



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Questão 1. Para definirmos um espaço de probabilidade, precisamos definir o que são espaço amostral, σ -álgebra e medida de probabilidade. Veremos cada um deles a seguir.

O espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados elementares de um experimento. Por resultado elementar entende-se resultado indivisível. Vamos denotar o espaço amostral por Ω .

Tomemos como exemplo o experimento de lançar um dado honesto e observar o número da face superior. Os resultados do experimento são 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Note que são resultados indivisíveis e, portanto, elementares. Dessa forma, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como exemplo de resultado não elementar, temos o resultado "sair número par", que é composto pelos resultados elementares 2, 4 e 6. Logo, esse resultado $\{2, 4, 6\}$ não pertence ao espaço amostral.

Vamos chamar de evento o resultado de um experimento (que pode ocorrer ou não). Ω é o evento certo e $\emptyset$ é o evento impossível.

Denotamos o evento por $A, B, \dots$. Se $A = \{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, então A é um evento elementar.

Vamos definir uma classe de eventos formada por subconjuntos de Ω , $\mathcal{F}$ não vazia. Seguem as seguintes propriedades:

A1) $\Omega \in \mathcal{F}$, em que $\mathcal{F}$ é a classe de eventos.

A2) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

43) Se $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n=1, 2, 3, \dots$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Uma classe de eventos que satisfaz $A1$, $A2$ e $A3$ é dita ser uma σ -álgebra. Note que essa classe é fechada por um número enumerável de operações de $\cup$, $\cap$ e c .

Como exemplo de σ -álgebra, no caso discreto usualmente se considera o conjunto das partes de Ω como a σ -álgebra. No exemplo do lançamento do dado, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \dots, \Omega\}$. No caso contínuo, usualmente se considera a σ -álgebra de Borel, $\mathcal{B}^n$, que é a menor σ -álgebra que contém todos os retângulos n -dimensionais de $\mathbb{R}^n$.

Agora, vamos assumir que, para cada evento $A \in \mathcal{F}$, associamos um número real $P(A)$, que chamamos de probabilidade de A ocorrer. Digamos, então, que A é um evento aleatório.

Sejam as seguintes propriedades:

P1) $P(A) \geq 0$.

P2) $P(\Omega) = 1$.

P3) Se A_n , $n=1, 2, 3, \dots \in \mathcal{F}$, são disjuntos $2a2$, então

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Nessa forma, uma função $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz P1, P2 e P3 é uma medida de probabilidade em $\mathcal{F}$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Dessa forma, conseguimos definir um espaço de probabilidade.

Um espaço de probabilidade é um trio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ em que

Ω = espaço amostral,

$\mathcal{F}$ = σ -álgebra em Ω

P = uma medida de probabilidade em $\mathcal{F}$.

1-A) Se $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, então (A_n) é uma sequência crescente de eventos.

Suponha que exista $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, em que A pode ser Ω .

Dessa forma, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ existe e, pela propriedade de continuidade de probabilidade, se $A_n \uparrow A$, então $P(A_n) \uparrow P(A)$.

Mas como $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, pois (A_n) é sequência crescente, $P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

e, logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

É válido supor que exista o limite da sequência A_n pois, por ser uma sequência crescente, se o limite não existisse, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tomaria todo o espaço amostral (ou uma parte dele) e, dessa forma, existiria um limite para a sequência.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

1-3) Como $P(A_i \cap A_j) = 0, \forall i \neq j$, então os eventos são disjuntos 2a 2.

Dessa forma, utilizando a propriedade P3 descrita anteriormente,

temos σ -aditividade e
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Como os eventos $A_n \in \mathcal{F}$ que estão no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, então esse resultado é consequência do axioma 3 de probabilidade.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Questão 2 A) Vamos supor, sem perda de generalidade, que a bola está centrada na origem $(0,0,0)$.

Dados os N pontos escolhidos, temos N distâncias desses pontos, isto é, para cada ponto X_i , temos uma distância D_i associada, que é a distância do ponto à origem.

Dessa forma, se obtemos uma amostra de N pontos, obtemos uma amostra de N distâncias, seja $D_1, D_2, \dots, D_N$.

Seja D a variável aleatória "Distância do ponto X_i ao centro da bola", temos que sua função de distribuição é dada por

$$F_D(d) = P(D \leq d) = \frac{\text{Volume da bola de raio } d}{\text{Volume da bola de raio } R}$$

$$\text{pois } P(D \leq d) = P(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq d) = P(x^2 + y^2 + z^2 \leq d^2).$$

Queremos a probabilidade da distância entre o centro da esfera e o ponto mais próximo ser maior que $r > 0$.

Isso significa que queremos a prob. da distância mínima ser maior que r .

Pela distribuição da estatística de ordem "Mínimo", temos que

$$P(D_{(1)} < r) = 1 - [1 - P(D < r)]^N = 1 - \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]^N \quad e,$$

a probabilidade procurada é



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

$$P(D_{(1)} > r) = 1 - P(D_{(1)} \leq r) = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]^N$$

em que $D_{(1)}$ é a mínima distância dos N pontos ao centro da bola.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Questão 3(A) Temos que $x_i \sim \text{Poisson}(\theta)$ e $h(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{1/2}}$.

A verossimilhança é dada por

$$p(x|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i}}{(n \prod x_i!)}$$

A distribuição a posteriori de θ será

$$\pi(\theta|x) \propto p(x|\theta)h(\theta) \propto e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i} \cdot \frac{1}{\theta^{1/2}} \propto e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i - \frac{1}{2}}$$

Essa é o núcleo de uma distribuição $\text{Gamma}(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2}, n)$.

$$\text{Logo } \theta|x \sim \text{Gamma}(\sum x_i + \frac{1}{2}, n).$$

Vamos encontrar a distribuição de $\psi = 2n\theta$.

$$\begin{aligned} \pi(\psi|x) &= \pi(\theta|x) \Big|_{\theta=\frac{\psi}{2n}} \cdot \left| \frac{1}{2n} \right| \\ &= \frac{(n)^{\sum x_i + 1/2}}{\Gamma(\sum x_i + 1/2)} e^{-n \frac{\psi}{2n}} \cdot \left(\frac{\psi}{2n} \right)^{\sum x_i - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2^{\sum x_i + 1/2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\sum x_i + 1/2)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\psi} (\psi)^{\sum x_i - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \psi|x \sim \text{Gamma}(\sum x_i + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Questão 3(B) Testar $\begin{cases} H_0: \theta \geq \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$ é equivalente a testar $\begin{cases} H_0: \phi \geq 2n\theta_0 \\ H_1: \phi < 2n\theta_0 \end{cases}$

(escrevi ϕ ao ~~vez~~ ~~lugar~~ ~~de~~ ψ para facilitar a escrita, ou seja, $\phi = 2n\theta$).

Logo, $P(H_0) = P(\phi \geq 2n\theta_0)$; $P(H_1) = P(\phi < 2n\theta_0)$.

$$P(H_0|x) = \frac{P(H_0, x)}{P(x)} = \frac{P(x|H_0)P(H_0)}{P(x)} = \frac{P(x|\phi \geq 2n\theta_0)P(\phi \geq 2n\theta_0)}{P(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{em que } P(x) &= \int_{\Phi_0} P(x|H_0)P(H_0)d\phi + \int_{\Phi_1} P(x|H_1)P(H_1)d\phi \\ &= \int_{2n\theta_0}^{\infty} P(x|H_0)P(H_0)d\phi + \int_0^{2n\theta_0} P(x|H_1)P(H_1)d\phi. \end{aligned}$$

$$P(H_1|x) = \frac{P(x|\phi < 2n\theta_0)P(\phi < 2n\theta_0)}{P(x)}$$

A razão de chances a priori é

$$O(H_1, H_0) = \frac{P(H_1)}{P(H_0)} = \frac{P(\phi < 2n\theta_0)}{P(\phi \geq 2n\theta_0)}$$

A razão de chances a posteriori será

$$O(H_1, H_0|x) = \frac{P(H_1|x)}{P(H_0|x)} = \frac{P(x|H_1)P(H_1)}{P(x|H_0)P(H_0)}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

o fator de Bayes é

$$B(H_1, H_0) = \frac{O(H_1, H_0 | x)}{O(H_1, H_0)} = \frac{p(x | H_1)}{p(x | H_0)} = \frac{p(x | \phi \leq z_{\alpha})}{p(x | \phi \geq z_{\alpha})}.$$

e então temos um teste para testar a hipótese em ϕ sobre a distribuição de ϕ .



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Questão 4. Primeiro, encontramos a dist. a posteriori de θ .

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta) g(\theta)$$

$$\propto \left[\prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{x_i \in (0, \theta)\} \right] \cdot g(\theta)$$

$$\propto \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{x_{(1)} > 0\} \mathbb{1}\{x_{(n)} < \theta\} \cdot \frac{2}{\theta^3} \mathbb{1}\{\theta \in (1, \infty)\}$$

$$\propto \frac{1}{\theta^{n+3}} \mathbb{1}\{\theta > x_{(n)}\} \mathbb{1}\{\theta \in (1, \infty)\}, \quad x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

Nessa forma, se $x_{(n)} > 1$, $\pi(\theta|x) \propto \frac{1}{\theta^{n+3}} \mathbb{1}\{\theta \in (x_{(n)}, \infty)\}$

e se $x_{(n)} < 1$, $\pi(\theta|x) \propto \frac{1}{\theta^{n+3}} \mathbb{1}\{\theta \in (1, \infty)\}$.

Como, a priori, assumimos que θ deve ser maior que 1 (pois tem densidade nula para valores menores que 1), trabalharemos com $\theta > 1$.

O estimador de Bayes é o que minimiza a perda esperada

$$R(\delta) = \mathbb{E}_{\theta|x} [L(\delta, \theta)].$$

Logo



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

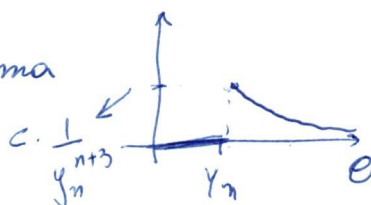
$$R(\delta(Y_n)) = E_{\theta|x} [L(\delta(Y_n), \theta)] = \int_{\mathcal{N}} L(\delta(Y_n), \theta) p(\theta|x) d\theta.$$

$$= \int_{\mathcal{N}} |\delta(Y_n) - \theta| p(\theta|x) d\theta = \int_{\theta > \delta(Y_n)} (\theta - \delta(Y_n)) p(\theta|x) d\theta + \int_{\theta \leq \delta(Y_n)} (\delta(Y_n) - \theta) p(\theta|x) d\theta,$$

(I) (II)

em que $Y_n = X_{(n)}$,

Perceba que a posteriori é da forma



Logo, se $\delta(Y_n) = Y_n$, a segunda integral (II) é nula, pois será
 $\int_{Y_n}^{Y_n} (\cdot) d\theta = 0$.

Também temos que $\delta(Y_n) = Y_n$ minimiza a integral (I).

Logo, o estimador de Bayes baseado na estatística suficiente Y_n , é
 $\delta(Y_n) = Y_n$.