



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

①

Defina o que é um espaço de probabilidade:

Seja E um experimento aleatório. O conjunto de todos os possíveis resultados de E é chamado de espaço amostral associado ao experimento e é denotado por Ω .

Definição: ~~uma família de subconjuntos de Ω~~

Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é uma σ -álgebra se:

- i) $\Omega \in \mathcal{F}$
- ii) Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c \in \mathcal{F}$
- iii) Se $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

A dupla $(\Omega, \mathcal{F})$ é chamada de espaço mensurável.

Definição: Uma função $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ é uma probabilidade se satisfaz os seguintes axiomas de Kolmogorov.

A₁) $P(\Omega) = 1$

A₂) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$

A₃) Se $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ então

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \text{Aditividade da probabilidade}$$

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é chamada espaço de probabilidade e qualquer $A \in \mathcal{F}$ é chamado de evento.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1$.

Mostre que:

a) Se $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \geq 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

Prova:

Considere

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_1^c \cap A_2$$

$$B_3 = A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c$$

$$B_n = A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c$$

Observe que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset \forall n \neq m$

Assim, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

Por outro lado, observe que $P(B_n) = P(A_n) - P(A_{n-1})$, $n \geq 2$
 $P(B_1) = P(A_1)$

Logo, $\uparrow$ Axioma 3

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P(A_1) + (P(A_2) - P(A_1)) + \dots + (P(A_n) - P(A_{n-1}))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

b) ~~Como hipótese temos que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é um espaço de probabilidade então ele satisfaz o axioma a~~
~~probabilidade P satisfaz o axioma 3, ou seja,~~

~~Se $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ e~~

Seja $B_1 = A_1$

$$B_2 = A_2 \cup A_1$$

$$B_3 = A_3 \cup A_2 \cup A_1$$

$$\vdots$$
$$B_n = A_n \cup A_{n-1} \cup \dots \cup A_1$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

B_n é crescente, pelo item anterior temos que.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

$$P(B_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

~~porque toda união finita de conjuntos pode ser escrita~~

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

e vale para n conjuntos.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

- ③ A verosimilhança da amostra é
- ④ $f(\tilde{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n e^{-\theta} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$

Determinar $\pi(\psi|\tilde{x})$ a posteriori de ψ dada a amostra $\tilde{x}$
Então

$$\pi(\psi|\tilde{x}) \propto \prod_{i=1}^n e^{(-2n\theta)} \frac{(2n\theta)^{x_i}}{x_i!} \frac{1}{(2n\theta)^{1/2}}$$
$$\propto e^{-2n^2\theta} \frac{\sum x_i - 1}{2}$$

Isso significa que a posterior $\psi|\tilde{x}$ tem uma distribuição gamma $(2n^2, \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2})$. Da tabela da distribuição gamma podemos determinar t_1 tal que para $0 < \alpha < 1$ fixo,

$$\int_0^{t_1} \pi(\psi|\tilde{x}) d\theta = 1 - \alpha$$

Assim, se $\theta = \theta_0$ pertence ao intervalo $[0, t_1]$ rejeitamos a hipótese nula caso contrário não rejeitamos H_0 .



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

④ A distribuição de Y_n é

$$F_n(y) = P(Y_n \leq y) = (P(X_1 \leq y))^n = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \left(\frac{y}{\theta}\right)^n & \text{se } 0 \leq y < \theta \\ 1 & \text{se } y \geq \theta \end{cases}$$

Logo a função de densidade de Y_n é

$$f_n(y) = \begin{cases} \frac{n}{\theta^n} y^{n-1} & , 0 < y < \theta \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim, o risco de Bayes é

$$\begin{aligned} R(\theta, \delta) &= E\{|\delta(Y_n) - \theta|\} = \int_0^\theta |\delta(Y_n) - \theta| \frac{n}{\theta^n} y^{n-1} dy \\ &= \int_0^\theta |\delta(Y_n) - \theta| \frac{n}{\theta^n} \frac{y^n}{n} dy \\ &= |\delta(Y_n) - \theta| \end{aligned}$$

E o risco de Bayes é

$$r(\theta, \delta) = E_\theta \{|\delta(Y_n) - \theta|\} \quad (1)$$

O estimador de Bayes $\delta(Y_n)$ tem que minimizar (1).

Logo, ~~$\delta(Y_n) = E(\theta | \tilde{x})$~~



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

② Suponhamos que X_i representa o i -ésimo ponto escolhido.
Então X_i é uniformemente distribuído na bola B .
A função de densidade para cada X_i é

$$f_i(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{\text{vol}(B)} & \text{se } (x, y, z) \in B \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, N$.

Seja $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_N)$.

Temos que

α)
$$\begin{aligned} P(Y \geq r) &= P(\min(X_1, \dots, X_N) \geq r) = [P(X_1 \geq r)]^N \\ &= [1 - P(X_1 \leq r)]^N \\ &= [1 - F_{X_1}(r)]^N \end{aligned}$$

onde F_{X_1} é a função de distribuição da X_1 .