



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA DE GALOIS é um dos mais elegantes da matemática. Este resultado caracteriza determinadas extensões de corpos a partir de grupos de automorfismos. Antes de estabelecermos o TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA DE GALOIS precisamos de conceitos fundamentais.

Sejam K e F corpos. Dizemos que K é uma extensão de corpos de F se $K \supset F$ e as operações de F são as mesmas de K/F . Um elemento $\alpha \in K$ é dito algébrico sobre F se existe um polinômio $f(x) \in F[x]$ de modo que α é raiz de f . A extensão de corpos K/F (K é extensão de F) é algébrica se todo elemento de K é algébrico sobre F .

O conjunto ideal de anuladores de um elemento algébrico α de uma extensão K/F é gerado por um único polinômio mônico irredutível $p_\alpha(x)$, pois F é principal. Assim, podemos definir o polinômio minimal $p_\alpha(x)$ de α .

Podemos ver K como espaço vetorial sobre o corpo F com as operações usuais. Se $\dim_F K$ é finita, dizemos que K é uma extensão finita de F . Usamos a notação $[K:F]$ para representar $\dim_F K$. Neste caso, dizemos que $[K:F]$ é o grau da extensão K/F .



Se K/F é uma extensão finita, isto é, $[K:F] < \infty$ então ela é algébrica. De fato, seja $\alpha \in K$. Então $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n\}$ não pode ser L.I., onde $n = [K:F]$. Assim, existem $a_0, a_1, \dots, a_n \in F$, nem todos nulos, tais que

$$a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n = 0.$$

Considerando as bases dos espaços vetoriais pode-se mostrar o seguinte resultado.

TEOREMA 1 (Lei da Torre) Sejam K/L , L/F extensões finitas.

Então

$$[K:F] = [K:L][L:F].$$

Seja K/F uma extensão de corpos. Dizemos que K é corpo de decomposição para um polinômio $f(x) \in F[x]$ se f se decompõe como produto de fatores lineares em K , mas não se decompõe em qualquer subcorpo de K .

OBSERVAÇÃO 2. Pode-se mostrar que para todo polinômio $f(x) \in F[x]$ existe corpo de decomposição K para $f(x)$ sobre F . Além disso K/F é uma extensão finita. Mais ainda, toda extensão finita está contida em um corpo de decomposição.



~~Dizemos que uma extensão K/F é normal~~

Dizemos que uma extensão K/F é normal se dado $f(x) \in F[x]$ irredutível com uma raiz em K , então todas as raízes de f estão em K .

Um polinômio $f(x) \in F[x]$ irredutível é separável sobre F se não possui raízes múltiplas em seu corpo de decomposição.

Um polinômio $f(x) \in F[x]$ é separável, se cada fator irredutível de f for separável. ~~Um elemento $\alpha \in K$ de uma extensão algébrica K/F é separável se seu polinômio~~

~~minimal. Um elemento $\alpha \in K$ é separável se seu polinô~~

Um elemento algébrico $\alpha \in K$ é separável se seu polinômio minimal p_α é separável.

Uma extensão algébrica K/F é separável se todo $\alpha \in K$ é separável.

Pode-se mostrar que sobre corpos de característica zero todo polinômio é separável.

A partir de agora, vamos assumir que nossos corpos têm característica zero.



- Sejam K, K' corpos que estendem F . Um F -isomorfismo de K em K' é um isomorfismo $\sigma: K \rightarrow K'$ tal que $\sigma|_F = \text{id}_F$. Um F -automorfismo de K é um F -isomorfismo de K em K .
- O grupo dos F -automorfismos de K , onde K/F é finita, é chamado grupo de Galois da extensão K/F e é denotado por $G(K/F)$.
- A extensão K/F é chamada extensão de Galois se $|G(K/F)| = [K:F]$.

Dado H um grupo de automorfismos de K , o corpo fixo de H , denotado por K^H é

$$K^H = K^H = \{x \in K \mid \sigma(x) = x \forall \sigma \in H\}.$$

Note que K^H é um subcorpo de K e $H \leq G(K/K^H)$. Na verdade, o TEOREMA DO CORPO Fixo estabelece que $H = G(K/K^H)$.



TEOREMA DO CORPO FIXO Sejam H grupo finito de automorfismos de um corpo K e $F = K^H$ seu corpo fixo. Então $G(K/K^H)$ é um grupo finito e $|G(K/K^H)| = |H|$.

Para provarmos este resultado, vamos assumir, sem demonstrar o seguinte TEOREMA.

TEOREMA 3 Sejam H grupo finito de automorfismos de um corpo K e $F = K^H$ seu corpo fixo. Seja $\beta \in K$ e $\beta_1, \dots, \beta_k$ sua H -órbita. Então

- (a) $p(x) = (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_k)$ é irredutível sobre F .
- (b) β_1 é algébrico sobre F , com seu grau $([F(\beta_1):F])$ igual a ordem de sua órbita. Portanto, seu grau divide ordem de H .

PROVA DO TEOREMA DO CORPO FIXO. Sejam $F = K^H$ e $n = |H|$.

Pelo TEOREMA 3, K/F é uma extensão algébrica e para todo $\beta \in K$ tem grau dividindo n .

AFIRMAÇÃO: K/F é extensão finita.



Se K/F não for finita, existem elementos em K com grau arbitrariamente grande. Para ver isso vamos fazer a seguinte construção. Seja $\alpha_1 \in K \setminus F$ e considere $F_1 = F(\alpha_1)$. Então α_1 é algébrico sobre F e $[F_1:F] < \infty$. Seja $\alpha_2 \in K \setminus F$ e considere $F_2 = F_1(\alpha_2)$. Então $[F_2:F_1] < \infty$ e portanto, pela Lei da Torre $[F_2:F] < \infty$. Continuando o processo, obtemos uma cadeia infinita

$$F \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots$$

de modo que $[F_i:F]$ é arbitrariamente grande, enquanto permanece finito.

Vamos usar o Teorema do Elemento Primitivo, que estabelece o seguinte: se K/F é extensão finita, então existe $\gamma \in F \setminus \mathbb{Q}$ tal que $K = F(\gamma)$. O elemento γ é chamado elemento primitivo para a extensão K/F .

Então, pelo Teorema do Elemento Primitivo, temos que $F_i = F(\gamma_i)$; assim construímos elementos $\gamma_i \in K$ com grau arbitrariamente grande, o que não pode ocorrer já que seu grau divide n .
Portanto K/F é finita.



Seja $\gamma \in K$ elemento primitivo para K/F , (existe pelo Teorema do Elemento Primitivo).

Então $\text{Stab}_H(\gamma) = \{\sigma \in H : \sigma(\gamma) = \gamma\} = \{1\}$, já que todo $\sigma \in H$ fixa os elementos de F .

Logo, a órbita de γ tem cardinalidade n e pelo Teorema 3, γ tem grau n . Portanto,

$$[K:F] = [F(\gamma):F] = n = |H|.$$

□

LEMA 4. (a) Seja K/F uma extensão finita. Então $G(K/F)$ é um grupo finito, no qual sua ordem divide $[K:F]$. Para facilitar a notação, denotamos $G(K/F)$ por G .

(b) A extensão K/K^H , com H grupo finito de automorfismos do corpo K , é de Galois e $G(K/K^H) = H$.

PROVA (a) Temos que $F \subseteq K^G \subseteq K$. Pela Lei da Torre $[K:F] = [K:K^G][K^G:F]$. Pelo Teorema do Corpo Fixo, temos que $|G| = [K:K^G]$. Logo, $|G| \mid [K:F]$.



b) Pela definição de corpo fixo, temos que $H \leq G(K/K^H)$.
Pelo item (a), $|G(K/K^H)| \mid [K:K^H]$ e pelo TEOREMA
do CORPO FIXO, $[K:K^H] = |H|$. Logo $H = G(K/K^H)$ e o
resultado segue. $\square$

LEMAS. Seja γ elemento primitivo para uma extensão
finita K/F . Considere ~~fixado~~ $f(x) \in F[x]$ polinômio irredu-
tível para K sobre F e sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ as raízes de f
que estão em K . Então existe um único F -automorfismo
de K , $\sigma_i: K \rightarrow K$, tal que $\sigma_i(\gamma_i) = \gamma_i$ para $i=1, \dots, r$.
Além disso, eles são todos F -automorfismos de K . Assim
 $|G(K/F)| = r$.

PROVA. Note que existe único F -isomorfismo
 $\sigma_i: F(\gamma_i) \rightarrow F(\gamma_i)$, $i=1, \dots, r$.

Como $F(\gamma_i)$ tem mesmo grau de $F(\gamma_i)$ sobre F ,
e $F(\gamma_i) = K$, então $F(\gamma_i) = K$ para todo $i=1, \dots, r$ e
então $\sigma_i: K \rightarrow K$ é F -automorfismo de K .



Notamos que cada F -automorfismo de K aplica γ_i em outra raiz de f . Assim, os F -automorfismos $\sigma_i: K \rightarrow K$ são os únicos e logo $|G(K/F)| = r$. □

TEOREMA 6

Seja K/F uma extensão finita e G seu grupo de Galois. Então são equivalentes:

- (a) K/F é extensão de Galois (i.e. $|G| = [K:F]$)
- (b) $F = K^G$;
- (c) K é corpo de decomposição sobre F .

PROVA

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Temos que $F \subseteq K^G \subseteq K$, então $[K:F] = [K:K^G][K^G:F]$ (pelo LEI DA TORRE).

Pelo TEOREMA DO CORPO FIXO, $[K:K^G] = |G|$. Logo, $[K:F] = |G|$ se, e somente se, $F = K^G$.



(a) $\Leftrightarrow$ (c) Seja $\gamma_1 \in K$ elemento primitivo sobre F ($K = F(\gamma_1)$).
Considere $f \in F[X]$ polinômio irreduzível para γ_1 sobre F .
Então o grau de f é $\frac{[K:F]}{|G|}$, digamos n .

Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ raízes de f em K , então pelo
LEMA 5, temos que $|G| = r$.

Agora, K é corpo de decomposição sobre F se, e
somente se, f se decompõe completamente em K ,
se, e somente se, $|G| = n$, ou seja, $|G| = [K:F]$ $\square$

- Seja L um corpo tal que $F \subseteq L \subseteq K$. Dizemos
que L é um corpo intermediário da extensão K/F .
- Note que se L é um corpo intermediário de K/F ,
então $G(K/L) \subseteq G(K/F)$.

LEMA 7. (a) Toda extensão finita está contida em uma
extensão de Galois.

(b) Se K/F é extensão de Galois, então para L
corpo intermediário de K/F , temos que K/L é



extensão de Galois. Além disso, $G(K/L) \subseteq G(K/F)$.

PROVA. O TEOREMA 6 permite substituir "extensão de Galois" por "corpo de decomposição". Pela OBSERVAÇÃO 2 e LEMA 4 o resultado segue. $\square$

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA DE GALOIS é um resultado muito importante para determinarmos corpos fixos a partir de grupos de automorfismos. Ele estabelece uma relação bijectiva entre corpos intermediários e subgrupos do grupo de Galois.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA DE GALOIS.

Seja K/F uma extensão de Galois e G seu grupo de Galois. Então existe uma bijecção entre os corpos intermediários de K/F e subgrupos de G .

$$\{ H \leq G \} \longleftrightarrow \{ F \subseteq L \subseteq K \}$$



Essa correspondência faz o seguinte:

$$\{H \leq G\} \quad \{F \subseteq L \subseteq K\}$$

$$H \longmapsto K^H$$

$$G(K/L) \longleftarrow L$$

As aplicações $H \mapsto K^H$ e $L \mapsto G(K/L)$ são mutuamente inversas.

Prova. Seja $H \leq G$, e considere $F = K^H$, então pelo TEOREMA DO CORPO FIXO, $G(K/F) = H$.

Agora, considere L corpo intermediário de K/F e seja $H = G(K/L)$. Então pelo LEMA 4, a extensão K/K^H é de Galois e $H = G(K/K^H)$. Agora, pelo TEOREMA 6, $K^H = L$. □



COROLÁRIO 8. No TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA DE GALOIS temos:

- (a) Se L, L' são corpos intermediários associados a H e H' , respectivamente, então $L \supset L' \Rightarrow H \subset H'$.
- (b) O grupo correspondente a F é $G(K/F)$ e o grupo correspondente a K é $\{1\}$.
- (c) Se L corresponde a H , então $[K:L] = |H|$ e $[L:F] = [G:H]$.

PROVA. Os itens (a) e (b) são imediatos.

- (c) Temos que $L = K^H$ pela correspondência de Galois e pelo TEOREMA DO CORPO fixo ~~$G(K/L) = H$~~ .
 $G(K/L) = H$.

$$\text{Como } F \subseteq L \subseteq K, \text{ então } \underbrace{[K:F]}_{|G|} = \underbrace{[K:L]}_{|H|} [L:F]$$

$$\text{Logo, } [L:F] = [G:H].$$

4 $\square$



COROLÁRIO 9 Toda extensão finita tem finitos corpos intermediários.

PROVA. Seja K/F extensão finita. Se K/F é de Galois então ela deve ter finitos corpos intermediários porque todo grupo finito tem finitos subgrupos e os ~~K/F~~ subgrupos de $G(K/F)$ estão em correspondência com ~~com os subgrupos de~~ os subcorpos ~~de~~ intermediários de K/F .

Peço LEMMA 7, toda extensão finita está contida em uma extensão de Galois. Assim, se K/F não é de Galois, basta imergi-la em uma de Galois e o resultado segue. $\square$

Como aplicação do TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA DE GALOIS vamos mostrar que $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado, i.e, dado $f(T) \in \mathbb{C}[T]$, todas suas raízes estão em $\mathbb{C}$.

TEOREMA 10. $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado.

PROVA. Seja $K/\mathbb{C}$ uma extensão finita. Então $K/\mathbb{C}$ é finita e



$$\begin{array}{c} E \\ | \\ K = \mathbb{R}(X) \\ | \\ \mathbb{C} \\ | \\ \mathbb{R} \end{array}$$

peelo Teorema do Elemento Primitivo, existe $\gamma \in K$ tal que $\mathbb{R}(X) = K$. Seja E o corpo de decomposição de f .

Como $[K:\mathbb{R}] = [K:\mathbb{C}][\underbrace{\mathbb{C}:\mathbb{R}}_2]$, podemos tomar

H um 2-grupo maximal de $G(K/\mathbb{R})$ (peelo TEOREMA DE SYLOW). Por construção $[K:K^H] = |H|$. Logo pelo maximalidade de H , $[K^H:\mathbb{R}]$ é ímpar. Como o polinômio do elemento primitivo que gera K^H sobre $\mathbb{R}$ ~~é~~ é irredutível, ele não pode ter grau maior que 1, caso contrário, teria raiz em $\mathbb{R}$. Portanto $[K^H:\mathbb{R}] = 1$ e $K^H = \mathbb{R}$. Logo $G(K/\mathbb{C}) = 2^n$. Seja $H' \leq G(K/\mathbb{C})$ de ordem 2^{n-1} . (existe pelo TEOREMA DE SYLOW). Então $[K:K^{H'}] = 2$. Mas $K = \mathbb{C}(\sqrt{\alpha})$, onde α é raiz do polinômio minimal de qualquer elemento primitivo, e assim $[K:K^{H'}] = 1$, um absurdo. Logo $[K:\mathbb{C}] = 1$ e $K = \mathbb{C}$. □

O TEOREMA DE GALOIS também pode ser aplicado para estudar a solubilidade de equações polinômiais por meio de radicais. Para polinômios de grau ≤ 4 os resolventes de Lagrange dão a solução. Para polinômios de grau n qualquer, o grupo de Galois de um polinômio é S_n que não é solúvel p/ $n \geq 5$. Na prática, usando análise de OS TEOREMAS DE SYLOW, podemos mostrar, por exemplo, que o polinômio $p(t) = t^5 - 4t + 2$ não é solúvel por radicais.

FAVOR NÃO ESCREVER NO VERSO!
NÃO ULTRAPASSAR A LINHA DA MARGEM!



As funções harmônicas são instrumentos muito importantes na matemática que tem diversas aplicações na física. Elas são definidas através da Equação de Laplace.

Ao longo desse texto vamos considerar que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto conexo e denotar por $C^k(\Omega)$ o conjunto das funções $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que tem derivadas até ordem k todas contínuas.

Definição 1 Seja $u \in C^2(\Omega)$. Dizemos que u é harmônica se

$$\Delta u = 0.$$

Aqui Δu indica o laplaciano da função u .
Relembramos que $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

Assim,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$



Os exemplos mais simples de funções harmônicas são as funções constantes.

Exemplo 2. Considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e

$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ j \neq k}} b_{jk} x_j x_k,$$

onde $a_0, a_i, b_{jk} \in \mathbb{R}$.

Então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \text{ e}$$

portanto u é harmônica.

Vamos agora apresentar um importante TEOREMA que caracteriza as funções harmônicas. Esta caracterização está relacionada com a média em bolas.

TEOREMA DA MÉDIA. Seja $u \in C^2(\Omega)$. Então u é harmônica se, e somente se, p/ toda bola $B_r(x_0) \subseteq \Omega$ tivermos

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS_x \quad (1) \quad \text{e}$$



$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \quad (2).$$

Aqui $\omega_n = \int_{B_1(0)} dx$ é o volume da bola unitária.

Dizemos que uma função $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz a propriedade da média se ela verifica (1) e (2). Na verdade (1) e (2) são equivalentes. De fato, suponha que (1) é válida e seja $0 < s \leq r$. Então

$$B_s(x_0) \subseteq B_r(x_0) \quad \sim$$

$$u(x_0) = \frac{1}{n \omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x) dS_x$$

$$\Rightarrow n \omega_n r^{n-1} u(x_0) = \int_{\partial B_s(x_0)} u(x) dS_x.$$

Integrando com respeito à variável s , obtemos:

$$\int_0^r n \omega_n r^{n-1} u(x_0) ds = \int_0^r \int_{\partial B_s(x_0)} u(x) dS_x ds$$

$$\omega_n r^n u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u(x) dx.$$



Portanto (2) vale.

Reciprocamente, assumamos que (2) é válida, então

$$\omega_n r^n u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u(x) dx$$

$$\Rightarrow \omega_n r^n u(x_0) = \int_0^r \int_{\partial_S(x_0)} u(x) dS_x dx$$

Derivando e usando o TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO, temos:

$$\omega_n n r^{n-1} u(x_0) = \int_{\partial_r(x_0)} u(x) dS_x$$

que é exatamente (1).

Relembramos que se Ω é um aberto limitado cujo bordo $\partial\Omega$ é C^1 e superfície e $F = (F_1, \dots, F_n)$ é um campo vetorial tal que $F_i \in C^1(\bar{\Omega})$ então o TEOREMA DO DIVERGENTE nos dá que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n d$$



Aqui $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$

PROVA DO TEOREMA DA MÉDIA.

Seja $0 < s \leq r$ e defina

$$\ell(s) = \frac{1}{n \omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x) dS_x.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x \mapsto x_0 + sz$, obtemos

$$\ell(s) = \frac{1}{n \omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz) s^{n-1} dS_z$$

$$= \frac{1}{n \omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz) dS_z.$$

Derivando e voltando a variável x temos

$$\ell'(s) = \frac{1}{n \omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + sz) z dS_z$$



$$\Rightarrow \ell'(s) = \frac{1}{n \omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \nabla u(x) \cdot \left(\frac{x - x_0}{s} \right) dS_x$$

Aplicando o TEOREMA DO DIVERGENTE ao campo ∇u obtemos

$$\ell'(s) = \frac{1}{n \omega_n s^{n-1}} \int_{B_r(x_0)} \operatorname{div}(\nabla u(x)) dx,$$

onde usamos o fato que $\left(\frac{x - x_0}{s} \right)$ é o vetor normal a ~~o~~ $\partial B_r(x_0)$.

Portanto,

$$\ell'(s) = \frac{1}{n \omega_n s^{n-1}} \int_{B_r(x_0)} \Delta u(x) dx. \quad (3)$$

Vamos a prova do TEOREMA.

Suponhamos que u é harmônica. Então $\Delta u = 0$ e por (3) $\ell'(s) = 0 \quad \forall 0 < s \leq r$ e portanto ℓ é constante em $(0, r]$.



Logo,

$$\ell(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS_x = \ell(s) = \lim_{s \rightarrow r^-} \ell(s)$$

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS_x = u(x_0),$$

onde usamos o fato que u é contínua.

Suponhamos agora que u satisfaz a propriedade da média, mas não é harmônica.

Então existe $x_0 \in \Omega$ t.q. $\Delta u(x_0) \neq 0$, digamos $\Delta u(x_0) > 0$.

Como Δu é contínuo, existe $r > 0$ t.q. $\Delta u(x) > 0$ p/ todo $x \in B_r(x_0)$. Como u satisfaz (1), temos que ℓ é constante e logo

$$\ell'(x) = 0.$$

Por (3) temos que

$$0 = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x_0)} \underbrace{\Delta u(x)}_{>0} dx > 0 \text{ em } B_r(x_0).$$

Um absurdo. Portanto u é harmônica. $\square$



Suponha que $u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica.
Então $u''(x)=0 \Rightarrow u(x)=c_1+cx$, $c_1, c \in \mathbb{R}$.

Assim, o gráfico de u é um segmento de reta.
Portanto, temos que u admite máximo (e mínimo)
e isso acontece nas extremidades do intervalo aberto (a,b) ,
a menos que u seja constante, isto é, $c=0$.

O próximo resultado nos mostra que essa propriedade
continua válida em espaços de dimensões maiores.

Princípio do Máximo Seja $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Então p/
 Ω aberto limitado, e u harmônica, temos que
o máximo de u é atingido na fronteira $\partial\Omega$, a
menos que u seja constante.

Prova. Temos que $\bar{\Omega}$ é compacto e portanto
admite máximo. Defina

$$\bar{\Omega} = \{x \in \bar{\Omega} \mid M = u(x) = \max_{\bar{\Omega}} u(x)\} \subseteq \bar{\Omega}$$

Note que $\bar{\Omega} = u^{-1}(\{M\})$, e portanto $\bar{\Omega}$ é
fechado (já que u é contínua).



Além disso, $\bar{\Omega}$ é aberto. De fato, seja $x_0 \in \bar{\Omega}$.
Como Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subseteq \Omega$.
~~Pelo~~ f. Como (1) é satisfeita, temos

$$M = u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS_x \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} M dS_x$$

$$\Rightarrow \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) - M dS_x = 0.$$

$$\Rightarrow u(x) = M \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

Portanto, $B_r(x_0) \subseteq \bar{\Omega}$ e $\bar{\Omega}$ é aberto.

Assim, $\bar{\Omega}$ é aberto e fechado. Como $\bar{\Omega}$ é conexo $\bar{\Omega} = \emptyset$ ou $\bar{\Omega} = \Omega$. Portanto o máximo é atingido na fronteira ou a função u é constante. □



Uma importante aplicação do Princípio do Máximo é sobre a unicidade de solução de Equações de Poisson. Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Se Ω é limitado, então se existe solução do Problema de Poisson (4) ela deve ser única.

De fato, sejam u_1, u_2 soluções de 4. Então

$v = u_1 - u_2$ é solução de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo, $v \leq 0$ em Ω .

Por outro lado, aplicando o mesmo argumento à função $-v$, temos que $v \geq 0$. Portanto, $v = 0$ e $u_1 = u_2$.



Assim, temos o seguinte resultado

TEOREMA 3 Seja Ω limitado e $u \in C^{(1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(2)}(\Omega)$ uma função harmônica. Então existe no máximo uma solução para o PROBLEMA DE DIRICHLET

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que o resultado acima pode ser falso se Ω não for limitado. Considere

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

Então

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem além da solução nula $u=0$, a solução $u=x_n$.



Sejam U, V abertos de $\mathbb{R}^n$. Um difeomorfismo $f: U \rightarrow V$ é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável. Se $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($f = (f_1, \dots, f_n)$) é um difeomorfismo local de U sobre $V = f(U)$ então para todo $x \in U$ $f'(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Isso significa que o determinante Jacobiano $\det Jf(x) \neq 0$. Aqui a matriz Jacobiana é

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right).$$

O TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA estabelece a recíproca quando f é de classe C^1 .

Antes de enunciarmos este resultado vamos provar o seguinte Lema.



LEMA 1 Seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , onde A é um bloco de $\mathbb{R}^n$. Se existe $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M \quad \forall x \in \text{int} A,$$

então

$$|f(y) - f(x)| \leq n^2 M |x - y| \quad \forall x, y \in A.$$

PROVA. Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. Então

$$f_i(y) - f_i(x) = \sum_{j=1}^n f_i(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_n).$$

Pelo TEOREMA DO VALOR MÉDIO.

$$f_i(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_n) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_j) |y_j - x_j|$$

$$\Rightarrow |f_i(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_n)| \leq M |y - x|$$

$$\text{Logo, } |f_i(y) - f_i(x)| \leq \sum_{j=1}^n |f_i(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_n)| \\ \leq \sum_{j=1}^n M |y - x| \leq n M |y - x|.$$



Agora,

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(y) - f_i(x)| \leq \sum_{i=1}^n nM |y - x|$$

$$\Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq n^2 M |y - x|.$$

□

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 em um aberto contendo a tal que $\det Jf(a) \neq 0$. Então existem abertos V, W de $\mathbb{R}^n$ com $a \in V$ e $f(a) \in W$, tais que f admite inversa contínua $f^{-1}: W \rightarrow V$, a qual é diferenciável e para todo $y \in W$

$$(f^{-1})'(y) = (f')^{-1}(y).$$

PROVA. Seja $\lambda = f'(a)$. Então

$$(\lambda^{-1} \circ f)'(a) = \underbrace{(\lambda^{-1})'(f(a))}_{\lambda^{-1}} \circ f'(a) = \lambda^{-1} \circ \lambda = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$



Note que a aplicação $\lambda^{-1} \circ f$ satisfaz o
TEOREMA se, e somente se f satisfaz.

Assim, podemos supor que $\lambda = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Logo, se $f(a+h) = f(a)$, então

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = \frac{|\lambda(h)|}{|h|} = \frac{|h|}{|h|} = 1.$$

Mas $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$, pois

f é diferenciável em a com $f'(a) = \lambda$.

Dessa forma, não podemos ter $f(x) = f(a)$ para
 x arbitrariamente próximo de a , mas diferente de a .

Portanto, existe um ~~ab~~ bloco U contendo a tal
que $f(x) \neq f(a)$ para todo $x \in U$ com $x \neq a$ (1).



Como f é de classe C^1 , podemos supor que

$$Jf(x) \neq 0 \quad \forall x \in U \quad (2)$$

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq \frac{1}{2n^2} \quad (3)$$

Defina $g(x) = f(x) - x = (f_1(x) - x_1, \dots, f_n(x) - x_n)$.

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_i(x + te_j) - g_i(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x). \end{aligned}$$

Logo, pelo LEMA 1 e (3) segue que

$$\left| \underbrace{f(x_2) - x_2}_{g(x_2)} - \underbrace{(f(x_1) - x_1)}_{g(x_1)} \right| \leq \frac{1}{2n^2} |x_2 - x_1|$$

para todo $x_1, x_2 \in U$.



Portanto,

$$|x_2 - x_1| - |f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{1}{2} |x_2 - x_1|$$

$$\Rightarrow |x_2 - x_1| \leq 2 |f(x_2) - f(x_1)| \quad (4).$$

Como ∂U é compacto, e por (1) não contém $f(a)$,
existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(a)| \geq \delta \quad \forall x \in \partial U.$$

Defina o aberto W de $\mathbb{R}^n$ por

$$W = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |f(a) - y| < \delta\}.$$

Então para todo $x \in \partial U$ e $y \in W$ temos

$$\begin{aligned} |f(x) - y| &= |f(x) - f(a) + f(a) - y| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + \underbrace{|f(a) - y|}_{< \delta} < |f(x) - f(a)|. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } |f(x) - y| < |f(x) - f(a)| \quad \forall x \in \partial U \text{ e } y \in W \quad (5)$$



Vamos mostrar que dado $y \in W$ existe único $x \in \text{int} U$ tal que $f(x) = y$.

Para isso, dado $y \in W$, defina a função

$$h: U \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |y - f(x)|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x))^2.$$

é uma função contínua e portanto atinge mínimo

Temos que para $x \in \partial U$

$$h(x) = |y - f(x)|^2 < |f(x) - f(a)|^2 = h(a)$$

Logo, o mínimo de h não ocorre em ∂U .

Assim, existe $x \in \text{int} U$ tal que

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

~~$$\text{Logo, } \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = 2(y_j - f_j(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x)$$~~



Logo,

$$\sum_{i=1}^n 2(y_i - f_i(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0.$$

Por (2) temos que $Jf(x) \neq 0$. Logo

$y_i - f_i(x) = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$, e portanto

$$f(x) = y.$$

Defina $V = f^{-1}(W) \cap U$. Então

$f: V \rightarrow W$ tem inversa. Por (4) temos que

$$|x_2 - x_1| \leq 2|f(x_2) - f(x_1)|$$

Como qualquer x é da forma $f^{-1}(y)$, temos que

$$|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)| \leq 2|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in W$$

e f^{-1} é Lipschitziana e portanto contínua.



~~Basta mostrar que para todo $y \in W$ f^{-1}~~

Basta mostrar que f^{-1} é diferenciável.

Seja $\mu = f'(x)$. Vamos mostrar que $(f^{-1})'(y) = \mu^{-1}(y)$
para todo $y = f(x) \in W$.

$$f(x_1) = f(x) + \mu(x_1 - x) + \ell(x_1 - x)$$

$$\text{com } \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{|\ell(x_1 - x)|}{|x_1 - x|} = 0.$$

Então

$$f(x_1) - f(x) = \mu(x_1 - x) + \ell(x_1 - x)$$

$$\Rightarrow \mu^{-1}(f(x_1) - f(x)) = \mu^{-1}(\mu(x_1 - x) + \ell(x_1 - x))$$

$$\Rightarrow \mu^{-1}(f(x_1) - f(x)) = \mu^{-1}(\mu(x_1 - x)) + \mu^{-1}(\ell(x_1 - x))$$

$$\Rightarrow \mu^{-1}(f(x_1) - f(x)) = x_1 - x + \mu^{-1}(\ell(x_1 - x))$$

Como todo $x = f^{-1}(y)$, temos que



$$\mu^{-1}(y_1 - y) = f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y) + \mu^{-1}(\mathcal{L}(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)))$$

Basta mostrar que ~~$\lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{\mu^{-1}(\mathcal{L}(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)))}{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}$~~

$$\lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{|\mu^{-1}(\mathcal{L}(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)))|}{|y_1 - y|} = 0.$$

Como μ^{-1} é transformação linear, é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{|\mathcal{L}(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = 0.$$

Note que

$$(6) \frac{|\mathcal{L}(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = \frac{|\mathcal{L}(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|} \frac{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}{|y_1 - y|}$$



Como f^{-1} é contínua, $f^{-1}(y_i) \rightarrow f^{-1}(y)$
quando $y_i \rightarrow y$. Logo a primeira parte do
lado direito da equação (6) tende a zero
quando $y_i \rightarrow y$ e por (4) a segunda parte é
limitada por 2. Portanto,

$$\lim_{y_i \rightarrow y} \frac{|e(f^{-1}(y_i) - f^{-1}(y))|}{|y_i - y|} = 0.$$

□

OBS: Note que a inversa de uma função pode
existir mesmo que sua derivada não exista. De
fato, considere ~~o caso~~ $f(x) = x^3$. Então
 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e $f^{-1}(0) = 0$.



TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA.

Seja $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 em um aberto contendo (a, b) , onde $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ com $f(a, b) = 0$.

Seja M a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(a, b) \right)$. Se $\det M \neq 0$, então existem $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto e $B \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto tais que para todo $x \in A$, existe único $g(x) \in B$ com a propriedade $f(x, g(x)) = 0$. A função g é diferenciável. Quando $f(x, g(x)) = 0$ Dizemos que a função g é definida implicitamente por pelo equação $f(x, g(x)) = 0$.

Prova. Defina $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ por

$$F(x, y) = (x, f(x, y)).$$

$$\text{Então } F(a, b) = (a, f(a, b)) = (a, 0).$$



Como $JF(a,b) \neq 0$ (pois $\det M \neq 0$), o TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA dá que: existem abertos $V, W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, de modo que podemos tomar $V = A \times B$ tais que F tem inversa

$$h: W \rightarrow V.$$

Note que $h(x,y) = (x, k(x,y))$ pois F é dessa forma.

Defina $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção sobre a segunda coordenada, isto é-

$$\pi(x,y) = y.$$

$$\text{Então } \pi \circ F(x,y) = f(x,y).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x, k(x,y)) &= (\pi \circ F) \circ h(x,y) = \pi(F \circ h)(x,y) \\ &= \pi(x,y) = y. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } f(x, k(x,0)) = 0.$$



Basta tomar $g(x) = K(x, 0)$.

□

Exemplo. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x, y) = (\underbrace{\cos x + \cos y}_{f_1(x, y)}, \underbrace{\sin x + \sin y}_{f_2(x, y)})$$

Então

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x & -\sin y \\ \cos x & \cos y \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo } \det Jf(x, y) = -\sin x \cos y + \sin y \cos x = -\sin(y - x).$$

Assim, $\det Jf(x_0, y_0) \neq 0 \quad \forall (x_0, y_0)$ com $y - x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Logo, pelo TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA, para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ com $y_0 - x_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, existe inversa de f numa vizinhança de (x_0, y_0) .



Exemplo. Defina

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$f(x, y, z) = \sin yz + \sin xz + \sin xy.$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y \sin yz + x \sin xz.$$

Para $(x_0, 0, 0)$ com $x_0 \neq 0$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, 0, 0) = x_0 \neq 0.$$

Pelo TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA, a equação

$$\sin yz + \sin xz + \sin xy = 0$$

admite única solução $z = g(x, y)$ no vizinhança de $(x_0, 0)$ com $x_0 \neq 0$.



OBS. Note que a inversa de uma função pode existir mesmo não sendo diferenciável.

De fato, seja $f(x) = x^3$. Então $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Mas f^{-1} não é diferenciável em 0, pois $f'(0) = 0$.

Isso pode ser visto da seguinte forma se f possui inversa e $f'(a) = 0$, então f^{-1} não é diferenciável em a . De fato, se fosse, como

$$f^{-1} \circ f'(a) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

teríamos pela regra da cadeia que

$$0 = f^{-1}(f(a)) \cdot \underbrace{f'(a)}_0 = 1,$$

um absurdo.