



F

1) Dado um conjunto Ω e uma σ -álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos desse conjunto Ω dizemos que uma função $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma probabilidade se satisfaz:

① $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

② $P(\Omega) = 1$

③ Dada uma coleção $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ de conjuntos disjuntos, $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Assim, o termo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é um espaço de probabilidade.

Obs: Lembramos que uma σ -álgebra $\mathcal{F}$ de conjuntos de Ω é uma classe de subconjuntos que contém o espaço Ω , é fechada para complemento (i.e. se A pertence a $\mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus A$ pertence a $\mathcal{F}$) e é fechada para uniões numeráveis.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

(a)



Note que podemos escrever

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n \setminus \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m \right)$$

onde ~~os conjuntos~~ os conjuntos $\left\{ A_n \setminus \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m \right\}$

são disjuntos (considere $A_0 = \emptyset$). Logo, pela

propriedade da probabilidade P ,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P\left[A_n \setminus \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m\right]. \quad (1)$$

Por outro lado, note que $A_n \cup A_2 = A_2 \cup (A_n \setminus A_2) = A_2$

já que $A_n \setminus A_2 = \emptyset$ pela hipótese. Inductivamente,

$$\bigcup_{m=0}^n A_m = A_n \cup \left(\bigcup_{m=0}^{n-1} A_m\right) = A_n \cup A_{n-1} = A_n \cup (A_{n-1} \setminus A_n) = A_n$$

já que novamente, $A_{n-1} \setminus A_n = \emptyset$. Logo, $\bigcup_{m=0}^n A_m = A_n \quad \forall n$

e segue de (1) que





CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

$$IP\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} IP\left[A_n \setminus \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n IP\left[A_m \setminus \bigcup_{j=0}^{m-1} A_j\right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} IP\left[\bigcup_{m=0}^n A_m\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} IP[A_n].$$

Onde o último limite está bem definido já que a sequência $IP[A_n]$ é não decrescente e limitada. ($IP[A_n] = IP[A_{n-1}] + IP[A_n \setminus A_{n-1}] \geq IP[A_{n-1}]$)

(b) Corresponde ao axioma da probabilidade.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

2) Sejam $X_1, \dots, X_N$ os N pontos e Y o ponto mais próximo ao centro, i.e. $Y = X_j$ se e só se

$$\|X_j\| \leq \|X_k\| \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } P[\|Y\| > r] &= P[\|X_1\| > r, \dots, \|X_N\| > r] \\ &= P[\|X_1\| > r]^N \quad (\text{por independência}) \\ &= \left(\frac{\text{Vol}(\text{esfera de raio } R) - \text{Vol}(\text{esfera de raio } r)}{\text{Vol}(\text{esfera de raio } R)} \right)^N \\ &= \left(\frac{\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} \right)^N = \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right)^N \end{aligned}$$

Esta última probabilidade podemos escrever como

$$\left(1 - \frac{r^3 (N/R^3)}{N} \right)^N. \quad \text{Como } \frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4\pi\lambda}{3} \quad \text{e}$$

sabemos que $\left(1 - \frac{a}{N} \right)^N \rightarrow e^{-a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$ temos que o limite é $e^{-r^3 \cdot 4\pi\lambda/3}$.



3

$$h(\theta) \propto \theta^{-1/2}$$

$$X_i \sim \text{Poisson}(\theta)$$

$$\Rightarrow S = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Poisson}(n\theta)$$

$$\Rightarrow p(n\theta | S) \propto \frac{e^{-n\theta} (n\theta)^S}{S!} \theta^{-1/2}$$

$$\propto \frac{e^{-n\theta} (n\theta)^{S-\frac{1}{2}}}{S! n^{-1/2}}$$

Observando a forma da última expressão podemos concluir que a distribuição posterior de $n\theta$ é $\Gamma(\alpha, \beta)$

com $\alpha = S + \frac{1}{2}$, $\beta = 1$.

Logo, a distribuição de $2n\theta$ é $\Gamma(S + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

ya que se $Z \sim \Gamma(\alpha, \beta) \Rightarrow P[Z \leq t] = C \int_0^{t/2} u^{\alpha-1} e^{-\beta u} du$
 $= C \int_0^t \left(\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta u/2} du$ que corresponde a uma distribuição
 $\Gamma(\alpha, \beta/2)$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Seja $p(\psi)$ a densidade a posteriori obtida para $\psi = 2n\theta$.

Logo um teste Bayesiano para $\begin{cases} H_0: \theta \geq \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$

poderia ser: Se $P[\theta \geq \theta_0] > \frac{1}{2}$ se aceita H_0 .

Caso contrário, H_0 é rejeitada.

Logo, H_0 será aceita se $\int_{2n\theta_0}^{\infty} p(\psi) d\psi > \frac{1}{2}$. Caso

contrário, é rejeitada.



4

Em primeiro lugar observamos que

$$\begin{aligned} P[Y_n \leq t] &= P[X_1 \leq t] \cdots P[X_n \leq t] \quad (\text{independência}) \\ &= P[X_n \leq t]^n \\ &= \left(\frac{t}{\theta}\right)^n 1_{\{t \leq \theta\}} \end{aligned}$$

Logo,

$$P[Y_n \leq t] = n \int_0^t s^{n-1} \cdot \theta^{-n} ds = n \int_0^\infty s^{n-1} \theta^{-n} 1_{\{s \leq t\}} d\theta$$

$$\Rightarrow p(\theta | Y_n) \propto \theta^{-n} 1_{\{\theta \geq Y_n\}} \cdot g(\theta)$$
$$\propto \theta^{-n-3} \cdot 1_{\{\theta \geq Y_n\}}$$

Fazendo $p(\theta | Y_n) = C \theta^{-n-3} 1_{\{\theta \geq Y_n\}}$, podemos

calcular C fazendo:

$$C \int_{Y_n}^{\infty} \theta^{-n-3} d\theta = 1 \Rightarrow C \cdot \frac{\theta^{-n-2}}{-n-2} \Big|_{Y_n}^{\infty} = 1$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

$$C \frac{Y_n^{-n-2}}{n+2} = 1 \Rightarrow G = (n+2) \cdot Y_n^{n+2}$$

Por outro lado, sabemos que o δ^* que minimiza o valor esperado da função de perda $|\delta(Y_n) - \theta|$ é a mediana de distribuição. Logo, o valor δ^* deve satisfazer:

$$(n+2) \cdot Y_n^{n+2} \int_{\delta^*}^{\infty} \theta^{-(n+3)} d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (n+2) Y_n^{n+2} \cdot \frac{\delta_*^{-n-2}}{(n+2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{2 \cdot Y_n^{\frac{1}{n+2}} = \delta_*^*}$$



OBSERVAÇÃO DO PONTO 2 DA QUESTÃO 2.

Para mostrar rigorosamente o limite basta observar que $N, R \rightarrow \infty$
e $\frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existem N_0, R_0 tais que
 $\forall N \geq N_0, R \geq R_0$ se tem

$$\frac{4}{3}\pi\lambda - \varepsilon \leq \frac{N}{R^3} \leq \frac{4}{3}\pi\lambda + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{r^3(\frac{4}{3}\pi\lambda - \varepsilon)}{N}\right)^N \geq \left(1 - \frac{r^3 \cdot N/R^3}{N}\right)^N \geq \left(1 - \frac{r^3(\frac{4}{3}\pi\lambda + \varepsilon)}{N}\right)^N$$

• Fazendo $N \rightarrow \infty$ na última expressão:

$$e^{-r^3(\frac{4}{3}\pi\lambda + \varepsilon)} \leq \liminf \left(1 - \frac{r^3 N/R^3}{N}\right)^N \leq \limsup \left(1 - \frac{r^3 N/R^3}{N}\right)^N \leq e^{-r^3(\frac{4}{3}\pi\lambda - \varepsilon)}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na última expressão, obtemos
o resultado.