



1ª) O Teorema da função inversa e o Teorema da função implícita e aplicações

Começamos relembrando algumas definições

Def. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Dizemos que f é diferenciável em $x_0 \in U$ se $\exists L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mapa linear tal que

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Dizemos que f é diferenciável em U se for diferenciável em todos os pontos de U . O mapa linear $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ t.q. (*) é satisfeita é dita a diferencial de f no ponto x_0 (ou derivada total de f em x_0) e denotamos $df(x_0) := L$. Assim, se f é diferenciável em U , fica definido um mapa

$$df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) := \{T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : T \text{ é linear}\}$$
$$x \mapsto df(x)$$

Quando f é diferenciável em U e $df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ é contínua, dizemos que f é de classe C^1 em U .

Claramente, podemos nos perguntar se df é uma função diferenciável e nesse caso definir $d^2f = d(df)$ assim como fizemos anteriormente. Mais geralmente,

dizemos que f é k vezes diferenciável se $d^j f$ existe $\forall j=1, \dots, k$. Quando $(\forall x \in U)$

f é k vezes diferenciável e cada $d^j f$ é contínua, $\forall j=1, \dots, k$, dizemos que $(\forall x \in U)$

f é de classe C^k (em U). [$k \in \mathbb{N}, k \geq 1$]

Dizemos que $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^k em X , X subconjunto arbitrário, se $\forall x \in X, \exists U \subset \mathbb{R}^n$ vizinhança aberta de x e uma função de classe C^k em U ,

$\tilde{f}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $\tilde{f}|_{X \cap U} = f$.

Um mapa $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, U aberto, é dito um difeomorfismo de classe C^k em U se f é de classe C^k em U , f é bijetora sobre $f(U)$ e sua inversa $f^{-1}: f(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^k .

Finalmente, dizemos que $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, U aberto, é um difeomorfismo local de classe C^k se $\forall x \in U, \exists U_x \subseteq U$ vizinhança aberta de x tal que $f|_{U_x}$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V_x = f(U_x) \subseteq \mathbb{R}^m$ de classe C^k .

Obs: veremos que $n=m$ neste caso



Definição: Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ as coordenadas em ~~em~~ ^{aberto} $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se f é diferenciável em $x_0 \in U$, então $\forall i=1, \dots, n$, ~~o limite~~ escrevendo $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$

o limite $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + h e_j) - f_i(x_0)}{h}$ (1) Aqui e_j denota o j -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

existe e é dita a j -ésima derivada parcial de f_i em x_0 .

Além disso, a matriz do mapa linear $df(x_0)$ na base canônica de $\mathbb{R}^n$

é dada por $[df(x_0)] = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$ e é dito o jacobiano de f em x_0 .

OBS: A existência dos limites em (1) $\forall i, j=1, \dots, n$ não garantem que f seja diferenciável em x_0 . Porém, se as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existem e são contínuas numa vizinhança de x_0 , então f é diferenciável em x_0 .

FATO (Regra da cadeia): Sejam $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e

$g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ funções de classe C^1 nos abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$

respectivamente, e suponha que $a \in U$ é tal que $f(a) \in V$. Então

$d(g \circ f)(a)$ existe e $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$; além disso

se $f(U) \subseteq V$, então $g \circ f$ é de classe C^1 em U .

Com as definições acima e os fatos recapitulados, vamos agora motivar o teorema da função inversa.

A importância de funções diferenciáveis reside no fato que seu comportamento local pode de certa forma ser estudado através da sua diferencial, que é um mapa linear. Notamos que se $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo sobre o aberto $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ então da regra da cadeia implica que

$df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo

Em particular,
 $n=m$

$$\text{e } (df^{-1})(f(a)) = (df(a))^{-1} \quad \forall a \in U.$$

Assim, se $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local, então $df(a)$ é um isomorfismo $\forall a \in U$. Podemos nos perguntar se a recíproca é verdadeira,



e esse é o conteúdo do

Teorema da função inversa: Seja $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação

de classe C^k no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e seja $a \in U$. ~~Seja $a \in U$ e seja $a \in U$.~~

Se $df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo (equivalentemente, o determinante da matriz jacobiana de f em a é não-nulo, $\det[df(a)] = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) \neq 0$)

então existem abertos conexos U_0 de $\mathbb{R}^n$ e V_0 de $\mathbb{R}^n$, com $a \in U_0$ e $f(a) \in V_0$,

tais que $f|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre $V_0 = f(U_0)$.

□

A demonstração deste resultado é baseada em um resultado elementar da teoria de espaços métricos. Lembremos que se (X, d) é um espaço métrico,

~~seja~~ uma aplicação $G: X \rightarrow X$ é dita uma contração se $\exists \lambda \in (0, 1)$

tal que $d(G(x), G(y)) \leq \lambda d(x, y)$, $\forall x, y \in X$. Observe que uma contração

é automaticamente (uniformemente) contínua.



Lema do ponto fixo de contrações : Se (X, d) é um espaço métrico completo, i.e. tal que toda sequência de Cauchy em (X, d) converge para um limite em X , então toda contração $G: X \rightarrow X$ admite um único ponto fixo, i.e. $\exists! x \in X : G(x) = x$.

Dev. • Unicidade : se $x, x' \in X$ são pontos fixos de G então

$$d(x, x') = d(G(x), G(x')) \leq \lambda d(x, x'), \text{ e como } \lambda \in (0, 1) \text{ segue que } x = x'.$$

• existência : fixe $x_0 \in X$ e defina indutivamente a sequência $(x_n)_{n \geq 0} \subset X$ pondo $x_{n+1} = G(x_n)$. Então, $\forall i \in \mathbb{N}$ temos

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq \lambda d(x_{i-1}, x_i)$$

donde indutivamente temos que $d(x_i, x_{i+n}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1) \quad (D1)$
 $\forall i \in \mathbb{N}$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Agora, se $j \geq i \geq N \in \mathbb{N}$, temos

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + \dots + d(x_{j-1}, x_j)$$

$$\stackrel{(D1)}{\leq} (\lambda^i + \lambda^{i+1} + \dots + \lambda^{j-1}) d(x_0, x_1)$$

$$\leq \lambda^i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \right) d(x_0, x_1)$$

$\lambda \in (0, 1)$

$$\leq \lambda^N \frac{1}{1-\lambda} d(x_0, x_1) \quad (D2)$$

Como o lado direito de (D2) vai para zero quando $N \rightarrow \infty$ ($\lambda \in (0, 1)$), segue que $(x_n)_{n \geq 0} \subset X$ é uma sequência de Cauchy. Como (X, d) é

completo, segue que $\exists x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Ora, usando que

G é contínua segue que

$$G(x) = G\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (G(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

Como queríamos. ⁶



Demonstração do teorema da função inversa: Começamos fazendo algumas

simplificações que agilizam a demonstração. Primeiro, note que a

função

$$F_1(x) := F(x+a) - F(a)$$

é de classe C^k numa vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{R}^n$, e $F_1(0) = 0$ além de

$dF_1(0) = dF(a)$. Ademais, F_1 é difeomorfismo de classe C^k numa viz. da origem

se e só se F é difeomorfismo de classe C^k numa vizinhança de a . Segundo,

a função

$$F_2(x) := [dF(a)]^{-1} \circ F_1(x)$$

também é de classe C^k , com $F_2(0) = 0$ e $dF_2(0) = dF(a)^{-1} \circ dF(a) = \mathbb{I}$

(pela regra da cadeia), onde $\mathbb{I}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota a aplicação identidade. Além disso,

F_2 é de classe difeomorfismo de classe C^k numa viz. da origem se e só se

F_1 o é, se e só se F é difeomorfismo de classe C^k numa viz. de a .



Assim, daqui em diante, vamos supor (sem perda de generalidade), que F é um mapa de classe C^k definido numa vizinhança aberta U da origem $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(0) = 0$ e $dF(0) = I$. Como dF é contínua em U e $\det(\cdot)$ é uma função contínua, diminuindo U se necessário podemos supor que $\det[dF(x)] \neq 0 \quad \forall x \in U$.

Defina $H(x) := x - F(x)$, $\forall x \in U$. Então H é de classe C^k em U , $H(0) = 0$ e $dH(0) = I - I = 0$. Assim, pela continuidade de dH em H , existe $\delta > 0$ tal que $|dH(x)| \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \overline{B_\delta(0)} \subset U$.

Daí, pela desigualdade do valor médio, temos a estimativa Lipschitz:

$$(E1) \quad |H(x') - H(x)| \leq \frac{1}{2} |x' - x|, \quad \forall x, x' \in \overline{B_\delta(0)} \subset U.$$

Em particular, tomando $x' = 0$, temos

$$(E2) \quad |H(x)| \leq \frac{1}{2} |x|, \quad \forall x \in \overline{B_\delta(0)}.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

~~Assim, como~~ ~~temos~~ ~~que~~

Além disso, como $x' - x = F(x') - F(x) + \psi(x') - \psi(x)$,

temos que

$$\begin{aligned} |x' - x| &\leq |F(x') - F(x)| + |\psi(x') - \psi(x)| \\ &\leq |F(x') - F(x)| + \frac{1}{2} |x' - x| \end{aligned}$$

$$\text{ie. } |x' - x| \leq 2|F(x') - F(x)|, \quad \forall x, x' \in \overline{B_{\delta}(0)} \quad (\text{E3})$$

Em particular, (E3) mostra que F é injetora em $\overline{B_{\delta}(0)}$. Seja

agora $y \in B_{\delta/2}(0)$. Vamos mostrar que

$$(Af): \exists! x \in B_{\delta}(0) \text{ tal que } F(x) = y$$

Note que definindo $G(x) := y + \psi(x) = y + x - F(x)$, mostrar (Af) é

mostrar que $\exists! x \in B_{\delta}(0)$ ponto fixo de G , pois $G(x) = x \Leftrightarrow F(x) = y$.



Note que se $x \in \overline{B_\delta(0)}$ então como $y \in B_{\delta/2}(0)$ e vem que (usando (E2))

$$|G(x)| \leq |y| + |H(x)| \stackrel{(E2)}{<} \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}|x| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \quad (E4)$$

$\therefore G$ mapeia $\overline{B_\delta(0)}$ em $\overline{B_\delta(0)}$. Ora, como $\overline{B_\delta(0)}$ é subespaço fechado do espaço métrico completo $(\mathbb{R}^n, d_{euclidiana})$, segue que $\overline{B_\delta(0)}$ é espaço métrico completo. Além disso, $G: \overline{B_\delta(0)} \rightarrow \overline{B_\delta(0)}$ é contração pois por (E1) temos

$$|G(x') - G(x)| = |H(x') - H(x)| \leq \frac{1}{2}|x' - x|, \quad \forall x, x' \in \overline{B_\delta(0)}.$$

Portanto, pelo Lema de ponto fixo de contração, $\exists! x \in \overline{B_\delta(0)} : G(x) = x$.

Além disso, note que ~~temos~~ na verdade $x \in B_\delta(0)$ pois

$$|x| = |G(x)| < \delta \quad \text{por (E4)}$$

Assim, fica provada ~~(Af.)~~ a afirmação (Af.).



Agora define $V_0 := B_{\delta/2}(0)$ e $U_0 := U \cap \mathbb{R}^{-1}(V_0)$. Então

$U_0, V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ são abertos contendo a origem e $f|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ é bijetora

peço que provamos até aqui, i.e. $\exists f^{-1}: V_0 \rightarrow U_0$. Note que

escrevendo $x = F^{-1}(y)$ e $x' = F^{-1}(y')$ e aplicando (E3) obtemos

$$|F^T(y') - F^T(y)| \leq 2|y' - y|, \quad \forall y, y' \in V_0,$$

donde F^{-1} e' continua. Adem, $F|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ e' homeomorfismo
e portanto U_0 e' convexo (homeomorfo a $V_0 = B_{g/2}(0)$).

So nos resta mostrar que F^{-1} é de classe C^k em V_0 . Vamos
mostrar primeiramente que F^{-1} é diferenciável. Fixe $y \in V_0$ qualquer e

Seja $y' \in V_0(y)$. Escreva ~~k~~ ~~$x = F^{-1}(y)$~~ e $x' = F^{-1}(y')$.

Como $\det [dF(x)] \neq 0$, podemos definir $L := [dF(x)]^{-1}$. Daí temos

[Continua no caderno 2]



$$\frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - L(y' - y)}{|y' - y|} = L \left(\frac{L^{-1}(x') - x - (y' - y)}{|y' - y|} \right)$$

$$= \frac{|x' - x|}{|y' - y|} L \left(\underbrace{- \frac{(F(x') - F(x) - L^{-1}(x' - x))}{|x' - x|}}_{(*)} \right)$$

Agora note de (E3) temos que $\frac{|x' - x|}{|y' - y|} \leq 2$;

L sendo operador linear em dimensão finita deve ser limitado:

$$\exists C > 0 : \|Lu\| \leq C\|u\|, \forall u \in \mathbb{R}^n;$$

e $L^{-1} = dF(x)$ donde $(*) \rightarrow 0$ quando $x' \rightarrow x$.

Como F^{-1} é contínua, temos que $y' \rightarrow y$ implica $x' \rightarrow x$

donde concluímos que



$$\frac{F^{-1}(y') - \tilde{F}(y) - L(y' - y)}{|y' - y|} \leq 2C \left| \frac{F(x') - F(x) - dF(x)(x' - x)}{|x' - x|} \right|$$

$\rightarrow 0$ quando $y' \rightarrow y$.

$\therefore F^{-1}$ é diferenciável. ~~Logo que $\nabla F^{-1}(x) = (dF(x))^{-1}$~~
com $(dF^{-1})(F(x)) = (dF(x))^{-1}$.

~~por~~ Daí, usando que F é de classe C^k e a regra da

cadeia, lembrando que inversas de matrizes é contínua por

Cramer, segue que F^{-1} é C^k . ~~com~~ Isso completa a demonstração. #

~~QED~~

Uma aplicação importante do tes da função inversa é a seguinte:

Cor. Seja $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k no aberto U . Então

f é difeomorfismo local de classe C^k se e somente se $df(a)$ é isomorfismo

$\forall a \in U$.



Ademais, se f é difeomorfismo local então f é aplicação aberta e portanto f é difeo sobre a imagem $f(U)$ se e só se f é injetora.

Dem. A segunda parte segue da definição de ~~aplicação~~ difeomorfismo local. A parte não trivial é mostrar que se $df(a)$ é isomorfismo $\forall a \in U$ então f é difeomorfismo local. Ora, mas isso segue exatamente pelo teorema da função inversa: $\forall a \in U$, como $df(a)$ é isomorfismo $\Rightarrow U_a \subseteq U$ viz. aberta de a e $V_{f(a)} \subseteq \mathbb{R}^n$ viz. aberta de $f(a)$ t.q.

$f|_{U_a} : U_a \rightarrow V_{f(a)}$ é difeomorfismo. #

Aplicação:

Exemplo (Coordenadas polares): Seja $F: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Então F é de classe C^h_4



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

$$\begin{aligned} e \quad \det(dF(r, \theta)) &= \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= r \neq 0 \quad \forall (r, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dar que F é difeomorfismo local e portanto a restrição de F a qualquer aberto onde ela é injetiva será um difeomorfismo sobre a imagem. Ex. $U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$ tal que $F|_U$ é injetiva, donde $F|_U: U \rightarrow F(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{x: x \leq 0\}$ é difeomorfismo.

O mesmo pode ser feito para coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} G: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (p, \varphi, \theta) &\mapsto (p \sin \varphi \cos \theta, p \sin \varphi \sin \theta, p \cos \varphi) \end{aligned}$$

Então G é de classe C^∞ e $\det[G(p, \varphi, \theta)] = p^2 \sin \varphi \neq 0$

donde G restrito ao aberto $U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$
é um difeo sobre a imagem, pois $G|_U$ é injetora.

Note que argumentar assim usando o teorema da função inversa (ou melhor o Corolário anterior) é bem mais fácil do que tentar mostrar as
funções trigonométricas e mostrar diretamente que $G|_U$ (ou $P|_U$) é difeo. #

Finalmente, a aplicação mais importante que vamos enunciar do teorema
de função inversa é o teorema da função implícita, que dá condições
sob as quais o conjunto de nível de uma função suave é localmente
o gráfico de uma função suave. Enunciamos a seguir:



Teorema da função implícita : Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ aberto,

e $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função de classe C^1 . Escreva Φ

$(x, y) = (x_1, \dots, x^n, y_1, \dots, y^k)$ para as coordenadas em U e

seja $(a, b) \in U$ com $c = \Phi(a, b)$ satisfazendo. Suponha que

a matriz $k \times k$ dada por $[\partial_y \Phi] = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\dots,k}$ tenha determinante

não-nulo, i.e. $\det [\partial_y \Phi](a, b) \neq 0$. Então, existem vizinhanças

em (a, b)

abertas V_0 de a em $\mathbb{R}^n$ e W_0 de b em $\mathbb{R}^k$ tais que

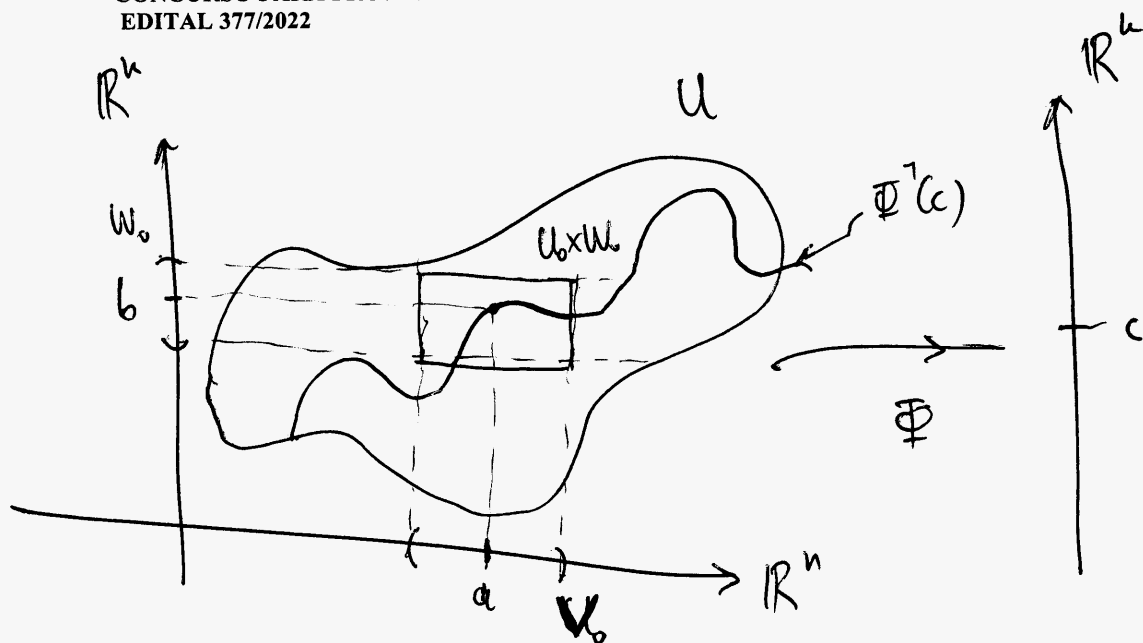
função C^1 $F: V_0 \rightarrow W_0$ tal que

$$\Phi^{-1}(c) \cap (V_0 \times W_0) = \Gamma(F),$$

onde $\Gamma(F) := \{(x, y) \in V_0 \times W_0 : y = F(x)\}$ é o gráfico de F .



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022



Demonstração: Considere a função $\psi: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$
 dada por $\psi(x, y) := (x, \Phi(x, y))$. Então ψ é de classe C^1

$$[d\psi(a, b)] = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_l} \right)_{\substack{i=1, \dots, k \\ l=1, \dots, n}}(a, b) & \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} \right)_{i, j=1, \dots, k}(a, b) \end{pmatrix}$$

é não-singular, pois é bloco triangular inferior e os dois blocos
 ($\det \neq 0$)



na diagonal principal possuem determinante não-nulo. Dado, pelo teorema da função inversa, $\exists$ vizinhanças abertas U_0 de (a,b) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ e Y_0 de (a,c) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ tais que $\psi: U_0 \rightarrow Y_0$ é um difeomorfismo de classe C^1 . Escreva $\psi^{-1}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$ para funções de classe C^1 , $A, B: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k$, e determine U_0 se necessário de forma que $U_0 = V \times W$ seja um retângulo produto de (a,b) , de forma que $A(U_0) \subset V$ e $B(U_0) \subset W$.
Dado temos

$$\begin{aligned} Y_0 \ni (x,y) &= \psi(\psi^{-1}(x,y)) = \psi(A(x,y), B(x,y)) = \cancel{(A(x,y), B(x,y))} \\ &= (A(x,y), \Phi(A(x,y), B(x,y))) \quad (I1) \end{aligned}$$

Em particular, temos que $A(x,y) = x$ donde $\psi^{-1}(x,y) = (x, \Phi(A(x,y), B(x,y)))$



Agora defina $W_0 := W$ e $V_0 := \{x \in V : (x, c) \in U_0\}$.

Defina $F: V_0 \rightarrow W_0$ por $F(x) := B(x, c)$. Assim

de segunda componente de (II) temos que $(\mapsto F$ é de classe C^1 composição pois é restrição no aberto V_0 de função de classe C^1)

$$c = \Phi(x, B(x, c)) = \Phi(x, F(x)), \quad \forall x \in V_0.$$

Dá-se que $\Gamma(F) \subset \Phi^{-1}(c) \cap (V_0 \times W_0)$. Por outro lado, se

$$(x, y) \in \Phi^{-1}(c) \cap (V_0 \times W_0), \quad \text{então } \psi(x, y) = (x, \Phi(x, y)) = (x, c)$$

$$\text{donde } (x, y) = \psi^{-1}(x, c) = (x, B(x, c)) = (x, F(x)),$$

ie. $(x, y) \in \Gamma(F)$. Isto completa a demonstração. #



2ª) O Teorema da Média e o princípio do Máximo para
funções harmônicas e aplicações

No que se segue $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ denotará um aberto.

Começamos lembrando o seguinte:

Teorema da divergência: Suponha que $\bar{\Omega}$ seja limitado com bordo

$\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ de classe C^1 . Se $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo
vetorial de classe C^1 num aberto contendo $\bar{\Omega}$ e ν denota o vetor
normal unitário de $\partial\Omega$ apontando para fora (na orientação natural
induzida como C^1 submanifolda hipersfície de $\mathbb{R}^n$) então

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} X)(y) \, d\mu(y) = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle(y) \, d\sigma(y),$$

onde $(\operatorname{div} X)(y) := \sum_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)(y)$ denota o divergente de X ; 10



$\langle X, \nu \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^n$ de X e ν ; dx denota a medida volume de Ω (na orientação induzida); e ds denota a medida área de $\partial\Omega$. $\square$

Exemplo: $\Omega := B_r(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Então } \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x_0) = 1 \quad \forall i=1, \dots, n \\ \text{onde } \operatorname{div} X(x) = n \\ \text{e } \langle X(x), \nu(x) \rangle \Big|_{\partial\Omega} = |x - x_0| \Big|_{\partial\Omega} = r \end{array} \right.$

$X(x) := x - x_0$

$\nu(x) = \frac{x - x_0}{r}$

$\therefore$ tes da divergência $\Rightarrow n \mu(B_r(x_0)) = r \sigma(\partial B_r(x_0)) \quad (1)$

Notação: $\mu(B_r(x_0)) =: |B_r(x_0)|$ e $\sigma(\partial B_r(x_0)) =: |\partial B_r(x_0)|$.

Lembrando que $|\partial B_r(x_0)| = r^{n-1} |\partial B_1(x_0)|$

$(1') = r^{n-1} \omega_n, \quad \omega_n := |\partial B_1(0)|$

vem de (1) que $|B_r(x_0)| = \frac{r^n \omega_n}{n} \quad (1'')$ [Continua no
Caderno 3] ¹¹



Corolário: Seja $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , $u \in C^2(\Omega)$. Se $B_r(x) \subset \subset \Omega$ e $\nu(y) := \frac{y-x}{r}$ denota o vetor normal unitário de $\partial B_r(x)$ então

$$\int_{B_r(x)} \Delta u \, d\mu = \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma, \quad (2)$$

onde $\Delta u := \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o Laplaciano de u .

Dem. Aplicando o teorema da divergência no campo $X = \nabla u$ gradiente de u
 $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n} \right)$, e notando que $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(X)$,
e $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle$, o resultado segue. #

OBS: $\Omega' \subset \subset \Omega$ significa que Ω' é subconjunto aberto com fecho $\overline{\Omega'}$ limitado e $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.



Definição: Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é dita harmônica quando

$$\Delta u = 0.$$

Uma função contínua $u \in C^0(\Omega)$ satisfaz a propriedade do valor médio se $\forall B_r(x) \subset \subset \Omega$ tem-se

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y) \quad (\text{P.V.M.}).$$

OBS: Dado $u \in C^0(\Omega)$, a propriedade (P.V.M.) equivale a

$$u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y) d\mu(y), \quad \forall B_r(x) \subset \subset \Omega. \quad (\text{P.V.M.'})$$

De fato, se vale (P.V.M.) então usando (4') e rescrevendo (P.V.M.) como

$$\omega_n p^{n-1} u(x) = \int_{\partial B_p(x)} u(y) d\sigma(y),$$

integrando em ρ de 0 a r temos que

$$\frac{\omega_n \rho^n}{n} \cdot u(x) = \int_{B_r(x)} u(y) d\mu(y),$$

onde rearranjando e usando (1^{ua}) segue que vale (P.V.M.¹).

Por outro lado, reescrevendo (P.V.M.¹) como

$$\frac{\omega_n \rho^n}{n} u(x) = \int_0^r \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u(y) d\sigma(y) \right) d\rho$$

segue do Teorema Fundamental do cálculo e da continuidade de u que

vale (P.V.M.). #



Teorema da Média : Seja $u \in C^2(\Omega)$ harmônica. Então

u satisfaz a propriedade da média. De fato, $u \in C^2(\Omega)$ é

harmônica se e só se satisfaz a propriedade da média.

Dem. Defina ~~função~~ $\forall B_r(x) \subset \Omega$, a função $m_{u,x}: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$

dada por
$$m_{u,x}(p) := \frac{1}{|B_p(x)|} \int_{B_p(x)} u(y) dy.$$

Afirmar: (i) $m_{u,x}(p) \rightarrow u(x)$ quando $p \downarrow 0$.

(ii)
$$m'_{u,x}(p) = \frac{1}{|B_p(x)|} \int_{B_p(x)} \Delta u(y) dy$$

Vamos provar (i). Como u é contínua e $B_p(x) \subset \Omega$, segue que u é uniformemente contínua em $\overline{B_p(x)}$, donde $\forall \varepsilon > 0$ dado, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

tal que se $y \in \overline{B_p(x)} \cap B_\delta(x)$ então $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$. (+)



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Dar, tomando $0 < \rho < \min \{ \delta(\varepsilon), r \}$ segue que

$$|m_{u,x}(\rho) - u(x)| = \left| \frac{1}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) d\sigma(y) - \frac{1}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{\partial B_\rho(x)} u(x) d\sigma(y) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{\partial B_\rho(x)} (u(y) - u(x)) d\sigma(y) \right|$$

$$\leq \frac{1}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{\partial B_\rho(x)} \underbrace{|u(y) - u(x)|}_{< \varepsilon \text{ (por (i))}} d\sigma(y)$$

$< \varepsilon$, provando (i).

Quanto a (ii), note que usando (1') temos

$$m_{u,x}(\rho) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) d\sigma(y) \stackrel{\substack{\text{mudança} \\ \text{de} \\ \text{coordenadas}}}{=} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x + r\omega) d\sigma(\omega)$$

$$\text{Dar que } m_{u,x}'(\rho) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial r}(x + r\omega) d\sigma(\omega) \stackrel{\substack{\text{voltando} \\ \text{as coordenadas} \\ \text{normais}}}{=} \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial r}(y) d\sigma(y)$$



Logo, do Corolário do teorema da divergência (usando que $u \in C^2(\Omega)$)

(2) segue que

$$m_{u,x}'(\rho) = \frac{1}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} \Delta u(y) \, d\mu(y), \text{ como queríamos.}$$

Agora vemos diretamente que de (ii) que se $\Delta u = 0$ em Ω

então $m_{u,x}'(\rho) = 0 \quad \forall B_r(x) \subset \Omega, \forall \rho \in (0, r]$, donde combinando

com (i) segue que vale a (P.V.M.):

$$u(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} m_{u,x}(\rho) = m_{u,x}(\rho) = \frac{1}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, d\sigma(y)$$

(pois $m_{u,x}'(\rho) = 0 \quad \forall \rho \in (0, r] \Rightarrow m_{u,x}(\rho) = \text{constante}$)

Reciprocamente, se vale a propriedade (P.V.M.) então $m_{u,x}(\rho)$ é

constante e de (ii) vem que $0 = \frac{1}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} \Delta u(y) \, d\mu(y)$, i.e.



$\Delta u = 0$ em Ω , pois (x) vale $\forall B_r(x) \subset \Omega$.

[de fato, se $\exists x_0 \in \Omega$ tq. $\Delta u(x_0) \neq 0$, então como $u \in C^2(\Omega)$ existe uma ~~aberta~~ bola $B_r(x_0) \subset \Omega$ tq. $\Delta u|_{B_r(x_0)} \neq 0$.

e como Δu é contínua no conexo $B_r(x_0)$, segue que ou bem

$\Delta u(x) > 0 \quad \forall x \in B_r(x_0)$ ou $\Delta u(x) < 0 \quad \forall x \in B_r(x_0)$, donde aplicando

(x) vem que $\Delta u = 0$ em $B_r(x_0)$ $\downarrow$].

Isso completa a demonstração. #

Uma aplicação imediata do Teorema da Média é o

Princípio do máximo (forte) para funções harmônicas: Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e que Ω é aberto conexo. Se u é harmônica em Ω então u não admite máximos nem mínimos ~~interiores~~ no Ω ,



a menos que seja constante.

Dem. Suponha que $\exists x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) = \sup_{\Omega} u =: M$$

Defina $\Omega_M := \{y \in \Omega : u(y) = M\} \subseteq \Omega$. Então $\Omega_M \neq \emptyset$ pois por hipótese $x_0 \in \Omega_M$. Como u é contínua, $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$ é fechado.

Ademais, afirmamos que Ω_M é aberto: dado $x \in \Omega_M$, tomando $r > 0$

tg. $B_r(x) \subset \Omega$ temos do Teorema da média aplicado à

função harmônica $u - M$ que

$$0 = u(x) - M = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} (u - M), \quad (H)$$

onde aqui usamos a equivalência entre (P.V.N.) e (P.V.N.)' provada

anteriormente. Ora, como $u - M \leq 0$ em Ω pela definição de M ,

segue de (H) que $u \equiv M$ em $B_r(x)$, i.e. $B_r(x) \subseteq \Omega_M$, como queríamos. 8



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Dai, como Ω é conexo segue que devemos ter $\Omega = \Omega_m$, ie.
 u é constante em Ω .

A prova no caso de ^{existência de} mínimo é análoga; repetindo o argumento
anterior se $u(x_0) = \min_{\Omega} u(x) =: m$, $x_0 \in \Omega$,

então $\Omega_m := u^{-1}(\{m\})$ é não-vazio, fechado e vale

$$0 = u(x_0) - m = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} (u - m), \quad \forall B_r(x) \subset \Omega$$

com $x \in \Omega_m$

Mas sendo m o valor mínimo, temos que $u - m \geq 0$ em Ω , donde

~~ultrapassamos~~ $u \equiv m$ em $B_r(x)$, ie. $B_r(x) \subset \Omega_m$ sempre que $x \in \Omega_m$

e $B_r(x) \subset \Omega$, Assim, Ω_m é aberto também e de conexidade

ver que $\Omega = \Omega_m$, ie. u é constante. #



Corolário: Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e que

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se u é harmônica então

conexo e
precompacto

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \text{e} \quad \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u; \quad (C1)$$

Em particular, tem-se a estimativa global

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u, \quad \forall x \in \Omega, \quad (C2)$$

Dem.: Como $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in C^0(\bar{\Omega})$, segue que u ~~admit~~
assume máximo e mínimo em $\bar{\Omega}$. Usando que

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\bar{\Omega}} u \quad \text{e} \quad \inf_{\Omega} u = \inf_{\bar{\Omega}} u, \quad \text{segue então do princípio}$$

do máximo que o supremo de u e o infimo de u devem ser
atingidos no bordo de Ω (se u é constante em Ω então o resultado
é trivial). Das (C1) e (C2) seguem diretamente. #



Corolário (Unicidade na solução do problema de Dirichlet):

Suponha que $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfazem $\Delta u = \Delta v$

e $u = v$ em $\partial\Omega$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é conexo, então $u = v$ em Ω .

Dem. Seja $w := u - v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Então por hipótese

$\Delta w = 0$ e $w = 0$ em $\partial\Omega$. De acordo com o corolário anterior garante que

$$0 = \inf_{\partial\Omega} w \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

i.e. $w \equiv 0$ em Ω , i.e. $u \equiv v$ em Ω . #

Como aplicação final do teorema da média, temos o seguinte:

[Continua no Caderno 4]



Teorema (Desigualdade de Harnack): ~~Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conexo.~~

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u \in C^2(\Omega)$ harmônica. Se $\Omega' \subset \subset \Omega$
 $\underline{u \geq 0}$
é conexo, então $\exists$ uma constante $c = c(n, \Omega', \Omega) > 0$ (dependendo
somente de n, Ω' e Ω) tal que

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u. \quad (H)$$

Dem. Seja $r = \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 0$. Se $y \in \Omega' \cap B_{r/2}(x)$

então $B_{r/2}(x) \subset \overline{B_r(y)} \subset \Omega$ e portanto do teorema da média

temos que (usamos (1^o) e (P.V.M.))

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{n}{(\frac{r}{2})^n \omega_n} \int_{B_{r/2}(x)} u(y) d\mu(y) \stackrel{(u \geq 0)}{\leq} \frac{2^n}{|B_r(y)|} \int_{B_r(y)} u(w) d\mu(w) \\ &\stackrel{(P.V.M.)}{=} \frac{n}{(\frac{r}{2})^n \omega_n} \int_{B_{r/2}(x)} u(y) d\mu(y) \stackrel{(P.V.M.)}{=} 2^n u(y) \quad (*) \end{aligned}$$



Se $\Omega' \subset\subset \Omega$, então $\overline{\Omega'}$ é compacto e daí existe um número finito $N \in \mathbb{N}$ tal que Ω' é coberto por bolas de raio r e centros em Ω' . Assim aplicando a estimativa (*) acima para cada bola e combinando as desigualdades, obtemos que

$$u(x) \leq 2^{nN} u(y), \quad \forall x, y \in \Omega'.$$

Ou seja, (H) vale com $C := 2^{nN}$. #

3ª) Teorema fundamental da Teoria de Galois e aplicações

Teorema: Seja K/F uma extensão de corpos de Galois finita.

Então existe uma bijeção

$$\{L: F \leq L \leq K, \text{ } L \text{ é corpo intermediário}\} \xleftrightarrow{\Phi} \{H: H \leq \text{Gal}(K/F) \text{ subgrupo}\}$$

onde $\Phi(L) = \{\tau \in \text{Gal}(K/F) : \tau|_L = \text{id}_L\}$ e

$$\Phi^{-1}(H) = \{a \in K : \tau(a) = a, \forall \tau \in H\}.$$

Ademais, Φ reverte inclusões, se $H \triangleleft \text{Gal}(K/F)$ é subgrupo normal então $\Phi^{-1}(H)$ é uma extensão normal de F ; e

$$\text{Gal}(\Phi^{-1}(H)/F) \simeq \text{Gal}(K/F) / H.$$