



Fazer Matemática em sala de aula usando diversos recursos

Lucia A.A. Tinoco (Coord.)

Fatima C. Ferreira ♦ Gilda Q. Portela ♦ João Rodrigo E. Statzner

Johnny dos Santos ♦ M. Palmira da C. Silva

Matheus Nascimento ♦ Raissa Moraes ♦ Rosa Novellino

Rose A. Lacerda ♦ Rosiméri C. França.



FAZER MATEMÁTICA EM SALA DE AULA USANDO DIVERSOS RECURSOS

Coordenação: Lucia de A. Tinoco

Ed. IM / UFRJ – Projeto Fundação
Rio de Janeiro
2023

F287

Fazer matemática em sala de aula usando diversos recursos [recurso eletrônico] / Lucia Arruda de Albuquerque Tinoco (Coordenadora) ; Fatima Cristina de Sousa Ferreira ; Gilda Maria Quitete Portela ; João Rodrigo Esteves Statzner ; Johnny Nazareth dos Santos ; Maria Palmira da Costa Silva ; Matheus Nascimento dos Santos ; Raissa Moraes de Lira ; Rosa Cordelia Novellino de Novaes ; Rose Anne Lacerda França ; Rosiméri Corrêa França. – 1. ed. – Rio de Janeiro : Editora IM/UFRJ – Projeto Fundão, 2023.

Recurso digital

Formato: PDF

Requisitos do sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

ISBN 978-65-86502-09-1

1. Matemática (Ensino fundamental) – Estudo e ensino.
2. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 3. Aprendizagem. 4. Ensino. I. Tinoco, Lucia Arruda de Albuquerque. II. Ferreira, Fatima Cristina de Sousa. III. Portela, Gilda Maria Quitete.
IV. Statzner, João Rodrigo Esteves. V. Santos, Johnny Nazareth dos. VI. Silva, Maria Palmira da Costa. VII. Santos, Matheus Nascimento dos. VIII. Lira, Raissa Moraes de. IX. Novaes, Rosa Cordelia Novellino de. X. França, Rose Anne Lacerda. XI. França, Rosiméri Corrêa.

CDD : 372.7

Capa: Rosiméri Corrêa França

Edição: Rosa C. Novellino de Novaes

Homenagem à Professora Maria Laura Mouzinho Leite Lopes

O Grupo de Matemática no Ensino Fundamental do Projeto Fundão encerra seus trabalhos com a publicação deste *ebook*, no ano em que o Projeto completa 40 anos. Nesta ocasião, emocionados, registramos nossa imensa gratidão e admiração à querida Maria Laura, inspiradora e líder da criação e de todas as ações do Projeto que abraçamos.

Caracterizavam Maria Laura o otimismo, sua coragem de ousar, pensar à frente e defender suas ideias e realizações a todo custo, traços que registramos em placa oferecida a ela nos 25 anos do Projeto Fundão, com a seguinte frase de Goethe.

“Ousadia tem genialidade, poder e mágica. Ouse fazer e o poder lhe será dado”.

Em suas falas, gostava de citar frases clássicas que incorporavam seu modo de viver, como no exemplo das palavras de Alceu de Amoroso Lima dirigidas a ela.

- *“Nem o medo, nem a temeridade, mas a esperança. E a virtude divina da esperança nos ensina que o homem foi feito para o amor, e que a razão não está com os pessimistas”.*

E, de fato, ela se intitulava uma *“realista esperançosa”*.

Em entrevista à Educação Matemática em Revista, ao ser indagada sobre de que modo professores de matemática podem trabalhar na perspectiva da cidadania, respondeu:

“É preciso deixar de considerar que ensino de matemática deve levar o aluno a escrever fórmulas e fazer cálculos que não têm para ele qualquer significado. O fundamental é capacitá-lo a tomar decisões conscientemente, saber argumentar, expressando com lógica o seu pensamento a fim de torná-lo um cidadão crítico, criativo e autônomo”.

Isto tem tudo a ver com sua paixão pela Educação Matemática, resumida na frase de Plutarco que sempre repetia:

“A alma do aluno não é um vaso que se deve encher, mas uma lareira que se deve acender”.

Concluimos com um recorte do livro em sua homenagem, organizado por Marisa Leal e pela Pró-Reitoria de Extensão da UFRJ, nos 30 anos do Projeto Fundão, em 2013, ano em que ela nos deixou.

“Essas qualidades marcaram sua trajetória no Projeto Fundão e pautaram nossa amizade ao longo de toda a nossa convivência. O cuidado e o carinho com que nos acolhia, protegia e orientava ficarão para sempre em nossa memória”.

Somos sempre gratos, Maria Laura!

SUMÁRIO

	Página
<u>Apresentação</u> -----	1
<u>Sobre os recursos</u> -----	6
<u>Capítulo 1 - Calculando, estimando e verificando</u> -----	11
1.1 - <u>Cruzadinhas</u> -----	12
1.2 - <u>Quem está certo?</u> -----	14
1.3 - <u>A máquina pode errar?</u> -----	17
1.4 - <u>A calculadora quebrada</u> -----	19
1.5 - <u>Comprando canetas</u> -----	22
1.6 - <u>A Receita do Vovô</u> -----	24
1.7 - <u>A matemática das gotas</u> -----	27
1.8 - <u>O menino que não gostava de remédio</u> -----	30
1.9 - <u>Brincando com números e símbolos</u> -----	33
1.10 - <u>Regularidades em operações com números racionais</u> -----	36
<u>Capítulo 2 - Noções algébricas em situações variadas</u> -----	40
2.1 - <u>Sequência de figuras</u> -----	41
2.2 - <u>Dando uma mãozinha à natureza</u> -----	45
2.3 - <u>O preço dos cadernos</u> -----	50
2.4 - <u>A compra do skate</u> -----	53
2.5 - <u>Apertos de mãos</u> -----	56
2.6 - <u>Área da casa</u> -----	59
<u>Capítulo 3 - Observar padrões na Geometria</u> -----	61
3.1 - <u>Soma dos ângulos</u> -----	62
3.2 - <u>As bissetrizes do retângulo</u> -----	64
3.3 - <u>Traçando e contando segmentos</u> -----	67
<u>Capítulo 4 - Fotografia e proporcionalidade</u> -----	70
4.1 - <u>O maior peixe</u> -----	71
4.2 - <u>Atividade da quadra</u> -----	73
4.3 - <u>A Altura da sala</u> -----	76
4.4 - <u>A compra do sabão em pó</u> -----	78
<u>Capítulo 5 - Áreas e perímetros de figuras em movimento</u> -----	80
5.1 - <u>Retângulo cortado</u> -----	81
5.2 - <u>Mexendo com figuras</u> -----	84
5.3 - <u>Sequência de hexágonos</u> -----	89
<u>Capítulo 6 - O dilema dos cartões</u> -----	94
<u>Bibliografia</u> -----	100

Apresentação

Caros colegas,

O Grupo de Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais do Setor Matemática do Projeto Fundão vem compartilhar com vocês, professores, mais um novo trabalho. Este Grupo tem experiência junto à comunidade de professores de Matemática, produzindo subsídios para a sala de aula, há 40 anos. Todo o material produzido pelo Projeto tem origem no trabalho em grupos colaborativos, sendo, cada um, constituído de professores da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e outras Instituições de Ensino Superior, professores que atuam ou já atuaram na escola básica e estudantes de Licenciatura do Instituto de Matemática da UFRJ. É, portanto, um trabalho **de professores para professores**.

As seguintes constatações foram levadas em consideração durante o desenvolvimento do texto que ora apresentamos, sob a forma de e-book, motivando-nos a aprofundar nossos estudos, e a elaborar, testar e propor as atividades que o compõem.

- O conflito existente entre a importância da Matemática da escola básica para a vida de qualquer indivíduo e a dificuldade dos estudantes com essa disciplina, considerada por muitos desinteressante e sem sentido.
- A necessidade de apresentar situações que motivem e incentivem a participação dos estudantes no trabalho pedagógico para se tornarem protagonistas da sua aprendizagem, minimizando assim suas dificuldades.
- O fato de que os recursos digitais como celular, calculadora e computador estão a cada dia mais integrados à vida dos estudantes, situação essa intensificada com a pandemia.
- O gosto e interesse das crianças e adolescentes pelas Histórias em Quadrinhos.
- A importância de o estudante se expressar na linguagem materna e algébrica para organizar e comunicar ideias matemáticas.

A nossa proposta sublinha alguns aspectos, a saber.

O Fazer Matemática e a Resolução de Problemas

Na escolha do título do livro, enfatizamos o ‘Fazer Matemática’, uma vez que o nosso objetivo mais amplo é uma sala de aula em que os alunos tenham oportunidade de fazer Matemática, no sentido proposto por Walle (2009):

...] a lista de verbos a seguir pode ser encontrada na maior parte da literatura de Educação Matemática: explorar, investigar, conjecturar, resolver, justificar, representar, formular, descobrir, construir, verificar, explicar, prever, desenvolver, descrever e usar. Estes são verbos da ciência, indicando processos de “fazer sentido” e “desvendar”]....[Em sala de aula, onde se faz Matemática dessa maneira, os estudantes estão recebendo uma mensagem poderosa: “Você é capaz de fazer com que isto faça sentido – você é capaz de fazer Matemática”. (Adaptação de WALLE, Apresentação do livro, 2009)

Como nos demais trabalhos do Projeto Fundão, adotamos a metodologia do Ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas (Onuchic e Allevato, 2011). Segundo estas autoras, “o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e os professores, os responsáveis por conduzir esse processo”, e um problema se caracteriza como “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer” (p. 80-81).

O nosso objetivo é, portanto, incentivar tal interesse, com a forte crença em que o uso de recursos variados, a maioria deles digitais, propicia que este objetivo seja atingido, crença esta adquirida em permanente trabalho de elaboração, aplicação, análise e avaliação de propostas para sala de aula e respaldada nos autores citados ao longo do livro e outros. Não se trata de substituir recursos já usados por outros, e sim, de harmonizar o uso de vários recursos, mais dinâmicos e lúdicos, para motivar os alunos e permitir o seu engajamento em processo reflexivo de construção de conhecimento, acompanhado da argumentação e do uso da linguagem oral e escrita dos alunos. O uso ou não dos recursos indicados em cada atividade depende naturalmente das condições da escola. Caberá ao professor avaliar essas condições, buscando formas alternativas para que haja o engajamento de seus alunos.

Os recursos tecnológicos e a linguagem dos quadrinhos

Ensinar Matemática, atualmente, é um desafio para todo professor, pois os alunos têm interesses diversos que, quase sempre, não incluem essa disciplina. No entanto, o grande fascínio deles pelos equipamentos eletrônicos, em particular, os computadores e celulares, pode ser usado a favor da aprendizagem de Matemática, com o uso de aplicativos que facilitam o desenvolvimento de conceitos e realizam cálculos necessários para formalizá-los. O mesmo pode-se dizer em relação às Histórias em Quadrinhos.

A nossa adesão aos recursos tecnológicos vai ao encontro do que diz Lesh (2000), citado em Jacinto e Carreira (2017), ao se referirem às potencialidades da imersão no mundo de tais recursos.

Estas sofisticadas ferramentas digitais introduzem novas situações de resolução de problemas nas quais a matemática é útil; introduzem novas normas e procedimentos para construção, argumentação e justificação; e expandem radicalmente o tipo de capacidades e compreensões matemáticas que contribuem para o sucesso nessas situações. (LESH, 2000, p. 178, apud JACINTO; CARREIRA, 2017, p. 267).

De fato, cabe ao professor, não só buscar conhecer sempre mais dos recursos a serem utilizados, como escolher, elaborar e apresentar aos alunos atividades que lhes permitam atribuir significado aos conteúdos envolvidos e fazer Matemática. O processo reflexivo de construção do conhecimento se dá por meio das justificativas dos estudantes para as tentativas e respostas encontradas por eles com o uso dos diversos recursos. As justificações são destacadas por pesquisadores como Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2015), no seu trabalho em Portugal, e constituem um diferencial do nosso trabalho.

O livro contém também grande número de problemas propostos em linguagem de quadrinhos, o que ainda é pouco usual em salas de aula, especialmente em Matemática. Nestes, mais uma vez, a exploração das situações por meio de questionamentos incentivando a reflexão e a busca de informações são marcas importantes.

A Generalização

Em muitas atividades deste livro, os alunos são desafiados a reconhecer regularidades e desenvolver a capacidade de apresentar argumentos na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei de generalização, registrando-os em linguagem materna, algébrica ou geométrica. Os pesquisadores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, apud Ramos, 2020) afirmam que, nesse processo, o aluno começa a desenvolver a “percepção de regularidade, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar estruturas de uma situação problema e a presença do processo de generalização”. (p.20)

Neste sentido, citamos mais uma vez João Pedro da Ponte (2005) que afirma: “uma das vias privilegiadas para promover o pensamento algébrico é o estudo de padrões e regularidades” (p.37).

As atividades que tratam de regularidades envolvem contextos variados e podem estar associadas a conteúdos de Aritmética, Álgebra e Geometria. Além de contribuírem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, permitem a integração entre os campos da Matemática e desta disciplina com o cotidiano dos alunos.

Salientamos finalmente que situações que não apresentam “regularidade” não podem ser generalizadas.

Encontram-se frequentemente, principalmente em níveis elementares, casos em que os alunos generalizam fatos, verificando apenas a sua validade para casos particulares. É, portanto, necessário que tais alunos explorem situações que lhes permitam concluir que isso não é suficiente e os ajudem a desenvolver um pensamento genérico. Nesse sentido, também é adequado o trabalho com situações que não apresentem regularidade (TINOCO, 2011, p. 51).

Assim, a indissociabilidade entre regularidade – generalização – justificativa merece atenção especial.

A voz do aluno

Um último aspecto a destacar, que vem sendo valorizado ao longo do trabalho do nosso grupo, é a importância de dar voz ao aluno. Se o objetivo é que ele seja co-construtor do próprio conhecimento, que ele “faça” Matemática, esse aluno precisa ser ouvido sempre, não somente em situações de avaliação ou para observar os seus erros, mas, principalmente, para levar em conta as suas estratégias e formas de raciocinar, na prática em sala de aula. Uma plenária após a realização da atividade, na qual os alunos se coloquem sobre o que acharam da atividade e o que aprenderam com ela poderá dar bons subsídios ao professor.

Quando valorizamos o “dar voz ao aluno” nos referimos à importância de que estes usem ao máximo a linguagem corrente, entre si e com o professor, para construir estratégias e raciocínios e registrá-los. Beatriz D’Ambrósio (2017), no seu artigo O Professor Pesquisador diante da Produção Escrita dos Alunos, se refere a três formas de ouvir a voz do aluno: a primeira, para avaliar, procurando a resposta correta do aluno ou para mudar o pensamento dos que não conseguiram obtê-la; a segunda, com o objetivo de interpretar ou compreender a solução do aluno, fazendo perguntas a ele e criando situações que o levem a justificá-la. Na terceira, que ela chama de hermenêutica, o professor ouve a voz do aluno, acreditando em poder aprender algo novo com ele. Certamente, é conveniente que as três formas estejam presentes em uma sala de aula apoiada na diversidade de recursos.

Concluindo

Ao valorizar os recursos digitais, vale informar que não nos apresentamos como especialistas em tecnologia e sim como um grupo de pesquisa em ensino-aprendizagem de Matemática, que se apoia em pesquisas e na própria experiência com a produção de subsídios para professores, como meios de possibilitar uma atuação mais eficaz em sala de aula. Neste sentido, também observamos que os problemas em quadrinhos, muito presentes neste livro, mostraram-se ao longo do trabalho recurso bastante mobilizador

do engajamento dos estudantes nas atividades, embora não pretendam ser propriamente “histórias em quadrinhos”.

Os autores deste livro colocam-se no lugar de um professor, em cuja trajetória não constou a reflexão a respeito do uso de recursos digitais e outros para o ensino de Matemática. Opiniões e dúvidas de alunos e professores no processo de elaboração, adaptação e experimentação das atividades enriqueceram o trabalho. Neste sentido, agradecemos especialmente as contribuições das professoras Luciana Maria Lima da Silva, Marcia Moutinho e Ana Carolina Paschoal.

Neste livro encontram-se atividades envolvendo conteúdos como: operações elementares e suas propriedades, cálculo mental, conceito de variável, proporcionalidade, equações e criação de expressões algébricas, noções de múltiplos e divisores, conceitos de polígono e polígono regular e área e perímetro, não necessariamente nesta ordem. Como introdução a cada um dos seis capítulos, comentamos brevemente os conteúdos referentes às atividades propostas. Em geral são enfatizadas a generalização, a abstração, a argumentação e a construção do pensamento algébrico.

Observamos que o objetivo do grupo foi o de incentivar o uso de recursos variados em sala de aula. Para isso, elaborou atividades e adaptou para o uso desses recursos, propostas já incluídas em outras obras, das quais destacamos os livros *Álgebra: pensar, calcular, comunicar...* e *Argumentações e Provas no Ensino de Matemática*, ambos do Projeto Fundão. Acreditamos que essa prática pode ser adotada pelos nossos leitores, com muito proveito.

O livro termina com um Desafio em quadrinhos, explorando o pensamento lógico dedutivo, com sugestões para desenvolver esse tipo de raciocínio, independentemente de conteúdos matemáticos.

Antes de apresentar as atividades, falaremos brevemente sobre os recursos que utilizamos, lembrando que são possibilidades de diversificar o trabalho na sala de aula, permitindo intensificar o protagonismo dos estudantes no processo de aprendizagem.

Sobre os Recursos

Nas atividades desta proposta é sugerido o uso de recursos do *smartphone*, do computador e da linguagem de quadrinhos.

Os *smartphones* e os computadores não só fazem parte do cotidiano dos estudantes, como modificam o seu modo de viver e pensar. Por esse motivo, concordamos com inúmeros educadores que o uso de tais recursos em sala de aula pode incentivar esses alunos a assumir um papel mais ativo na construção do conhecimento.

Como professor, você já teve alguma experiência que ilustre essa afirmação?

No que tange especificamente às competências da Matemática, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda: "... utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2017, p. 269). Tais competências se incluem em um contexto mais geral destacado no mesmo documento.

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2017, p. 11)

A seguir detalhamos algumas características e funcionalidades dos recursos utilizados nesta proposta.

CELULAR/SMARTPHONE



Os alunos estão cada vez mais usando celulares para se conectar entre si e com o mundo. Essa tendência nos impõe a necessidade de refletir sobre como aproveitar essa mídia em sala de aula.

Surgem cada vez mais aplicativos disponíveis para celular que podem ser utilizados como recursos pedagógicos a favor do aprendizado do aluno, o que é positivo, pois há um número maior de alunos com acesso ao celular do que ao computador. Neste sentido, a interatividade é uma das vantagens mais expressivas desses recursos, por despertar bastante o interesse dos alunos.

Entretanto, o professor deve estar atento para que os alunos não se tornem dependentes do celular para a realização de qualquer tarefa, nem se dispersem com outras funções do aparelho. Dessa forma, as atividades devem ser elaboradas e desenvolvidas de modo que necessitem de dialogar entre eles e com o professor.

CALCULADORA



Acreditamos que a calculadora seja o recurso mais usado pelos alunos quando se refere ao ensino de Matemática. Eles recorrem a ela para efetuar qualquer conta necessária para a realização de uma atividade. Ressaltamos que ela pode ser um instrumento para que os estudantes desenvolvam várias habilidades, como a de cálculo mental, no seu processo de aprendizagem. Essa é uma das habilidades que a BNCC nos chama a atenção quando escreve nas orientações para o 6º ano:

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora. (BRASIL, 2017)

De acordo com D'Ambrosio (1986) e muitos outros pesquisadores em Educação Matemática, nas atividades propostas nesse livro, a Calculadora não será utilizada para obter apenas o resultado de operações, mas sim como facilitadora de observação de regularidades, interpretação de generalizações, resolução de problemas e desenvolvimento do cálculo mental, situações em que o aluno é solicitado a participar da construção do seu conhecimento, particularmente, do pensamento algébrico. Nesse contexto, D'Ambrosio (1986) nos orienta sobre o preconceito dos professores que acreditam que o uso da calculadora em sala de aula faz com que os alunos não desenvolvam e pratiquem o raciocínio em relação às operações elementares, ao dizer:

[...] todo mundo deveria estar utilizando a calculadora, uma ferramenta importantíssima. Ao contrário do que muitos professores dizem, a calculadora não embota o raciocínio do aluno – todas as pesquisas feitas sobre aprendizagem demonstram isso (D'AMBROSIO, 1986, p. 56).

PHOTOMATH



O *Photomath* é um aplicativo disponível para os sistemas IOS e Android e depende da internet para seu uso no celular. Suas principais funções, para o ensino básico, são resolver equações, expressões e construir gráficos, através da captura da imagem impressa ou manuscrita, com a câmera do smartphone, sendo possível também editar ou digitar usando sua própria calculadora. Os conteúdos abordados pelo aplicativo permeiam desde a Educação Básica até o Ensino Superior.

Muitos professores podem pensar que o uso do *Photomath* tornará inútil o ensino de resolução de equações e de gráficos de função. Neste sentido, Borba e Penteado (2003) recordam o mesmo temor em relação à calculadora: “Se meu aluno utilizar a calculadora, como ele aprenderá a fazer conta?” (2003, p. 12). Mais uma vez, destacamos que o importante é como esse aplicativo será utilizado na sala de aula. Muitas vezes o aluno é capaz de executar corretamente os procedimentos para resolução de uma equação, mas não é capaz de escrever a equação que traduz uma determinada situação-problema e de analisar e interpretar as soluções encontradas, bem como verificar se estas satisfazem o problema proposto.

O quadro a seguir apresenta uma síntese das potencialidades do *Photomath*.

Potencialidades do <i>Photomath</i>	Justificativa
Apresentar caráter lúdico	Uso do aplicativo por meio do <i>smartphone</i> , proporcionando assim uma estratégia de ensino próxima à realidade dos estudantes.
Estimular a capacidade investigativa do estudante	Com a resolução do exercício de forma imediata pelo aplicativo, os estudantes podem explorar vários exemplos e elaborar conclusões a partir da análise dos resultados.
Facilitar o aprendizado por meio da análise de resultados e do erro	A apresentação das resoluções passo a passo possibilita que o estudante analise os resultados, conclua, identifique e verifique os erros.
Valorizar a escrita matemática	Estimula o estudante a usar corretamente a notação matemática, para que a captura de imagem do aplicativo leia corretamente seu manuscrito.

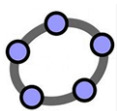
Fonte: COUTINHO, FEITOSA e PINHEIRO, 2019, p. 141-142.

CÂMERA



A câmera do *smartphone* tem sido constantemente usada para captar imagens no dia a dia. Os alunos não deixam escapar uma oportunidade de fazer uma “selfie” ou de registrar uma “dancinha”. Esse interesse dos estudantes pode ser um elemento facilitador da utilização da câmera como recurso para a exploração de conceitos e resolução de problemas matemáticos, podendo ser usada para potencializar o estudo da proporcionalidade, criando oportunidade de o aluno vivenciar e verificar a presença desta relação em situações concretas que aproximam a escola do seu cotidiano.

GEOGEBRA

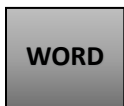


O GeoGebra é um *software* interativo de Matemática dinâmica criado por Markus Hohenwarter para uso didático. É possível baixá-lo gratuitamente para computadores e celulares com o sistema Android ou IOS. Conteúdos de álgebra, geometria, gráficos, estatística e planilhas de cálculo podem ser explorados com o aplicativo. Ademais, com esse *software* é possível trabalhar em um ambiente tridimensional, que pode auxiliar no ensino-aprendizagem de geometria espacial.

Em particular, no tocante à geometria plana, permite realizar construções com pontos, segmentos, retas, funções, vetores, entre outras. Também, existe a possibilidade de interagir e modificar os objetos construídos de maneira dinâmica, o que facilita a dedução e análise de suas propriedades.

Nem todas as ferramentas do *software* são acessíveis de imediato, entretanto, os alunos facilmente aprendem a manusear as que são essenciais para a realização de tarefas simples. Se explorado pelo professor na elaboração de atividades que envolvam essas ferramentas, pode despertar nos alunos o interesse em estudar vários conteúdos de Matemática e a desenvolver suas habilidades de conjecturar e de argumentar. Neste sentido o GeoGebra pode ser considerado como aliado à aprendizagem em Matemática.

WORD



O Word é um editor de texto de fácil manuseio. Por ser composto de recursos que possibilitam inserir imagens, gráficos e tabelas, o programa permite uma aprendizagem interativa em Matemática. Ele possibilita criar, formatar, editar e salvar documentos, links da internet, misturando elementos visuais e verbais, tudo ao mesmo tempo, o que pode promover o desenvolvimento da criatividade e o interesse dos alunos. O trabalho com o Word pode ser desenvolvido também com qualquer outro editor de texto compatível.

PROBLEMAS EM QUADRINHOS



Problemas de Matemática apresentados em um contexto informal de uma sequência de quadrinhos vêm sendo valorizados no nosso grupo e vão ao encontro de trabalhos recentes em prol do uso de quadrinhos em salas de aula de Matemática no Brasil. Eles podem constituir um instrumento no ensino desta disciplina tornando seus conteúdos mais atraentes para os alunos e as aulas mais dinâmicas, facilitando o aprendizado e despertando nos alunos o interesse de resolver problemas de Matemática.

Segundo Vergueiro (2005, p. 22), apud Moraes (2009)

Palavras e imagens, juntos, ensinam de forma mais eficiente – a interligação do texto com a imagem, existente nas histórias em quadrinhos, amplia a compreensão de conceitos de uma forma que qualquer um dos códigos. (MORAES, 2009, p. 11)

Em eventos recentes, bem como em experiências do grupo, observou-se o entusiasmo de vários professores, que confirmaram ser essa forma de apresentação de problemas mais leve e atrativa de desenvolver atividades de Matemática.

Na aplicação de uma atividade em quadrinhos, como em todos os problemas propostos, é importante permitir que os alunos conversem entre si para fazer a interpretação do problema apresentado, com a intervenção do professor para auxiliá-los a resolver dificuldades que surjam. Ressaltamos que, embora ainda seja um desafio para o professor de Matemática saber olhar ou utilizar os quadrinhos como um recurso didático no ensino, vale a pena tentar.

Pellin (2016) ao citar Lopes (2010), apoia a utilização de atividades em quadrinhos por considerar ser uma maneira criativa para atrair os alunos.

Os quadrinhos vêm ao encontro da necessidade da educação, a fim de motivar os alunos para a leitura e o aprendizado da matemática, despertando o interesse, seduzindo sua imaginação e ampliando os horizontes de conhecimento da criança (LOPES, 2010, Apud PELLIN, 2016, p.5)

Vale a pena ressaltar que, neste *ebook*, os Problemas em Quadrinhos, em geral, são explorados por meio de perguntas e envolvem situações ligadas ao dia a dia dos estudantes. Elas visam a conduzir um processo de reflexão e de organização do pensamento dos alunos que leve à construção de algum conteúdo. Não menos importante é valorizar a tradução do que eles pensam em palavras ou desenhos.

Capítulo 1 – Calculando, Estimando e Verificando

Neste capítulo apresentaremos atividades que abordam as operações matemáticas elementares e suas propriedades, bem como as noções de múltiplos e divisores.

No 6º ano, muitos dos conteúdos que já foram trabalhados nos anos iniciais são retomados, o que desmotiva os alunos. As questões desafiadoras, bem como a diversidade de recursos e linguagens na apresentação desses conteúdos podem resgatar o interesse, gerar polêmicas e discussões enriquecedoras, propiciando o desenvolvimento da argumentação e o “fazer Matemática”. A exploração dessas atividades em outros anos escolares pode também ser de grande utilidade, por partirem de situações do cotidiano do aluno, de sua vivência social ou mesmo de sua prática escolar.

A diversidade de recursos utilizada na apresentação e no desenvolvimento das atividades torna, por exemplo, a apresentação formal de uma propriedade distributiva em um problema real a ser resolvido, ou mesmo, a noção de igualdade como equivalência em um desafio de “números cruzados” e a descoberta de padrões e curiosidades em cálculos simples, podendo levar o aluno a desenvolver habilidades de generalização e auxiliar na aprendizagem de outros assuntos ao longo do seu percurso escolar.

1.1 - CRUZADINHAS¹

WORD

Para realizar a atividade acesse o link ou o QR Code. Para realizá-la no computador, depois de abrir o link, clique em “arquivo – fazer uma cópia”.

<https://docs.google.com/document/d/1QuMS2wk9XSOy49pAavvCFJEyrUWhzkGZ/edit>



Os espaços em branco devem ser preenchidos por números de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

1	+	12	=		+	4
+		+		+		+
	+	7	=	6	+	
=		=		=		=
	+	11	=		+	5
+		+		+		+
13	+		=		+	18

18	-		=	- 4	+	7
+		+		-		-
- 18	+	7	=	- 4	+	
=		=		=		=
	+	14	=		+	
+		+		+		+
14	-		=	10	-	

¹ Adaptado do livro *Álgebra: pensar, calcular, comunicar...*, Projeto Fundação, IM-UFRJ

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- reforçar o significado de uma igualdade como equivalência;
- tomar contato com a ideia de equação e
- praticar adições e subtrações com números inteiros.

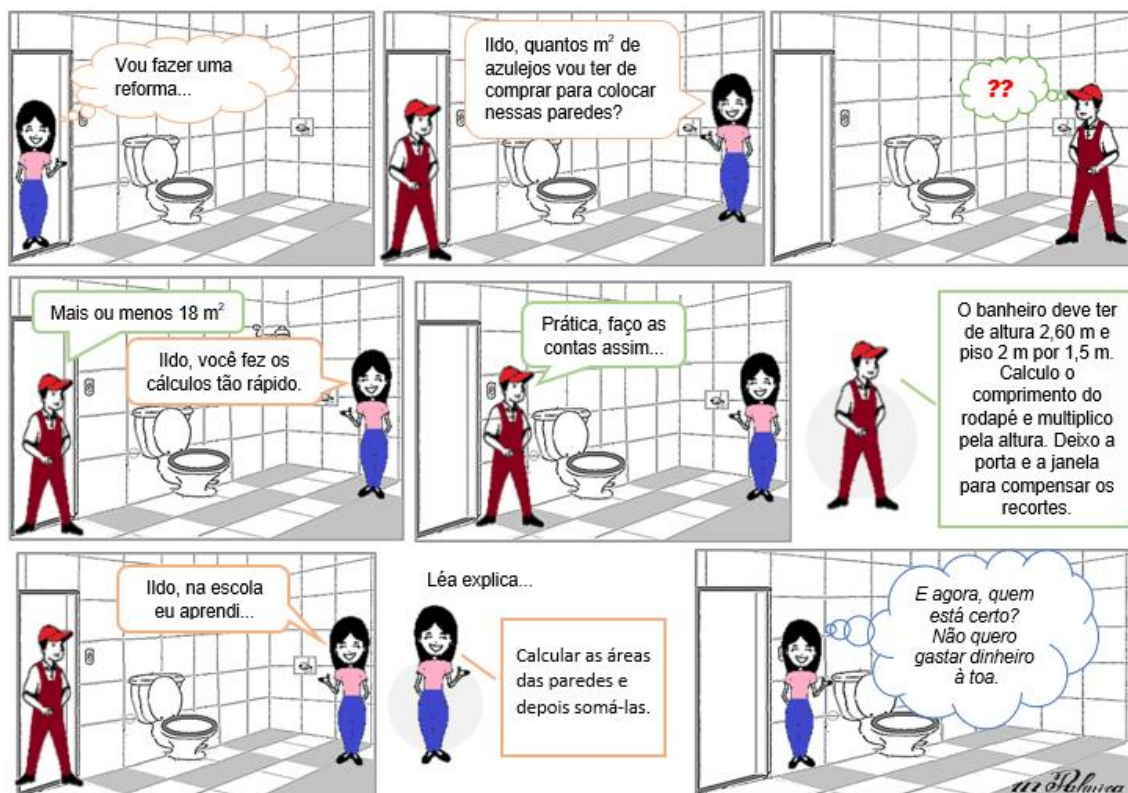
Comentários

- Em experiência com alunos do 7º ano da rede pública (Fig. 1), observou-se que alguns não conseguiram entender que os resultados de ambos os membros das igualdades devem ter o mesmo valor. Muitos olharam apenas para o primeiro número logo após o sinal de igual, o que condiz com resultados frequentemente encontrados em vários níveis de ensino e constatados em pesquisa citada por Walle (2009): “... os alunos consideram que o lado esquerdo de uma igualdade é o problema e o lado direito é a resposta” (p. 260).
- Na cruzadinha com números inteiros, alguns alunos tiveram dificuldade nas igualdades com subtrações de números negativos, o que constituiu oportunidade de o professor perceber a necessidade de consolidar o estudo desse assunto.
- A atividade pode ser usada antes da introdução do conceito de equação, para reforçar o significado de igualdade de sentenças e trabalhar valores desconhecidos.

Figura 1 – Alunos trabalhando



Fonte – Acervo do grupo

1.2 - QUEM ESTÁ CERTO? ²

- 1) Escreva um pequeno texto para um colega explicando a situação apresentada na atividade.
- 2) Para ajudar a tirar a dúvida da dona de casa, forme uma dupla com seu colega e façam os cálculos sugeridos pelo Ildo e pela dona de casa. Cada um escolhe qual vai fazer.
- 3) Comparem os resultados obtidos. O que vocês observaram? Se fossem outros números, isso continuaria acontecendo? Por quê?
- 4) Assinale a igualdade que representa genericamente a propriedade utilizada no item 3.
 - a) $a.b = b.a$
 - b) $a.(b + c) = a.b + c$
 - c) $a.(b + c) = a.b + a.c$
 - d) $(a + b) + c = a + (b + c)$
 - e) $a.(b.c) = (a.b).c$
- 5) Conte um caso que ilustre a preocupação que você ou seus pais tiveram com as despesas, ao planejar uma compra ou uma obra.

² Adaptado do livro *Álgebra: pensar, calcular, comunicar,...*, Projeto Fundação, IM-UFRJ

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

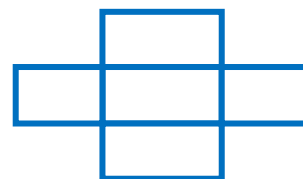
- reconhecer ou ser apresentado à propriedade distributiva, aplicada em situação real;
- identificar a propriedade algébrica que justifica a equivalência entre duas estratégias de cálculo;
- reconhecer a importância do cálculo mental e
- refletir sobre a responsabilidade com o planejamento de suas despesas.

Comentários

- Para realização dessa atividade os alunos precisam estar familiarizados com cálculo da área e do perímetro do retângulo. Caso contrário, o professor deve suprir essa necessidade.
- A situação problema é apresentada em forma de quadrinhos que devem ser analisados pelos alunos em duplas ou grupos, quando possível, o que possibilita uma melhor interpretação da situação.
- É recomendável incentivar que os alunos façam a leitura atenta da conversa entre os personagens, procurando relacionar com situações do seu dia a dia e verificando se existe alguma palavra da qual não conheçam o significado.
- A observação e visualização de figuras espaciais é um importante trabalho, que em geral os alunos não têm oportunidade de experimentar.
- Alguns alunos têm dificuldade em visualizar a situação tridimensional do banheiro. Vale a pena relacionar a sala de aula com uma caixa, ou, se possível pedir que desenhem a planificação das paredes e do chão do banheiro.



Só as paredes



As paredes e o piso

Uma animação para ajudar a visualização está disponível no link ou no QR Code

<https://drive.google.com/file/d/1sr28v-i7ZV4d3HBImn7B4YU1TYn155vp/view?usp=sharing>



- Os estudantes devem ser estimulados a desenvolver estratégias de resolução de problemas (esquemas), recorrendo aos conhecimentos prévios e técnicas operatórias, de modo colaborativo.
- Uma boa oportunidade de valorizar o cálculo mental é destacar a facilidade como lido fez seus cálculos.

1.3 - A MÁQUINA PODE ERRAR? ³



Suponha que, para resolver a expressão

$$7 \times (581 + 399),$$

com ajuda da calculadora, você digita os dados e a máquina fornece o resultado **4466**.

O resultado está correto? Justifique.

³ Adaptada do livro: *Recursos computacionais no ensino de matemática*, Giraldo, Caetano e Mattos

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- refletir sobre a possibilidade de um cálculo feito na calculadora não estar correto;
- realizar estimativas e cálculo mental para conferir resultados;
- analisar uma expressão aritmética, procurando a estratégia mais conveniente de resolução e
- reconhecer a propriedade distributiva em relação à adição.

Comentários

- É recomendável que o professor estimule os alunos a incluir na justificativa a explicação do erro cometido, que não foi de digitação e sim na ordem das operações efetuadas ou de não ter aplicado a propriedade distributiva.
- A pergunta da atividade surpreende os alunos porque eles acreditam que, se a conta foi feita em uma máquina, está certa, sem refletir sobre como esta conta deve ser feita na calculadora. Por meio de atividades desse tipo, pode-se enfatizar o fato de que o detentor do saber é o homem, a máquina é apenas um instrumento.
- Vale a pena o professor observar as diferenças entre as calculadoras, em relação à colocação de parênteses nas expressões aritméticas.

1.4 - A CALCULADORA QUEBRADA ⁴

A tecla 8 da calculadora de Joana está quebrada e ela precisa efetuar nessa calculadora a multiplicação a seguir.

$$347 \times 58$$

- 1) Se a sua calculadora tivesse o mesmo problema, como você efetuaria a conta?
Registre com uma expressão numérica e em palavras como você encontrou o resultado da conta.
- 2) Confira esse resultado, agora, usando a tecla 8.
- 3) Observe a solução que um aluno encontrou para determinar o resultado de 347×58 , sem usar a tecla 8.

$$347 \times 50 + (4 + 4)$$

Ele encontrou o resultado correto?

- 4) Se o resultado não estiver correto, como você completaria a expressão que o aluno escreveu, para encontrá-lo. Troque ideias com seus colegas.

⁴ Adaptada do livro *Matemática em Ação*, Ana Lúcia Bordeaux et al.

Objetivos

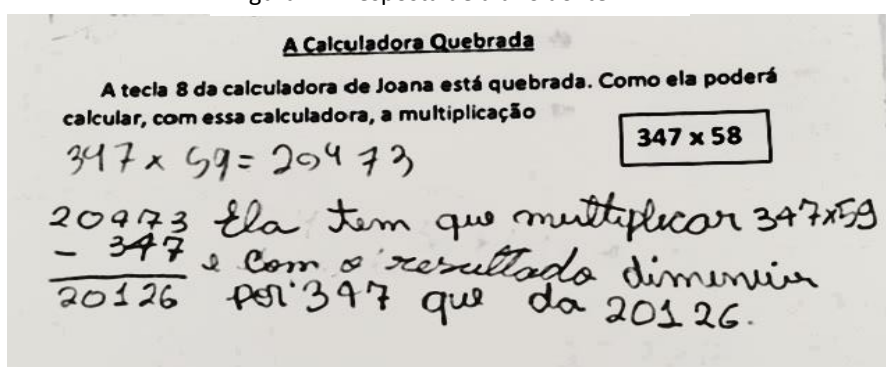
Propiciar ao aluno a oportunidade de

- usar intuitiva e informalmente a propriedade distributiva para efetuar cálculos;
- traduzir com palavras e com uma expressão numérica a estratégia utilizada para efetuar uma conta;
- reconhecer a importância do uso correto de parênteses em uma expressão numérica e
- familiarizar-se com as possibilidades de uso de parênteses nos diversos tipos de calculadora.

Comentários

- Todas as contas desta atividade devem ser feitas com a calculadora.
- Desafios desse tipo, com o uso da calculadora, possibilitam resgatar conhecimentos trabalhados durante a construção das operações, propiciando a criação de estratégias variadas pelos alunos e sua tradução por meio de uma expressão numérica.
- Alguns alunos apresentam dificuldades na resolução do desafio, porém outros com facilidade utilizam intuitivamente o conhecimento das propriedades das operações.
- É importante aproveitar a oportunidade de o aluno criar e registrar a expressão numérica que traduz a estratégia usada para resolver a situação. Em geral, as expressões são dadas para que sejam resolvidas, simplificadas, etc; raramente o aluno escreve expressões, e assim não reconhece a necessidade delas. A sua criação envolve várias habilidades e não apenas repetição de procedimentos, como mostra o exemplo a seguir (Fig. 2).

Figura 2 – Resposta de aluno ao item 1



Fonte – Acervo do grupo

- Devido às dificuldades com a escrita de expressões e sem saber como a calculadora as resolveria, normalmente, registram separadamente as operações feitas, como mostram os exemplos.

Aluno A – “ $347 \times 54 = 18738$ $347 \times 4 = 1388$ $18738 + 1388 = 20126$

Eu multipliquei pela metade de 8, ou seja 4, aí eu irei multiplicar por 4, aí eu somarei o resultado”.

Aluno B - “Só fazer $347 \times 57 + 347 = 20126$ ”

- O uso da linguagem verbal também deve ser incentivado na explicação do raciocínio usado.

1.5 - COMPRANDO CANETAS ⁵

- 1) Explique com suas palavras como a irmã de Jan sabe que a compra de Jan dará 10 reais menos 5 centavos?
- 2) Você já vivenciou alguma situação na qual a pessoa fez um cálculo de cabeça tão rápido quanto a irmã do Jan? Conte para gente.
- 3) Crie um problema que utiliza o mesmo tipo de cálculo mental que este.

⁵ Adaptado do livro *Álgebra: pensar, calcular, comunicar,...*, Projeto Fundão, IM-UFRJ

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- ser apresentado à propriedade distributiva ou reconhecê-la em uma situação real;
- traduzir para linguagem matemática as estratégias de resolução da situação utilizadas pelos dois personagens e
- reconhecer a importância do cálculo mental.

Comentários

- A situação problema é apresentada em forma de quadrinhos. Sua análise com os alunos em duplas ou grupos possibilita uma interpretação mais rica da situação. Como é uma linguagem nova para os alunos, os professores devem estar atentos às dificuldades nessa interpretação e no reconhecimento da questão específica que deverá ser resolvida.
- Os estudantes devem ser estimulados a trocar ideias e justificar o método de resolução que consideram correto, recorrendo aos conhecimentos prévios e técnicas operatórias, de modo colaborativo.
- Caso os alunos não lembrem ou não conheçam a propriedade distributiva, o professor pode registrar no quadro alguns exemplos numéricos que envolvam essa propriedade.
- Ao final, o professor pode explicar aos alunos que a propriedade distributiva também vale para o caso da soma e desafiá-los a pensar em alguma situação do cotidiano que possa ser resolvida aplicando a distributividade com relação à soma.
- Uma boa oportunidade de valorizar o cálculo mental é destacar a facilidade com que a irmã de Jan fez seus cálculos.

1.6 - A RECEITA DO VOVÔ



The comic strip consists of seven panels. In the first panel, a girl says, 'Estou indo pegar a receita do vovô.' In the second, she says, 'O médico quer saber quantos dias ele lhe receitou o remédio.' In the third, she thinks, 'Vou olhar na receita antiga.' and says 'Xiiii!'. The fourth panel shows a prescription slip from 'Dr. Legal' for 'Sr Cirilo', instructing to take 1 pill twice a day for a certain number of days. The fifth panel shows the girl thinking, 'Vovô não pode se preocupar. Vou resolver.' In the sixth panel, she says, 'Vovô comprou 2 cartelas do remédio, tomou o que o médico receitou e sobraram estes comprimidos.' and an image of a blister pack with 8 pills is shown. In the final panel, she says, 'Eu não descobri. Ajude-me a resolver esse enigma.'

Projeto Fundação - UFRJ

Para o Sr Cirilo,

Tomar 1 comprimido duas vezes ao dia durante $\star$ dias.

Dr. Legal

Vovô não pode se preocupar. Vou resolver.

Vovô comprou 2 cartelas do remédio, tomou o que o médico receitou e sobraram estes comprimidos.

Eu não descobri. Ajude-me a resolver esse enigma.

- 1) Escreva um pequeno texto para um colega explicando a situação apresentada na atividade.
- 2) Por que a Mili se espantou quando viu a receita?
- 3) Qual é a resposta do enigma? Explique como você encontrou.
- 4) Se o médico disser que o avô de Mili tem que tomar o remédio por mais 14 dias, quantas cartelas ela terá que comprar? Sobrarão quantos comprimidos?
- 5) O que você sugere que a Mili faça com os comprimidos, caso sobrem? E se eles já tiverem perdido a validade?

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- familiarizar-se com a leitura e interpretação de um receituário médico;
- interpretar e utilizar informações apresentadas de maneira não convencional para resolver uma situação problema;
- usar estratégias diversas de cálculo e
- despertar a preocupação com o descarte de sobras de remédio.

Comentários

- A aplicação dessa atividade em duplas ou grupos de alunos pode promover uma boa discussão.
- Em caso de dificuldade na interpretação da questão a resolver, sugerir aos alunos procurar nos quadrinhos as informações que possam ajudar.
- É importante que os alunos registrem as estratégias utilizadas em palavras ou cálculos (Fig. 3).

Figura 3 – Alunos trabalhando

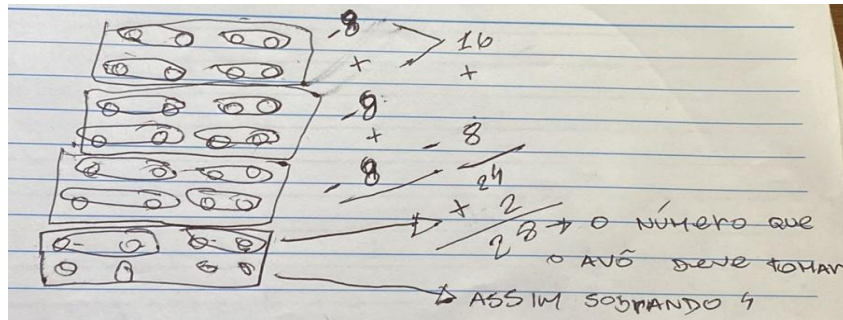


Fonte – Acervo do grupo

- Em relação ao descarte de remédios não utilizados, sugere-se uma consulta dos alunos ao professor de ciências, a um farmacêutico ou a alguém que conheça o assunto.
- A atividade despertou bastante interesse por parte dos alunos em turmas do Ensino Fundamental de Escola Municipal. Apesar da novidade na apresentação da situação problema, não foi observada grande dificuldade.

- Determinados alunos recorreram a uma solução gráfica do problema, como mostra o exemplo da Figura 4, no qual apenas a indicação de 2 em lugar de 4 comprimidos, na última conta, está incorreta.

Figura 4 – Resposta gráfica de um aluno ao item 4



Fonte – Acervo do grupo

- Nas respostas do item 4 os alunos não se referiram aos dois comprimidos que havia sobrado antes.
- No item 5, praticamente todos os alunos desconhecem o que fazer com os remédios fora da validade ou sugerem ações incorretas.

1.7 - A MATEMÁTICA DAS GOTAS



- 1) Troque ideias com seus colegas sobre toda a situação e sobre em que quadrinhos você tem as informações que permitem responder à pergunta final da Mili.
- 2) Explique em cálculos e palavras como você responderia à pergunta de Mili do último quadrinho.
- 3) Use a imaginação e dê outro título para a situação da historinha.
- 4) Se a informação que Mili encontrou na Internet fosse: cada gota contém 0,05 ml de colírio, como você resolveria a dúvida de Mili? Justifique.
- 5) Troque ideias com seus colegas sobre os cuidados que devemos ter com nossos animais.

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- utilizar as operações elementares para resolver uma situação da vida real;
- interpretar situação apresentada sob a forma de quadrinhos;
- rever a noção de mililitro e outras unidades de medida de capacidade.

Comentários

- Esta atividade apresenta situação semelhante à da Receita do Vovô e à do Menino que não Gostava de Remédio, que está a seguir, cabendo ao professor decidir sobre a sua aplicação. No entanto, a repetição do tipo de atividade pode ser positiva para sanar dificuldades observadas.
- Na experiência da atividade em salas de aula de oitavo ano do Ensino Fundamental, observaram-se muitas dúvidas dos alunos pelo fato de a tarefa a ser desempenhada não estar na forma habitual e pela linguagem usada na apresentação. Foram frequentes perguntas como:

Cadê a pergunta? Tem que fazer alguma coisa? Como responder?

- Uma vez rompido o momento inicial de hesitação, os alunos se envolveram bastante, principalmente alunos tidos como de fraca participação em outras aulas.
- A resposta do item 1) é livre, mas espera-se que os alunos apontem o segundo e o quarto quadrinho como essenciais.
- O item 2 deve provocar discussão entre os alunos e destes com o professor, sendo importante que os alunos expressem seu raciocínio em cálculos e palavras. A maioria explicou em palavras, mesmo aqueles que erraram. Seguem exemplos de respostas corretas.

“Se precisará pingar uma gota em cada olho 4 vezes ao dia, durante 10 dias, e só pingar que são 8 gotas por dia, temos que multiplicar por 10 que o resultado seria 80 gotas. Se 20 gotas tem o volume de 1ml e a caixa tem 6ml seria 120 gotas ao todo, agora respondendo a pergunta de Mili, sim precisa comprar de uma caixa”.

“1 gota em cada olho 4 vezes ao dia é igual a 8 gotas durante 10 dias é 80 gotas... 20gotas= 1ml 80gotas = 4ml ela só vai precisar de uma caixinha”.

- O item 4 tem um nível de dificuldade maior que os outros. Reforça-se a importância da justificativa e sugere-se o uso da calculadora, uma vez que o foco da atividade não é a destreza nos cálculos.
- As respostas dos itens 3 e 5 são livres. O item 3 provoca a criatividade dos alunos e os entusiasma. Títulos, como “Mili e os olhos de Zeus”, “Mili, seu gato e um colírio” e “A matemática das gotas”, foram alguns dos muitos sugeridos.
- A discussão de temas como o proposto no item 5 nas aulas de Matemática é importante. Seguem exemplos de resposta.

“Deixar eles limpos vacinar os animais e alimentá-los”.

“Dar amor, carinho e cuidado estar sempre brincando, dando banho, comida, água, etc”.

“Educá-lo, alimentá-lo dar banho vacinar levar para passear”.

1.8 - O MENINO QUE NÃO GOSTAVA DE REMÉDIO



- 1) Troque ideias com seus colegas, sobre por que o Jan estava aborrecido e falou “Tô lascado”.
- 2) Ajude o Jan a decidir quantas caixas comprar, explicando sua resposta.
- 3) A caixa de remédio que Jan ganhou diminuiu a quantidade de caixas que ele terá de comprar? Por quê?
- 4) Se fosse você, em quais horários tomaria os comprimidos? Justifique.
- 5) Use a imaginação e dê outro título para a situação dessa historinha.

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- interpretar uma situação-problema apresentada sob a forma de quadrinhos;
- utilizar as operações elementares para resolver um problema da vida real em que as tarefas não estão explicitadas;
- organizar intervalos de tempo, medidos em horas, seguindo uma regra, e
- refletir sobre o cuidado com a saúde, incluindo o cumprimento das recomendações dadas pelo médico.

Comentários

- Esta atividade apresenta situação semelhante às atividades A Receita do Vovô e A Matemática das Gotas, cabendo ao professor decidir sobre a sua aplicação. No entanto, a repetição do tipo de atividade pode ser positiva para sanar dificuldades observadas.
- Na experiência da atividade em salas de aula de oitavo ano do Ensino Fundamental, observaram-se muitas dúvidas dos alunos pelo fato de a tarefa a ser desempenhada não estar na forma habitual e pela linguagem usada na apresentação. Exemplos de perguntas dos alunos.

“O que era para fazer?”

“A resposta é com cálculos?”

- O incentivo e a orientação do professor, com perguntas e palavras de apoio foram importantes.
- As justificativas pedidas devem ser registradas, se possível, em cálculos e em palavras.
- Na resposta ao item 1, destaque-se a preocupação do Jan por ter de fazer cálculos para comprar remédios na quantidade certa e organizar os horários, o que influencia seu humor. A frase a seguir, de um aluno, expressa essa ideia: *“Pois não sabia como organizar sua rotina para tomar seus remédios”*.
- Durante a discussão, é oportuno ressaltar a importância de cumprirmos o que os médicos receitam e evitar a automedicação.
- Segue exemplo de resposta ao item 2.

“Ele terá que comprar 3 caixas de remédio. Nós multiplicamos 3 (número de comprimidos ao dia) por 7 (número de dias na semana) e o resultado multiplicamos por 4 e depois dividimos por 28 (número de comprimidos por caixa)”.

- As respostas do item 4, dos horários, podem variar de pessoa para pessoa. Na discussão, considere-se que Jan quer evitar acordar muito cedo ou à noite para tomar remédio.
- O item 5 é bem livre, para incentivar a criatividade. Exemplos dados pelos alunos: *“Os horários complicados”, “A difícil escolha”, “O menino que não gostava de remédios” e “Jan e suas dificuldades”.*
- O pedido de justificativas gerou dificuldades, uma vez que não se trata de prática usual em sala de aula. A frase seguinte, dita por um aluno, ilustra essa dificuldade.
“Eu entendi, mas não sei explicar”.
- Uma vez rompido o momento inicial de hesitação, os alunos se envolveram bastante, principalmente alguns não participativos em outras aulas. Manifestaram satisfação com a aula e pediram outras atividades desse tipo.

1.9 - BRINCANDO COM NÚMEROS E SÍMBOLOS ⁶

WORD

Para realizar a atividade com o *word*, acesse o link ou o QR Code

https://docs.google.com/document/d/1QrnDHLoJYfTDSaheV8HoOjIHZmOpLYE_/edit

Para realizá-la no computador, depois de abrir o link, clique em “arquivo – fazer uma cópia”.



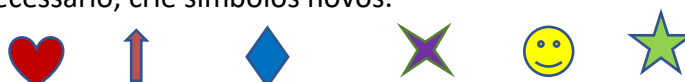
Observe atentamente o quadro abaixo.

Foram usados vários símbolos para representar os números, obedecendo uma certa regra.

	2 ↑	3 ×		5 😊	6 ↑×	7 ♦	8 ↑↑↑		
11		13 ♥	14 ↑♦	15 ×😊					
21 ×♦				25 😊😊					
			34 ↑★						40 ↑↑↑😊
	42 ↑×								50 ↑😊😊

- 1) Complete os quadrinhos vazios com os números e símbolos correspondentes.

Você pode usar ctrl+C e ctrl+V para copiar e colar os símbolos abaixo, nos lugares corretos. Se for necessário, crie símbolos novos.



- 2) Justifique como você escolheu os símbolos para representar cada número da tabela.

⁶⁶ Adaptado do livro *Álgebra: pensar, calcular, comunicar,...*, Projeto Fundação, IM-UFRJ

3) O que você pode observar nos símbolos que representam os múltiplos de 2?

4) E nos números que são divisíveis por 7?

5) E nos números que são múltiplos de 10?

6) Como são representados os números que possuem apenas dois divisores? Como são chamados esses números?

7) Que número está representado pelos símbolos a seguir?



8) Represente o número 120, usando os símbolos disponíveis no item 1.

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- desenvolver a capacidade de identificar relações numéricas representadas por imagens;
- reconhecer padrões existentes entre símbolos e números;
- identificar os múltiplos e divisores de um número, reconhecer um número primo e construir critérios de divisibilidade e
- utilizar uma linguagem não usual para representar números naturais.

Comentários

- Nas turmas em que essa atividade foi aplicada, a reação dos alunos foi muito positiva. Eles a consideraram prazerosa, apesar de, inicialmente, apresentarem dificuldades. Seguem exemplos.
 - Identificar a operação que existe entre os símbolos que representam um número composto. Geralmente pensam que é adição, mas conseguem descobrir que é multiplicação, depois de explorar, comparar e relacionar os símbolos com os números apresentados.
 - Após verificarem que, nos números primos, nenhum dos símbolos que aparecem no quadro pode ser usado, ficam confusos e surpresos, até concluírem a necessidade de criar símbolos novos para representar esses números.
 - Algumas vezes a falta de domínio dos fatos básicos da multiplicação atrapalha, mas é facilmente contornada.
- A comunicação oral das regularidades observadas enriquece a atividade.
- Ao longo do desenvolvimento desta atividade, os alunos vão observando as regularidades existentes e construindo os conceitos de múltiplos e divisores de um número, de número primo e os critérios de divisibilidade.

1.10 - REGULARIDADES EM OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS ⁷

1) Converse com seus colegas sobre as tirinhas abaixo.



2) Anote os resultados que você obtém ao efetuar na calculadora as operações indicadas na tabela a seguir, e responda as perguntas.

$5 \times 0,5 =$	a) Comparando o primeiro fator de cada conta com o resultado, você percebe alguma regularidade? Qual é? _____ b) Complete: Multiplicar um número inteiro por 0,5 é o mesmo que _____
$16 \times 0,5 =$	
$50 \times 0,5 =$	
$22 \times 0,5 =$	
$15 \times 0,5 =$	
$222 \times 0,5 =$	

3) Agora complete esta outra tabela:

$5 \div 0,5 =$	a) Comparando o dividendo de cada conta com o resultado, você percebe alguma “regularidade”? Qual é? _____ b) Complete: Dividir um número inteiro por 0,5 é o mesmo que _____
$16 \div 0,5 =$	
$50 \div 0,5 =$	
$22 \div 0,5 =$	
$15 \div 0,5 =$	
$8 \div 0,5 =$	

⁷ Adaptada dos livros *Matemática em Ação* de Ana Lúcia Bordeaux et al e *Frações e Números Decimais* de Imenes, Jakubo e Lelis

- 4) Converse com seus colegas sobre o que acontece se substituirmos, nas duas tabelas, 0,5 por 0,2 (Se precisar, utilize a calculadora). Agora complete as frases seguintes.
- 5) Multiplicar um número inteiro por 0,2 é o mesmo que _____
- 6) Dividir um número inteiro por 0,2 é o mesmo que _____
- 7) E agora, como você responderia às dúvidas das tirinhas?
- 8) Dê outros exemplos que justifiquem as situações apresentadas nas tirinhas.

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- observar regularidade na multiplicação e na divisão de um número inteiro por um número racional decimal menor que 1;
- traduzir a regularidade observada em palavras;
- concluir que nem sempre que efetuamos uma multiplicação, o produto é maior que os fatores;
- concluir que nem sempre que efetuamos uma divisão, o quociente é menor que o dividendo;
- usar a calculadora como aliada para a aprendizagem em Matemática e
- vivenciar situações nas quais o cálculo mental é vantajoso.

Comentários

- Essa atividade foi aplicada a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de escola municipal, dos quais boa parte estava se apropriando das funções da calculadora naquele momento.
- Muitos deles concluíram as respostas das operações, e observaram que, na multiplicação por 0,5, o número ficava dividido por 2 e que, na divisão por 0,5 o número dobrava. Não conseguiram, porém, expressar essa conclusão por escrito. Essa dificuldade pode decorrer da sua pouca experiência em se expressar na língua materna ou matematicamente.
- O fato de realizar a atividade com os alunos divididos em duplas (Fig. 5) foi muito valioso. O bate-papo entre eles, junto à intervenção do professor e das estagiárias, que auxiliavam o trabalho, foi fundamental para que todos pudessem alcançar os objetivos da atividade.

Figura 5 – Trabalho em duplas com calculadora e lápis e papel.



Fonte – Acervo do grupo

- Durante o desenvolvimento da atividade com alunos de um curso de Pedagogia, houve muito espanto e resistência em admitir que o produto pode ser menor que fatores ou que o quociente pode ser maior que o dividendo. Alguns alunos faziam a conta na calculadora, por exemplo $3 : 0,5$ e no visor aparecia 6, e eles escreviam no papel 0,6.
- O estranhamento mencionado, pode ser consequência da crença formada nos anos iniciais de que “o resultado de uma multiplicação é sempre maior que os fatores” e “o quociente é sempre menor que o dividendo”.
- É interessante o professor dar exemplos de cálculos com números decimais que não estejam entre 0 e 1, evitando, assim, que os alunos deduzam erroneamente que o produto é sempre menor que um dos fatores e que o quociente é maior que o dividendo.
- Esta atividade poderá incentivar o aluno a efetuar mentalmente multiplicações e divisões com alguns números decimais.
- Para incentivar esse hábito, as contas e problemas a seguir devem ser resolvidas sem o uso da calculadora.

$$42 \times 0,5 =$$

$$3 : 0,5 =$$

$$12 \times 0,5 =$$

$$8 : 0,2 =$$

$$50 \times 0,2 =$$

$$7 \times 0,2 =$$

- Problemas como os que seguem podem possibilitar aos alunos dar significado aos resultados obtidos e, aos professores, avaliar a aprendizagem desses resultados, utilizando-os em novas situações.

- *Joana quer fazer laços para serem usados na cabeça. Cada laço precisa de 0,5 m de fita. Se ela comprar 5 metros de fita, quantos laços iguais poderá fazer?*
- *Bianca juntou 16 reais para comprar canetinhas coloridas que custam 50 centavos cada uma. Ela dará 6 para sua amiga Alice. Com quantas ela ficará?*
- *Desafio: $36 \times 0,1 = ?$*

Capítulo 2 – Noções Algébricas em Situações Variadas

Neste capítulo apresentaremos atividades que permitem aos alunos desenvolverem o pensamento algébrico e familiarizar-se com a linguagem algébrica, ao criar, com compreensão, expressões para representar situações.

Álgebra é a parte da Matemática em que a maioria dos estudantes do Ensino Fundamental apresenta mais dificuldade, principalmente pela forma com a qual algumas vezes ela é apresentada, como um conjunto de regras abstratas, prejudicando a atribuição de significado ao seu estudo. Por isso, ressaltamos a necessidade de abordagens mais contextualizadas e investigativas desse tema, de tal modo que despertem o interesse dos alunos e os coloquem na posição de protagonistas da aprendizagem.

Na atividade da sequência de figuras o aluno terá oportunidade de generalizar a regularidade observada usando expressões algébricas ou palavras para comunicá-la, como forma de integrar conteúdos de aritmética, álgebra e geometria. Recomenda-se que essa atividade seja feita, sempre que possível, no Word, facilitando seu desenvolvimento e a familiarização do aluno com o editor de texto. Sem a tarefa de construir cada uma das figuras, o aluno pode se concentrar na resolução dos desafios propostos.

A generalização e a escrita de expressões algébricas simples permitem a integração entre aritmética e álgebra, numa situação apresentada em quadrinhos, em contexto que suscita discussão de questões ambientais.

Em outras atividades são apresentadas situações em que o uso de equações é destacado, seja na leitura significativa da equação, ou na tradução da situação problema por uma equação, seja na análise crítica do resultado encontrado. Pretende-se enriquecer e promover o fazer Matemática em sala de aula, com a utilização do aplicativo *Photomath* como recurso auxiliar nas questões propostas.

2.1 - SEQUÊNCIA DE FIGURAS⁸

WORD

Para realizar a atividade com o *word*, acesse o link ou o QR Code. Para realizá-la no computador, depois de abrir o link, clique em “arquivo – fazer uma cópia”.

<https://docs.google.com/document/d/1QqL1qQoDF8TbyV5cJKYeWKxgVRGhyZrC/edit>



Observe a sequência de figuras.



1) Qual é a regra desta sequência?

2) Continue a sequência acima com as próximas cinco figuras, usando os polígonos abaixo adequadamente.

Dica: você pode usar ctrl+C e ctrl+V para copiar os polígonos e colocá-los na posição correta.



3) Qual é o oitavo elemento da sequência?

4) Qual é o décimo quarto elemento da sequência?

5) Sem desenhar, qual é o elemento que ocupa a vigésima posição? Como você descobriu?

⁸ Adaptação do livro *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*, CAEM-IME-USP

POSIÇÃO	FIGURA
15	
17	
18	
70	
75	

6) Observando a sequência de figuras, complete a tabela, com os nomes dos polígonos correspondentes às posições indicadas.

7) O que têm em comum os números das posições ocupadas pelo hexágono?

8) Escreva uma expressão algébrica que represente a posição de qualquer hexágono.

9) Se essa sequência tiver 54 figuras, quantas vezes o hexágono aparecerá nela?

10) Descreva duas maneiras diferentes para descobrir a figura da posição 70.

11) O hexágono, que ocupa a terceira posição, vai ocupar sempre a posição correspondente a um múltiplo de 3. Será que se pode afirmar que o quadrado, que ocupa a segunda posição, ocupará sempre uma posição correspondente a um número par? Justifique.

12) Escreva uma expressão algébrica que represente a posição ocupada por qualquer quadrado.

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- reconhecer figuras geométricas usuais;
- observar a regularidade presente em uma sequência de figuras;
- traduzir essa regularidade em linguagem verbal e algébrica e
- utilizar informalmente o conceito de múltiplos de um número.

Comentários

- A terceira pergunta pode ser respondida pelo aluno, apenas contando as figuras. Mas, para responder a quarta, já é preferível observar o padrão que a sequência obedece: triângulo, quadrado, hexágono (se o termo hexágono não for conhecido, é uma boa oportunidade de apresentar). A observação de regularidade deve ser sempre incentivada pelo professor.
- As perguntas sobre a tabela permitem que o aluno conclua que as posições múltiplas de 3 são ocupadas pelo hexágono e que as outras figuras aparecem antes ou depois desses múltiplos. Além dessa percepção, no item 8, pede-se que ele escreva a expressão $3n$, para representar a posição do n -ésimo hexágono da sequência. Ao escrever essa simples expressão, o aluno já se prepara para escrever as expressões correspondentes às posições dos quadrados, pedidas no item 12.
- No item 9, o aluno deverá relacionar a posição ocupada pelo hexágono com o número de vezes em que ele aparece, procurando o número que multiplicado por 3 dá 54, ou resolvendo a equação $54 = 3n$.
- No item 10, é necessário que o aluno observe que $70 = 69 + 1$ ou que $70 = 72 - 2$, isto é, a figura da posição 70 é a primeira depois do hexágono (já que 69 é múltiplo de 3) ou que ela é a segunda antes do hexágono. Nos dois casos chega-se à resposta: triângulo.
- O item 11 visa à consolidação do raciocínio sobre os múltiplos de 3 e deve provocar discussão, sem nenhum formalismo.
- Finalmente, pedem-se novas expressões algébricas, $3n + 1$ ou $3n - 2$, que não são triviais, mas a sua criação pelo estudante contribui muito para que ele veja significado nesses tipos de expressões e se familiarize com a linguagem algébrica.

- Nas turmas em que a atividade foi aplicada, facilmente os alunos reconheciam que a posição ocupada por qualquer hexágono era sempre um múltiplo de três (Fig. 7). Houve dificuldade, que foi superada, na tradução para linguagem algébrica das outras regularidades observadas.

Figura 7 – Exemplo de solução de aluno para os itens 5 e 6

Sem desenhar, qual é o elemento que ocupa a vigésima posição? Como você descobriu?

$3 \times 6 = 18$ $18 = \text{hex}$ $18 + 2 = \text{hex} + 2 = \square$

Posição	Figura
12	
15	
17	
18	
70	
75	

Observando a sequência de figuras, complete a tabela, com os nomes dos polígonos correspondentes às posições indicadas.

O que têm em comum os números das posições ocupadas pelo hexágono?

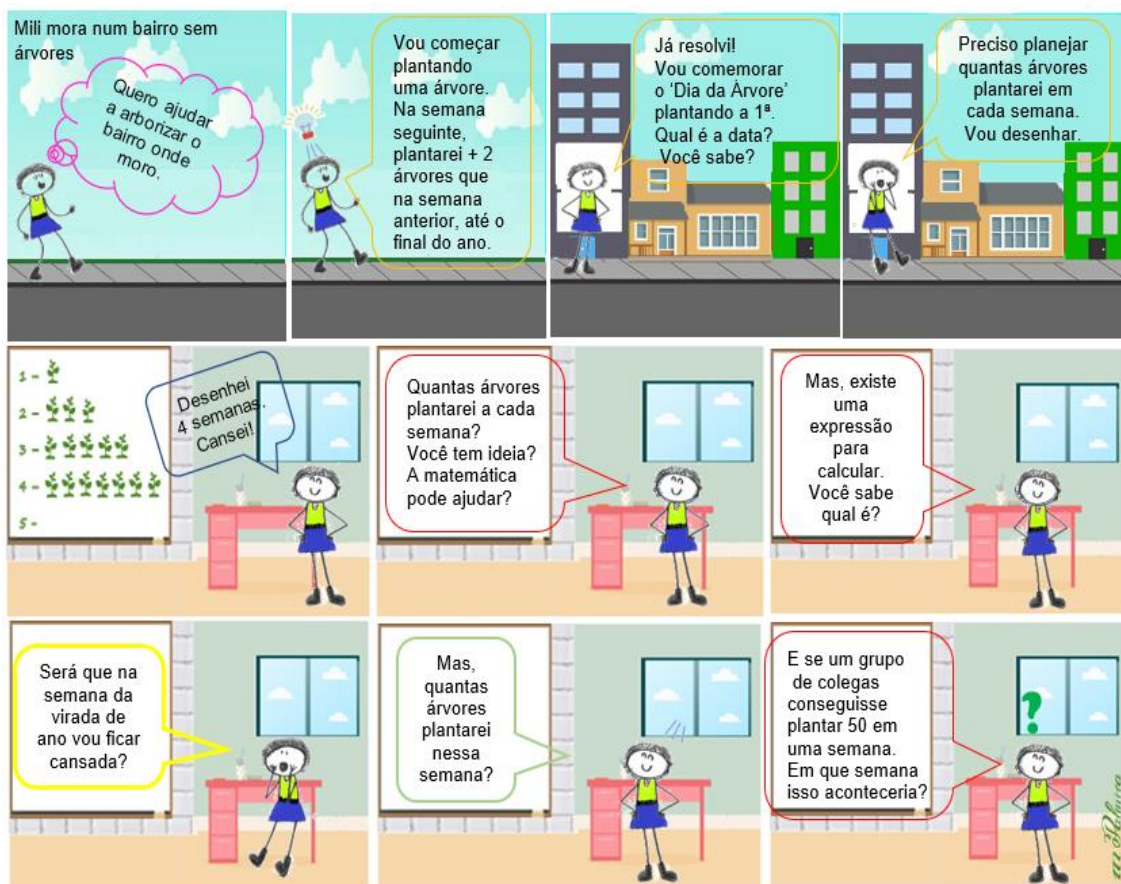
todos são multiplicados por 3

Fonte – Acervo do grupo

2.2 - DANDO UMA MÃOZINHA À NATUREZA



- 1) Escreva um pequeno texto explicando a situação apresentada na atividade. Por que a atividade tem esse nome?



- 2) Vamos ajudar Mili a se organizar, completando a tabela a seguir.

Número da semana	Número de árvores plantadas na semana
1	1
2	3
3	5
4	
5	
	19
15	

- 3) Quantas árvores Mili plantará na semana 5?

E na semana 12?

E na semana 20?

Explique como você encontrou essa resposta.

- 4) Tente traduzir a explicação que você deu no item 3, escrevendo uma expressão algébrica para o número de árvores que seriam plantadas em uma semana qualquer (semana n).
- 5) Sendo a semana 1 a do dia da árvore, que número representará a semana da virada do ano?
- 6) Observe o último quadrinho. Se um grupo plantar 50 árvores em uma semana, estará de acordo com a regra de Mili? Justifique.

Complementação da atividade



- 7) Ajude Jan e Mili, preenchendo a tabela.

Número da semana	Número total de árvores plantadas
1	1
2	$1 + 3 = 4$
	$1 + 3 + 5 = 9$
4	
	25
10	
	225
n	

- 8) Comparando os números de cada linha da tabela, você percebe alguma relação? Qual?
- 9) Então, quantas árvores foram plantadas por Mili ao todo até o fim do ano? Explique sua resposta.
- 10) Veja uma forma diferente de verificar o que você percebeu na tabela. Acesse o link abaixo, ou o QR CODE e observe a animação.

<https://docs.google.com/presentation/d/1lGGu79GDDsCwPAOaG47zkhz22uAAfXck/edit?usp=sharing&ouid=107055896468095190991&rtpof=true&sd=true>



- 11) Você se preocupa com o meio ambiente assim como a Mili? O que você faz para preservá-lo?

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- analisar a existência de regularidades em uma situação problema;
- expressar em linguagem verbal e algébrica a regularidade observada;
- escrever a expressão algébrica que representa um número ímpar qualquer;
- reconhecer que a soma dos n primeiros números ímpares é o quadrado de n e
- despertar o interesse pela preservação da natureza.

Comentários

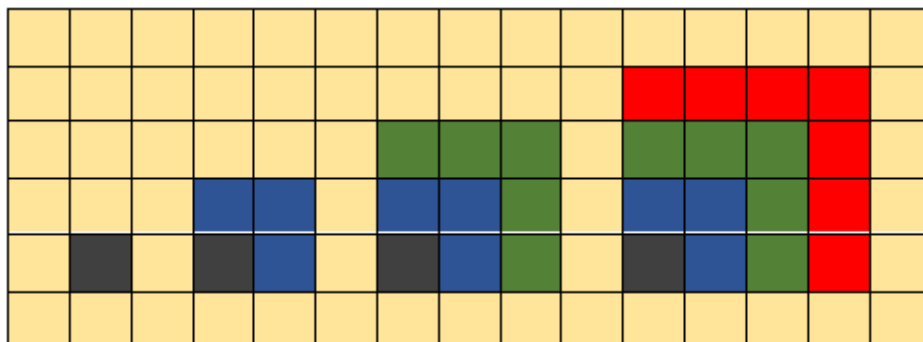
- O trabalho em duplas ou grupos facilita bastante a análise da situação, principalmente neste caso em que ela é apresentada em quadrinhos.
- Se os alunos não souberem o Dia da Árvore, devem ser incentivados a pesquisar.
- A utilização de um calendário oferecerá dados importantes para a contagem das semanas e solução das situações propostas.
- No item 3, os resultados podem ser encontrados, semana a semana, mentalmente ou utilizando a tabela. A observação desses resultados permite que os alunos percebam a existência de uma regularidade, e a generalizem com palavras ou com uma expressão algébrica.
- Algumas dificuldades, como as que seguem, foram observadas entre os estudantes, que poderão ser sanadas com novas experiências semelhantes.
 - Não perceber a necessidade de usar uma letra para representar uma semana qualquer, por não ter ainda construído o conceito de variável.
 - Considerar erroneamente que o número de árvores plantadas em cada semana é proporcional ao número da semana, ao observar que ambas crescem simultaneamente.
- Vale salientar que a expressão encontrada para o número de árvores plantadas na semana n é uma das expressões que representam o n -ésimo número ímpar.

Por que a Complementação da atividade?

- Durante a realização da atividade, certos alunos consideraram o total de árvores plantadas em vez do número de árvores plantadas em cada semana. Isto motivou a criação dessa complementação.

- Encontrar quantas árvores Mili terá plantado, no total, até a semana do Ano Novo, permite relacionar a soma dos n primeiros números ímpares consecutivos com o quadrado de n e representar isso algebricamente. O preenchimento e a exploração da tabela são úteis neste processo.
- Outra forma de ajudar o aluno a compreender esta generalização é através de uma animação, que pode ser acessada pelo link ou QR CODE apresentados no item 10.
- Caso isso não seja possível, utilize a ilustração abaixo (Fig. 6), incentivando os alunos a relacionarem cada figura da sequência com uma soma de números ímpares.

Figura 6 – Ilustração geométrica da soma dos primeiros números ímpares



Fonte – Matemática em Ação, 9º ano, p. 36

2.3 - O PREÇO DOS CADERNOS⁹



A mãe de Eva e Rui deu aos seus dois filhos a mesma quantia para que comprassem cadernos escolares. Eles foram a uma loja e compraram cadernos iguais. Quando saíram, cada um tinha na mão o que a figura apresenta. Quanto custou cada caderno?



Para resolver o problema, Guilherme escreveu a equação $c - 7,75 = 2c - 1,50$.

- 1) Resolva a equação do Guilherme usando o *Photomath*.
- 2) O valor de c encontrado satisfaz a situação apresentada no problema? Justifique a sua resposta.
- 3) A equação escrita por Guilherme traduz a situação apresentada no problema? Justifique a sua resposta.
- 4) Se não, escreva a equação correta e resolva com o *Photomath*.
- 5) Qual o preço de cada caderno comprado?

⁹ Adaptado do livro *Álgebra no Ensino Básico*, Ponte, J.P. et al., 2009

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- relacionar a Matemática com questões do cotidiano;
- perceber a necessidade de verificar se a solução encontrada é coerente com a situação proposta;
- familiarizar-se com a leitura de equações, observando o significado dos seus elementos;
- aprimorar a capacidade de traduzir um problema para a linguagem algébrica e
- refletir como as tecnologias digitais podem contribuir para o processo de aprendizagem Matemática.

Comentários

Na aplicação desta atividade com alunos de Ensino Fundamental e Médio foi observada uma certa dificuldade dos alunos em:

- interpretar e entender as tarefas de analisar uma equação dada e a solução encontrada pelo aplicativo, considerando serem insubstituíveis o conhecimento do conteúdo e do aplicativo *photomath* pelo aluno e a mediação do professor;
- perceber o erro do resultado (aceitam o preço negativo ou trocam o sinal arbitrariamente);
- escrever a equação que traduz corretamente o problema.

Seguem algumas observações feitas na experiência.

- Houve bom envolvimento dos alunos, confirmando receptividade do uso do celular/aplicativo.
- Uma aluna explicou o erro na equação escrita: *“Não faria sentido ser c , o caderno, menos o que sobrou... Isso seria no caso, se fosse o que a mãe deu pra eles. Porque você literalmente está subtraindo o que somou, não faz sentido. Isso seria, mais o que sobrou. Só faria sentido nesse caso...”*

- Outro ignorou o aplicativo e resolveu a equação fazendo contas, sem usar métodos padrão, o que deve ser permitido. Segue exemplo de solução correta (Fig. 9). A resposta do item 4 está indicada na própria equação dada no enunciado.

Figura 9 – Solução de aluno para a atividade

Para resolver o problema, Guilherme escreveu a equação

$$c + 2,75 = 2c + 1,50$$

1 - Resolva a equação do Guilherme usando o Photomath. $-1,25$

2 - O valor de c encontrado satisfaz a situação apresentada no problema? Justifique a sua resposta. *Não. Por ser um número negativo o custo de uma compra é positivo.*

3 - A equação escrita por Guilherme traduz a situação apresentada no problema? Justifique a sua resposta. *Não. Porque não se subtrai o preço do caderno, pelo que sobra o custo seriam a adição.*

4 - Se não, escreva a equação correta e resolva com o Photomath.

5 - Qual o preço de cada caderno comprado? $1,25$



Fonte – Acervo do grupo

Em outras escolas, em que a atividade foi feita virtualmente ou que estavam voltando recentemente às aulas presenciais, observou-se maior dificuldade por parte dos alunos. No entanto, passado algum tempo, eles lembram à professora a necessidade de verificar os resultados.

2.4 - A COMPRA DO SKATE

Jan queria comprar um skate e não tinha dinheiro suficiente. Conseguiu completar o preço do skate, juntando dinheiro durante 5 meses. A cada mês, a partir do segundo, economizou mais 5 reais do que no anterior. Assim, no quinto mês, economizou o triplo do que no primeiro.

Para determinar quanto Jan economizou em cada mês, Carlos escreveu a equação

$$x + 20 = 3x$$

e João escreveu essa outra

$$3.(x - 20) = x$$

- 1) Escreva algebricamente as quantias que Jan economizou a cada mês,
 - em ordem crescente, e depois,
 - em ordem decrescente.

- 2) Resolva as duas equações usando o *Photomath* e explique o que significa cada solução encontrada.

- 3) O que significa a expressão $x - 20$ na equação que o João escreveu?

- 4) Se Jan, antes de economizar, tinha 320 reais, qual era o preço do skate?

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- admitir que equações não equivalentes, com incógnitas representando objetos diferentes, podem traduzir o mesmo problema;
- vivenciar a experiência de ler equações, verificando o significado atribuído às incógnitas e
- escrever expressões algébricas simples para expressar informações de um problema.

Comentários

- A questão a ser resolvida nesta atividade não está escrita no enunciado, o que demanda uma leitura bem atenta do problema.
- A resolução com o *Photomath* foi importante para os alunos analisarem o problema e entenderem o que a incógnita de cada equação representava, concluindo que ambas estão corretas, apesar de terem soluções diferentes.
- Após a resolução das equações, os alunos conseguem diferenciar o significado das incógnitas em cada equação e escrever as expressões pedidas no item 1, como mostram os exemplos a seguir (Fig. 8).

Figura 8 – Exemplos de respostas de alunos para os itens 1 e 2

Uma diz o resultado do primeiro parcela, e outros, o último (o triplo)

$$1^\circ x \mid 2^\circ 7 + 5 \mid 3^\circ x + 10 \mid$$

$$4^\circ x + 15 \mid 5^\circ x + 20$$

Já o outro diz: $5^\circ x \mid 4^\circ x - 5 \mid 3^\circ x - 10$

$$4^\circ x - 15 \mid 7^\circ x - 20$$

Fonte – Acervo do grupo

- Uma dificuldade para a realização da atividade é o fato de os alunos não estarem acostumados a aceitar que num mesmo problema a mesma letra possa representar dois valores diferentes e que um mesmo problema pode ter duas equações não equivalentes para representá-lo.

- Como finalização da atividade, vale exibir o vídeo no link ou no QR Code.

https://drive.google.com/file/d/1_ZPlcGbOyjGn3jd_DjE3p85YQy4jV06X/view?usp=sharing



2.5 - APERTOS DE MÃOS



A expressão algébrica que representa o total de apertos de mãos dados pelas pessoas em uma reunião, em que todos se cumprimentam, é $\frac{x(x-1)}{2}$ sendo x o número de pessoas.

- 1) Explique por que na expressão $\frac{x(x-1)}{2}$ aparece a divisão por 2.
- 2) Em uma reunião assim, houve 28 apertos de mãos. Escreva no quadro abaixo uma equação que torne possível encontrar o número de pessoas que compareceram a essa reunião.

- 3) Resolva esta equação com o uso do *Photomath*.
- 4) Decida se as duas raízes encontradas são soluções do problema. Justifique sua resposta.
- 5) Observe a curva que o *Photomath* apresenta na solução. Que função esse gráfico representa?
- 6) E a reta azul, por que aparece na figura?

Objetivos

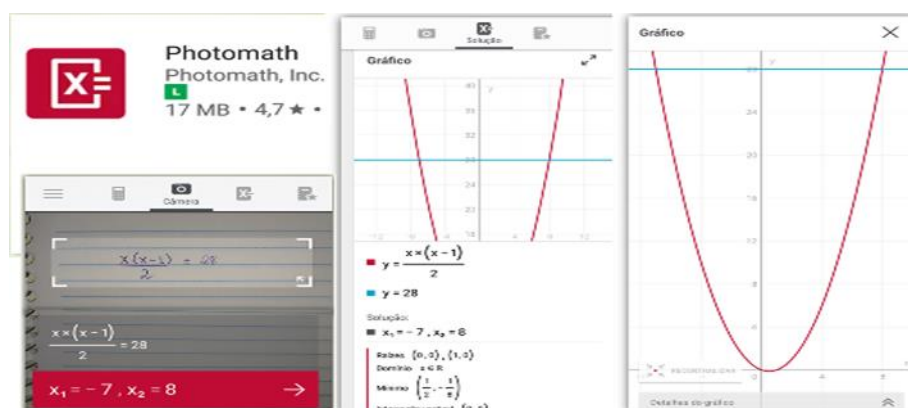
Propiciar ao aluno a oportunidade de

- ler e interpretar a informação dada por uma expressão algébrica relacionada a uma situação problema;
- refletir sobre os métodos de resolução da equação apresentados pelo *Photomath*;
- explorar aspectos de gráficos de função úteis na resolução de equações e
- observar que uma equação pode ser gerada quando se atribui um valor a uma função.

Comentários

- Os estudantes devem baixar o aplicativo *Photomath* nos seus *smartphones* e o professor fazer uma explicação de como utilizá-lo e para que serve. Uma experiência de apresentar equações simples para propiciar essa familiarização foi feita com sucesso.
- A atividade foi aplicada em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental ao final do ensino de funções e os alunos não tiveram dificuldade no uso do aplicativo. Parte considerável dos alunos já tinham acesso ao *Photomath*. Eles que o apresentaram ao professor, pois já utilizavam para a resolução dos deveres de casa.
- Apesar do conhecimento prévio do aplicativo, a execução da atividade não foi simples para os alunos, por não estarem familiarizados com a quantidade de informações apresentadas na tela. Como exemplo, temos a solução da equação como a interseção de dois gráficos, ilustrada na Figura 10 a seguir.

Figura 10 - Solução dada pelo *Photomath*



Fonte – Acervo dos autores

- No item 1, o pedido para explicar o aparecimento da divisão por dois na função possibilitou várias respostas, como por exemplo: as pessoas terem duas mãos. Uma forma de provocar a reflexão pode ser relembrar outras situações como a do número de diagonais de um polígono ou a tabela de jogos de um campeonato esportivo.
- A questão da linha azul causou estranheza aos estudantes, por eles não estarem acostumados com esse tipo de abordagem: a obtenção das soluções de uma equação a partir de dois gráficos diferentes (parábola e reta) e suas interseções. A única experiência dos alunos com dois gráficos construídos juntos tinha sido no 8º ano no estudo dos sistemas de equações do primeiro grau, onde aparecem apenas duas retas.
- Apesar de a atividade gerar dúvidas e questionamentos, é importante o professor explorar o retorno dos alunos. Este possibilitou discussão e aprendizado de aspectos importantes sobre função e equação, as características de um gráfico e como interpretá-lo. No caso, perguntas como: *o que representa uma parábola? Uma reta? Existem outros tipos de gráficos?* foram instigantes.
- Outro questionamento.

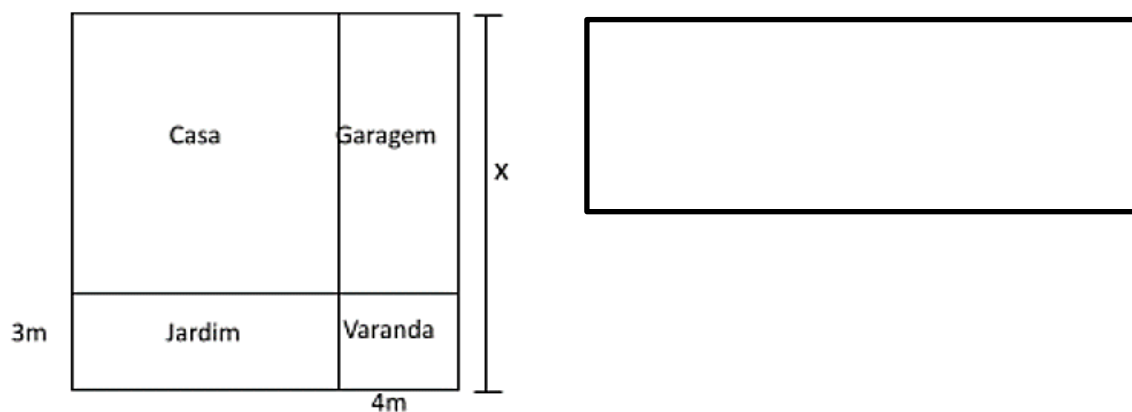
“O fato de o aplicativo apresentar o gráfico da função torna desnecessário ensinar a construir os gráficos?”.

De modo algum, o fato de o aplicativo exibir o gráfico pronto facilita a análise da situação-problema, que não tem como foco a construção de gráficos e sim o uso desses gráficos para resolver a equação.
- Essa atividade possibilitou ressaltar o fato de que a tecnologia na Educação está acessível, mas é preciso saber explorá-la, para que ela tenha sentido. A função do professor está em propiciar a construção de conhecimento, não basta os alunos conhecerem e usarem os recursos, usar nem sempre é sinônimo de saber utilizar.

2.6 - ÁREA DA CASA¹⁰

João possui um terreno em forma de quadrado e planeja dividi-lo, conforme a planta abaixo, para construir uma casa. Sabe-se que, para a casa, ele reservou a metade do terreno.

- 1) Escreva no quadro abaixo uma equação que relacione a área reservada para a construção da casa com a área total do terreno, usando a variável x representada na figura.



- 2) Resolva a equação do item 1 usando o *Photomath*.
- 3) As duas raízes encontradas são solução do problema? Justifique sua resposta.
- 4) Observe que, no método de completar quadrados, depois de obtida a equação $x^2 - 14x = -24$, o número 49 é adicionado aos dois membros dela. Explique a razão dessa adição.
- 5) Escrevendo a equação assim $x^2 - 14x + 24 = 0$, não haveria outra maneira de transformar o trinômio do primeiro membro em um trinômio quadrado perfeito? Troque ideias com seus colegas e resolva a equação obtida.
- 6) Determine a área do terreno reservado para a casa.

¹⁰ Adaptado de questão de concurso do Colégio Pedro II, 2004, RJ

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- recordar o conceito de área;
- traduzir para linguagem algébrica uma situação problema;
- utilizar o *Photomath* para resolver uma equação;
- observar que existem diversos procedimentos para resolver uma equação;
- analisar e explorar o procedimento de Completar Quadrados para resolver equação do 2º grau e
- desenvolver o hábito de verificar as respostas encontradas.

Comentários

- Nessa atividade a exploração e identificação dos dados apresentados na figura é fundamental para seu desenvolvimento.
- Muitos professores não ensinam o procedimento de resolução “Completar Quadrados”, mas, experiências indicam que a utilização desse método permite dar significado e utilidade a trabalhos com expressões algébricas, como Produtos Notáveis e Fatoração, bem como a integração da Álgebra com a Geometria.
- O *PhotoMath* oferece métodos diferentes de resolução da equação, sendo sempre interessante provocar uma discussão sobre essa diversidade. É importante que ao resolver uma equação o aluno tenha liberdade de escolha do método a ser utilizado.

Capítulo 3 – Observar Padrões na Geometria

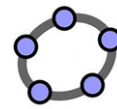
É difícil identificar uma área da Matemática que não exija a capacidade de expressar relações, generalizar modelos, resolver equações ou de, simplesmente, manipular com autonomia símbolos matemáticos. Na Geometria, ramo da Matemática que tem por estudo o espaço e as formas, é comum encontrarmos padrões e regularidades, cuja exploração em sala de aula provoca dificuldades entre os alunos, associadas à falta de desenvolvimento do pensamento algébrico.

O trabalho com atividades geométricas que apresentam regularidade contribui para que os alunos entendam o processo de generalização, bem como concluir teoremas e interligações existentes entre os entes geométricos envolvidos e suas propriedades, relacionando-os a expressões algébricas.

Com o propósito de incentivar o aluno a desenvolver a habilidade de generalizar enquanto constrói conceitos geométricos, apresentamos três atividades de títulos “Bissetrizes do retângulo”, “Soma dos ângulos” e “Segmentos no círculo”.

As atividades foram exploradas com o aplicativo GeoGebra, com os objetivos de:

- a construção geométrica não desviar o aluno do processo de investigação inerente à atividade e
- possibilitar a formação de novos conceitos ao “mexer” na figura, sem alterar suas características.

3.1 - SOMA DOS ÂNGULOS¹¹

Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/ushgsejj>

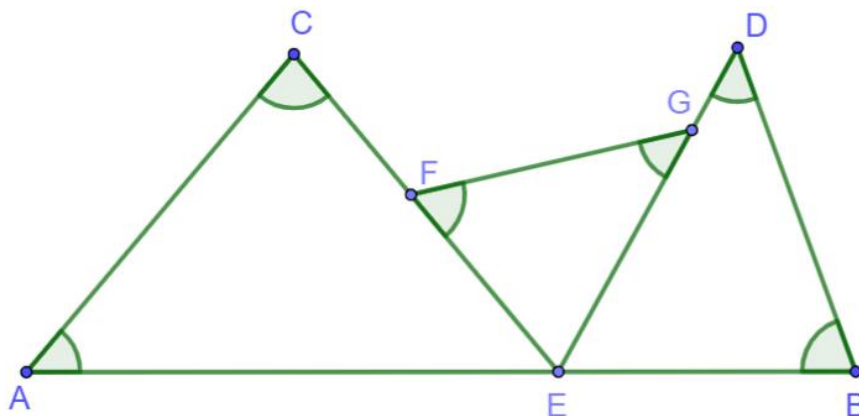
ou o QR Code para realizar a atividade no GeoGebra.



Na figura dada, o ponto E pertence ao segmento AB.

1) Determine o valor da soma dos ângulos destacados na figura.

2) Explique como você chegou a essa resposta.



¹¹ Adaptação da questão da OBMEP 2014

Objetivos

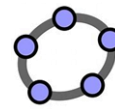
Propiciar ao aluno a oportunidade de

- desenvolver a observação de aspectos que não se modificam nas figuras geométricas, enquanto elas variam com o uso do GeoGebra;
- destacar partes de uma figura dada que conduzam à solução de um problema e
- utilizar a lei angular de Tales.

Comentários

- A dinâmica desta atividade consiste em deixar os estudantes observarem a figura e tentarem responder à pergunta.
- Nesse processo, vale incentivá-los a modificarem a figura várias vezes utilizando as ferramentas do GeoGebra, observando o que não mudou na figura em todas as posições mostradas (a presença de 3 triângulos e o ângulo raso formado pelos ângulos não destacados).
- Os estudantes devem escrever uma justificativa geométrica para o fato de a soma ser sempre 360° .
- A confirmação experimental da resposta obtida pode ser feita medindo os ângulos com o GeoGebra, registrando as medidas em uma tabela no papel ou no próprio GeoGebra e somando-as.

3.2 - AS BISSETRIZES DO RETÂNGULO¹²



Acesse o retângulo no link

<https://www.geogebra.org/m/nvs4kbaa> no GeoGebra.



- 1) Trace as bissetrizes dos ângulos do retângulo dado.

Dica: clique em “bissetriz” na ferramenta



- 2) Marque os vértices do quadrilátero formado por elas, usando a ferramenta “ponto de interseção de dois objetos”. Destaque esse quadrilátero usando a ferramenta “polígono”.
- 3) Escolha um dos ângulos desse quadrilátero. Qual a medida desse ângulo?
Dica: Use a ferramenta “ângulo”.
- 4) Os outros ângulos do quadrilátero terão essa mesma medida? Experimente, clicando em qualquer ponto do interior do polígono.
- 5) Movimente o retângulo dado a partir de um dos vértices. O que acontece com as medidas desses ângulos?
- 6) A experiência que você fez permite você concluir que o quadrilátero é um
Justifique sua resposta.
- 7) Na ferramenta “ângulo” clique em “distância, comprimento, perímetro” e, selecionando cada par de extremidades dos lados do polígono, meça-os. O que você concluiu?

¹² Adaptado do livro *Argumentação e Provas no Ensino da Matemática, Projeto Fundação, IM - UFRJ*

Objetivos

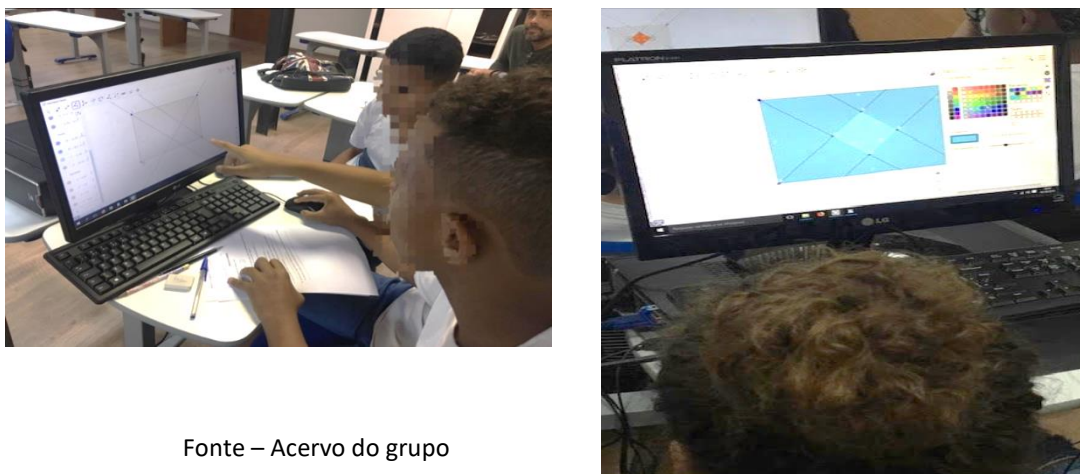
Propiciar ao aluno a oportunidade de

- reconhecer, através da investigação, as propriedades dos retângulos e quadrados;
- expressar o pensamento matemático na língua materna e
- explorar o conceito de bissetriz de um ângulo.

Comentários

- Esta atividade foi aplicada em uma turma de 7º ano de uma Escola Municipal da Zona Norte do Rio de Janeiro, suscitando o interesse dos alunos (Fig. 11). Também pode ser realizada em níveis escolares mais avançados a título de revisão.

Figura 11 – Alunos explorando a atividade



Fonte – Acervo do grupo

- O software não constitui dificuldade. Basta um breve reconhecimento e instruções ao longo da atividade para que os alunos a realizem.
- Se os alunos não conhecem o conceito de bissetriz, a atividade pode servir para introduzi-lo.
- Esta atividade apresenta oportunidade para discutir propriedades dos retângulos e quadrados. Por exemplo, no item 6, as respostas “retângulo” ou “quadrado” surgem naturalmente, motivando essa discussão. Os poucos alunos que tiveram dificuldade nesses aspectos receberam auxílio dos professores, sanando suas dúvidas.
- O registro das respostas em lápis e papel pelos alunos permite a sistematização do conteúdo construído e o aprimoramento das respostas, como, por exemplo, a resposta ao item 7 (Fig. 12), na qual trocou ângulo por lado.

Figura 12 – Respostas de aluno do 7º ano

Bissetrizes do retângulo

1) Trace as bissetrizes dos ângulos do retângulo dado.

Dica: clique em "bissetriz" na ferramenta 

2) Marque os vértices do quadrilátero formado por elas, usando a ferramenta "ponto de interseção de dois objetos". Destaque esse quadrilátero usando a ferramenta "polígono".

3) Escolha um dos ângulos desse quadrilátero. Qual a medida desse ângulo? $X = 90^\circ$
Dica: Use a ferramenta "ângulo".

4) Os outros ângulos do quadrilátero terão essa mesma medida? Sim
Verifique, clicando em qualquer ponto do interior do polígono.

5) Movimente o retângulo dado a partir de um dos vértices. O que acontece com essas medidas?
Continua a mesma medida.

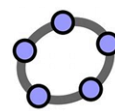
6) A experiência que você fez permite você concluir que o quadrilátero é um retângulo

7) Como você poderá justificar a sua resposta? Porque todos os lados medem 90° .

8) Na ferramenta "ângulo" clique em "distância, comprimento, perímetro" e, selecionando as extremidades de cada lado do polígono, meça esses lados. O que você concluiu?
Todos os lados são medidos a mesma medida.

Fonte – acervo do grupo

3.3 - TRAÇANDO E CONTANDO SEGMENTOS¹³



Acesse o link <https://www.geogebra.org/m/bwbujdvf> da atividade no GeoGebra.



- 1) Usando a ferramenta “Círculo” da tela do GeoGebra, construa 4 circunferências.
- 2) Agora, marque 2 pontos na primeira circunferência, 3 na segunda, 4 na terceira e 5 na quarta. Você escolhe a posição deles.
- 3) Determine o número de segmentos que podem ser traçados em cada circunferência, ligando esses pontos dois a dois.
- 4) Escreva uma expressão que dê o número de segmentos formados, para um número n qualquer de pontos marcados sobre a circunferência.
- 5) A expressão que você escreveu serviria para determinar os números de segmentos traçados em cada uma das 4 circunferências? Justifique.
- 6) Observando as figuras formadas, que significados geométricos podem ter esses segmentos?
- 7) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de diagonais de um polígono de n lados.
- 8) Utilizando a expressão do número total de diagonais de um polígono, obtenha a expressão que você escreveu para o total de segmentos. Registre seus cálculos e justifique com palavras.

¹³ Adaptado do livro *Álgebra: pensar, calcular, comunicar, ...*

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- utilizar o recurso GeoGebra como facilitador na construção de círculos e segmentos;
- integrar Álgebra e Geometria;
- observar e analisar regularidades que aparecem nas construções efetuadas, ao variar o número de pontos e o número de segmentos obtidos;
- generalizar regularidade observada, por meio de palavras escritas ou oralmente;
- traduzir lei de regularidade por meio de expressão algébrica;
- utilizar o valor numérico para verificar a expressão algébrica escrita, com significado;
- reconhecer os segmentos obtidos como diagonais ou lados de um polígono e
- dar significado ao cálculo com expressões algébricas.

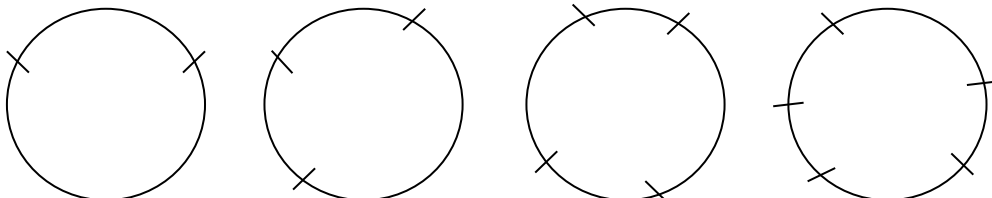
Comentários

- Um tutorial para o uso do GeoGebra nesta atividade encontra-se no link ou o QR Code.

https://docs.google.com/presentation/d/1LEV9Y51_cqv0LRA3Sb_Jsrli2DoehgEc/edit?usp=sharing&ouid=107055896468095190991&rtpof=true&sd=true



- Se não for possível o uso do GeoGebra, a atividade pode ser desenvolvida com lápis e papel, entregando a cada aluno uma folha com a figura abaixo.



- Na aplicação da atividade observamos dificuldades de alguns alunos na interpretação do enunciado. Algumas relativas à linguagem usada, outras ao não conhecimento de conceitos geométricos envolvidos.
- Não há necessidade de que os pontos estejam a uma mesma distância uns dos outros.
- Os cálculos dos valores numéricos, exigidos no item 5, bem como os que envolvem expressões algébricas, necessários no item 8, não são usados apenas para efetuar contas com letras, e sim para verificar resultados geométricos obtidos.
- Caso a turma não tenha conhecimento da expressão do número de diagonais, podem-se omitir os dois últimos itens.
- A regularidade na contagem do número de segmentos pode ser observada a partir de uma tabela com valores do número de pontos e números correspondentes de segmentos.
- Esta regularidade também está presente em outras situações como o número de aperto de mãos em uma reunião, números de jogos em um campeonato e em outras. A discussão dessa coincidência é um aprofundamento da atividade.

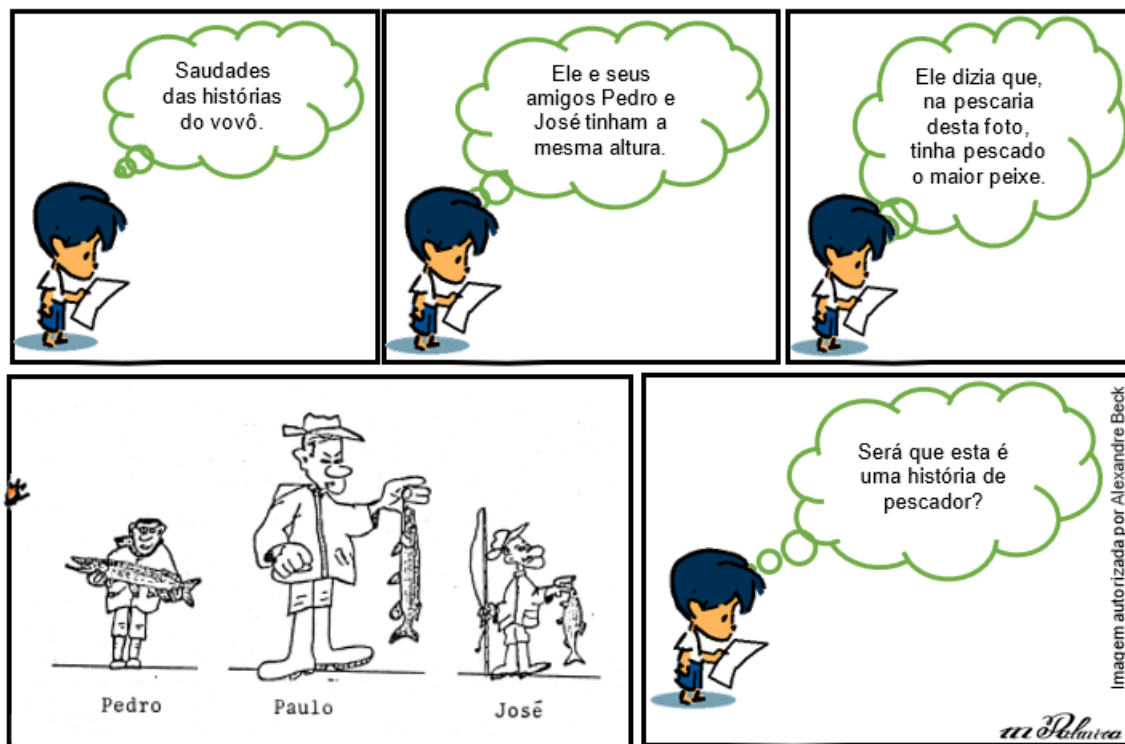
Capítulo 4 – Fotografia e Proporcionalidade

O trabalho com proporções é importante em aspectos da formação global do aluno, como: o desenvolvimento de suas estruturas mentais na construção do pensamento multiplicativo e a preparação para sua atuação como cidadão na realidade em que vive.

Percebe-se que, desde cedo, a criança começa a desenvolver a noção de proporcionalidade, principalmente em situações ligadas a preço, como tentar calcular quantos objetos que deseja comprar com determinada quantia ou ao observar o dilema de adultos ao comparar preços de um mesmo produto em embalagens diferentes e decidir qual a mais econômica. Além disso, o conceito aparece em: interpretação de estatísticas e gráficos, análise de plantas de imóveis e mapas, estimativa de probabilidades, e outras situações, como as que tratamos neste capítulo. Estes são motivos para que se possa afirmar que a proporcionalidade é um conteúdo integrador da Matemática e desta disciplina com outros campos do conhecimento escolar e da vida.

As atividades deste capítulo pretendem apoiar o professor em dois momentos em que o conceito de proporcionalidade está presente: incentivando a participação dos alunos na discussão de desafio introdutório do conceito e na elaboração de estratégia com o uso do celular (câmera e calculadora) para resolver situações-problemas distintas em que ele se aplica.

O desafio dos peixes, que é introdutório ao conteúdo, apresentado em quadrinhos, provocou bastante curiosidade dos alunos e uma rica discussão principalmente por não envolver contas nem medidas com instrumentos. A calculadora e a câmera mostraram-se necessárias e motivadoras, em aplicações das proporções que remetem à experiência de Tales com as pirâmides ou na exploração de preços no comércio.

4.1 - O MAIOR PEIXE ¹⁴

- 1) O que você entende por “história de pescador”?
- 2) Qual a dúvida do Armandinho?
- 3) Se o avô do Armandinho tinha a mesma altura dos amigos, quem pescou o maior peixe? Por quê?
- 4) Então, a história do Vovô é de pescador ou não? Justifique.

¹⁴ Adaptado do livro de Razões e Proporções, Projeto Fundão, IM – UFRJ
Autorizado, o uso do Armandinho nesta tirinha, pelo criador Alexandre Beck, no dia 2 de julho de 2018.

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- utilizar informalmente o conceito de proporção, sem instrumentos de medida e
- resolver problema em que a tarefa a ser realizada não está explicitada em palavras, mas sim por meio de imagens.

Comentários

- Na aplicação, como em geral acontece nos problemas em quadrinhos, os alunos necessitaram da interferência do professor para perceber o que tinham de fazer. Houve caso em que o aluno perguntou se era uma atividade de língua portuguesa, por ser apresentada em tirinhas e não conter números nem cálculos.
- Os itens 1 e 2 foram acrescentados porque, na primeira experiência, a maioria das respostas ao item 4 foi negativa. Talvez os alunos tenham achado que a pergunta a ser respondida era se o avô tinha ou não pescado o maior peixe, mas esperava-se que decidissem se era uma história de pescador. Outro motivo do erro pode ter sido o fato de que a totalidade dos alunos desconhecia o significado de uma “história de pescador”.
- Os alunos apresentaram também muita dificuldade de se expressar com palavras, principalmente por escrito.
- Os alunos poderão questionar as diferentes alturas dos pescadores na figura, já que, como foi afirmado, que eles têm a mesma altura. Algumas experiências de fotografar alunos de mesma altura ou não, em diversas posições, podem esclarecer a questão.
- Inicialmente, os alunos tendem a querer medir as figuras, o que não deve ser permitido. A intenção é que façam comparações intuitivas entre as razões dos peixes e as alturas dos pescadores. Uma resposta ao item 3 que ilustra esse raciocínio foi: *“O Pedro, pois o peixe dele tinha a mesma altura do que ele”*.
A resposta a seguir indica a ausência de compreensão da questão.
“Todos, pois eles têm a mesma altura, logo os peixes têm o mesmo tamanho”.
- Alguns alunos justificaram sua resposta aumentando os pescadores e comparando como pescador central da figura, ou seja, Paulo.

4.2 - Atividade da Quadra



Utilizando a câmera de um smartphone meça as alturas: da cesta de basquete, das traves verticais do Gol de Futebol e da quadra.

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- desenvolver os conceitos de Razão e de Escala informalmente;
- utilizar a câmera do *smartphone* e a calculadora como auxiliares na solução de um desafio e
- relacionar as estratégias utilizadas com as utilizadas por Tales ao medir a altura das pirâmides.

Comentários

- Essa atividade foi desenvolvida, após a apresentação das estratégias de Tales para medir as pirâmides, em turmas do 9º ano de escolas da rede privada, nas quadras de esporte das escolas, que são fechadas.
- As turmas foram divididas em grupos de no máximo 5 alunos, em que pelo menos um dos elementos sabia a medida de sua altura. Cada grupo tinha a tarefa de fazer as medições pedidas, utilizando papel, lápis, régua e o *smartphone*.
- Nessa experiência, a tentativa de usar régua para medir as alturas reais dos objetos de observação dificultou o desenvolvimento do trabalho de alguns grupos, o que foi contornado pelo professor ao lembrar-lhes a impossibilidade de proceder como na experiência de Tales, mas que tinham um celular com câmera, como mostra a Figura 13.
- Após o término da atividade, os grupos em sala de aula apresentaram as alturas obtidas, comparando-as com as dos outros grupos e trocando ideias sobre as estratégias usadas e os resultados obtidos.
- Foi possível então destacar que as pequenas diferenças nas medidas não eram empecilhos para obtenção da altura.

Figura 13 – Aluno fotografando o gol da quadra



Fonte – Acervo grupo

- Concluiu-se que o trabalho se desenvolveu bem, tanto na participação efetiva da maioria das turmas, como na compreensão do conteúdo envolvido na tarefa, relacionando-o com a história da Matemática.
- Esta atividade propicia ao aluno resolver uma situação concreta, com a utilização da câmera do smartphone e aplicando conhecimentos de proporção.
- Dando continuidade ao assunto tratado, o professor poderá utilizar também a câmera do smartphone, para trabalhar figuras semelhantes, ao fazer duas fotos de um objeto, por exemplo um livro ou caderno, utilizando distâncias diferentes ou o zoom do aparelho.
- Uma adaptação da atividade para sala de aula constitui a atividade 4.3 a seguir, ocasião em que os alunos encontraram a medida do ***pé direito*** da sala e as medidas de objetos como o quadro.

4.3 - A ALTURA DA SALA



Jonas quis verificar se o pé direito de sua sala de aula estava obedecendo a medida padrão estipulada pela ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas), que é 2,7 m.

Para isso ele usou a câmera de seu celular. Troque ideias com seus colegas sobre como Jonas pode ter calculado essa altura e tente fazer essa experiência.

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- desenvolver e aplicar os conceitos de Razão e de Escala em uma situação real;
- utilizar os recursos do smartphone, como a câmera e a calculadora, como auxiliares na procura da solução de uma situação prática que envolve conteúdo de Matemática e
- reconhecer que medidas são sempre imprecisas e que as pequenas diferenças não são empecilhos para a solução de certos problemas.

Comentários

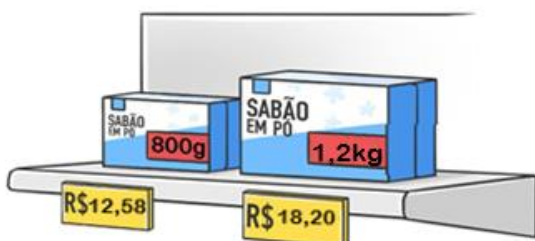
- Para melhor compreensão da situação em questão, sugere-se incentivar a pesquisa do termo **pé direito** de uma sala ou de um cômodo qualquer. Conhecer a finalidade da ABNT nas construções civis, sabendo que as normas são modificadas ao longo do tempo, contribui para a formação do aluno.
- Se possível, trabalhar em grupos ou duplas incentivando a troca de ideias, especialmente nessa atividade em que o enunciado não indica caminhos para a solução. Após essa conversa e com a ajuda do professor, os alunos, em geral conseguem.
- Para entender melhor a situação, os alunos podem ser estimulados a fazer uma só foto com dois objetos ou pessoas, sabendo o comprimento de um deles e determinar o do outro, usando uma proporção. Nesse caso, a resposta pode ser verificada experimentalmente ao medir o outro objeto.
- Após essa ação, questioná-los sobre a estratégia que Jonas usou para o cálculo da altura da sala.
- Sugerir a possibilidade do uso da Calculadora do smartphone para facilitar os cálculos necessários.
- A troca de ideias a respeito das diferenças nas medidas obtidas, permitem aos alunos observarem que estas não são empecilho para a obtenção da altura pedida.

4.4 – A COMPRA DO SABÃO EM PÓ

Rodrigo foi ao supermercado para comprar sabão em pó. Queria uma embalagem de 1 kg, mas só encontrou de 1,6 kg por R\$ 28,59 e de 800 g por R\$ 15,57. Resolveu escolher a mais econômica.



- 1) Troque ideias com seus colegas sobre os tipos de estratégia que Rodrigo pode ter usado para fazer sua estimativa. Registre com palavras essas estratégias e conclusões possíveis.
- 2) Ao comparar as informações das duas embalagens, você pode afirmar que há proporcionalidade entre o preço e o peso do sabão? Justifique.
- 3) Se a sua resposta foi negativa e mantendo o preço da embalagem de 1,6 kg, qual deveria ser o preço da embalagem de 800 g para que houvesse essa proporcionalidade?
- 4) Utilizando os preços das embalagens que Rodrigo encontrou, qual seria o preço de 1kg de sabão em cada embalagem? Registre seus cálculos.



- 5) Se você encontrasse a situação ao lado, como você faria para descobrir qual das duas embalagens está mais em conta?
- 6) Você acha importante comparar os preços das mercadorias? E refletir sobre a necessidade de comprar? Justifique sua resposta.

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- perceber que algumas vezes, não há proporcionalidade entre o preço e a quantidade de um mesmo produto, em embalagens diferentes;
- desenvolver o cálculo mental para fazer estimativas e tomar decisões;
- utilizar a calculadora como facilitadora de cálculos do dia a dia e
- identificar responsabilidades do consumidor ao realizar suas compras.

Comentários

- Ao aluno que considerar simplesmente a mais barata como a mais econômica, recomenda-se questioná-lo sobre os critérios que podem ser usados na escolha.
- O desenvolvimento de diferentes tipos de cálculo utilizados no dia a dia como: cálculo mental, estimativa e o uso da calculadora devem estar presentes na sala de aula.
- Especificamente nesta atividade, na qual a habilidade de efetuar cálculos não é o foco principal, o uso da calculadora tem o objetivo de facilitar os cálculos com decimais.
- A discussão de situações em que grandezas parecem ser proporcionais e não são, que pouco aparecem em sala de aula, é relevante para fixar os critérios que garantem essa existência.
- Os itens (4) e (5) exploram relações do sistema de medida de massa, em situações nas quais as medidas são expressas em unidades diferentes nas duas embalagens.
- O item (6) pretende incentivar o debate de questões de Educação Financeira muito presentes no cotidiano.
- A atividade foi aplicada em duas turmas de oitavo ano que já tinham estudado proporcionalidade no ano anterior. Os alunos foram muito receptivos, inclusive os mais agitados ficaram envolvidos na atividade.
- A maioria realizou com facilidade os primeiros três itens. O cálculo do valor de um quilo em cada embalagem (item 4) gerou maior dificuldade, mas alguns resolveram utilizando a calculadora. Calcularam o preço de 100 g em cada embalagem e multiplicaram por 10 ou o preço de 200 g e multiplicaram por 5. A regra de três também foi utilizada.

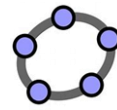
Capítulo 5 – Áreas e Perímetros de Figuras em Movimento

Situações de estimar áreas e perímetros de figuras são frequentes na vida, o que justifica a presença desses conceitos nos programas de vários anos escolares. Apesar disso, muitas são as dificuldades para resolver situações que os envolvem, observadas em sala de aula.

Com a intenção de contribuir para sanar esta contradição, o grupo observou a necessidade de dar mais importância à formação dos dois conceitos simultaneamente, explorando situações em que a área e ou o perímetro de figuras variam e nas quais o estudante precisa ter construído a noção de conservação da área. De fato, a construção dos conceitos pode ser facilitada com um trabalho de comparação desses atributos.

Propomos neste capítulo atividades nas quais os alunos constroem e movimentam figuras com o uso de materiais manipuláveis, como o Tangram, ou com o aplicativo GeoGebra. Estes recursos permitem a eles observarem as variações das áreas e perímetros de figuras variáveis e concluírem a independência entre essas variações.

Na última atividade, o aluno também tem a oportunidade de generalizar e de expressar as leis gerais em linguagem algébrica, integrando álgebra, geometria e o conceito de perímetro, bem como analisar a existência de proporcionalidade entre grandezas envolvidas.

5.1- RETÂNGULO CORTADO

- 1) Acesse o link: <https://www.geogebra.org/m/fxtmrxpz>



- 2) Observando o retângulo e o trapézio formados, podemos afirmar que:

- a área: aumentou () diminuiu () ficou igual ()
- o perímetro: aumentou () diminuiu () ficou igual ()

- 3) Agora forme uma figura diferente do trapézio com as partes do retângulo e responda aos mesmos questionamentos em relação a área e ao perímetro.

Então, as respostas foram as mesmas? Explique sua conclusão.

- 4) O que você observou ao comparar as áreas e os perímetros dessas figuras? Justifique com suas palavras sua conclusão em relação às áreas.

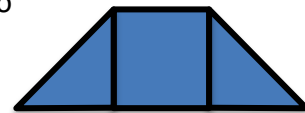
Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- comparar áreas e perímetros de figuras com as mesmas peças, mas com formas diferentes;
- explorar a conservação de área;
- compreender a independência entre as variações das grandezas área e perímetro.

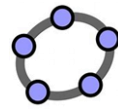
Comentários

- Frequentemente, os conceitos de área e perímetro de uma figura são confundidos com as fórmulas usuais para determinar suas medidas, que deveriam ser a última etapa do estudo desses conceitos. Daí a necessidade de trabalhá-los conforme o proposto, de forma dinâmica e sem formalismo.
- Alunos que construírem outra figura que não trapézio podem realizar a atividade assim mesmo, desde que observem corretamente suas áreas e perímetros.
- Atividades deste tipo têm o papel de familiarizar os alunos com a análise da variação da área e do perímetro de uma figura, quando ela é transformada por deslocamentos de suas partes. Observe-se que a atividade não envolve números, fórmulas nem instrumentos de medida, nem pede que sejam determinados valores numéricos para as áreas e perímetros, o que pode causar estranheza aos alunos, sem vivência com experiências desse tipo.
- As dificuldades observadas na realização da atividade “Mexendo com Figuras”, apresentada adiante, indicaram ao grupo a necessidade de trabalhar com os alunos atividades mais simples, como esta, com os mesmos objetivos.
- Particularmente, a ideia dos alunos de que existe uma dependência entre as variações da área e do perímetro deve ser desconstruída. Realizar atividades em que a área e o perímetro de uma figura variem ou não no mesmo sentido contribui para isso.
- Em experiências com esta atividade, com turmas do 8º ano, comparando apenas o retângulo e o trapézio, foi observado que aproximadamente 86% dos alunos acertaram que a medida da área é a mesma, enquanto cerca de 72% deles

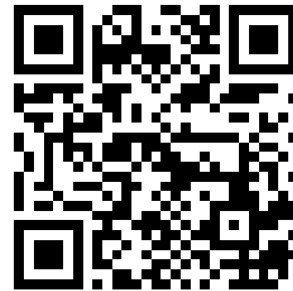


consideraram que as figuras tinham o mesmo perímetro, o que ilustra a ideia mencionada anteriormente.

- Os alunos podem ter dificuldade em relação à diferença entre os sentidos da palavra área, quando usada na linguagem corrente e na Matemática. Há necessidade de o professor conversar com seus alunos sobre isso.

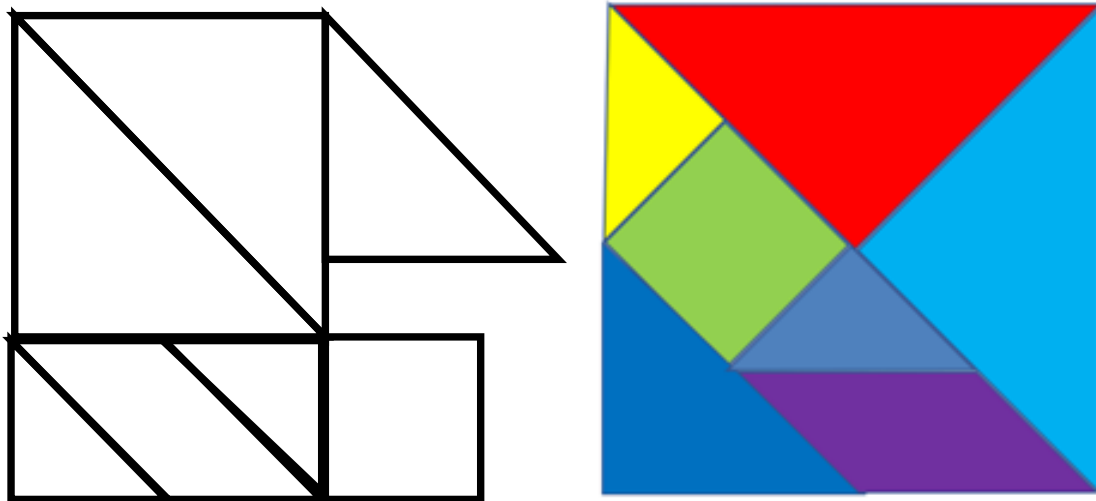
5.2 - MEXENDO COM FIGURAS ¹⁵

Acesse no link <https://www.geogebra.org/m/vgfdgtbh> ou no QR Code o Tangram no GeoGebra



- 1) Com as peças do Tangram forme uma figura semelhante à dada, execute os deslocamentos indicados, respondendo às respectivas perguntas.

OBS - A figura que você construiu será considerada figura inicial.



- a) Desloque o quadrado até ele encostar no triângulo médio e observe a nova figura (observe as partes do contorno da figura que mudaram).

Essa nova figura tem perímetro maior, menor ou igual ao da figura inicial? Justifique.

Essa nova figura tem área maior, menor ou igual à da figura inicial? Justifique.

¹⁵ Adaptado do livro *Geometria na Era da Imagem e do Movimento*, Projeto Fundação, IM - UFRJ

b) Volte para a figura inicial, e retire dela o quadrado. O que aconteceu agora?

	Aumentou	Diminuiu	Ficou igual
O perímetro			
A área			

c) Volte para a figura inicial, mais uma vez, e retire dela o paralelogramo. O que aconteceu agora?

	Aumentou	Diminuiu	Ficou igual
O perímetro			
A área			

2) Deslocando apenas uma peça da figura inicial, construa uma nova figura com o mesmo perímetro que ela. Justifique porque o perímetro não muda.

3) Observando com atenção as respostas que você deu nos itens 1 e 2, decida se são verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações abaixo.

- () Aumentando a área de uma figura, o seu perímetro sempre aumenta.
- () Diminuindo a área de uma figura, o seu perímetro sempre diminui.
- () Figuras de mesma área têm sempre o mesmo perímetro.
- () Figuras de formas diferentes podem ter a mesma área.
- () Figuras de formas diferentes podem ter o mesmo perímetro.
- () Podemos afirmar que o perímetro de uma figura aumenta ou diminui quando aumentamos ou diminuimos sua área.

Objetivos

Propiciar ao aluno a oportunidade de

- utilizar as figuras que representam as peças do Tangram em situações desafiadoras;
- desenvolver os conceitos de área e perímetro simultaneamente;
- explorar os conceitos abordados sem o uso de fórmulas;
- reconhecer a independência entre as variações da área e do perímetro de figuras e
- adquirir a noção de conservação de área por meio da comparação de figuras.

Comentários

- O uso do GeoGebra poderá motivar a participação dos alunos e facilitar a resposta às perguntas. Entretanto, a utilização do Tangram de papel ou de outro material também cumpre este objetivo.
- Exemplo de link que possibilita uma exploração diversificada do TANGRAM: <https://pt.mathigon.org/tangram>
- Essa atividade foi aplicada em turmas do Ensino Fundamental da Rede Pública, de Licenciandos em Matemática da UFRJ e do curso de Pedagogia da UERJ. Alguns dos comentários mais recorrentes foram:

“O que é perímetro mesmo?”

“Pode usar régua?” (Ver Fig. 14)

“Caramba. A área diminuiu, mas o perímetro aumentou.”

“Perímetro é a soma de todos os lados.”

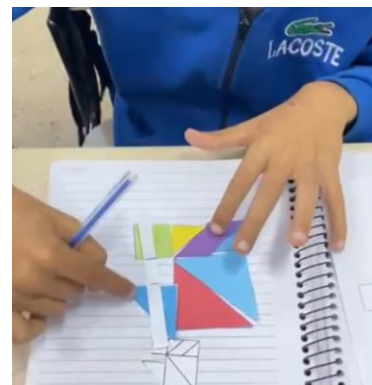
“Como calcula a área?”

Uma aluna do curso de Pedagogia, ao concluir a atividade, afirmou satisfeita:

“Agora entendi o que é perímetro”.

- Essas perguntas e comentários foram enriquecedores na realização da atividade. O perímetro é usual e limitadamente apresentado como a soma de todos os lados e a área confundida com o cálculo de sua medida, com o uso das fórmulas. Através dessa atividade, tivemos a oportunidade de expandir os conhecimentos dos alunos em relação a esses conceitos, independentemente de medidas e números.

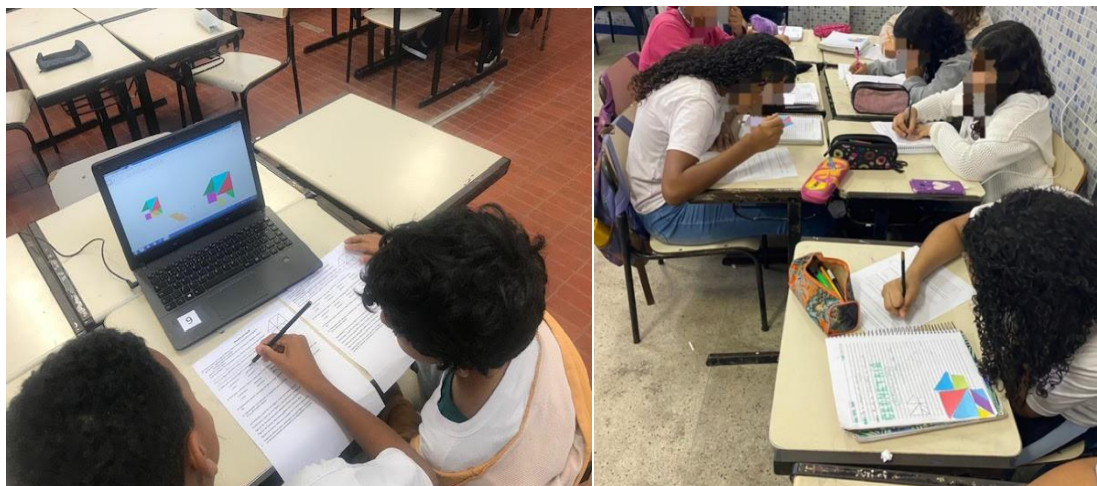
Figura 14 – Aluno tentando usar régua, sem sucesso.



Fonte – Acervo do grupo.

- A atividade foi realizada com os alunos divididos em duplas ou trios, dinâmica que facilita a troca de ideias e a comparação entre os diversos métodos utilizados para concluir o que está sendo pedido, como ilustra a Figura 15.

Figura 15 – Alunos trabalhando



Fonte – Acervo do grupo

- A justificativa pedida nos itens relativos à variação de perímetros (1.a e 2) gera muitas dificuldades entre os alunos, principalmente, para traduzir em palavras suas conclusões. Nesse momento é importante que o professor auxilie e verifique o que foi respondido, pois o que foi observado nesse item é fundamental para o decorrer da atividade.
- O item 3 é importante para a sistematização do conteúdo explorado na atividade. A relação de independência da área e do perímetro foi uma surpresa para grande parte dos alunos e para os licenciandos. De fato, entre os polígonos regulares, a área e o perímetro variam no mesmo sentido. Em uma experiência em que o item 3 foi apresentado por meio de perguntas pôde-se observar a dificuldade em respondê-las (Fig. 16).

Figura 16 – Respostas de aluno ao item 3

Troquem ideias com seus colegas e professor sobre suas conclusões e respondam:

Com o que você observou em I e II, pode-se afirmar que:

- aumentando a área de uma figura, o seu perímetro aumenta?
- E, diminuindo a área de uma figura, o seu perímetro diminui?
- Figuras de mesma área têm sempre o mesmo perímetro?

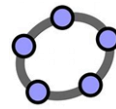
Handwritten notes on the left margin: Mais depende da forma que aumenta

Handwritten answers:

- Aumenta pois tem + formas para somar
- Sim pois tem - formas para somar
- Não

Fonte – Acervo do grupo

5.3 - Sequência de Hexágonos ¹⁶



Acesse o link ou o QR Code da atividade no GeoGebra.

<https://www.geogebra.org/m/dsdqzvyw>



- 1) Construa no GeoGebra cinco hexágonos regulares congruentes separados.

Dica: Use as ferramentas “polígono regular” e “copie e cole (editar)”.

Número de hexágonos	Total de palitos
5	
8	
30	
n	

- 2) Considerando cada lado do hexágono como um palito de sorvete, complete a tabela com o número de palitos necessários para construir o número de hexágonos indicados em cada linha.

- 3) Observando os dados da tabela, posso afirmar que o número total de palitos é proporcional ao número de hexágonos? Justifique.

- 4) Agora, ainda no GeoGebra, construa uma fila com esses 5 hexágonos unindo-os por um de seus lados.

- 5) Destaque o contorno dessa figura. Pinte e aumente a espessura desse contorno.

Dica: Use a ferramenta “polígono” e selecione (tecla da seta) todos os vértices desse contorno.

Selecione o polígono e escolha a cor desejada.

- 6) Se você fosse cobrir esse contorno com palitos iguais ao lado do hexágono, quantos palitos você iria utilizar? _____

¹⁶ Adaptado do livro *Álgebra: pensar, calcular, comunicar,...*, Projeto Fundação, IM - UFRJ

- 7) Qual o perímetro dessa figura, utilizando como unidade de comprimento o lado do hexágono? _____

Complete a tabela para os números de hexágonos indicados.

Número de hexágonos	Perímetro
5	
6	
10	
100	

- 8) O perímetro encontrado para a figura depende do número de hexágonos da fila? Justifique.

- 9) O perímetro encontrado é proporcional ao número de hexágonos da figura? Justifique.

- 10) Como você determinou o perímetro da figura com 100 hexágonos?

- 11) E se fosse um outro número qualquer n de hexágonos, como você escreveria o perímetro da figura? _____

- 12) Se o perímetro da figura construída fosse 146 lados, qual seria o número de hexágonos dessa figura? Como você descobriu?

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- utilizar os recursos do GeoGebra como facilitador na realização de atividade envolvendo polígonos;
- recordar o conceito de perímetro;
- observar e analisar as regularidades que aparecem nas construções efetuadas;
- comunicar com palavras e com expressões algébricas a generalização das regularidades observadas e
- concluir por meio da observação das construções e utilizando os dados registrados na tabela, a existência ou não de proporcionalidade entre as grandezas.

Comentários

- Apesar de o GeoGebra não ter sido apresentado aos alunos anteriormente, essa atividade não gerou dificuldade. Em uma dessas experiências, em turma do 7º ano, iniciamos com uma orientação geral, destacando os comandos e como utilizá-los. Como era de se esperar, os alunos rapidamente executaram as construções propostas.
- Caso necessite existe um tutorial para auxiliá-lo no link ou QR Code

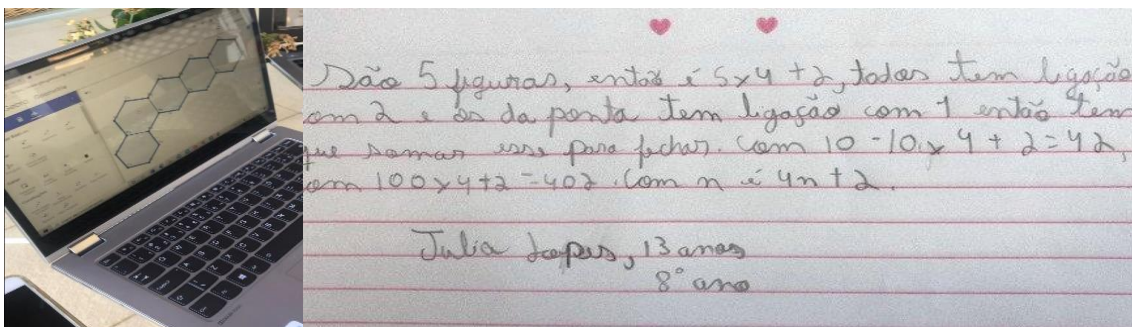
https://docs.google.com/presentation/d/1l3vgHljg28JSfYKLv-nTwBDF6QiWmP_3/edit?usp=sharing&ouid=107055896468095190991&rtpof=true&sd=true



- A interação entre os alunos no desenvolvimento das questões, com a comunicação e troca de ideias, deve ser incentivada por meio da mediação do professor.
- A atividade não se destina apenas a um determinado ano, ela pode ser adaptada de acordo com os conteúdos trabalhados, podendo ser usada como motivadora para a apresentação e desenvolvimento de conteúdos envolvidos.

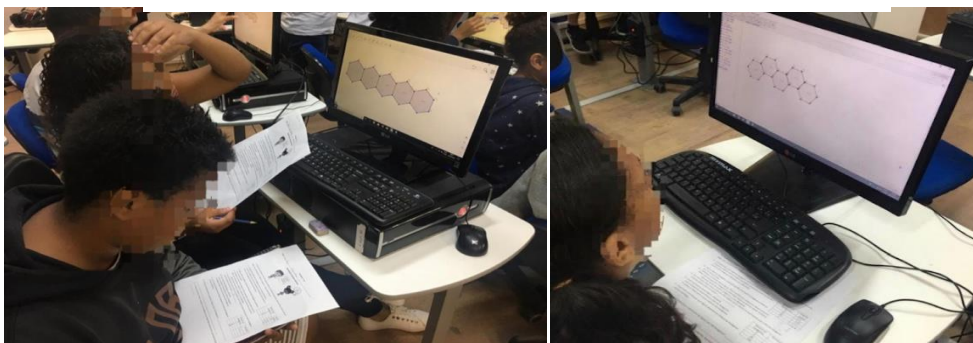
- A discussão sobre se há ou não proporcionalidade, em cada situação é muito rica para solidificação desse conceito. No entanto, em turmas em que a proporcionalidade não tenha sido apresentada, devem-se omitir as questões sobre esse conteúdo.
- Alunos que ainda não construíram o conceito de variável estranham o uso de uma variável (letra) para representar um número qualquer de hexágonos.
- Apesar de esse tipo de atividade ser novidade, obteve um grau satisfatório de desempenho como ilustram algumas soluções apresentadas abaixo. Segue (Fig. 17) generalização e respectiva justificativa realizada por uma aluna, no preenchimento da tabela do item 7, em experimento do grupo com alunos da rede municipal do Rio de Janeiro.
- A construção da fila de hexágonos pedida no item 4 propicia o aparecimento de uma diversidade de formas que nem todos os alunos admitem serem polígonos, por não serem usuais no estudo dos polígonos. Exemplos se encontram as figuras 17 e 18.

Figura 17 – Respostas de aluna do 8º ano ao item 7



Fonte – Acervo do grupo

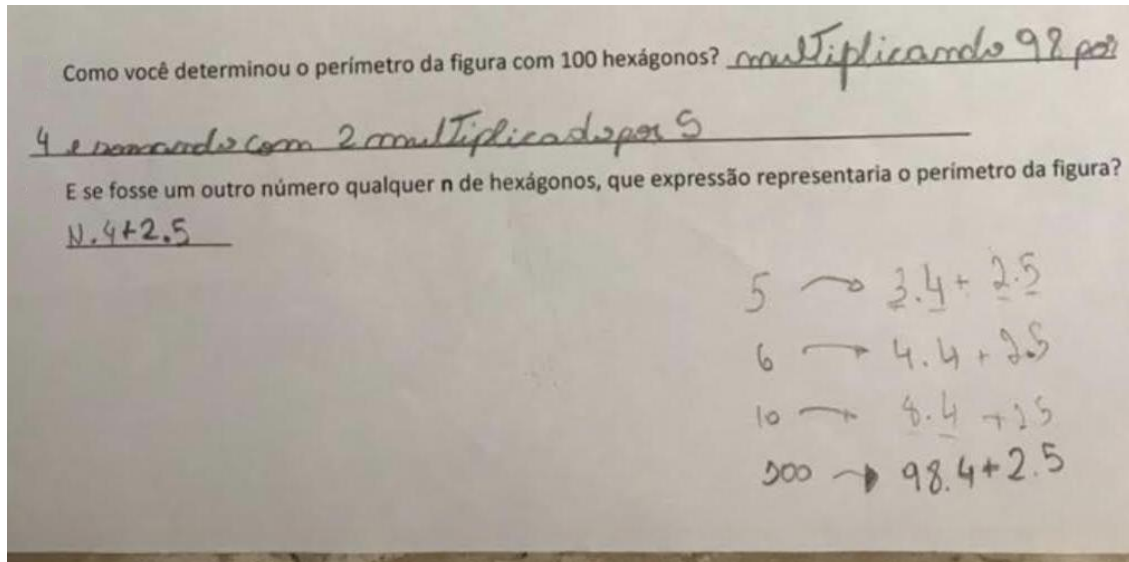
Figura 18 – Variedade de polígonos formados pelos hexágonos



Fonte – Acervo do grupo

- As respostas aos itens 10 e 11, apresentadas na Figura 19, ilustram um outro modo de generalizar a forma de determinar o perímetro. Essa diversidade enriquece a discussão da atividade.

Figura 19 – Respostas de aluno do 8º ano aos itens 10 e 11



Fonte – Acervo do grupo

Capítulo 6 – O Dilema dos cartões

Apresentamos neste capítulo uma atividade que não envolve especificamente nenhum conteúdo explorado na escola básica, mas trata de um dos principais objetivos do ensino de Matemática: o de desenvolver o raciocínio lógico. Este desenvolvimento pode se dar por meio de desafios que não exigem cálculos, contextualizados em situações do dia a dia e que em geral despertam o interesse dos alunos.

A grande dificuldade encontrada por alunos do Ensino Fundamental nas experiências realizadas com o desafio a seguir justifica a sua aplicação apenas a partir do 8º ano desse nível escolar.

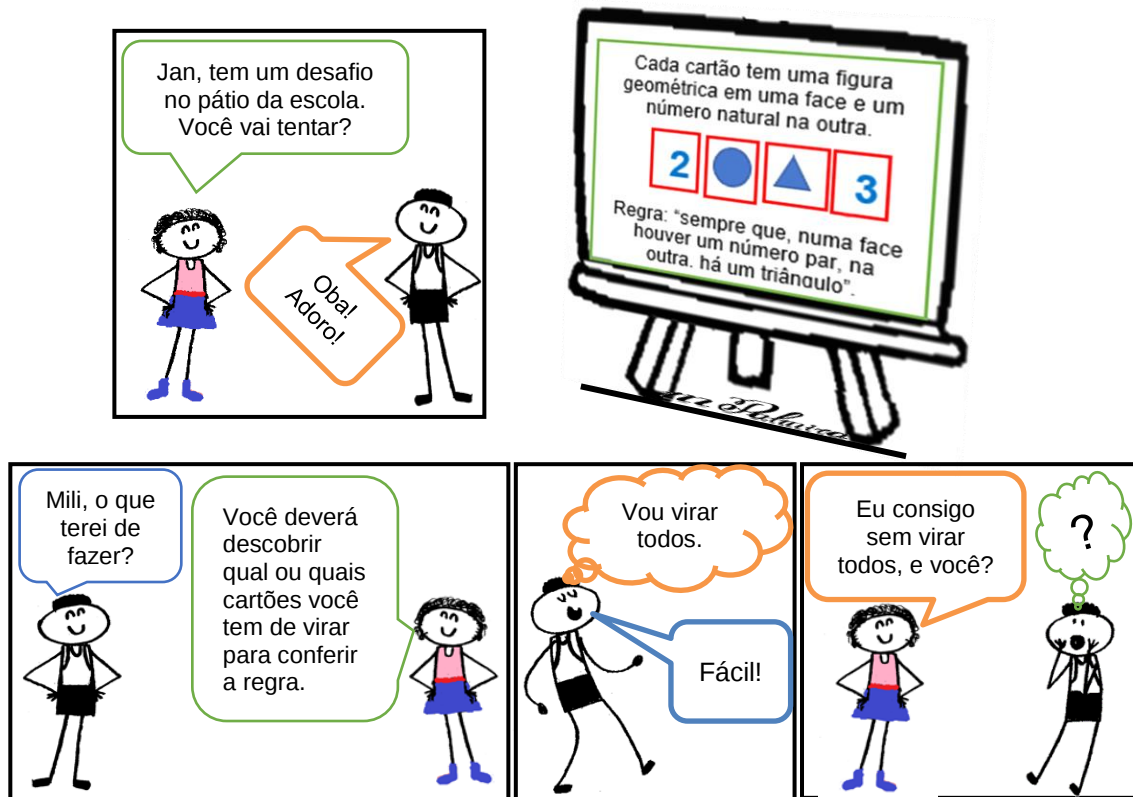
Tais dificuldades indicam também a necessidade de, ao longo dos 6º e 7º anos, este tipo de raciocínio seja trabalhado em situações mais simples. Como afirmamos no livro *Argumentação e Provas no Ensino da Matemática* (NASSER e TINOCO, 2003, p. 82)

Desde o início do trabalho, uma das estratégias que se mostraram mais eficientes, no sentido de os alunos se tornarem capazes de encadear ideias logicamente, foi a de propor desafios lógicos, independentes de conteúdo matemático.

É altamente recomendável que, ao longo do ano, se possível a cada semana, os alunos resolvam pelo menos um desses desafios. A discussão das soluções é indispensável, não para que haja uma resposta consagrada, mas sim, para a defesa e troca de argumentos entre eles.

Estes tipos de problemas podem ser encontrados em revistas de diversões.

Exemplos de situações que podem suprir as dificuldades apontadas são propostos no final dos comentários da atividade, como **ATIVIDADES PREPARATÓRIAS**.

6 - O DILEMA DOS CARTÕES ¹⁷

- 1) Você pensa como Jan que tem que virar todos os cartões para conferir a regra? Justifique.
- 2) Sem virar todos os cartões, como Mili resolveu?
- 3) Como você explicaria a situação apresentada na atividade para um colega que não veio à escola?

¹⁷ Adaptado do livro *Argumentação e Provas, Projeto Fundação, IM, UFRJ*

Objetivos

Dar oportunidade aos alunos de

- desenvolver o raciocínio lógico;
- reconhecer que a recíproca de uma afirmação verdadeira nem sempre é verdadeira;
- reconhecer que se pode fazer Matemática sem fazer contas.

Comentários

- Na primeira versão aplicada em sala de aula de Ensino Fundamental, era pedido que descrevessem a situação, no item 1. Foi então observada grande dificuldade dos alunos em perceber o que deviam fazer, como ilustram as respostas a seguir, das quais apenas a primeira dá uma ideia da situação.

- *“Você precisa descobrir quais cartões você tem de virar para conferir a regra, o desafio é ...Você precisa descobrir sem virar todos”.*
- *“Jan acha mais fácil virar todos e presta a atenção nos números pares”.*
- *“Eles estava conversando pra somar as tirinha certa” (sic).*

Ao longo da discussão as ideias deles foram ficando mais claras, o que fez o grupo colocar a solicitação do item 3 da atividade.

- Os exemplos de respostas a esse item mostram a dificuldade de encadear e exprimir um raciocínio lógico e de interpretar uma situação apresentada sob a forma de quadrinhos. O professor pode orientar a discussão dos alunos, propondo perguntas do tipo: O que significa “tem de virar para conferir a regra”? Qual é exatamente a regra?

A discussão em grupo ou em dupla certamente ajuda muito, embora seja enriquecedor cada aluno fazer os seus registros. Exemplos.

“Não, assim perde a graça”.

“Não, pois se ele virar todos ele não terá pelo menos tentado descobrir o objetivo do jogo”.

“Não, porque prefiro presta atenção nos números pares” (sic).

- No item 2, poucas respostas corretas foram apresentadas, embora na discussão de uma das turmas tenham surgido ideias boas. Soma-se à dificuldade da atividade, a falta de experiência em se expressar em palavras. Exemplos.

- *Acho que ela já sabia.*
 - *Bom, eu não consegui resolver.*
 - *Prestando atenção nos números pares.*
 - *Ela virou só o círculo.*
- Muitos alunos podem pensar como o Jan, no entanto não há necessidade de virar os dois últimos cartões, só os dois primeiros.
- Nesse caso, o professor poderá justificar a necessidade de virar apenas os dois primeiros cartões, incentivando a discussão de cada um deles.
- De fato, se atrás do cartão do 2 não houver um triângulo, a regra não vale. Também a regra não valerá, se atrás do círculo houver um número par.
- No entanto, virar os cartões do triângulo e do 3 não permitirá chegar a nenhuma conclusão. No caso do triângulo, alguns alunos pensarão que atrás dele deverá haver um número par. Neste caso, estarão confundindo a regra com a sua recíproca, contrariando o resultado da lógica referido nos objetivos: nem sempre que uma afirmação é verdadeira, sua recíproca também é. No caso da regra, nem sempre que numa face há um triângulo, na outra, necessariamente há um número par.
- Exemplos da vida podem ser discutidos em sala de aula, como:
- “Se você tomar chuva, você vai ficar molhado, mas nem sempre que você fica molhado, você tomou chuva”.

Em relação ao cartão com o número 3, pode-se pensar erroneamente que atrás de um número ímpar não pode haver um triângulo. De fato, a regra não diz nada sobre a figura que deve haver atrás de um número ímpar, só obriga que a figura atrás do número par seja um triângulo.

EXEMPLOS DE ATIVIDADES PREPARATÓRIAS**ATIVIDADE 1**

Em cada item a seguir, diga se a terceira afirmação é verdadeira ou falsa.

- a) Se você esqueceu seu lápis, você deve me pedir algum emprestado.

Você esqueceu seu lápis.

Logo você vai me pedir um lápis emprestado.

- b) Todas as mariposas são atraídas para a luz das velas.

Este inseto não é uma mariposa.

Logo este inseto não é atraído para a luz das velas.

- c) Todos os refrigerantes contêm bolhas.

Você está bebendo algo com bolhas.

Logo você está bebendo um refrigerante.

- d) Os estudantes não irão prestar atenção se a aula estiver chata.

Aula não está chata.

Logo os estudantes vão prestar atenção.

ATIVIDADE 2 (Vestibular UFF – 1998)

Na cidade litorânea de Ioretin é rigorosamente obedecida a seguinte ordem do prefeito:

“Se não chover, então todos os bares à beira-mar deverão ser abertos.”

Pode-se afirmar que:

- (A) Se todos os bares à beira-mar estão abertos, então choveu.
- (B) Se todos os bares à beira-mar estão abertos, então não choveu.
- (C) Se choveu, então todos os bares à beira-mar não estão abertos.
- (D) Se choveu, então todos os bares à beira-mar estão abertos.
- (E) Se um bar à beira-mar não está aberto, então choveu.

ATIVIDADE 3 (Revista Super interessante - Abril/1989 - Página 81)

A seguir você tem três caixas e apenas uma delas tem um presente dentro. A única pista para descobrir onde está o presente são as inscrições na frente das caixas. Porém, não se esqueça, apenas uma das inscrições é verdadeira. Onde está o presente?



BIBLIOGRAFIA

- BAIRRAL, Marcelo A. (Org.). **Tecnologias Informáticas, salas de aula e aprendizagens matemáticas**. Série InovaComTIC, Vol III, EDUR, UFRRJ, Rio de Janeiro, 2010.
- BARBOSA, Alexandre. Os quadrinhos no Ensino de Artes. Em RAMA, Ângela et al (orgs). **Como Usar Histórias em quadrinhos em Sala de Aula**. São Paulo, Contexto, 2004.
- BORBA, Marcelo, C.; PENTEADO, Mirian, G. **Informática e Educação Matemática**, Coleção Tendências em Educação Matemática, Autêntica, 3ª ed., Belo Horizonte, MG, 2003.
- BORDEAUX, Ana Lucia et al. **Matemática em Ação**. Ed do Brasil, São Paulo, 2009.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**, Brasília, 2017.
- DIAS, Ana Lucia, B.; COELHO, Juliana, B. G.; MYNATT, Gabrielle. “Professora, a gente pode usar o Photomath?”: o lugar dos aplicativos nas aulas de matemática. **Pesquisas e Práticas Educativas**, disponível em: <https://br/pepe/index.php/pepe/article/view/34>. Acesso em 10 de set. de 2022.
- CARVALHO, João Bosco P.; SZTAJN, Paola. As Habilidades “básicas” em Matemática. Em **Presença Pedagógica**, ano III, v. 3, nº 15, p. 15-21, 1997.
- COUTINHO, Livia, M.; FEITOSA, Samira, S.; PINHEIRO, Geruza, S.. **O Aplicativo Photomath como Apoio em Processos Formativos no Ensino e Aprendizado da Matemática**. Em Anais do CINTERGE (Congresso Internacional de Educação e Geotecnologia), p. 138-142, Salvador, 2019.
- D’AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Ano II, nº 2, p. 15-19, Brasília, 1989.
- D’AMBROSIO, Beatriz S. O Professor Pesquisador diante da produção escrita dos alunos. Em ONUCHIC, Lourdes de la R.; PIRONEL, Marcio; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos (Org). **Perspectivas para Resolução de Problemas**, São Paulo: Ed Livraria da Física, p. 109-129, 2017.
- D’AMBROSIO, Ubiratan. **Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação Matemática**. São Paulo, Sumus, Unicamp, 1986.
- D’AMBROSIO, Ubiratan. A Matemática nas Escolas, **Educação Matemática em Revista**, ano 9, edição especial, p. 24-25, São Paulo, 2003.
- DE BONA, Aline, BASSO, Marcus Vinícius de A.; FAGUNDES, Léa, C. Gibi Digital: uma atividade de Matemática desenvolvida cooperativamente no espaço do Facebook. Em **Novas Tecnologias na Educação**, CINTED-UFRGS, v. 10, nº 3, dezembro, p. 1- 11, 2012.
- FAGUNDES, Lea, C. Tecnologia e educação: a diferença entre inovar e sofisticar as práticas educacionais. Revista **FONTE**, ano 5, p. 6 -14, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: <https://www.prodemge.gov.br/revista-fonte/Publication/9-A-educacao-e-as-novas-tecnologias-digitais#page/6>. Acesso em 09 de jun. de 2020.

FIORENTINI, Dario, MIGUEL, Antonio; MIORIM, Ângela. Contribuindo para um repensar a educação algébrica elementar. Revista **Proposições**, FE/UNICAMP, v. 4, nº1, p. 78-91, Campinas, 1993. Disponível em:

<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644384>.

Acesso em 07 de abr. de 2022.

FRANÇA, Rosiméri, C. et al. Celular e Quadrinhos podem entrar na Aula de Matemática? **Anais do XIV Encontro Nacional de Educação Matemática**, SBEM, 2022.

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo A. e MATTOS, Francisco R. P. **Recursos Computacionais no ensino de Matemática**. Coleção Profmat, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

IMENES, Luiz Marcio, JAKUBO, e LELLIS, **Frações e Números Decimais**. São Paulo, Ed. Atual, 2012.

JACINTO, Helia e CARREIRA, Susana. Diferentes Modos de Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Matemática para Além da Sala de Aula: evidências de fluência tecno-matemática. Em **Bolema**, v. 31, nº 57, p. 266 - 288, Rio Claro, SP, 2017.

LESH, Richard. Beyond constructivism: identifying mathematical abilities that are most needed for success beyond school in an age of information. In **Mathematics Education Research Journal**, v. 12, nº 3, p. 177-195, Sydney, 2000.

LOPES, Maria Laura, M. L. e NASSER, Lilian (Coord.). **Geometria na Era da Imagem e do Movimento**, IM/UFRJ, Projeto Fundação, SPEC/PADCT/CAPES, Rio de Janeiro, 1996.

MACHADO, Nilson J. **Lógica é Lógico**. Ed Scipione, Coleção Vivendo a Matemática, 10ª ed., São Paulo, 2006.

MENEZES, Luis et al, **Humor no Ensino da Matemática: Tarefas para a sala de aula**. ESE – IPV, Viseu, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/4863>. Acesso em 26 de set. de 2022.

MORAIS, Priscila. **Hqs e Matemática**, 2009, Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura), Porto Alegre, 2009, UFRGS. Disponível em <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/23717>. Acesso em 08 de mar. de 2022.

MOREIRA, Marco Antonio. O que é afinal aprendizagem significativa? **Aula inaugural do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais**, p.1-27, Instituto de Física da UFMT, Cuiabá, MT, 2010.

NASSER, Lilian e TINOCO, Lucia A. A. (Coord). **Argumentação e Provas**, IM/UFRJ, Projeto Fundação, 2ªed, Rio de Janeiro, 2003.

ONUCHIC, Lourdes de la R.; ALLEVATO, Norma S. G. N.. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, vol. 25, nº 41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, Lourdes de la R., PIRONEL, Marcio; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos (Org). **Perspectivas para Resolução de Problemas**, São Paulo: Ed Livraria da Física, 2017.

PELLIN, Jacinta. B. A resolução de problemas e as histórias em quadrinhos. Em: **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor**, Vol.1, PDE, 2016. Disponível em [A Resolução de Problemas e as Histórias em Quadrinhos \(diaadiaeducacao.pr.gov.br\)](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br). Acesso em 26 de set. de 2022.

PELLIN, Jacinta. B. A resolução de problemas e as histórias em quadrinhos. Em: **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor**, Vol.2, PDE, 2016. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_unioeste_jacintabandeirapellin.pdf . Acesso em 09 de mar. de 2022.

PONTE, João Pedro da. Álgebra no Currículo Escolar. Revista **Educação e Matemática**, nº 85, p. 36-41, APM, Lisboa, nov-dez 2005.

PONTE, João Pedro da, et al. Exercícios, Problemas e Explorações. **Quadrante**, vol.24, nº 2, APM, Portugal, p. 111-134, 2015.

PONTE, J. P., Branco, N., & Matos, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/7105>. Acesso em 31 de mai. de 2013.

RAMA, Ângela, et al. **Como usar Histórias em Quadrinhos na sala de aula**. Editora Contexto, São Paulo, 2009.

RAMOS, Ramaira. **Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Um estudo nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**, 2020, 56fls. Monografia de Especialização em Educação Matemática. Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2020.

REZENDE, Wanderlei et all. A Produção de Histórias em Quadrinhos para a Resolução de Problemas Matemáticos: o relato de uma experiência na iniciação à docência. **Anais XII ENEM**, SBEM, São Paulo, 2015.

SANTOS, Johnny N., TINOCO, Lucia, A. A. e SILVA, Maria P. da C. Problemas de Matemática em Quadrinhos: uma Abordagem Diferenciada. **Anais do X Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro**, SBEM-RJ, no prelo, Rio de Janeiro.

SERRAZINA, Lurdes. Resolução de Problemas e Formação de Professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: ONUCHIC, Lurdes de la R., LEAL JUNIOR, Luiz C. e PIRONEL, Márcio (org). **Perspectivas para Resolução de Problemas**, São Paulo, Ed Livraria da Física, p. 55-83, 2017.

SILVA, Maria Palmira, da C.; SANTOS, Johnny N. dos. Problemas de Matemática em Quadrinhos podem facilitar a Resolução de Problemas? **Anais do XVI CIAEM**, Lima, Peru, no prelo, 2023.

SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problema: habilidades básicas para aprender matemática**. Artmed, 2001, Porto Alegre.

SOUZA, E. Reame de S.; DINIZ, M. I. de S. Vieira. **Álgebra: das variáveis as equações e funções**, IME/USP, CAEM, São Paulo, 2ª ed., 1994.

TINOCO, Lucia, A. A. (Coord). **Razões e Proporções**, 3ª ed, IM/UFRJ, Projeto Fundão, Rio de Janeiro, 2011.

_____. **Construindo o Conceito de Função**, 4ª ed, IM/UFRJ, Projeto Fundão, Rio de Janeiro, 2002.

_____. **Álgebra: pensar, calcular, comunicar...**, Ed. IM/UFRJ, Projeto Fundão, 2ª ed, Rio de Janeiro, 2011.

_____. **Equações: ler, escrever, resolver, utilizar...**, Ed. IM/UFRJ, Projeto Fundão, Rio de Janeiro, 2015.

TINOCO, Lucia A. A. et al. A Diversidade de Recursos na Sala de Aula e a Construção do Saber Matemático. Em **Anais do IX Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, 2020.

TINOCO, Lucia A. A. et al. Generalizar para fazer Matemática em Sala de Aula. **Anais do XIV Encontro Nacional de Educação Matemática**, SBEM, 2022.

TINOCO, Lucia, A. A.. O Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Anais do III Encontro de Educação Matemática nos Anos Iniciais do Colégio Pedro II**, p. 43 - 50, 2022.

VALENTE, J. A.. Informática na Educação: conformar ou transformar a escola. Em **Perspectiva**, UFSC/CED, NUP, nº 24, p. 41-49, Florianópolis, 1995.

VAZ, João D. G.. Ângulos Inscritos com Recurso ao GeoGebra. Em **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v.7, nº 2, p. 111 -126. São Paulo, 2018.

WALLE, John. A. V. de. **Matemática no Ensino Fundamental Formação de Professores e Aplicação em sala de aula**, Porto Alegre, Editora Artmed, 2009.

O Projeto Fundão desenvolve, desde 1984, na UFRJ, atividades de Educação Matemática e Ensino de Ciências, com os seguintes objetivos:

- Estimular e estender a interação entre a UFRJ e o sistema de ensino básico.
- Apoiar os professores das redes oficial e privada de ensino no sentido do aprimoramento da sua prática pedagógica, e a consequente melhoria do ensino de Matemática e Ciências.

Como produto dos seus estudos e pesquisas, a partir da década de 90, o Setor Matemática do Projeto Fundão publicou os seguintes livros:

- Álgebra: pensar, calcular, comunicar...
- Argumentação e Provas no Ensino de Matemática.
- Avaliação da Aprendizagem e Raciocínio em Matemática: Métodos Alternativos.
- Construindo Conceito de Função.
- Curso Básico de Geometria - Enfoque Didático.

Módulo I- Formação de Conceitos Geométricos.

Módulo II - Visão Dinâmica da Congruência de Figuras.

Módulo III- Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras.

- Geometria Euclidiana por meio da Resolução de Problemas.
- Geometria Euclidiana: Resolução dos Problemas.
- Geometria na Era da Imagem e do Movimento.
- Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele.
- Histórias para Introduzir Noções de Combinatória e Probabilidade.
- Números: Linguagem Universal.
- Razões e Proporções.
- Tratamento da Informação Atividades para o Ensino Básico.
- Tratamento da Informação Explorando Dados Estatísticos e Noções de Probabilidades nas Séries Iniciais.
- Visualizando Figuras Espaciais.
- Álgebra: pensar, calcular, comunicar....
- Atividades Matemáticas para Deficientes Visuais.
- Equações: ler, resolver, utilizar....
- Atividades de Contagem com Adaptações para Alunos Surdos e Alunos com Deficiência Visual.
- Área e perímetro: práticas acessíveis a alunos surdos e alunos com deficiência visual.

As atividades propostas nesses livros são subsídios para professores de Ensino Fundamental e Médio. A participação de professores desses níveis de ensino foi essencial, tanto na sua elaboração, como na sua testagem em sala de aula, tornando-as assim adequadas à realidade e às condições de trabalho das escolas.