da aplicação de uma homotetia de razão 3 e centro O no quadrado ABCD.



2) As razões entre as medidas dos segmentos são:

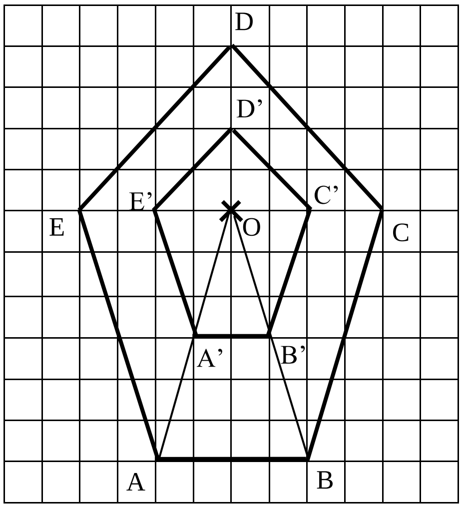
$\frac{OA'}{OA} = \frac{4,8}{1,6}$; $\frac{OB'}{OB} = \frac{9}{3}$; $\frac{OC'}{OC} = \frac{9,6}{3,2}$; $\frac{OD'}{OD} = \frac{5,4}{1,8}$ (os valores obtidos para as medidas podem não ser exatos)

3) Sim, o polígono A'B'C'D' é uma ampliação do quadrado ABCD, com razão de ampliação 3.
4) O polígono A'B'C'D' é um quadrado, que corresponde a uma ampliação do quadrado ABCD.
5) Cada lado de A'B'C'D' mede o triplo da medida de um lado do quadrado ABCD.
6) Comparando os perímetros dos dois quadrados, observamos que a razão entre eles também é 3, pois $\frac{P_{A'B'C'D'}}{P_{ABCD}} = \frac{36}{12} = 3$.

7) Comparando as áreas dos dois quadrados, observamos que a razão entre elas é 9, pois $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{81}{9} = 9 = 3^2$.

ATIVIDADE 4

1)



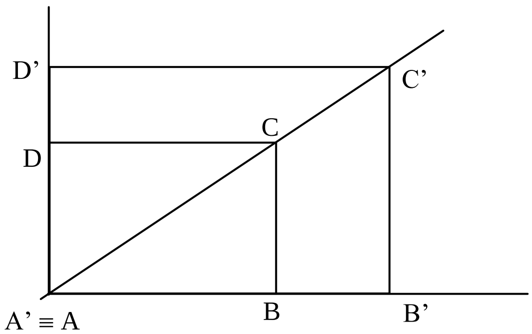
2) Os ângulos internos correspondentes dos dois polígonos são congruentes, pois os lados correspondentes são paralelos.

3) A medida de cada lado do polígono A'B'C'D'E' é a metade da medida do lado correspondente no polígono ABCDE.

4) $\dfrac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

ATIVIDADE 5

1)

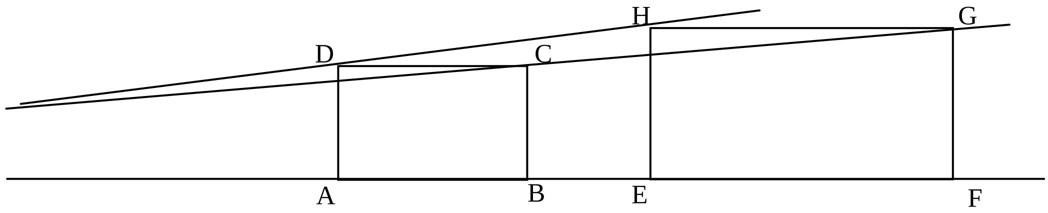


AB'= 1,5 . AB
AC'= 1,5 . AC
AD'= 1,5 . AD

2) As diagonais AC e A'C' estão sobre a mesma reta suporte porque C' é homotético do ponto C e A é o centro de homotetia.

ATIVIDADE 6

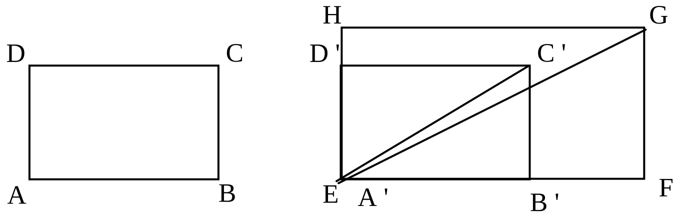
1) Tentando achar um centro de homotetia, obtemos:



Como se pode observar, não é possível encontrar um ponto O onde as 3 retas ligando pontos correspondentes se interceptem para ser o centro de uma homotetia.

2) Considere o retângulo A' B' C' D' congruente ao retângulo ABCD nas condições do enunciado.

Trançando as diagonais EG e A'C' obtemos:

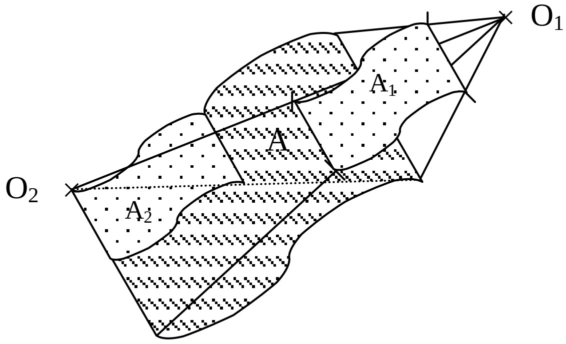


As diagonais dos dois retângulos têm inclinações diferentes em relação a EF e não estão sobre uma mesma reta suporte. Isso acontece porque, como vimos em **1**, os retângulos ABCD e EFGH não são homotéticos. Logo, A'B'C'D' e EFGH também não são homotéticos.

ATIVIDADE 7

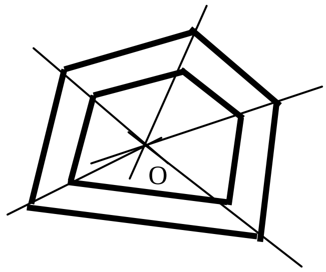
1) Ver figura.
2) As imagens A_1 e A_2 de A pelas duas homotetias são congruentes, pois são reduções da figura A, com a mesma razão.

Duas figuras congruentes homotéticas devem se superpor, o que não é o caso das duas imagens encontradas. Portanto as figuras não são homotéticas entre si.

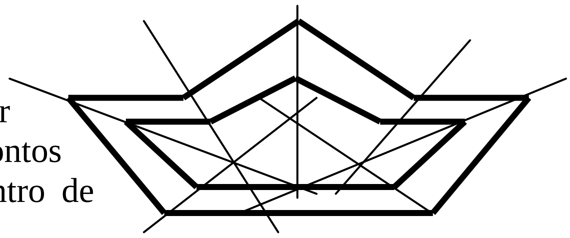


ATIVIDADE 8

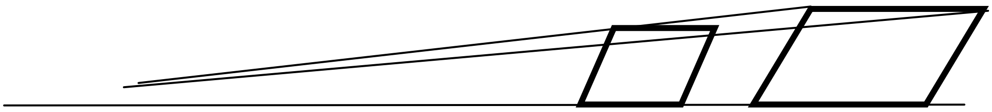
1) As figuras são homotéticas, tendo como centro de hometetia o ponto O, e razão k = 1,5.



2) Apesar de terem lados paralelos as figuras não são homotéticas, pois não foi possível encontrar um único ponto onde todas as retas que ligam os pontos correspondentes se interceptem, isto é, não há centro de homotetia.

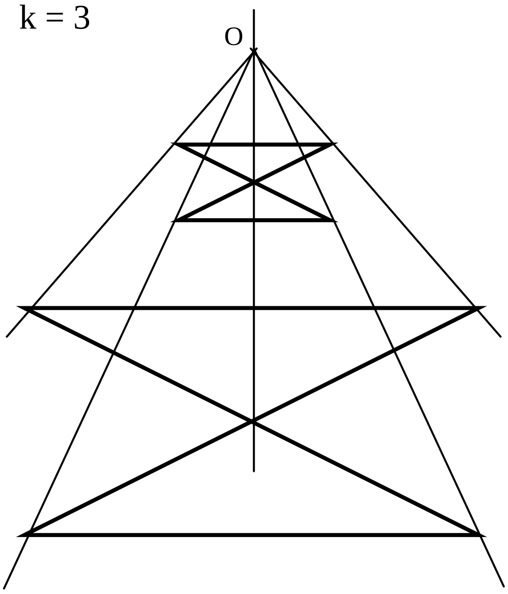


3) Neste caso, é fácil ver que os paralelogramos não são homotéticos, pois nem todos os lados correspondentes são paralelos, e os ângulos correspondentes não são congruentes. Também não é possível encontrar um ponto que seja centro de uma homotetia adequada.

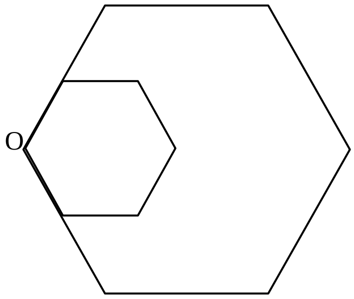


ATIVIDADE 9

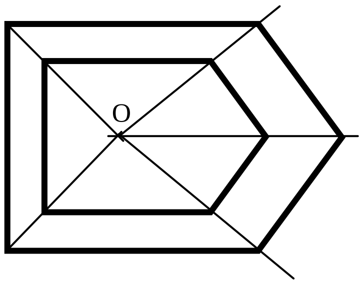
1) k = 3



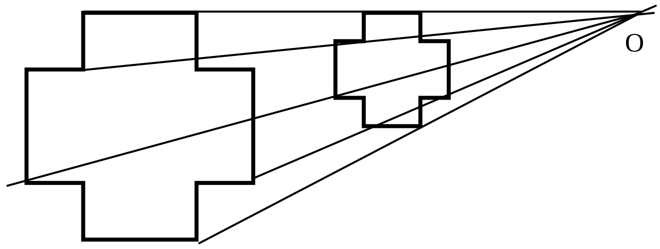
2) k = 2



3) k =3/2



4) k = 1/2



Observação: Como não foi estabelecido qual das figuras é a original e qual é a homotética, as razões de homotetia podem ser relativas a uma ampliação (k >1) ou a uma redução (0 < k < 1).

Logo, no item **1**, k poderia ser também 1/3, no item **2**, poderíamos ter k = ½, em **3** poderíamos ter k = 2/3 e em **4,** k poderia ser 2.

ATIVIDADE 10

1) Sim. A área do triângulo ABC será reduzida, na razão $k^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

Como a área do triângulo retângulo é o semi-produto dos catetos, a área do triângulo ABC é 6 cm^2, e teremos que a área do triângulo A'B'C', em centímetros quadrados, será:

$\frac{9}{16} x\, 6 = \frac{27}{8}$.

Outra forma de chegar a essa resposta:

os lados do triângulo ABC medirão $\frac{3}{4}\times 3 = \frac{9}{4}$, $\frac{3}{4}\times 4 = 3$ e $\frac{3}{4}\times 5 = \frac{15}{4}$ e a área será o semi-produto dos catetos: $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\times 3\right) = \frac{27}{8}$

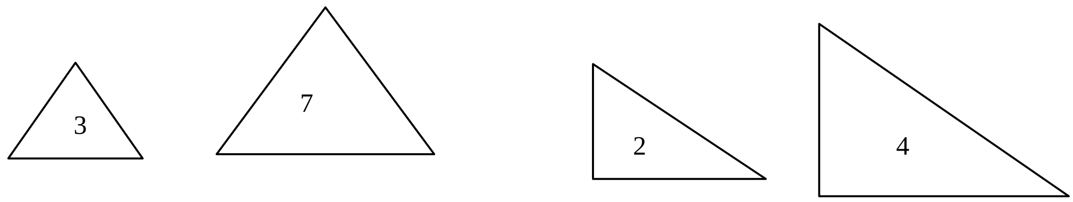
2) A razão das áreas dos dois triângulos é o quadrado da razão de homotetia.

Capítulo 2 – Semelhança de Figuras Planas

ATIVIDADE 1

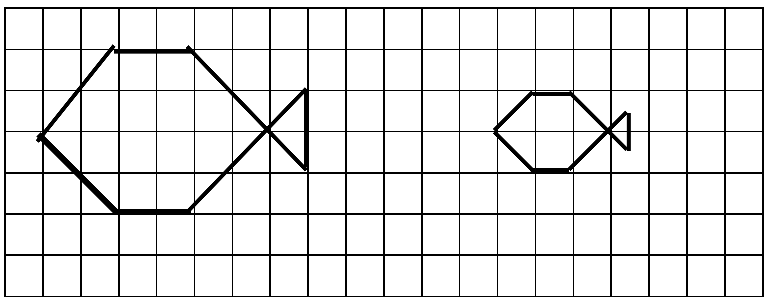
Os pares de triângulos semelhantes são: 2 e 4
3 e 7, pois têm a mesma forma.

Os triângulos 1 e 5 são isósceles como o 3 e o 7, mas vê-se claramente que têm formas diferentes. O triângulo 6 é retângulo como o 2 e o 4, mas também tem forma distinta destes.

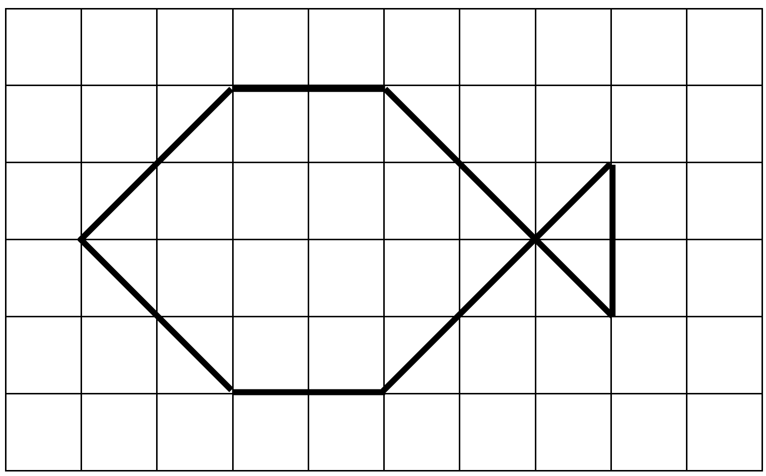


ATIVIDADE 2

1)

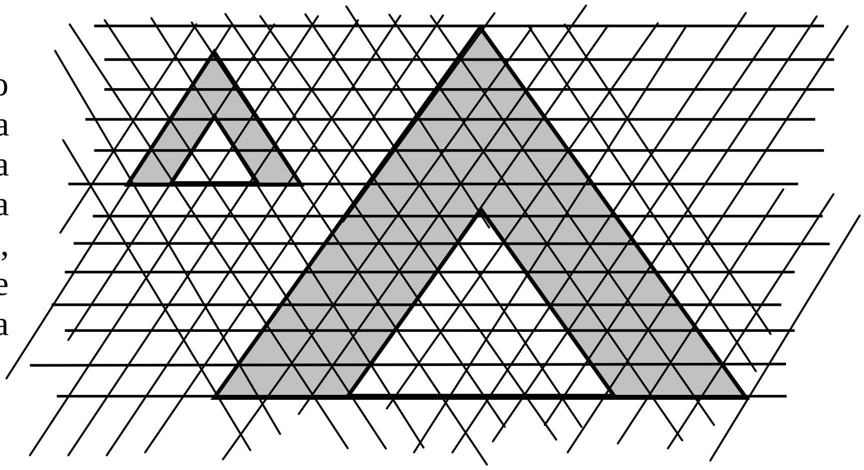


2) Para ampliar a figura usando uma malha quadriculada de 1 cm, basta considerar o mesmo número de quadradinhos em cada dimensão.

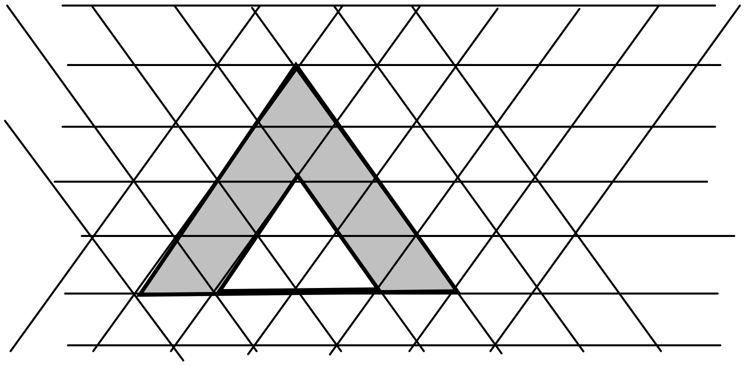


ATIVIDADE 3

1) Ampliando a figura na razão 3, obtemos uma figura semelhante, onde cada dimensão tem o triplo da medida da figura original, considerando como unidade de medida um lado do triângulo da malha.



2) Na malha triangular de 1 cm, mantendo as medidas da figura original, agora com uma nova unidade, obtemos a seguinte ampliação:

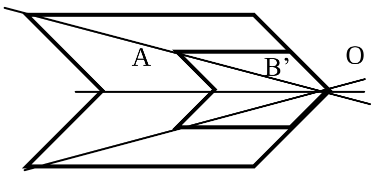


3) As figuras não são congruentes, pois foram obtidas por meio de ampliações da mesma figura, com razões distintas.
A figura do item 1 é uma ampliação de razão 3 da figura original, enquanto a do item 2 é uma ampliação de razão 2. Portanto, são semelhantes; a figura do item 1 é uma ampliação da do item 2 de razão $\frac{3}{2}$.

ATIVIDADE 4

1) A e B não são homotéticas, já que os lados correspondentes não são paralelos.

2) Copiando B em papel transparente e sobrepondo a nova figura B’ sobre a figura A, observamos que B’ pode ser obtida a partir de A por meio de uma homotetia com centro no ponto O indicado na figura. Então A e B’ são semelhantes. Como B e B’ são congruentes, então A e B são semelhantes.

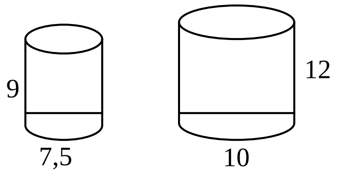


3) Respondido nos comentários que seguem a atividade.

ATIVIDADE 5

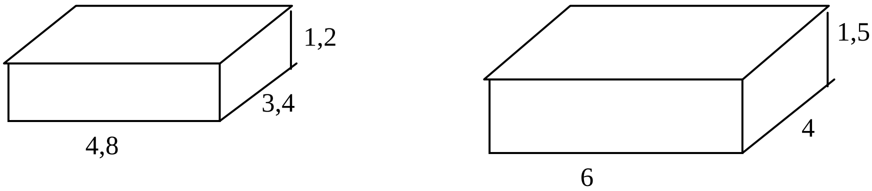
1) As garrafas de Coca-cola de 600ml e de 2 litros não são semelhantes, pois embora a altura e o raio da base tenham sido ampliados, a tampinha é a mesma para as duas garrafas. Isto significa que as dimensões não foram ampliadas na mesma razão.

2) As duas latas de Nescau têm, aproximadamente, as seguintes medidas para o diâmetro da base e para a altura, em centímetros:



Como $\frac{9}{12}=\frac{7,5}{10}$, podemos afirmar que as duas latas são semelhantes.

3) Comparando as dimensões, em centímetros, das caixas de fósforos dos dois tamanhos, observamos que há diferenças entre as diferentes marcas. Este é um exemplo:



Observamos que: $\frac{1,2}{1,5}=\frac{4,8}{6}$, mas a razão entre as outras dimensões correspondentes não é a mesma: $\frac{1,2}{1,5}\neq\frac{3,4}{4}\neq\frac{4,8}{6}$.

Se em vez de 3,4 cm, a medida da largura da caixa menor fosse 3,2 cm, as duas caixas seriam semelhantes, pois: $\frac{1,2}{1,5}=\frac{3,2}{4}=\frac{4,8}{6}$.

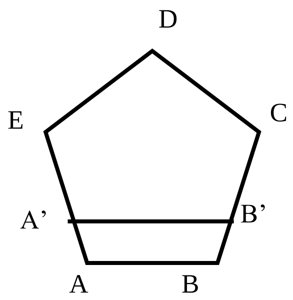
ATIVIDADE 6

1) Apenas a figura C é uma redução da figura X.
2) e 3)

Polígono	Relação com os lados de X	Relação com os ângulos de X	O polígono é semelhante a X?
A	Não são proporcionais	Ângulos correspondentes congruentes	Não
B	Cada lado é metade do lado correspondente de X	Não são congruentes	Não
C	Cada lado é metade do lado correspondente de X	Ângulos correspondentes congruentes	Sim

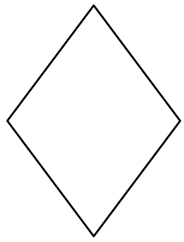
4) A tabela confirma a resposta do item 1: C é a única figura que é uma redução fiel de X, pois possui os lados correspondentes proporcionais, e os ângulos correspondentes congruentes.

ATIVIDADE 7



Para construir um pentágono com os ângulos respectivamente congruentes aos de ABCDE, mas que não seja semelhante a ele, basta traçar uma paralela a um dos seus lados.
O pentágono A'B'CDE tem os ângulos respectivamente congruentes aos do pentágono ABCDE, mas os lados correspondentes não são proporcionais, como mostra a figura.
De fato, no exemplo da figura, os lados CD e DE são do mesmo tamanho nas duas figuras e EA'< EA, CB' < CB e A'B' > AB.
Há muitas outras formas de proceder, mas a do exemplo parece ser a mais simples.

ATIVIDADE 8



Como o quadrado tem os quatro lados congruentes, o polígono procurado também terá os quatro lados congruentes. Mas os ângulos não podem ser retos. Teremos, então, um losango genérico, não quadrado.

ATIVIDADE 9

1) **Verdadeira.** Se os polígonos são regulares com n lados, os seus ângulos têm todos a mesma medida, $a_i = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$.
Além disso, se todos os lados de um dos polígonos medem **a** e os do outro medem **b**, a razão entre lados correspondentes será sempre $\dfrac{a}{b}$, ou seja, os lados são respectivamente proporcionais. Logo, as duas condições da definição são satisfeitas.

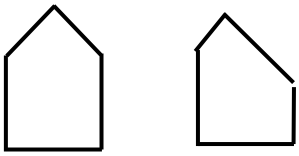
2) **Falsa.** Um contra-exemplo é dado por um quadrado e um retângulo genérico: todos os ângulos são retos, mas os lados não são proporcionais. Outro exemplo foi visto na atividade 7.

ATIVIDADE 10

A tela não é semelhante ao quadro pronto, pois os lados correspondentes desses retângulos não são proporcionais: $\dfrac{40}{60} \neq \dfrac{60}{80}$

ATIVIDADE 11

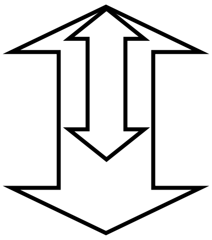
1)



Estas figuras não são semelhantes. Embora os ângulos sejam respectivamente congruentes, os lados correspondentes não são proporcionais.

Isso pode ser verificado com o uso de papel transparente.

2)



Estas setas também não são semelhantes, pois os ângulos correspondentes não são congruentes, como se pode observar por superposição.

ATIVIDADE 12

1) O tamanho dos aparelhos de TV é dado em função do comprimento da diagonal da sua tela, em polegadas.

2) Medindo a diagonal da tela de uma TV de 20 polegadas, obtemos 50 cm.
Como uma polegada equivale, aproximadamente, a 2,5 cm, a medida dessa diagonal corresponde a 20 polegadas, que, como vimos no item 1, define o tamanho do aparelho.
Do mesmo modo, num aparelho de 14 polegadas, a diagonal mede aproximadamente 14 x 2,5 cm = 35 cm, e num aparelho de 29 polegadas, mede 29 x 2,5 cm = 72,5 cm.

3) As dimensões da tela de uma TV de 20 polegadas, por exemplo, medem, aproximadamente, 40 cm e 30 cm, e a razão entre essas medidas é de 4/3. Se você medir o comprimento e a largura das telas de aparelhos de outros tamanhos, comprovará que essa razão é constante.

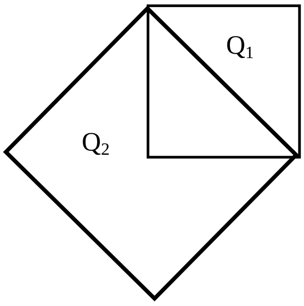
ATIVIDADE 13

Os resultados vistos no Capítulo 1 para figuras homotéticas valem também para figuras semelhantes. Logo:
1) Se dois polígonos são semelhantes, com razão de semelhança k, a razão entre seus perímetros também é k.
2) A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes de razão de semelhança k será k^2.

ATIVIDADE 14

1) Seja Q_1 um quadrado de lado ℓ e área ℓ^2, e Q_2 um quadrado cuja área é o dobro da área de Q_1. Logo, a área de Q_2 é $S = 2\ell^2$.
Portanto, o lado de Q_2 será $L = \sqrt{S} = \sqrt{2\ell^2} = \ell\sqrt{2}$.

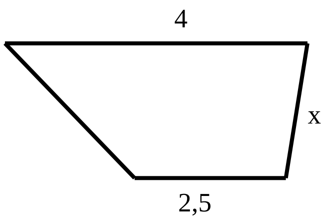
2) Para construir um quadrado Q_2 semelhante ao da figura com o dobro de sua área, basta construir um quadrado com lado igual à sua diagonal, já que a diagonal de um quadrado com lado ℓ mede $\ell\sqrt{2}$.

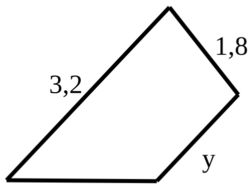


ATIVIDADE 15

$$\frac{4}{3,2} = \frac{x}{1,8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \times 1,8}{3,2} = \frac{7,2}{3,2} = 2,25$$

$$\frac{4}{3,2} = \frac{2,5}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3,2 \times 2,5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$





ATIVIDADE 16

1) Apenas B é uma redução da figura X, pois os triângulos A e C têm formas distintas.

2) e 3)

Triângulo	Relação com os lados de X	Relação com os ângulos de X	O triângulo é semelhante a X?
A	Os lados correspondentes não são proporcionais	Não são congruentes	Não
B	Cada lado é metade do lado correspondente de X	Ângulos correspondentes congruentes	Sim
C	Os lados correspondentes não são proporcionais	Não são congruentes	Não

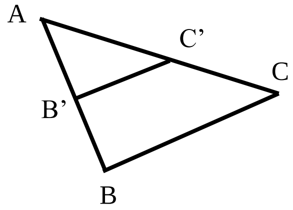
4) A tabela confirma a resposta dada no item 1: B é o único triângulo que representa uma redução de X.

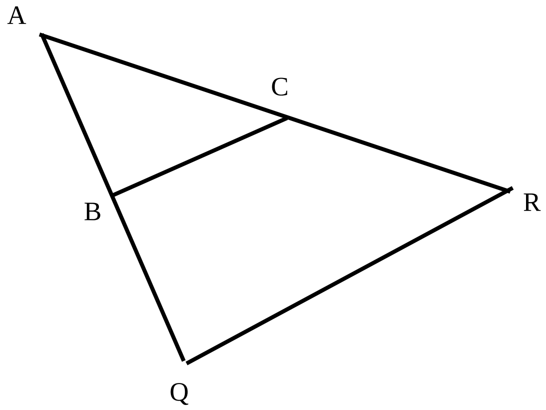
Dois triângulos são semelhantes quando seus lados são respectivamente proporcionais, ou seus ângulos correspondentes são congruentes.

ATIVIDADE 17

1) Traçando B’C’ paralela a BC, com B’$\in$ AB e C’$\in$ AC, obtêm-se os triângulos ABC e AB’C’ que são semelhantes.

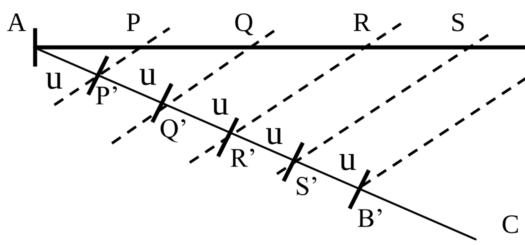
Isso acontece sempre porque ABC é a imagem de AB’C’ por uma homotetia de centro A, como ilustra a figura.





2) Por uma homotetia de centro A e razão 2, obtém-se o triângulo AQR.
Os triângulos ABC e AQR são semelhantes, já que os lados são respectivamente proporcionais, e os ângulos correspondentes são congruentes.
Isso acontece sempre porque os triângulos são homotéticos, por homotetia de centro no vértice A e razão 2.

ATIVIDADE 18



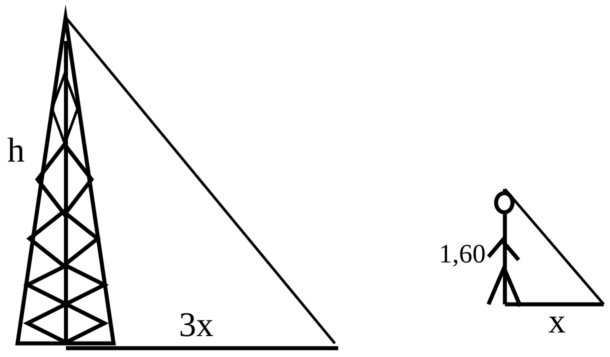
Seja u a medida dos segmentos congruentes marcados sobre a semi-reta auxiliar, isto é:
AP’= P’Q’= Q’R’= R’S’= S’B’= u.

Por construção, BB’// SS’// RR’// QQ’// PP’. Pelo teorema de Tales, esse feixe de paralelas determina sobre as transversais AB e AB’ segmentos proporcionais:

$$\frac{AP}{AP'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QR}{Q'R'} = \frac{RS}{R'S'} = \frac{SB}{S'B'}$$

Como todos os segmentos dos denominadores são congruentes, concluímos que os segmentos dos numeradores também são congruentes, o que mostra que o segmento AB foi dividido em 5 partes iguais.

ATIVIDADE 19



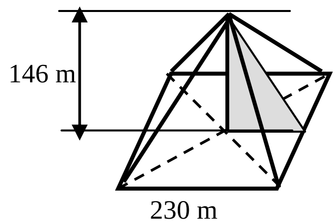
Sejam h a altura da torre, e x a sombra do menino. Então a sombra da torre é 3x.

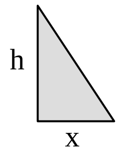
Como o sol está a uma distância muito grande da Terra, pode-se considerar os raios solares como sendo paralelos. Assim, os lados dos triângulos são paralelos e eles são semelhantes.

Logo, pela proporcionalidade entre os lados correspondentes: $\frac{h}{1{,}60} = \frac{3x}{x}$

Segue que h = 3 x 1,60 m = 4,80 m.

ATIVIDADE 20





1) A altura de qualquer pirâmide regular de base quadrada recai sobre o centro da base, que é o ponto de interseção das diagonais do quadrado. Assim, destacamos um triângulo retângulo cujos catetos são a altura da pirâmide, *h*, e a metade da aresta da base, que chamaremos de *x*. Para verificar se a piramidezinha é realmente uma miniatura da pirâmide de Quéops, basta checar se o triângulo retângulo da miniatura é semelhante ao da pirâmide de Quéops. Como ambos são retângulos, basta checar a proporcionalidade entre os lados que formam o ângulo reto.

Devemos ter: $\frac{h}{x} = \frac{146}{115}$ ou $\frac{h}{2x} = \frac{146}{230}$

2) A miniatura encontrada de pedra sabão tem dimensões h = 7 cm, e aresta da base, $2x$ = 11,5 cm e, portanto, x = 5,75 cm.

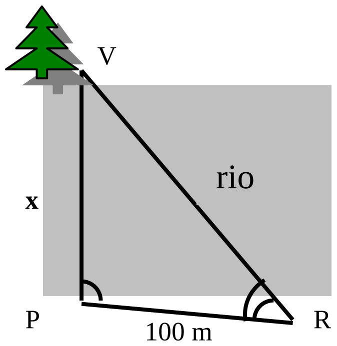
Então essa miniatura não representa a pirâmide de Quéops, pois: $\frac{h}{x} = \frac{7}{5{,}75} = \frac{140}{115} \neq \frac{146}{115}$

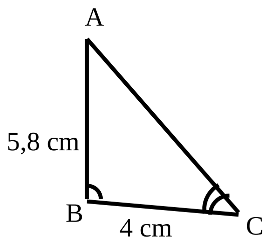
Ou seja, os triângulos não são semelhantes.

3) Para que essa pirâmide de pedra sabão fosse realmente miniatura da pirâmide de Quéops, sua altura deveria ser de 7,3 cm, pois: $\frac{h}{x} = \frac{7{,}3}{5{,}75} = \frac{146}{115}$.

Outra possibilidade seria manter a altura e alterar a aresta da base (descubra, neste caso, quanto valeria x)

ATIVIDADE 21



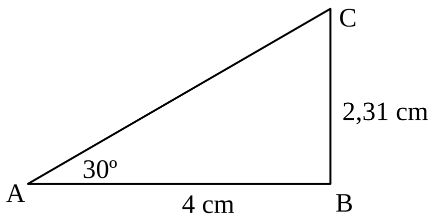


Sim. Como os 2 triângulos são semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais. Logo, sendo x a medida de PV em metros, temos:

$\frac{x}{100} = \frac{5{,}8}{4} \Rightarrow x = 5{,}8 \times 25 = 145$. Portanto, a largura aproximada do rio é de 145 m.

ATIVIDADE 22

Se os alunos ainda não dominam as razões trigonométricas, deve-se resolver o problema através da semelhança de triângulos, construindo, em escala, um triângulo semelhante ao representado na figura. Neste exemplo, o triângulo ABC, retângulo em B, com Â = 30º e AB = 4 cm, terá BC = 2,31 cm, aproximadamente. Este triângulo tem os ângulos congruentes aos do triângulo do esquema do prédio, logo é semelhante a ele.

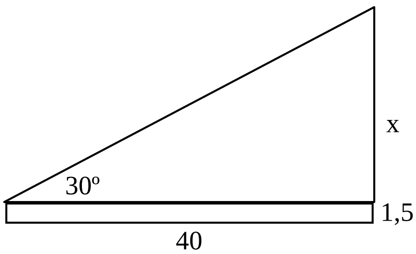


Então: $\frac{4}{2{,}31} = \frac{40}{x} \Rightarrow x = 23{,}1$

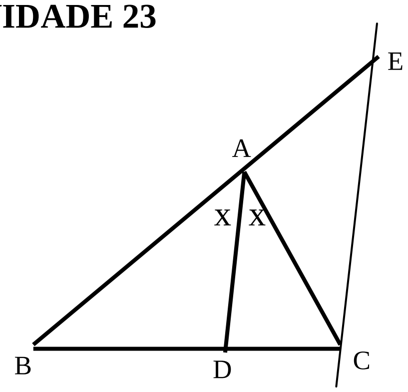
Somando x com a altura na qual foi feita a medição:

h = 23,1 + 1,5 = 24,6.

A altura aproximada do prédio é 24,60 m.



ATIVIDADE 23

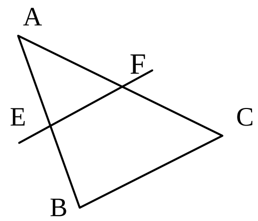


Como AD é bissetriz do ângulo A, consideremos BÂD = DÂC = x.
Tracemos CE // AD.
Considerando essas paralelas cortadas pela transversal BE, temos que $x = A\hat{E}C$, pois são correspondentes.

Considerando essas paralelas cortadas pela transversal AC, temos que $x = A\hat{C}E$, pois são alternos internos.
Segue que o triângulo AEC é isósceles e, portanto, AC = AE.

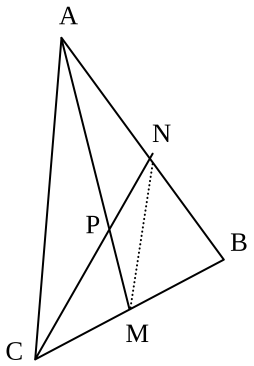
Por outro lado, os triângulos ABD e EBC são semelhantes, já que CE // AD.
Segue que $\frac{BE}{BC} = \frac{AB}{BD} = \frac{BE-AB}{BC-BD} = \frac{AE}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DC}$.
Como AE = AC, temos que $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$.

ATIVIDADE 24



1 e 2) Seja EF a paralela a BC, pelo ponto médio E de AB.
Pelo Teorema de Tales, os triângulos AEF e ABC são semelhantes e $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.
Como $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$, então $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$.
Logo F é o ponto médio de AC e EF mede a metade de BC.

ATIVIDADE 25

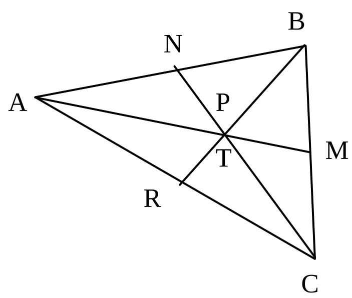


1) Como M e N são pontos médios de BC e AB, ligando M a N , pelo que foi visto na atividade anterior e comentários, conclui-se:

- AC = 2. MN e
- MN é paralela a AC.

Comparando agora os triângulos MNP e ACP, verifica-se que eles têm dois ângulos congruentes: $\hat{P} = \hat{P}$ (opostos pelo vértice) e $P\hat{N}M = P\hat{C}A$ (pelo paralelismo entre MN e AC).
Logo, conclui-se que os triângulos MNP e ACP são semelhantes.
Como AC = 2 . MN, então PA = 2 . PM e PC = 2 . PN.

2) Consideremos a terceira mediana BR do triângulo. Pelo item 1, sabe-se que esta mediana encontrará AM em um ponto T tal que TA = 2.TM, ou seja, o ponto T é exatamente o ponto P de encontro entre AM e CN.



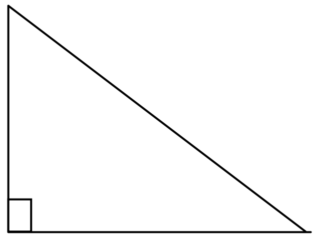
Esta conclusão garante que as três medianas de qualquer triângulo ABC se encontram em um ponto P **(baricentro de ABC)**, tal que:

PA = 2 . PM
PB = 2 . PR
PC = 2 . PN

Capítulo 3 – O Triângulo Retângulo e o Teorema de Pitágoras

ATIVIDADE 1

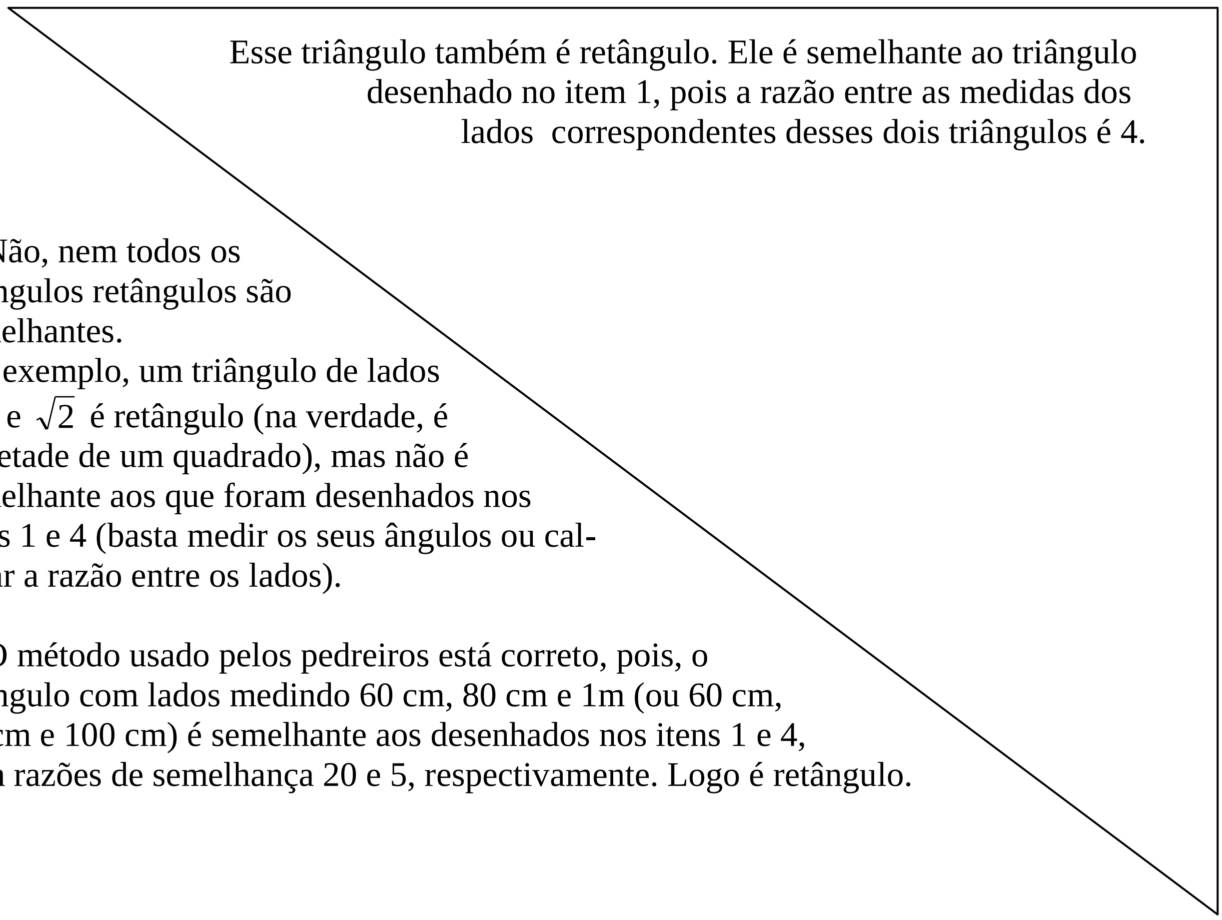
1) A construção de triângulos, com régua e compasso, está detalhada no Capítulo 3 do Curso Básico de Geometria, Módulo I.
Seu desenho deve ter ficado assim.
A posição não importa, pode variar à vontade.



2) Sim, porque, pelo caso LLL de congruência de triângulos, se, em dois triângulos, os lados de um deles forem congruentes aos lados correspondentes do outro, esses triângulos são congruentes.

3) O triângulo é retângulo e o ângulo reto é o formado pelos menores lados.

4) O desenho deve ser assim.

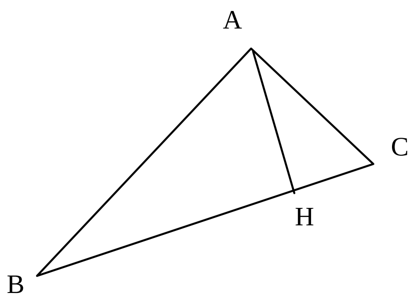


Esse triângulo também é retângulo. Ele é semelhante ao triângulo desenhado no item 1, pois a razão entre as medidas dos lados correspondentes desses dois triângulos é 4.

5) Não, nem todos os triângulos retângulos são semelhantes.
Por exemplo, um triângulo de lados 1, 1 e $\sqrt{2}$ é retângulo (na verdade, é a metade de um quadrado), mas não é semelhante aos que foram desenhados nos itens 1 e 4 (basta medir os seus ângulos ou calcular a razão entre os lados).

6) O método usado pelos pedreiros está correto, pois, o triângulo com lados medindo 60 cm, 80 cm e 1m (ou 60 cm, 80 cm e 100 cm) é semelhante aos desenhados nos itens 1 e 4, com razões de semelhança 20 e 5, respectivamente. Logo é retângulo.

ATIVIDADE 2



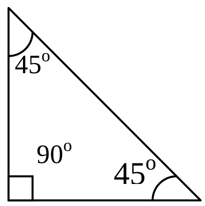
1) Seja ABC um triângulo retângulo em A.
Suas alturas são:

- BA, altura relativa a AC;
- CA, altura relativa a AB e
- AH, altura relativa a BC.

Essas três alturas se encontram no vértice A do triângulo.

2) Não. O ponto de encontro das três alturas de um triângulo só é um de seus vértices (o do ângulo reto), se o triângulo for retângulo, pois, somente nesses triângulos, um lado é perpendicular ao outro, confundindo-se com a altura relativa a esse lado.
Nos triângulos acutângulos, as alturas se encontram no interior do triângulo e, nos obtusângulos, elas se encontram em um ponto exterior ao triângulo.

ATIVIDADE 3



1) Todos os triângulos do TANGRAM são retângulos e isósceles. Como são isósceles, os ângulos da base são congruentes.
Como a soma dos ângulos internos do triângulo vale 180^o, conclui-se que cada um dos ângulos agudos desses triângulos mede 45^o.
Como isto acontece em todos os triângulos do TANGRAM, pelo caso AA de semelhança de triângulos, esses triângulos são semelhantes.

2) Cada lado de um dos triângulos pequenos mede a metade do correspondente de um dos triângulos grandes. A razão de semelhança é então ½ . Sendo assim, a razão entre as áreas é ¼.

3) Sobrepondo o triângulo médio ao grande, verifica-se que a área do triângulo grande é o dobro da área do triângulo médio. A razão entre a área do triângulo grande e a do médio é 2.
Como esses dois triângulos são semelhantes, esta razão é o quadrado da razão entre cada lado do triângulo grande e o lado correspondente no triângulo médio.
Logo a razão de semelhança entre o triângulo grande e o médio é $\sqrt{2}$.
Considerando na ordem inversa, a razão de semelhança entre o triângulo médio e um dos triângulos grandes é $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *ou* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

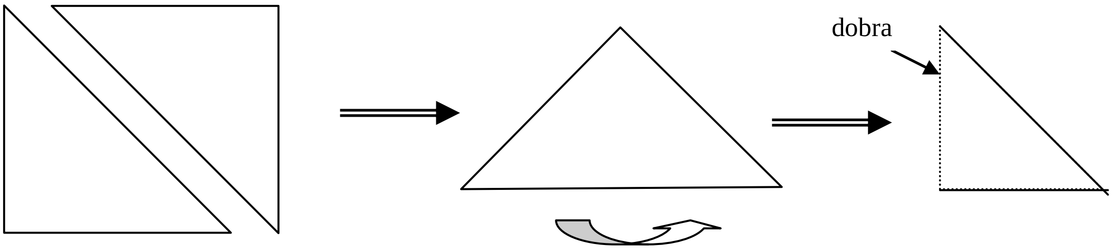
4) A área de um triângulo pequeno é a metade da área do triângulo médio, ou seja, a razão entre a área do triângulo pequeno e a do médio é ½. Logo a razão entre cada lado do triângulo pequeno e o correspondente no triângulo médio é $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ATIVIDADE 4

1) Pelo raciocínio feito no item 1 da Atividade 3, os ângulos agudos de todo triângulo retângulo isósceles e, particularmente, dos triângulos do TANGRAM, medem ambos 45º.

2) Um modo prático de obter triângulos retângulos isósceles congruentes é dividir um quadrado ao meio, por uma de suas diagonais.

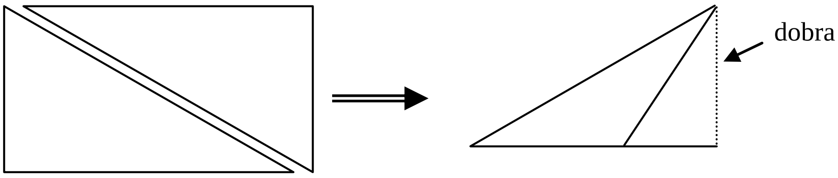
3) Dobrando um dos triângulos de modo que os vértices dos ângulos agudos coincidam, você observará que as duas partes em que o triângulo ficou dividido coincidem. Isto significa que a dobra representa ao mesmo tempo:
- uma mediana, pois liga um vértice ao meio do lado oposto;
- uma bissetriz, pois os dois ângulos formados dos dois lados da dobra se superpõem e
- uma altura, pois o ângulo raso formado pelas duas partes do lado dobrado fica dividido igualmente pela dobra; esta é, portanto, perpendicular a este lado, partindo do vértice oposto a ele.



4) Cortando o triângulo na dobra, obtém-se dois triângulos congruentes. Cada um destes é semelhante ao que foi dobrado, já que possuem ângulos correspondentes iguais.

ATIVIDADE 5

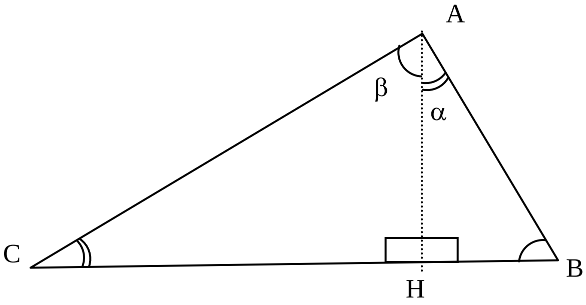
1)



2) Esta dobra coincide com a altura relativa à hipotenusa, pois parte do vértice do ângulo reto e divide o ângulo raso (180º) ao meio.

3) Sobrepondo os três triângulos, verifica-se que os três ângulos de cada um são congruentes aos ângulos dos outros dois. Os três triângulos são então semelhantes.
Este raciocínio foi experimental, mas a conclusão é verdadeira sempre, conforme prova a seguir.

4) Seja ABC um triângulo retângulo, Â o seu ângulo reto e AH sua altura relativa à hipotenusa.

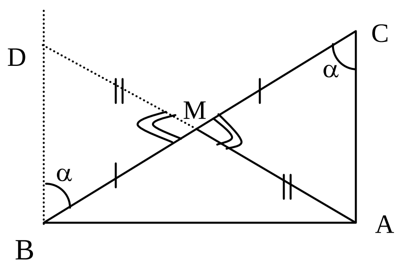


Sendo AH altura de ABC, os ângulos em H são retos. Assim, $\hat{C}+\beta = 90^o = \hat{C}+\hat{B} \Rightarrow \beta = \hat{B}$.

O mesmo raciocínio leva-nos a concluir que $\hat{C} = \alpha$.

Os ângulos correspondentes nos três triângulos, ABC, HAC e HBA são portanto congruentes, o que permite afirmar que esses triângulos são semelhantes, pelo caso AA de semelhança de triângulos.

ATIVIDADE 6



1) O comprimento de AM é a metade do comprimento da hipotenusa BC.

2) DB e CA são paralelas por serem ambas perpendiculares a AB. Pelo Teorema das Paralelas, os ângulos indicados por α são congruentes (*). Os ângulos opostos pelo vértice em M também são congruentes (**).

Além disso, se AM é mediana, então MC = MB (***).

(*), (**) e (***) permitem aplicar o caso ALA de congruência de triângulos e afirmar que

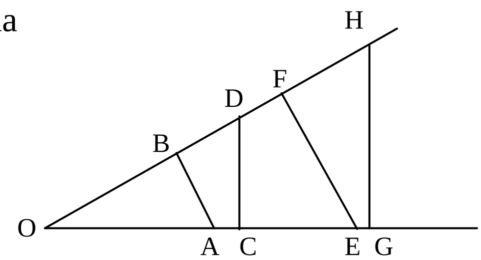
Δ CMA = Δ BMD. Logo AC = BD e DM = AM = ½ AD.

Os triângulos DBA e CAB têm então os ângulos retos congruentes formados por lados correspondentes congruentes. Logo, pelo caso LAL de congruência de triângulos, tem-se:

Δ DBA = Δ CAB, do que decorre que DA = BC. Então, MA é a metade de BC, como se queria provar.

ATIVIDADE 7

Na figura, aparecem quatro possibilidades de localização da perpendicular (duas em relação a cada lado do ângulo). Há uma infinidade de outras.



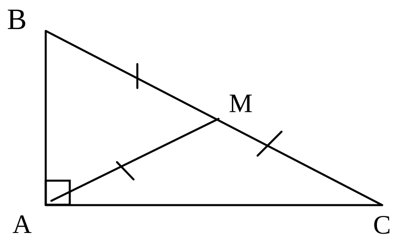
Triângulo	Hipotenusa	Cateto Menor
OBA	AO = 2,2	AB = 1,1
OCD	OD = 2,95	CD = 1,45
OFE	OE = 4,1	EF = 2,05
OGH	OH = 4,9	GH = 2,4

As medidas obtidas sugerem que o comprimento do menor cateto de um triângulo retângulo, com um ângulo agudo de 30^o, é a metade do comprimento da hipotenusa desse triângulo. Como foi dito no texto, você pode não ter encontrado essas medidas exatas, mas isto se deve a erros naturais de medição.

ATIVIDADE 8

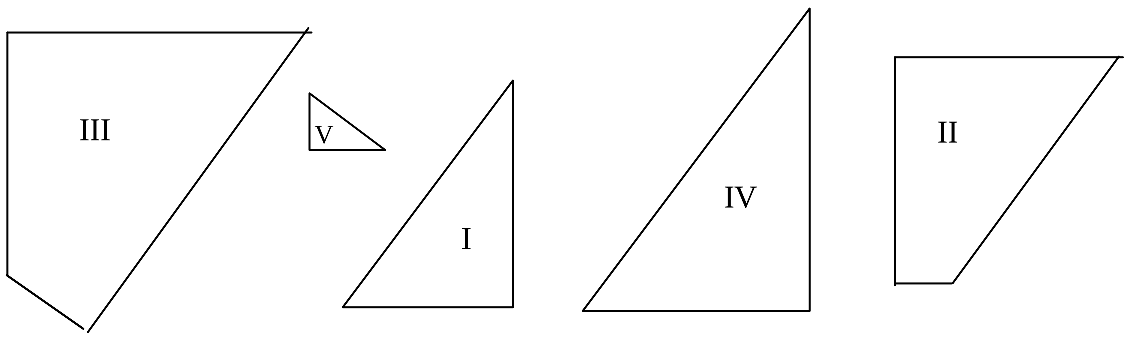
1) Como a soma dos ângulos de um triângulo mede 180^o e 60 + 30 = 90, então o terceiro ângulo desse triângulo é reto e ele é retângulo.
Logo, pelo que provamos na Atividade 6, a mediana AM, relativa à hipotenusa mede a metade dessa hipotenusa. Então, o triângulo ABM é isósceles de base AB, sendo os ângulos dessa base congruentes. Este fato e a hipótese implicam em que o triângulo ABM tenha os três ângulos iguais e portanto seja eqüilátero.
Daí, o cateto AB tem comprimento igual à metade do da hipotenusa BC.

2) Recíproca: *"Se, num triângulo retângulo, o menor cateto é a metade da hipotenusa, então os seus ângulos agudos medem 60^o e 30^o."*
Essa não é a única forma de enunciar esta recíproca.

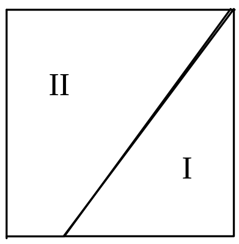


3)Demonstração.
Seja ABC um triângulo retângulo, com hipotenusa BC medindo o dobro do cateto AB e seja AM a mediana relativa a BC.
Pelo que foi provado na Atividade 6, AM = MB = MC.
Mas, por hipótese, AB = ½ BC = MB = MA. Logo o triângulo AMB é eqüilátero e, portanto, o ângulo B mede 60^o.
Como ABC é retângulo em A, tem-se, pela Lei Angular de Tales, que o ângulo C mede 30^o.

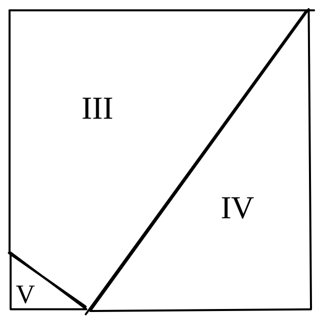
ATIVIDADE 9



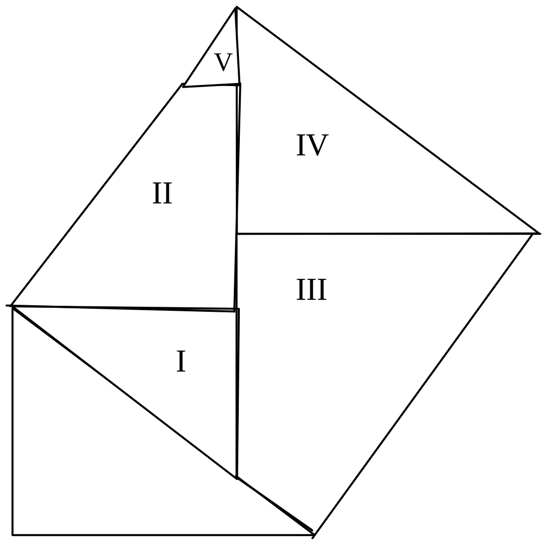
1)



2)



3)

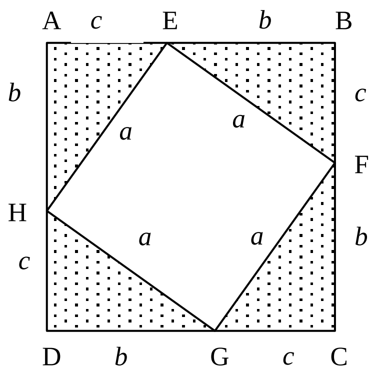


4) Como as peças usadas para montar o quadrado cujo lado é a hipotenusa são as mesmas usadas para montar os quadrados cujos lados são os catetos, observa-se que:

"a área do quadrado sobre a hipotenusa é a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos".

ATIVIDADE 10

2)



3) No vértice E, são formados 3 ângulos. AÊH e BÊF são os ângulos agudos do triângulo retângulo original, logo somam 90^o.
Como a soma dos três ângulos mede 180^o, o ângulo FÊH é um ângulo reto. O mesmo raciocínio pode ser feito para mostrar que os outros três ângulos internos de EFGH também são retos.
Além disso, EF = FG = GH = HE = *a*, por construção. Logo EFGH é um quadrado.

4) A área de ABCD pode ser expressa como:

- a soma das áreas dos 4 triângulos retângulos com a área do quadrado EFGH, isto é: $4.\frac{b.c}{2}+a^2$; ou
- a área do quadrado de lado ($b + c$), isto é: $(b + c)^2$.

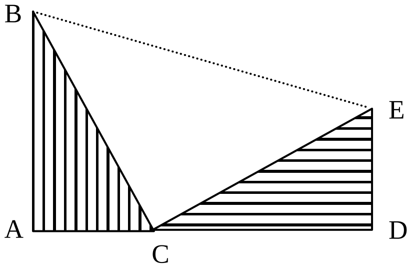
5) Como representam a área da mesma figura, as duas expressões são iguais. Então

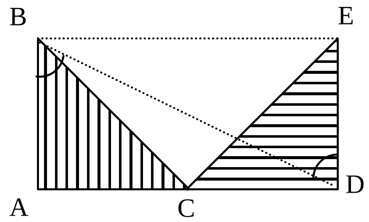
$$4.\frac{b.c}{2}+a^2 = (b + c)^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

ATIVIDADE 11

1) AB e DE são ambos perpendiculares a AD, logo são paralelos. Se o triângulo ABC não for isósceles, como AB ≠ AC = DE, então AB ≠ DE. Logo ABED não pode ser retângulo, mas é um trapézio, pois AB // DE.

2) Se os triângulos ABC e DCE forem isósceles, com AB = AC, então AB = DE. Logo, ABED é retângulo.





3) Nos dois casos considerados, cada um dos ângulos $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}E$ é um ângulo agudo de um triângulo retângulo, logo sua soma mede 90°. Portanto, $B\hat{C}E$ é reto e o triângulo BCE é retângulo em C.
Expressões para a área S de ABED, sendo: AB = CD = *b*, AC = DE = *c* e BC = CE = *a*.

- Se ABED é trapézio: S = $\frac{AB+DE}{2}.AD = \frac{b+c}{2}.(c+b) = \frac{(b+c)^2}{2}$ (*)

  ou S = $\frac{AB.AC}{2} + \frac{CD.DE}{2} + \frac{BC.CE}{2} = \frac{b.c}{2} + \frac{b.c}{2} + \frac{a^2}{2}$ (**).

Igualando (*) e (**), tem-se $(b+c)^2 = 2\,bc + a^2$, ou seja, $\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}$.

- Se ABED é retângulo: S = AB . AD = $b\,.\,(b+c)$ (#)

  ou S = $\frac{AB.AC}{2} + \frac{CD.DE}{2} + \frac{BC.CE}{2} = \frac{b.c}{2} + \frac{b.c}{2} + \frac{a^2}{2}$ (##).

Igualando (#) e (##), tem-se: $b\,.\,(b+c) = bc + \frac{a^2}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow 2.b^2 = a^2$.
Mas, neste caso, $b = c$, logo $2.b^2 = b^2 + c^2$ e, portanto, $\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}$.

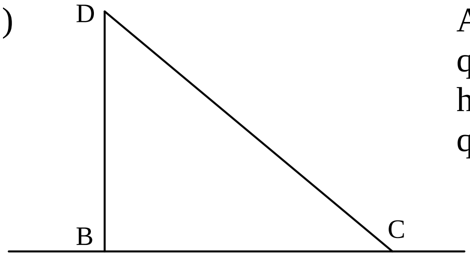
ATIVIDADE 12

1) Os lados de ABCD são todos iguais à hipotenusa *a* do triângulo retângulo dado, logo são congruentes. Os ângulos de ABCD são todos iguais à soma dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo dado, que mede 90°. Logo ABCD é um quadrado.
O quadrilátero EFGH (em branco, na figura) tem todos os lados iguais à diferença entre os catetos do triângulo dado ($b - c$). Além disso, os seus ângulos internos são retos, pois são os suplementares dos ângulos retos dos triângulos dispostos. Logo esse quadrilátero é um quadrado de lado (b - c).

2) Expressões para a área de ABCD: $S = a^2$ (*) ou $S = (b - c)^2 + 4 \cdot \frac{b.c}{2} = b^2 + c^2$ (**)
Igualando (*) e (**), tem-se: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

ATIVIDADE 13

1)



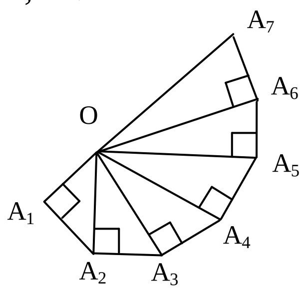
A parte de cima do bambu (que foi dobrada) é **maior** do que a de baixo, que ficou fincada no chão, pois é a hipotenusa de um triângulo BDC, retângulo em B, no qual:

B é o ponto em que o bambu está fincado no chão;
C é o ponto em que a parte dobrada toca o chão e
D é o ponto no qual o bambu dobrou.

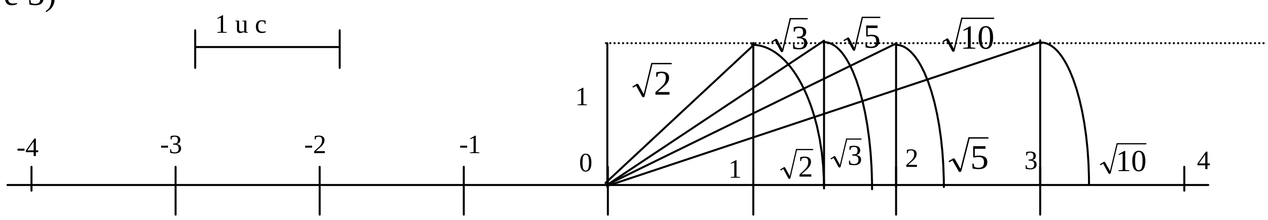
Então, BC = 1,2 e BD + DC = 3, ou: DC = 3 – DB.
Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se: $DC^2 = DB^2 + BC^2$, ou seja,
$(1,2)^2 = (3 - DB)^2 - DB^2 \Rightarrow 1,44 = 9 - 6\ DB \Rightarrow 7,56 = 6\ DB \Rightarrow DB = 1,26$.
A dobra do bambu está localizada a 1,26 m do chão.

ATIVIDADE 14

1) Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se: $(OA_2)^2 = (OA_1)^2 + (A_1A_2)^2 = 2 \Rightarrow OA_2 = \sqrt{2}$
O mesmo raciocínio aplicado nos triângulos da seqüência, dá:
$(OA_3)^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow OA_3 = \sqrt{3}$,
$(OA_4)^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow OA_4 = \sqrt{4} = 2$,
$(OA_5)^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow OA_5 = \sqrt{5}$,
$(OA_6)^2 = 5 + 1 = 6 \Rightarrow OA_5 = \sqrt{6}$,
$(OA_7)^2 = 6 + 1 = 7 \Rightarrow OA_7 = \sqrt{7}$.



2) e 3)



ATIVIDADE 15

1) Qualquer triângulo cujas medidas dos lados sejam expressas por números da forma 3n, 4n e 5n, com n um número natural, é pitagórico.

De fato, um triângulo assim tem lados proporcionais aos do triângulo de lados 3, 4 e 5, sendo, portanto, semelhante a este, e também retângulo. Além disso, como n é natural, as medidas dos lados desse triângulo (3n, 4n e 5n) são números naturais.

2) Como *a* e *b* são números naturais, com $a>b$, as medidas dos lados desse triângulo são expressas por números naturais. Para que ele seja pitagórico, é necessário e suficiente que seja retângulo, ou seja, que as medidas dos seus lados satisfaçam o Teorema de Pitágoras: $(a + b)^2 = a^2 + (a-b)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 4ab = a^2 \Leftrightarrow \mathbf{4b = a}$, que é a condição pedida.

3) Seja um triângulo cujos lados medem a-b, a e a+b, com a e b números naturais e a = 4b. Mostremos que esse triângulo é semelhante ao triângulo 3, 4 e 5.
De fato, pelas condições dadas, tem-se: $a-b = 3b$, $a = 4b$ e $a + b = 5b$. Portanto, as medidas dos lados desse triângulo são $3b$, $4b$ e $5b$, e ele é semelhante ao triângulo 3, 4, 5.
Seja agora um triângulo semelhante ao triângulo de lados 3, 4, 5, com razão de semelhança *n*, natural.
Mostremos que as medidas dos lados desse triângulo são da forma $a-b$, a, $a+b$, com $a = 4b$. Pela hipótese, as medidas dos lados desse triângulo serão $3n$, $4n$ e $5n$. Representando $4n$ por a e n por b, tem-se: $3n = a - b$ e $5n = a + b$. Além disso, $a = 4b$. As condições do item 2 são portanto satisfeitas.

4) O triângulo pedido deve ter lados $a - b$, a e $a + b$, com a e b naturais, $a>b$. Pelo que provamos basta que não se tenha $a = 4b$, que o triângulo não será semelhante ao de lados 3, 4 e 5.
As medidas dos lados desse triângulo podem ser, por exemplo, 1 = 3 – 2, 3 e 5 = 3 + 2. De fato, 1, 3 e 5 não são proporcionais a 3, 4 e 5, e os triângulos não são semelhantes.

ATIVIDADE 16

1) Há uma grande variedade de respostas possíveis. Abaixo apresentamos alguns exemplos:

x	y	$\mathbf{a} = x^2 + y^2$	$\mathbf{b} = x^2 - y^2$	$\mathbf{c} = 2xy$	$\mathbf{a^2}$	$\mathbf{b^2 + c^2}$
2	1	5	3	4	25	25
7	3	58	40	42	3364	3364
4	2	20	12	16	400	400

2) As duas últimas colunas têm sempre números naturais iguais. Isto sugere a seguinte conjectura:
“Quaisquer que sejam x e y, números naturais, $x>y>0$, $\mathbf{a} = x^2 + y^2$, $\mathbf{b} = x^2 - y^2$ e $\mathbf{c} = 2xy$ formam um terno pitagórico”.
Demonstração:
Se x e y são números naturais, $x>y>0$, $\mathbf{a} = x^2 + y^2$, $\mathbf{b} = x^2 - y^2$ e $\mathbf{c} = 2xy$ também serão.
Além disso, $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$, logo o terno (a, b, c) satisfaz o Teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE 17

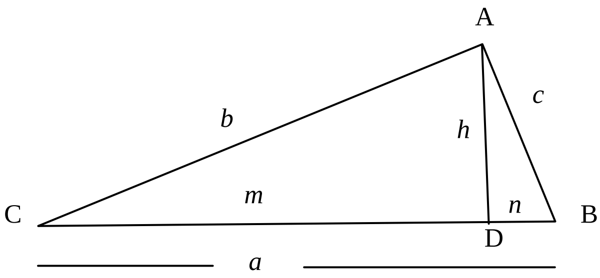
Sendo n um número natural ímpar, n, $\frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2-1}{2}+1$ também serão naturais.

Além disso, $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2$.

Assim, o terno acima é pitagórico, qualquer que seja n, natural ímpar.

O número n deve ser ímpar para garantir que n^2 seja ímpar, n^2- 1 seja par e $\frac{n^2-1}{2}$ seja natural.

ATIVIDADE 18

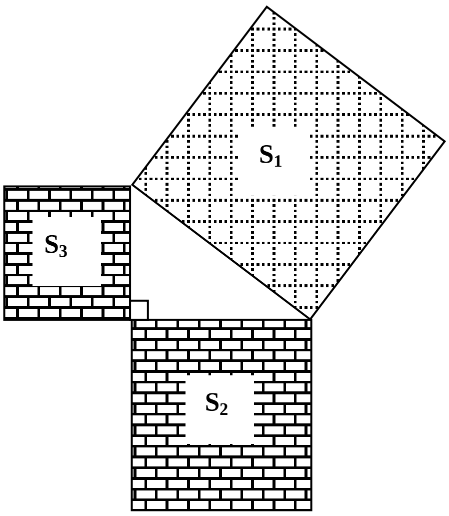


1) Os pares de triângulos semelhantes são:
ABC e DAC,
ABC e DBA
e DAC e DBA.
A proporcionalidade entre os lados dos triângulos de cada par permite escrever:

$\frac{a}{b}=\frac{b}{m}=\frac{c}{h}$ (1); $\frac{a}{c}=\frac{b}{h}=\frac{c}{n}$ (2) e $\frac{b}{c}=\frac{m}{h}=\frac{h}{n}$ (3)

2) Pela igualdade entre as duas primeiras razões de (1), tem-se: $b^2 = a.m$ (*).
Da igualdade entre a primeira e a última razão de (2), decorre: $c^2 = a.n$ (**).

3) Somando membro a membro as igualdades (**) e (**), tem–se: $b^2 + c^2 = a.m + a.n$.
Como $a = m + n$, então $\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}$.

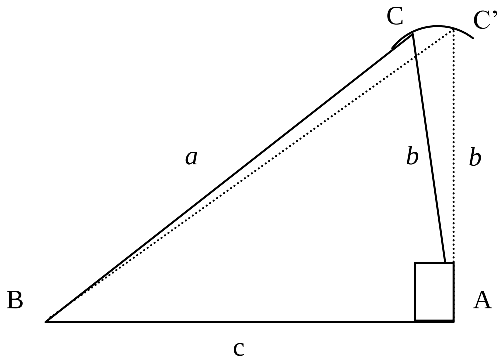


4) A igualdade que acabamos de provar estabelece exatamente a igualdade entre a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos b e c e a área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo ABC.

ATIVIDADE 19

1) Recíproca: *"Se as medidas* ***a***, ***b*** *e* ***c***, *dos lados de um triângulo, satisfazem a relação* $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2$, *então este triângulo é retângulo e o ângulo reto é o oposto ao lado de medida* ***a****".*

Esta é uma das formas de enunciar esta proposição. Há muitas outras equivalentes.



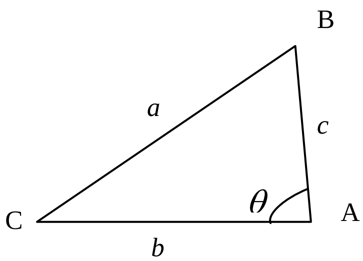
2) i) Ver figura.

ii) ABC' é um triângulo retângulo porque o ângulo BÂC' é reto, por construção.
Logo este triângulo satisfaz o Teorema de Pitágoras: $(BC')^2 = (AB)^2 + (AC')^2$, ou
$(BC')^2 = c^2 + b^2$.
Mas $b^2 + c^2 = a^2$, por hipótese.
Logo $(BC')^2 = a^2$ e portanto $BC' = a$.

iii) Como os triângulos ABC e ABC' têm lados com as mesmas medidas (a, b e c), pelo caso LLL de congruência de triângulos, eles são congruentes, tendo, portanto, os ângulos correspondentes congruentes. Logo BÂC = BÂC'= 90º e ABC é retângulo.

ATIVIDADE 20

1) Seja ABC um triângulo cujos lados a, b e c satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$.
Pela Lei dos Cossenos, tem-se:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos\theta$, onde θ é o ângulo formado pelos lados de medidas b e c.
Como, por hipótese, $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se que:
$2\, b\, c \cos\theta = 0$. Mas, b e c não são nulos, logo
$\cos\theta = 0$, ou seja $\theta = 90^{\circ}$.
Assim, ABC é retângulo de ângulo reto Â.

Capítulo 4 – Círculo

ATIVIDADE 1

As explicações dadas não têm caráter formal e podem ser enunciadas de formas bem variadas.

1) A e E: ambos são sólidos com formas de cilindros circulares, embora a altura da lata de ervilha seja bem maior do que a do biscoito, que, em geral, é tão pequena que ele pode se confundir com um círculo.

2) C e F: considerando o copo bem “redondinho”, ambas são linhas planas, em forma de uma circunferência; podendo diferir apenas no tamanho.

3) E e II: E é um sólido cilíndrico, como visto em **1**, enquanto II é uma linha plana (circunferência); as bases de E têm a mesma forma de II.

4) C e II: ambas são circunferências, podendo diferir pelo tamanho.

5) B e F: B é uma superfície incompleta de um cilindro (espacial), pois falta uma das bases, enquanto F é uma circunferência (linha plana); as bases de B têm a mesma forma de F.

6) G e I: G é um sólido e I é uma linha plana; olhando G de frente ou de cima, pode-se ver uma linha parecida com I.

7) D e II: D é um sólido (esfera) e II é uma linha plana (circunferência); olhando D de frente ou de cima, pode-se ver uma linha como II.

8) II e III: ambas são linhas planas fechadas; II é uma circunferência e III é um polígono.

ATIVIDADE 2

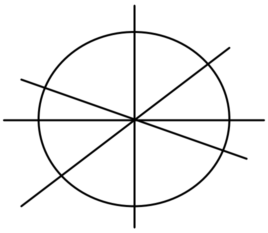
1) Em cada uma das pontas de um pedaço de barbante de aproximadamente 25 cm de comprimento, faça uma alça. Uma que dê para envolver a ponta do dedo indicador e outra que envolva um pedaço de giz.

Marque um ponto no quadro com o giz e fixe sobre ele a ponta do seu dedo indicador, presa no barbante. Com a outra mão, pegue o giz preso ao barbante de modo que este fique bem esticado e faça o giz dar uma volta completa em torno do ponto fixado inicialmente com o dedo.

O desenho obtido será uma circunferência (talvez, sem muita exatidão), pois, se o comprimento do barbante não muda enquanto você dá a volta com o giz, todos os pontos do seu desenho estão a uma mesma distância do ponto fixado inicialmente.

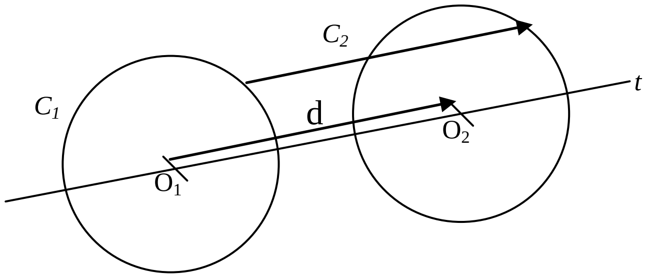
2) O barbante deve ter uma extremidade presa ao tornozelo de uma das crianças, de modo que possa girar em torno deste, e a outra numa vareta (ou giz, ou carvão) que possa marcar o chão do pátio. A criança, com o tornozelo preso ao barbante, fica com o calcanhar bem fixo num mesmo ponto, enquanto outra criança gira em torno dela, de modo que a corda esticada fique sempre a uma mesma altura do chão e a vareta descreva a circunferência no chão. O desenho obtido será aproximadamente o de uma circunferência, pela mesma razão descrita no item 1.

ATIVIDADE 3



2) As quatro retas traçadas são eixos de simetria da circunferência (e do círculo). Há uma infinidade de eixos de simetria para uma circunferência (e para um círculo).
Qualquer reta que contenha o centro do círculo é um desses eixos.

3)



a) Sejam C_1 e C_2 dois círculos de mesmo raio ***r***, de centros O_1 e O_2, respectivamente. C_2 pode ser obtida a partir de C_1 por várias maneiras. Exemplo:
Fazendo uma translação T em C_1, na direção da reta *t* que liga os centros dos dois círculos, de amplitude d, e no sentido de O_1 para O_2, as duas circunferências (e os dois círculos) irão coincidir (a imagem de C_1 por T é C_2).
De fato, O_1 coincide com O_2 e, pelo fato de o raio das duas circunferências ser o mesmo, isso também acontece com todos os pontos das circunferências.

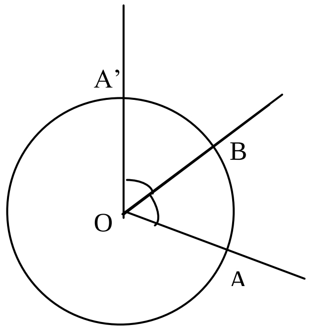
<u>*Observação*</u> - C_2 também pode ser obtida a partir de C_1 por uma reflexão cujo eixo é a mediatriz do segmento O_1O_2 ou por uma rotação. Tente encontrar o centro dessa rotação.

b) Sempre que se tem dois círculos C_1 e C_2, de mesmo raio, eles são um a imagem do outro por uma isometria. Por isso pode-se afirmar que eles são congruentes. O mesmo para as circunferências.

ATIVIDADE 4

3) Ao dividir o comprimento de cada circunferência pelo diâmetro correspondente, você deve encontrar resultados semelhantes, todos próximos de 3,14, que, por sua vez, é uma aproximação do número π. As diferenças entre esses resultados se devem a erros de medida e aproximações efetuadas nas divisões.

ATIVIDADE 5



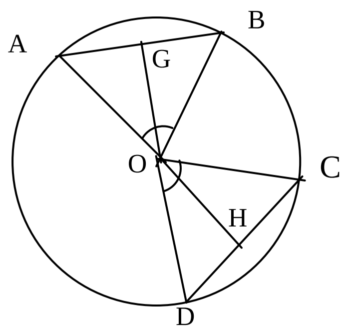
1 e 2) O ângulo central *AÔB* foi refletido em torno do lado OB e tem como imagem o ângulo *A'ÔB.* Os lados OA e OA' formam o ângulo *AÔA'*, que é o dobro de *AÔB* . Isto porque, sendo *A'ÔB* a imagem de *AÔB* por uma reflexão, tem-se *A'ÔB = AÔB*, logo *AÔA' = 2. AÔB.*

3) Comparando os comprimentos dos arcos subentendidos pelos ângulos *A'ÔB* e *AÔB*, que são congruentes, conclui-se que esses arcos também têm o mesmo comprimento.

ATIVIDADE 6

Conforme é observado no enunciado, é necessário e suficiente provar que $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$.
Sejam AB e CD cordas de um círculo.

1º) $a \Rightarrow b$.
Vamos supor que *a* é verdadeira (AB = CD) e provar que *b* também é (*AÔB = CÔD*).



AO = OB = OC = OD por serem raios da circunferência.
Sendo AB = CD, os triângulos AOB e COD têm os três lados respectivamente congruentes, logo são congruentes, pelo caso LLL de congruência de triângulos.
Então os ângulos correspondentes também são congruentes, e: *AÔB = CÔD*.

2º) $b \Rightarrow c$.
Sejam OG e OH as distâncias do centro O desse círculo às cordas AB e CD, respectivamente.
Vamos supor que *b* é verdadeira (*AÔB = CÔD*) e provar que *c* também é (OG = OH).
Como AO = OC, BO = OD e *AÔB = CÔD*, os triângulos AOB e COD são congruentes, pelo caso LAL de congruência de triângulos. Como OG e OH são alturas desses triângulos e alturas correspondentes de triângulos congruentes são congruentes, tem-se: OG = OH.

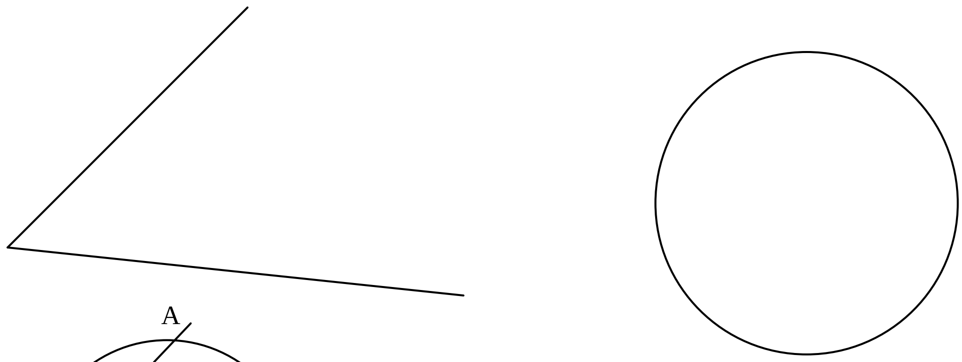
3º) $c \Rightarrow a$. Vamos supor que *c* é verdadeira (OG = OH) e provar que *a* também é (*AB = CD*).
Como OG e OH são perpendiculares a AB e CD, respectivamente, os triângulos OGB e OHD são retângulos e possuem um cateto e a hipotenusa congruentes (catetos OG e OH e hipotenusas iguais ao raio do círculo). Pelo Teorema de Pitágoras, GB = HD (1).
Mas, os triângulos OAB e OCD são isósceles, portanto as suas alturas OG e OH são também medianas. Logo AB = 2 .GB e CD = 2 . HD. Pela igualdade (1), tem-se que AB = CD.

MÓDULO III - RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS – Capítulo 4

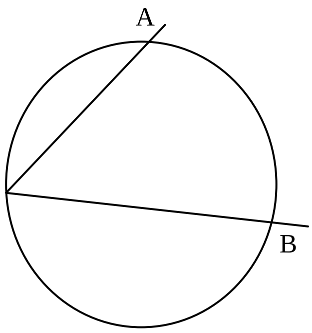
ATIVIDADE 7

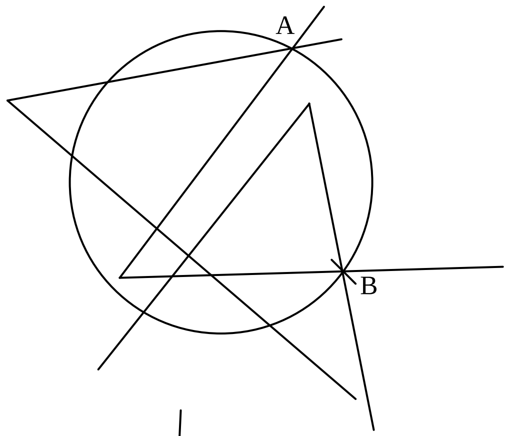
1) Há uma grande variedade de possibilidades para o desenho do ângulo e da circunferência.

Exemplo (o raio do círculo está um pouco menor do que o recomendado no enunciado):

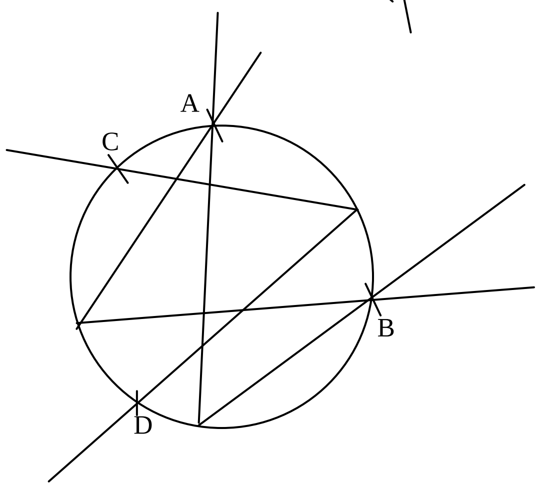


2)





3) Nos exemplos traçados nesta resposta, é possível observar que sempre que o vértice ficar no exterior do círculo, ou no seu interior, não é possível fazer com que ambos os lados do ângulo passem sobre os pontos A e B. Se um lado passar sobre um desses pontos, o outro lado não passará sobre o outro ponto.



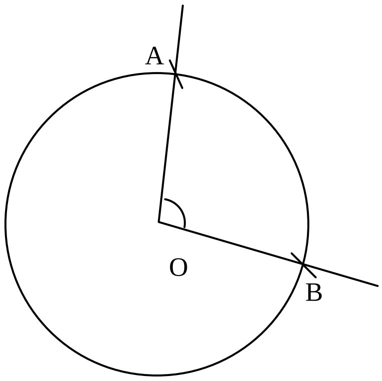
4) Nos três exemplos dados na figura ao lado, bem como em todos os outros que podem ser construídos, sempre que os lados do ângulo "passarem" sobre os pontos A e B, o vértice ficará sobre um ponto da circunferência (o ângulo será inscrito na circunferência).

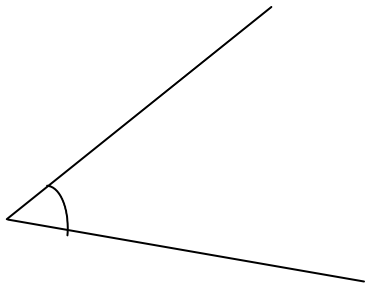
Se o vértice do ângulo ficar em qualquer ponto da circunferência, os lados "passarão" sobre os pontos A e B ou o arco subentendido por eles será um arco congruente ao arco AB (é o caso do arco CD da figura).

Notando que o ângulo é sempre o mesmo, pode-se concluir que:

"Ângulos inscritos são congruentes se e só se subentendem arcos congruentes".

5)

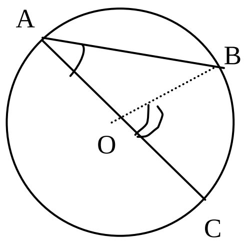




Medindo o ângulo central que subentende o arco AB e o ângulo do papel transparente (ângulo inscrito que subentende o mesmo arco AB), você deve observar que:

“a medida do ângulo central é o dobro da do ângulo inscrito no mesmo arco”.

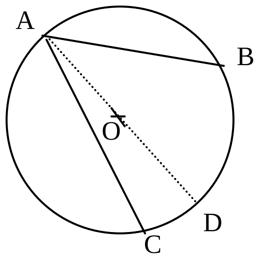
ATIVIDADE 8



1) O triângulo AOB é isósceles, pois os lados AO e OB são raios da circunferência, logo são congruentes.
Como, em um triângulo isósceles, os ângulos da base são iguais, tem-se: $O\hat{A}B = O\hat{B}A$. (*)
Além disso, como a soma dos ângulos do triângulo mede 180°, tem-se $O\hat{A}B + O\hat{B}A + A\hat{O}B = 180^o$, ou seja, por (*), $2 . O\hat{A}B + A\hat{O}B = 180^o$. Mas, $B\hat{O}C$ + $A\hat{O}B$ = 180°.

Logo, 2 . $O\hat{A}B$ = $B\hat{O}C$ ou ainda $O\hat{A}B = C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{B\hat{O}C}}{2} = \frac{BC}{2}$.

2)



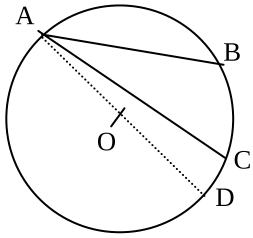
Traçando o diâmetro AD, como sugerido no enunciado, o ângulo $B\hat{A}C$ fica dividido em dois ângulos, ambos do tipo explicado no item **1**, $B\hat{A}D$ e $D\hat{A}C$. Pelo raciocínio do item **1**, tem-se:

$$B\hat{A}D = \frac{B\hat{O}D}{2} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \quad e \quad D\hat{A}C = \frac{D\hat{O}C}{2} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} .$$

$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C = \frac{B\hat{O}D}{2} + \frac{D\hat{O}C}{2} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$$

Assim,

$$B\hat{A}C = \frac{B\hat{O}C}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$



3) Traçando o diâmetro AD, como sugerido no enunciado, o ângulo $B\hat{A}C$ fica representado como a diferença de dois ângulos, ambos do tipo explicado no item **1**, $B\hat{A}C$ = $B\hat{A}D$ - $D\hat{A}C$.

Usando o item **1**, pode-se escrever:
$$B\hat{A}C = B\hat{A}D - D\hat{A}C = \frac{B\hat{O}D}{2} - \frac{D\hat{O}C}{2} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$$
$$B\hat{A}C = \frac{B\hat{O}C}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

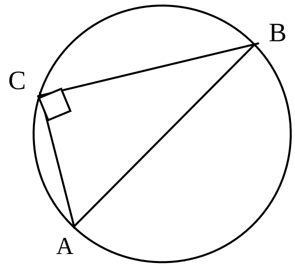
ATIVIDADE 9

1) Uma condição necessária e suficiente para que um triângulo inscrito em um círculo seja retângulo é que:
"*o arco subentendido pelo maior ângulo, que é o ângulo reto, seja a metade da circunferência do círculo*". (*)

De fato:

- a condição (*) é **necessária**, pois, de acordo com o resultado da Atividade 8, sempre que um ângulo inscrito em um círculo é reto, o arco por ele subentendido mede 180^o, ou seja, é a metade da circunferência;
- a condição (*) é **suficiente,** pois, de acordo com o resultado da Atividade 8, sempre que o arco subentendido pelo ângulo inscrito é a metade da circunferência (arco de 180^o), a medida do ângulo é 90^o, ou seja, ele é reto.

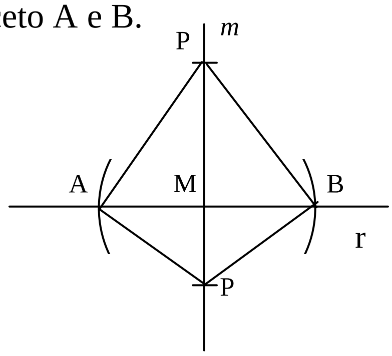
<u>*Observação*</u> – A condição (*) é equivalente a:
"a corda que liga as extremidades dos lados de um ângulo reto inscrito, é um diâmetro do círculo".



2) Para construir um triângulo retângulo com hipotenusa AB, dada, basta então traçar uma circunferência que tenha AB como diâmetro e escolher para vértice C do triângulo qualquer ponto dessa circunferência, diferente de A e de B. Assim, o ângulo C subentende uma semicircunferência e o triângulo é retângulo, de hipotenusa AB.

3) Pelo resultado visto no item **1**, fica claro que o triângulo não é único. Daí termos afirmado no item **2** que C pode ser qualquer ponto da circunferência, exceto A e B.

ATIVIDADE 10

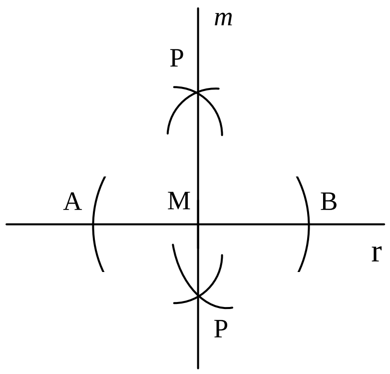


1) Como A e B estão sobre uma circunferência de centro em M, então MA = MB.

2) A reta *m* está na figura.

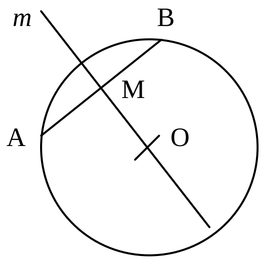
3) Seja P qualquer sobre *m*. Pondo a ponta seca do compasso em P e abertura igual a PA, verifica-se que a circunferência de centro P e raio PA passa em B, ou seja, PA = PB.

Isso pode ser verificado para vários pontos de *m*. A abertura do compasso mudará, dependendo de P, mas teremos sempre PA = PB.

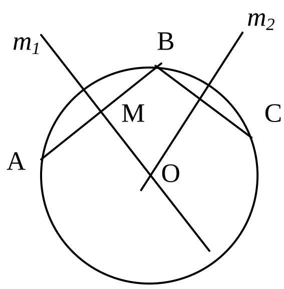


4) Com o compasso com a mesma abertura, trace dois arcos: um com o centro em A e outro com centro em B.
O ponto P de interseção desses dois arcos estará a uma mesma distância de A e de B e pertence a *m*.
Na figura foram marcados dois pontos assim.
Variando a abertura do compasso, a distância de P a A e a B mudará, mantendo a relação PA = PB, e P será sempre um ponto de *m*.

ATIVIDADE 11



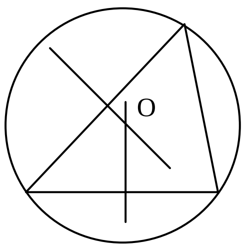
1) Seja *m* a mediatriz de uma corda AB de um círculo de raio **r** e centro O.
Pelo que foi verificado na Atividade 10, um ponto P do plano está sobre *m* se, e só se, PA = PB.
Como AO = OB = **r**, então O pertence a *m*.

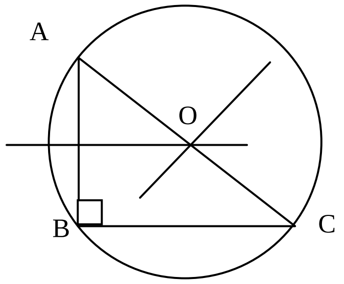


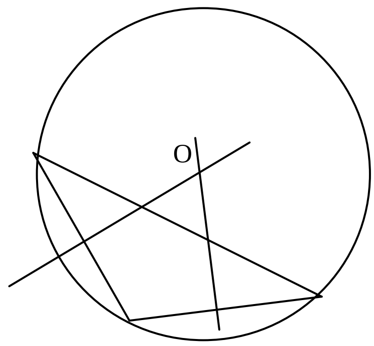
2) Consideremos A, B e C três pontos da circunferência dada e tracemos m_1 e m_2, as mediatrizes das cordas AB e BC, respectivamente.
Pela conclusão do item **1**, o centro O da circunferência pertence a m_1 e a m_2. Logo, O é o ponto interseção dessas duas retas.

ATIVIDADE 12

1, 2, 3 e 5) A escolha dos lados para traçar as mediatrizes pode variar. Abaixo damos um exemplo de escolha.
Para cada triângulo, pode-se traçar uma circunferência, com centro no ponto O, de interseção das duas mediatrizes, e raio igual à distância de O a qualquer dos vértices do triângulo. Esta circunferência contém os outros dois vértices desse triângulo.







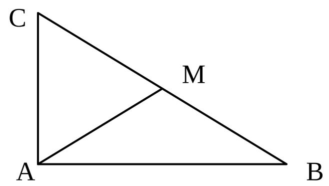
4) A demonstração será feita tomando como base um dos triângulos, pois o raciocínio é o mesmo para qualquer um.
Seja O a interseção das mediatrizes dos lados AB e AC do triângulo ABC.
Como O pertence à mediatriz de AB, então AO = BO (*).
Como O pertence à mediatriz de AC, então AO = CO (**).
Por (*) e (**), tem-se : AO = BO = CO. Isto garante que a circunferência de centro O e raio AO contém os pontos A, B e C, ou seja, o triângulo ABC está inscrito nesta circunferência.

6) No caso do triângulo retângulo, o centro O do círculo se situa no ponto médio da hipotenusa do triângulo. De fato, o ângulo reto B é um ângulo inscrito, logo a corda AC deve ser um diâmetro do círculo, ou seja, o centro desse círculo deve ser o ponto médio de AC.

ATIVIDADE 13

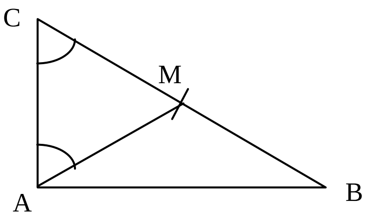
Como toda demonstração de teorema da forma "*se, e só se*" esta se desdobra em duas partes.
1ª) Suponhamos que o triângulo ABC é retângulo em A.
Vamos provar que a mediana relativa a BC tem a metade do comprimento da hipotenusa BC.
Inscrevendo ABC em um círculo, como vimos na Atividade 12, o lado BC coincide com um diâmetro desse círculo, e o centro O dele será o ponto médio de BC. A mediana AO coincide com um raio do mesmo círculo, tendo portanto a metade do comprimento de BC.

2ª) Suponhamos que a mediana AM relativa ao lado BC do triângulo ABC tenha a metade do comprimento de BC.



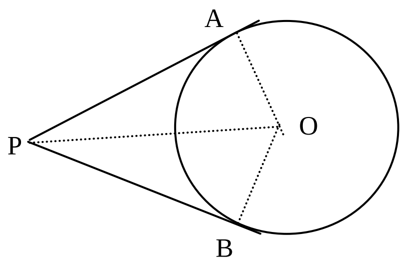
Vamos provar que o triângulo ABC é retângulo em A.
Como M é o ponto médio de BC, MC = MB = ½ BC.
Mas, por hipótese, MA = ½ BC. Então MA = MB = MC.
Logo, o círculo de centro em M e raio MA é o círculo circunscrito ao triângulo ABC, e BC é diâmetro desse círculo.
Pelo que foi visto na Atividade 9, o triângulo ABC é retângulo em A.

ATIVIDADE 14



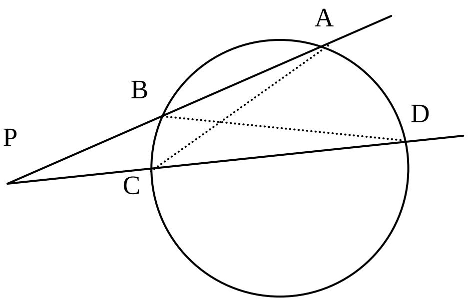
Seja ABC um triângulo retângulo em A.
1º) **Hipótese:** o ângulo interno B mede 30º **Tese:** AC = ½ BC.
Como $\hat{A}$ = 90º, então $\hat{C} = 60^o$.
Traçando a mediana AM em relação a BC, temos que:
½ BC = MC = MB = MA, pelo resultado da Atividade 13.
Logo o triângulo MAC é isósceles de base AC, e $M\hat{A}C = \hat{C} = 60^o$.
Pela Lei Angular de Tales, $A\hat{M}C = 60^o$. Assim, o triângulo AMC tem os ângulos internos congruentes, sendo também eqüilátero. Portanto AC = AM = ½ BC.
2º) **Hipótese:** AC = ½ BC **Tese:** $\hat{B} = 30^o$.
Pela hipótese, sendo AM a mediana em relação a BC, AC = MC. Pelo resultado da Atividade 13, AM = MC.
Então o triângulo AMC é eqüilátero, tendo ângulos internos de 60º. Assim, $\hat{C} = 60^o \, e \, \hat{B} = 30^o$.

ATIVIDADE 15



Sejam PA e PB tangentes a um mesmo círculo de centro O, em A e B, respectivamente.
Pela caracterização das tangentes, sabe-se que:
PA ⊥ AO e PB ⊥ BO. Logo os triângulos AOP e BOP são retângulos, tendo a mesma hipotenusa PO e catetos AO e OB congruentes. Então os triângulos AOP e BOP são congruentes, bem como os lados correspondentes PA e PB.

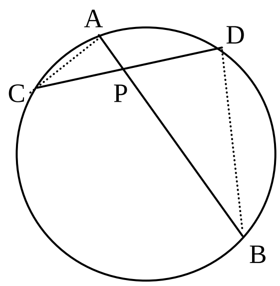
ATIVIDADE 16



Sejam AB e CD secantes ao círculo, interceptando-se no ponto P, exterior a ele.
Ligando A a C e B a D, tem-se os triângulos PCA e PBD, que possuem:
- ângulo P em comum;
- ângulos A e D congruentes, pois são inscritos no mesmo arco BC.

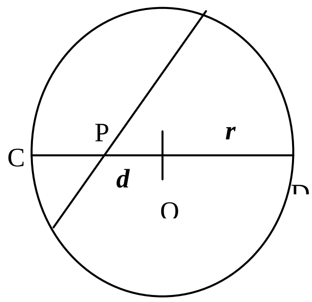
Pelo caso AA de semelhança de triângulos: PCA ~ PBD, tendo, portanto, lados proporcionais. Considerando apenas os que interessam para mostrar a tese, pode-se escrever $\frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD}$, ou seja, PA . PB = PC . PD.

ATIVIDADE 17

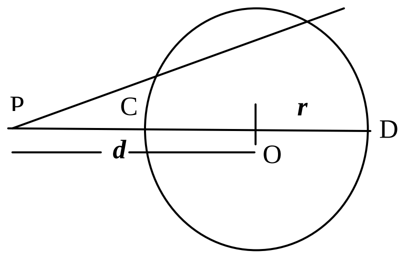


1) Sejam AB e CD secantes ao círculo, interceptando-se no ponto P, no interior dele.
Ligando A a C e B a D, tem-se os triângulos PCA e PBD, que possuem:
- ângulo P em comum;
- ângulos A e D congruentes, pois são inscritos no mesmo arco BC.

Pelo caso AA de semelhança de triângulos: PCA ~ PBD, tendo portanto lados proporcionais. Considerando apenas os que interessam para mostrar a tese, pode-se escrever $\frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD}$, ou seja, PA . PB = PC . PD.



2) Considerando uma das cordas (CD, por exemplo) como um diâmetro, e, sendo ***r*** o raio do círculo e ***d*** = PO, a distância de P ao centro dele, tem-se: PC = ***r – d*** e PD = ***r + d***.
Então PC . PD = (***r – d***) . (***r + d***) = $\boldsymbol{r^2 - d^2}$.

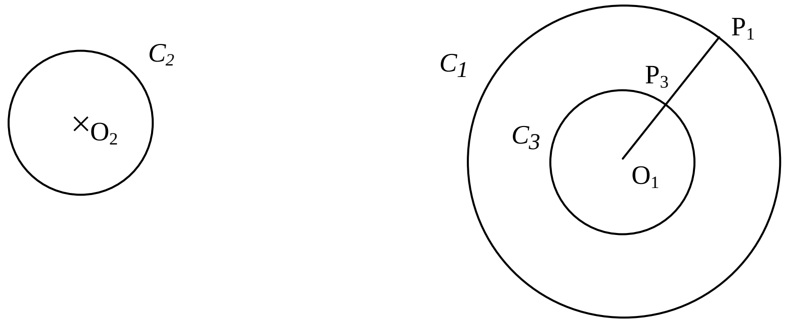


3) O mesmo raciocínio, para o caso de P ser exterior ao círculo, daria:
PC = ***d* – *r*** e PD = ***d* + *r***, e PC . PD = $\boldsymbol{d^2 - r^2}$.

4) Quando P se aproxima da circunferência, seja pelo seu interior, ou exterior, a distância ***d*** se aproxima de ***r***, o que faz com que o valor da potência vá tendendo a 0 (zero).
Quando o ponto P se aproxima de O, P é sempre interior à circunferência. Nesse caso, ***d*** tende a 0 (zero), fazendo com que a potência tenda ao seu valor máximo $\boldsymbol{r^2}$, para P interior à circunferência.
Quando P se afasta indefinidamente do centro O, P está no exterior do círculo e ***d*** cresce indefinidamente, fazendo com que a potência tenda a infinito.

ATIVIDADE 18

1) De acordo com o visto na Atividade 3, C_3 pode ser a imagem de C_2 por uma translação, por uma reflexão ou por uma rotação. Em qualquer caso, C_2 e C_3 são congruentes.

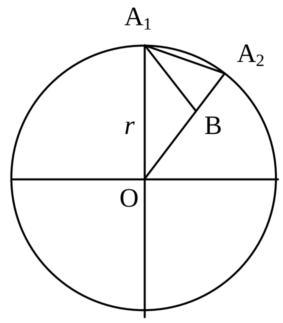


2) Considere a homotetia H, de centro O_1 e razão $\dfrac{r_1}{r_2}$.

Qualquer ponto P_1 de C_1 é a imagem, por H, da interseção P_3 do raio O_1P_1 com C_3.
Por outro lado, cada ponto de C_3 é levado, por H, em um ponto de C_1.
Logo C_1 é a imagem de C_3 por H.

3) C_3 é congruente a C_2 e C_1 é a imagem de C_3 por uma homotetia, logo C_3 é semelhante a C_1. Então C_2 é semelhante a C_1.

ATIVIDADE 19



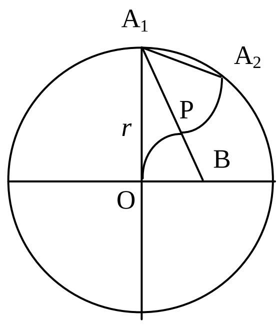
1) O triângulo OA_1A_2 é isósceles, pois, $OA_1 = OA_2$ = raio do círculo.
O ângulo $A_1\hat{O}A_2$ mede a décima parte do ângulo de uma volta, logo mede 36^o.
Como os ângulos da base são iguais, conclui-se que:
$O\hat{A}_1A_2 = O\hat{A}_2A_1 = 72^o$.

2) Se A_1B é bissetriz de $\hat{A}_1$, ela divide este ângulo em dois ângulos de 36^o.
Então, o triângulo A_1BA_2 tem um ângulo de 72^o e outro de 36^o.
Logo, o seu terceiro ângulo (em B) mede 72^o. Esse triângulo tem, portanto, dois ângulos congruentes e é isósceles, com $A_1B = A_1A_2 = l$.

3) Também pela observação dos ângulos, conclui-se que BA_1O é isósceles, com:
$OB = A_1B = l$. Então $BA_2 = r - l$.
Por terem ângulos congruentes, os triângulos OA_1A_2 e A_1BA_2 são semelhantes.
Logo $\frac{r}{l} = \frac{l}{r-l}$ (*).

4) Da equação (*) deriva uma equação do segundo grau que pode ser resolvida de modo a calcular l em função de r, obtendo-se: $l = \left(\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}\right)r$. Como a razão entre os comprimentos de dois segmentos não pode ser negativa, conclui-se que $l = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)r$.

5) Pela descrição da construção, tem-se que o triângulo OBA_1 é retângulo em O e que $OB = r/2$.
Pelo Teorema de Pitágoras, obtém-se



$(A_1B)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4} \quad \Rightarrow \quad A_1B = \frac{r\sqrt{5}}{2}$.
Como BO = BP, tem-se:
$$BP = \frac{r}{2} \ e \ A_1P = A_1B - BP = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2} = \frac{r\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} = A_1A_2 .$$

A expressão de A_1A_2 é exatamente a obtida no item 4 para o lado do decágono regular. Então, a construção está correta.

6) **Pentágono regular -** Sabemos que, ao dobro do ângulo central corresponde o dobro do arco. O ângulo central correspondente a um lado do pentágono regular é o dobro do ângulo central correspondente ao lado do decágono. Logo, basta, com a ponta seca do compasso em A_2 e abertura A_1A_2, marcar um ponto A_2' da circunferência, do lado oposto a A_1 em relação a A_2. O segmento A_1A_2' será o lado do pentágono regular.

Icoságono regular – Este polígono tem o dobro dos lados do decágono. O ângulo central correspondente a um de seus lados é a metade do correspondente ao lado do decágono.
Como o triângulo OA_1A_2 é isósceles, e, nesse tipo de triângulo, a altura, a bissetriz e a mediana relativas à base coincidem, basta traçar a mediatriz de A_1A_2, que ela passará pelo centro O do círculo e dividirá o ângulo central $A_1\hat{O}A_2$ ao meio. Chamando de A_2'' o ponto no qual essa mediatriz corta o arco menor A_1A_2, tem-se o lado A_1A_2'' do icoságono.

Referências Bibliográficas

- A Educação Matemática em Revista, Geometria, Ano III, No. 4, Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 1995.
- Bordeaux, A.L., Rubinstein, C., França, E., Ogliari, E. e Portela, G. (1999): *Matemática na Vida e na Escola*, 8ª série. Editora do Brasil.
- Imenes & Lellis: *Matemática para Todos,* 8ª série. Editora Scipione.
- Lindquist, M. M. e Shulte, A.P. (1994): *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo, Atual Editora.
- Machado, N. J. (1990): *Semelhança não é mera coincidência.* Coleção Vivendo a Matemática. Editora Scipione.
- Morgado, A. C., Wagner, E. e Jorge, M. (1974): *Geometria I e II.* Livraria Francisco Alves Editora.
- Nasser, L. (1994): *Usando a teoria de van Hiele para melhorar o ensino secundário de Geometria no Brasil*: Eventos (INEP), nº 4, 2ª parte (1994);
- Nasser, L e Sant'Anna, N.P. (1997): *Geometria segundo a teoria de van Hiele*. Projeto Fundão – UFRJ.
- Nasser, L. e Tinoco, L. (2001): *Argumentação e Provas no Ensino de Matemática*. Projeto Fundão – UFRJ.
- Nasser, L. e Tinoco, L. (coord.) (2003): Curso de Geometria – enfoque didático, Módulo I:. *Formação de Conceitos Geométricos.* Projeto Fundão – UFRJ.
- Nasser, L. e Tinoco, L. (coord.) (2003): Curso de Geometria – enfoque didático, Módulo II: *Visão Dinâmica da Congruência de Figuras*. Projeto Fundão – UFRJ.
- Pires, C.C., Curi, E. e Pietropaulo, R. (2002): *Educação Matemática,* 8ª série. Atual Editora.
- Tinoco, L. (1999): *Geometria Euclidiana por meio da resolução de problemas*. Projeto Fundão – UFRJ.

Capa
Criação – Divisão Gráfica da UFRJ, William de Lima

Texto
Digitação e composição gráfica – Marcus Vinícius Ferreira Soares