TEXTOS DE MATEMÁTICA
EDITORA INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES E APLICAÇÕES ÀS EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO

— ALVÉRCIO MOREIRA GOMES —

$$\boxed{S(t) = \mathrm{e}^{-t\Delta}}$$

1a. Edição Digital– 2022

SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES E APLICAÇÕES ÀS EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO

ALVÉRCIO MOREIRA GOMES

Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

1ª edição digital

Rio de Janeiro, 2022

Gomes, Alvércio Moreira, 1916 - 2003.

G633s Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução / Alvércio Moreira Gomes. - 1a Ed. Dig. - Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2022.

142p.; 23cm.

Inclui bibliografia / inclui índice remissivo.

ISBN: **978-65-86502-06-0**

1. Equações diferenciais parciais. 2. Semigrupos de operadores.
I. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática.
II. Título.

Prefácio da 1ª Edição

Este livro reproduz as notas de aulas do curso de Semigrupos Lineares que desenvolvemos no Instituto de Matemática da UFRJ, para os alunos da Pós-Graduação no segundo semestre de 1984. Pode ser considerado como introdução ao curso de Equações Diferenciais e Semigrupos de Contrações Não Lineares dos Espaços de Hilbert (Textos de Métodos Matemáticos no. 15, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil) que reproduz as notas do curso de Semigrupos Não Lineares que também ministramos no Instituto de Matemática da UFRJ para os alunos da Pós-Graduação.

No Capítulo 1 são estudados os semigrupos de classe C_0 incluindo-se, aí, os semigrupos diferenciáveis, os holomorfos, as Teorias da Perturbação e da Aproximação. São demonstrados o teorema de Hille-Yosida, o de Lumer e Phillips e os resultados de Trotter, Kato e Chernoff. Todo o material do Capítulo 1 é usado no estudo das equações de evolução desenvolvido no Capítulo 2.

Os pré-requisitos são, além da integral de Lebesgue, alguma familiaridade com a Análise Funcional, noções sobre os Espaços de Sobolev e as Equações Elíticas. por exemplo, Brézis [5]. O Apêndice consta de alguns esclarecimentos sobre a função exponencial e sobre as funções vetoriais.

Queremos expressar nossos agradecimentos aos nossos alunos pelas inúmeras correções e observações feitas durante as aulas o que foi para nós preciosa ajuda. Ao colega professor Luiz Adauto Medeiros desejamos exprimir nossa gratidão não só por seus comentários, correções, preciosos conselhos e sugestões, especialmente na redação da parte final do §4, mas também pelo estímulo, apoio e ajuda permanente que dele temos recebido e sem o que o presente trabalho possivelmente não teria aparecido. Por fim uma palavra de agradecimento a Wilson Góes pelo zelo com que datilografou este livro.

O autor

Prefácio da 2ª Edição

Nesta segunda edição[1] procuramos não só corrigir erros da primeira mas também tornar o texto mais claro e completo. O tópico referente aos semigrupos holomorfos foi reescrito e o referente ao problema de Cauchy abstrato foi ampliado com a inclusão do estudo das equações do calor, de ondas e de Schrödinger.

Somos profundamente gratos aos nossos alunos pelas críticas e valiosas sugestões e ao colega Luiz Pedro San Gil pelo esmero com que digitou estas notas.

O autor

[1] A presente edição digital é idêntica à segunda edição física

Alvércio Moreira Gomes (1916-2003)

Uma breve biografia

Alvércio Moreira Gomes (1916 – 2003)

Alvércio não plantou árvores, não deixou filhos, mas, dedicou sua vida à matemática. Amou uma mulher, Hilda Pires dos Reis, pianista, professora na UFRJ e tinha veneração por sua mãe, Dona Julieta, falecida aos 97 anos. Sua diversão, fora da matemática, era a marcenaria, deixando belas construções em madeira.

É originário de Cachoeiro de Itapemirim, no Espírito Santo. Membro de uma família de muitos irmãos, teve o pai falecido cedo causando sérias dificuldades. Cursou aí o ensino fundamental concluindo o Instituto de Educação, tornando-se professor, sua vocação. A família transferiu-se para o Distrito Federal (Rio de Janeiro), capital do país na época, onde as oportunidades de educação eram melhores. Ingressou no Curso de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Distrito Federal (UDF), transformada em 1936 na Faculdade Nacional de Filosofia (FNFi) da Universidade do Brasil (UB) aí iniciando sua vida profissional como assistente da Cátedra de Análise Matemática e Superior. Tive a oportunidade de conhecê-lo em 1948, quando ingressei, como aluno do Curso de Matemática da FNFi. Esta foi uma época de progresso da Matemática no Distrito Federal. O Departamento de Matemática da FNFi teve como Professor Antonio Aniceto Monteiro, também com vocação para o ensino, desenvolvendo consideravelmente a Matemática no Departamento. Por sua sugestão foram visitantes Adrian Albert, que ministrou o primeiro curso de Álgebra no Departamento e Marshall Stone que desenvolveu uma série de palestras que ele denominou Anel de Funções Contínuas onde aparecia, entre outros, o atualmente conhecido Teorema de Weierstrass Stone.

O corpo discente e alguns professores da FNFi participavam ativamente da discussão de certos problemas que afligiam a sociedade brasileira na época. Entre estes, havia o problema da exploração do petróleo com a campanha “O Petróleo é Nosso”. Havia reações públicas o que não era legal no regime ditatorial em que vivia a sociedade brasileira. Assim, os que participaram deste processo foram penalizados nesta época como pertencentes à “esquerda” o que seria negativo para sua vida universitária. O Alvércio e vários outros foram assim caracterizados do ponto de vista político trazendo dificuldades futuras. É claro que ele se manteve fiel às suas convicções. A seguir será feita uma análise de algumas atividades profissionais do Alvércio.

Antes de 1964

Este ano será um marco na história do nosso país. Ao redor dos anos 50 o Departamento de Matemática da FNFi (DM-FNFi) viveu sob a influência dos três matemáticos mencionados anteriormente. Recorde-se que Aniceto Monteiro também saiu de Portugal por motivos análogos em face do regime ditatorial instalado em seu país. Monteiro procedia de Paris, tendo trabalhado com M. Fréchet, trazendo ideias novas para o Brasil. A Matemática que se desenvolvia na FNFi tinha influência de matemáticos italianos, muito clássica, notadamente cálculo das variações e equações diferenciais, elasticidade, nos moldes da época. Monteiro trazia consigo ideias já nos moldes das novas correntes do pensamento matemático. Ministrou várias disciplinas sobre topologia geral, com o pensamento de Bourbaki, análise funcional, ramo nascente da matemática, teoria de sistemas ordenados que se denominava reticulados ou estruturas. Monteiro escreveu boas notas didáticas que posteriormente foram publicadas em uma coleção denominada: Notas de Matemática. É oportuno salientar que esta coleção foi realizada por Alvércio.

Neste período, Alvércio concluiu, de sua própria autoria:

- Decomposition of Partially Ordered Systems (Received in March 1950), Rev. Científica, Ano 1, (1950), pp. 12-26.
- Completion by Cuts of a Ditributive Lattices (Received in August 1952), Rev. Científica, Ano 3, (1952), pp. 56-68.
- Medidas em Álgebras de Boole, 1949. (Tese apresentada para a obtenção do Título de "Livre Docente"). Não foi realizado o concurso.

Os dois primeiros trabalhos foram citados por O. Ore em seu texto clássico, "Theory of graphs", editado pela AMS em 1962.

Entre outras contribuições dirigidas aos estudantes registra-se: um texto para o ensino de álgebra, um para cálculo de variações e outro sobre séries de Fourier. Em 1964, por ocasião da instalação do regime militar no Brasil, foi aposentado e impedido de participar no nosso processo educacional.

Após 1980

Retornou à Universidade, agora UFRJ, com estrutura acadêmica, totalmente distinta da Universidade do Brasil. Voltou às salas de aula dos cursos básicos do IM-UFRJ e rapidamente se adaptou ao pensamento matemático da época. Para iniciar, fez uma exposição semanal sobre as notas de Haïm Brezis, intitulada *Operators Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions Dans Les Espaces de Hilbert*, Université de Paris VI, 1971. Com base nestas exposições escreveu um texto publicado pelo IM-UFRJ na coleção Textos de Métodos Matemáticos.

Sempre se interessou por Análise Matemática e decidiu iniciar o estudo de Semigrupos de operadores. Ensinou várias vezes esta disciplina no IM-UFRJ e escreveu as monografias:

- Equações Diferenciais e Semigrupos de Contrações Não Lineares nos Espaços de Hilbert - Textos de Métodos Matemáticos no 15, IM-UFRJ, Rio de Janeiro - RJ,1982.

- Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução - Textos de Métodos Matemáticos no 19, IM-UFRJ, Rio de janeiro - RJ, 1985.

- Semigrupos Não Lineares e Equações Diferenciais nos Espaços de Banach, IM-UFRJ (304 páginas), 2a ed., 2003.

- Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução, IM-UFRJ, 1a ed., 2001.

Esta é a segunda reimpressão do livro anterior adotado no IM-UFRJ.

Para concluir registra-se que Alvércio foi um professor fiel ao seu pensamento filosófico, durante toda sua vida, mesmo em seus últimos momentos. Grande é o numero de seus alunos que continuaram seu trabalho acadêmico por meio do ensino da matemática. Assim é a vida dos mestres.

Agradeço à Maria Darci e Ivo Lopez pelo idealismo em re-organizar esta coleção de livros do IM-UFRJ.

De resto, concordo com José de Alencar, imaginativo romancista cearense, quando diz: “Tudo passa sobre a terra”.

Rio de Janeiro, 2011.
L. A. Medeiros

Sumário

Capítulo 1

Semigrupos de Operadores Lineares

1.1 A função Exponencial

A função exponencial, e^{tA}, onde A é um número real e t uma variável real, pode ser definida pela fórmula

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \tag{1.1.1}$$

A série que figura no segundo membro de (1.1.1) converge para todos os valores de t, donde define uma função em $\mathbb{R}$ (corpo dos reais). Sem dificuldade alguma, como se mostra no Apêndice, estende-se esssa definição ao caso em que A é um operador linear limitado de um espaço de Banach, X; neste caso a série (1.1.1) converge na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ e, portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, sua soma é um operador linear limitado desse espaço ($\mathcal{L}(X)$ = álgebra dos operadores lineares limitados de X). Problema bastante delicado, porém, é definir a "função exponencial" quando A não é limitado. Uma das razões do interesse em tal função está no fato que ela é, formalmente, solução do seguinte problema de Cauchy: dado um operador linear não limitado, A, de um espaço de Banach X, determinar uma função $u(t)$ definida em $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$), cujos valores pertençam a $\mathcal{D}(A)$ ($\mathcal{D}(A)$ = domínio de A) e que satisfaça as equações

$$\frac{du}{dt} = Au, \qquad u(0) = x,$$

onde x é um elemento de X, dado.

Quando $A \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$ a exponencial e^{tA} é uma função $E\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que tem as seguintes propriedades:

a) $E(0) = 1$,

b) $E(t + s) = E(t)E(S)$,

c) $\lim\limits_{t\to 0^+} E(t) = 1$,

e, como será demonstrado abaixo, é a única função definida em $\mathbb{R}^+$, com valores em $\mathbb{R}$, que tem essas propriedades. O mesmo ocorre quando E toma seus valores na álgebra dos operadores lineares de qualquer espaço de dimensão finita. Nesse caso o número 1 que aparece em a) e em c) deve ser interpretado como o operador identidade $I\colon X \to X$ e, a multiplicação em b), como a composição de operadores lineares. Para ver o que se passa quando X tem dimensão infinita tem-se que levar em conta que, nesse caso, três topologias são usualmente introduzidas na álgebra $\mathcal{L}(X)$ dos operadores lineares limitados de X, correspondendo, a cada uma delas, uma maneira distinta de interpretar o limite em c). Assim, podemos interpretá-lo como o limite uniforme, o forte e o fraco. Relembremos que I é o limite uniforme de $E(t)$ quando $t \to 0^+$ se $||E(t) - I|| \to 0$ quando $t \to 0^+$; é o limite forte se $||E(t) - I)x|| \to 0\ \forall\, x \in X$ e é o limite fraco se $\langle (E(t) - I)x, x^*\rangle \to 0\ \forall\, x \in X$ e $\forall\, x^* \in X^*$, onde X^* é o dual de X. Quando em c) o limite é tomado no sentido da topologia uniforme tem-se uma situação bastante simples como se mostra no teorema a seguir.

1.1.1. Teorema. *Uma função $E\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ satisfaz as condições*

a) $E(0) = I$,

b) $E(t+s) = E(t)E(S)$,

c') $||E(t) - I|| \to 0$ *quando* $t \to 0^+$,

se, e só se, $E(t) = e^{tA}$, *onde* $A \in \mathcal{L}(X)$ *e* e^{tA} *é definida por* (1.1.1).

Demonstração: Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e ponhamos

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\cdot$$

Como, para cada $t \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

converge na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, e^{tA} é uma aplicação de $\mathbb{R}^+$ em $\mathcal{L}(X)$. Trivialmente e^{tA} satisfaz a) e, da fórmula

$$\frac{(t+s)^p}{p!} = \sum_{m+n=p} \frac{t^n}{n!}\cdot\frac{s^m}{m!}\,,$$

resulta que e^{tA} satisfaz b). Além disto, de

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\,,$$

vem

$$||e^{tA} - I|| \leq t||A||e^{t||A||}\,,$$

donde
$$||e^{tA} - I|| \to 0$$
quando $t \to 0^+$, i.e., e^{tA} satisfaz c').

Reciprocamente, vamos supor que $E\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ satisfaz a), b) e c'). Demonstremos, em primeiro lugar, que $||E(t)||$ é uma função limitada em todo intervalo limitado. Dado $\varepsilon > 0$ existe, por c'), um $\delta > 0$ tal que

$$||E(t) - I| \ \leq \varepsilon \ \forall\, t \text{ tal que } 0 \leq t \leq \delta$$

e, como
$$|\, ||E(t)|| - ||I||\, | \leq ||E(t) - I||,$$
tem-se
$$||E(t)|| \leq 1 + \varepsilon = M, \ \forall\, t \text{ tal que } 0 \leq t \leq \delta.$$
Além disso, para cada real $t \geq 0$, existe um inteiro não negativo, n, tal que $t = n\delta + r$, onde $0 \leq r < \delta$. Por b) temos, então,

$$\begin{aligned} ||E(t)|| = ||E(n\delta + r)|| = ||E(\delta)^n E(r)|| \leq ||E(\delta)^n|| \cdot ||E(r)|| \leq \\ \leq M^{n+1} = MM^n \leq MM^{t/\delta} = Me^{\omega t}, \end{aligned}$$

onde $\omega = \delta^{-1} \log M > 0$.
Portanto, se $t \in [0, T]$, então $||E(t)|| \leq Me^{\omega t}$, i.e., $||E(t)||$ é limitada em $[0, T]$. Observemos, a seguir, que E é contínua na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ porque, se $h > 0$,

$$||E(t + h) - E(t)|| = ||E(t)(E(h) - I)|| \leq ||E(t)|| \cdot ||E(h) - I|| \to 0$$

quando $h \to 0$ e, se $0 < h \leq t$,

$$||E(t - h) - E(t)|| = ||E(t - h)(I - E(h))|| \leq ||E(t - h)|| \cdot ||E(h) - I|| \to 0$$

quando $h \to 0$ porque $||E(t-h)||$ é, como se mostrou, limitada em $[0, t]$. Da continuidade de E, relativamente à topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, resulta ua integrabilidade no sentido de Riemann e
$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h E(t)\, dt = E(0) = I,$$
relativamente a essa mesma topologia (Corolário A.4.3 do Apêndice). Segue-se daí que podemos determinar um $\rho > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho E(t) - I \right\| < 1,$$

o que implica que
$$\frac{1}{\rho} \int_0^\rho E(t)\, dt$$

e, consequentemente,

$$\int_0^\rho E(t)\,dt,$$

é inversível em $\mathcal{L}(X)$. Além disto,

$$\begin{aligned}\frac{E(h)-I}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt &= \frac{1}{h}\int_0^\rho E(t+h)\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} E(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_0^h E(t)\,dt.\end{aligned}$$

donde

$$\frac{E(h)-I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} E(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_0^h E(t)\,dt\right)\left(\int_0^\rho E(t)\,dt\right)^{-1}$$

e como o membro da direita dessa igualdade converge na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, o mesmo acontece com o da esquerda. Seja, então, A o limite uniforme de $(E(h)-I)/h$ quando $h \to 0^+$. Tem-se $A \in \mathcal{L}(X)$. Isto significa que $E(t)$ é derivável à direita no ponto 0, relativamente à topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ e

$$\frac{d^+\,E(0)}{dt} = A.$$

Ainda mais, por b), $\forall\, h > 0$,

$$\frac{E(t+h)-E(t)}{h} = E(t)\,\frac{E(h)-I}{h}$$

e, como o segundo membro converge na topologia uniforme para $E(t)A$, resulta que E é derivável à direita em todo $t \geq 0$ relativamente à topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ e

$$\frac{d^+\,E(t)}{dt} = E(t)A.$$

Analogamente,

$$\frac{d^+\,E(t)}{dt} = AE(t) \quad \text{e} \quad \frac{d^-\,E(t)}{dt} = \frac{d^+\,E(t)}{dt}\,, \quad \forall\, t > 0.$$

Consideremos, por fim, a função

$$\phi(t) = E(t)e^{(u-t)A}, \quad t \geq 0.$$

Temos

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dE(t)}{dt}\,e^{(u-t)A} - E(t)Ae^{(u-t)A} = E(t)Ae^{(u-t)A} - E(t)Ae^{(u-t)A} = 0.$$

Consequentemente (Teorema A.3.1 do Apêndice) ϕ é constante. Mas $\phi(0) = e^{uA}$. Logo

$$E(t)e^{(u-t)A} = e^{uA}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

donde $E(t) = e^{tA}$, q.e.d..

Nos espaços de dimensão finita as três topologias apontadas acima coincidem com a topologia usual desses espaços e como, na demonstração do Teorema 1.1.1, não foi feito apelo à dimensão do espaço, esse teorema tem validade nos espaços de dimensão finita. Fica justificada, dessa forma, a afirmação, feita anteriormente, que a)–c) caracterizam e^{tA} quando o espaço é de dimensão finita.

Além disso, como a convergência uniforme implica convergência forte, o Teorema 1.1.1 vem mostrar que a definição a seguir generaliza a de função exponencial.

1.2 Semigrupos de Classe C_0

1.2.1 Definição. Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um *semigrupo de operadores lineares limitados de* X se:

I) $S(0) = I$ onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;

II) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}^+$.
Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

III) $\lim\limits_{t\to 0^+} ||S(t) - I)x|| = 0 \quad \forall\, x \in X$.

Mostraremos a seguir que são válidas para os semigrupos de classe C_0 as propriedades fundamentais da função exponencial.

1.2.2 Proposição. *Se S é um semigrupo de classe C_0 , então $||S(t)||$ é uma função limitada em todo intervalo limitado,* $[0, T]$.

Demonstração: Em primeiro lugar, existe $\delta > 0$, e $M \geq 1$ tais que

$$||S(t)|| \leq M, \quad \forall\, t \in [0, \delta].$$

Com efeito, se isto não acontecesse existiria uma suceção (t_n), $t_n \to 0^+$, tal que $||S(t_n)| \geq n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ = conjunto dos números naturais). Mas então, pelo Teorema da Limitação Uniforme, $||S(t_n)x||$ não seria limitado para pelo menos um $x \in X$, o que estaria em contradição com III). Além disto, $M \geq 1$ porque $||S(0)|| = 1$, por I).

Seja, agora, $t \in [0, T]$. Então $t = n\delta + r$, para algum inteiro não negativo n e algum real r tal que $0 \leq r < \delta$. Logo, como no Teorema 1.1.1,

$$\begin{aligned} ||S(t)|| = ||S(n\delta{+}r)|| = ||S(\delta)^n S(r)|| \leq ||S(\delta)||^n ||S(r)|| \leq M^{n+1} = \\ = MM^n \leq MM^{/\delta} = Me^{\omega t}, \end{aligned}$$

onde $\omega = \delta^{-1} \log M \geq 0$. Portanto, se $t \in [0, T]$, então $||S(t)|| \leq Me^{\omega T}$, i.e., $||S(t)||$ é uma função limitada em $[0, T]$.

1.2.3 Corolário. *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$,i.e., se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x \ \forall\, x \in X.$$

Com efeito, seja $t \in \mathbb{R}^+$. De $h > 0$ vem

$$||S(t+h)x - S(t)x|| = ||S(t)[S(h) - I]x|| \leq ||S(t)|| \cdot ||(S(h) - I)x|| \to 0$$

quando $h \to 0^+$ e, de $0 < h < t$,

$$||S(t-h)x - S(t)x|| = ||S(t-h)(I - S(h))x|| \leq ||S(t-h)|| \cdot ||(S(h) - I)x|| \to 0$$

quando $h \to 0^+$ em virtude da Proposição 1.2.2. Logo,

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x \ \forall\, x \in X.$$

1.2.4 Observação. Os semigrupos de classe C_0 são conhecidos por *semigrupos fortemente contínuos* o que encontra justificativa no Corolário 1.2.3.

Viu-se, na demonstração da Proposição 1.2.2, que existem $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$||S(t)|| \leq Me^{\omega t} \ \forall\, t \geq 0,$$

resultado que será, agora, melhorado.

Preliminarmente demonstraremos o lema a seguir sobre as *funções subaditivas em* $\mathbb{R}^+$, isto é, funções $p\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tais que $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$.

1.2.5 Lema. *Seja p uma função subaditiva em $\mathbb{R}^+$ e limitada superiormente em todo intervalo limitado. Então, $p(t)/t$ tem um limite quando $t \to +\infty$ e*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t} \cdot \tag{1.2.1}$$

Demonstração: Pondo

$$\inf_{t>0} \frac{p(t)}{t} = \omega_0,$$

temos $-\infty \leq \omega_0 < +\infty$. Seja $\omega > \omega_0$. Então existe $T > 0$ tal que $p(T)/T \leq \omega$. Se $t > 0$ e n é tal que $t = nT + r$, com $0 \leq r < T$, temos

$$\begin{aligned} \omega_0 \leq \frac{p(t)}{t} = \frac{p(nT+r)}{t} \leq \frac{np(T) + p(r)}{t} = \\ = \frac{nTp(T)}{Tt} + \frac{p(r)}{t} \leq \frac{nT}{t}\,\omega + \frac{p(r)}{t} \cdot \end{aligned}$$

Mas p é limitada nos intervalos limitados e $r < T$, donde $p(r)/t \to 0$ quando $t \to \infty$. Logo,

$$\omega_0 \leq \lim_{t \to \infty} \inf \frac{p(t)}{t} \leq \lim_{t \to \infty} \sup \frac{p(t)}{t} \leq \omega$$

donde (1.2.2) pela arbitrariedade de ω.

1.2.6 Proposição. *Seja S um semigrupo de classe C_0. Então*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log ||S(t)||}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log ||S(t)||}{t} = \omega_0 \tag{1.2.2}$$

e para cada $\omega > \omega_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$||S(t)|| \leq Me^{\omega t},\ \forall\, t \geq 0. \tag{1.2.3}$$

Demonstração: Como

$$\begin{aligned}\log ||S(t+s)|| = \log ||S(t)S(s)|| \leq \log ||S(t)||\, ||S(s)|| = \\ = \log ||S(t)|| + \log ||S(s)||\end{aligned}$$

a função $\log ||S(t)||$ é subaditiva em $\mathbb{R}^+$; pelo Proposição 1.2.2 é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Logo, pelo Lema 1.2.5, com $p(t) = \log ||S(t)||$, tem-se (1.2.2). Se $\omega > \omega_0$ pode-se, então, determinaar t_0 tal que para $t > t_0$ tem-se

$$\frac{\log ||S(t)||}{t} < \omega. \tag{1.2.4}$$

Além disto, $||S(t)||$ é limitado em $[0, t_0]$, i.e., $||S(t)|| \leq M_0\ \forall\, t \in [0, t_0]$ e como $||S(0)|| = ||I|| = 1$, $M_0 \geq 1$. Se $\omega \geq 0$ tem-se, então, de (1.2.4),

$$\log ||S(t)|| \leq \omega t + \log M_0\,,\ \forall\, t \geq 0$$

donde, pondo $M = M_0$ tem (1.2.3). Se $\omega < 0$, ainda de (1.2.4) tem-se

$$\log ||S(t)|| \leq \omega t - \omega t_0 + \log M_o\,,\ \forall\, t \geq 0$$

donde, pondo $M = M_0\, e^{-\omega t_0}$ tem-se, ainda, (1.2.3). Em ambos os casos $M \geq 1$, q.e.d..

1.2.7 Definição. Quando $\omega_0 < 0$, existe $M \geq 1$ tal que

$$||S(t)|| \leq M,\ \forall\, t \geq 0.$$

Nesse caso diz-se que S é um *semigrupo uniformemente limitado de classe* C_0. Se, além disto, $M = 1$, S é dito *semigrupo de contrações de classe* C_0.

1.2.8 Definição. O operador A definido por

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h}\, x \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h}\, x\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$$

é dito *gerador infinitesimal* do semigrupo S.

Vamos designar por A_h o operador linear limitado $(S(h)-I)/h$, $h>0$.

1.2.9 Proposição. *$\mathcal{D}(A)$ é um subespaço vetorial de X e A um operador linear.*

Demonstração: Consequência imediata da Definição 1.2.8.

1.2.10 Proposição. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S.*

i) *Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ $\forall\, t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{1.2.5}$$

ii) *Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(r)x\, d\tau = \int_s^t S(r)Ax\, d\tau; \tag{1.2.6}$$

iii) *Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\tau)x\, d\tau \in \mathcal{D}(A)$ e*

$$S9t)x - x = A\int_0^t S(\tau)x\, d\tau. \tag{1.2.7}$$

Demonstraçao: Seja $t>0$ fixado. Para todo $h>0$

$$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}\, x = A_h\, S(t)x = S(t)A_h x.$$

Se $x \in \mathcal{D}(A)$, o membro da direita desta igualdade tem um limite quando $h \to 0$ o mesmo acontrecendo, portanto, com os outros dois. Logo, $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{1.2.8}$$

Por outro lado, para $0<h<t$ temos

$$\frac{S(t-h)-S(t)}{-h}\, x = S(t-h)A_h x = S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax.$$

Mas pela Proposição 1.2.2, $||S(t-h)||$ é limitado para $0<h<t$ e, como $x \in \mathcal{D}(A)$, o primeiro termo do membro da direita desta igualdade tende a zero quando $h \to 0$, além disto, pela continuidade forte de S (Corolário 1.2.3), $S(t-h)Ax \to S(t)Ax$. Logo

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = S(t)Ax. \tag{1.2.9}$$

De (1.2.8) e (1.2.9) temos i). Integrando (1.2.5) de s a t temos (1.2.6), o que demonstra ii). Demonstra-se iii) observando que, $\forall\, x \in X$,

$$\begin{aligned} A_h \int_0^t S(\tau)x\,d\tau &= \frac{1}{h}\int_0^t (S(h)-I)S(\tau)x\,d\tau \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)x\,d\tau \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau \end{aligned}$$

e que, quando $h \to 0$, o membro da direita desta igualdade tende a $S(t)x - x$, pela continuidade forte de S.

1.2.11 Proposição. i) *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X.*

ii) *um operador linear A, fechado e com domínio denso em X, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0 .*

Demonstração: i) Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Pondo, para cada $x \in X$ e $h > 0$,

$$x_h = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)x\,dt$$

tem-se, por iii) da Proposição 1.2.10, $x_h \in \mathcal{D}(A)$ e como $x_h \to x$ quando $h \to 0$, resulta que $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Logo $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Seja (x_n), $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de elementos de $\mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ quando $n \to \infty$. Por ii) da Proposição 1.2.10 temos

$$S(h)x_n - x_n = \int_0^h S(t)Ax_n\,dt. \tag{1.2.10}$$

Mas, pela Proposição 1.2.2, existe um M tal que $||S(t)|| \le M$ para todo $t \in [0,h]$; logo, se $t \in [0,h]$

$$||S(t)Ax_n - S(t)y|| \le ||S(t)|| \cdot ||Ax_n - y|| \le M||Ax_n - y||,$$

donde $S(t)Ax_n$ tende a $S(t)y$, uniformemente em $[0,h]$. No limite, quando $n \to \infty$, temos, então, por (1.2.10)

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)y\,dt.$$

Logo

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)y\,dt$$

e, como o segundo membro dessa igualdade tende a y quando $h \to 0$, resulta que $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = y$. Logo A é um operador fechado, o que completa a demonstração de i).

ii) Suponhamos que A seja gerador infinitesimal dos semigrupos S_1 e S_2 de classe C_0. Se $0 \leq s \leq t < \infty$, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, a função

$$\phi(s)x = S_1(t-s)S_2(s)x$$

é diferenciável no intervalo $0 \leq s \leq t$ (§3 do Apêndice) e, de acordo com i) da Proposição 1.2.10,

$$\frac{d}{ds}\,\phi(s)x = S_1(t-s)AS_2(s)x - S_1(t-s)AS_2(s)x = 0.$$

Segue-se do Teorema A.3.1 do Apêndice que $\phi(s)x$ é constante para $0 \leq s \leq t$. Tem-se, então,

$$S_1(t)x = \phi(0)x = \phi(t)x = S_2(t)x \ \forall\, x \in \mathcal{D}(A),$$

donde

$$S_1(t)x = S_2(t)x \ \forall\, x \in X,$$

pois $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e $S_1(t), S_2(t) \in \mathcal{L}(X)$.

1.2.12 Exemplos:

1) As restrições das funções exponenciais a $\mathbb{R}^+$ são exemplos de semigrupos de classe C_0, o que decorre do Teorema 1.1.1 e do fato que a convergência uniforme implica a convergência forte. O gerador infinitesimal de e^{tA} é A porque

$$\left\| \frac{e^{hA} - I}{h}\, x - Ax \right\| \leq ||A||(e^{h||A||} - 1)||x|| \to 0$$

quando $h \to 0$.

2) Seja $C(\mathbb{R})$ o espaço de Banach das funções reais, uniformemente contínuas e limitadas em $\mathbb{R}$, com a norma

$$||u|| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|.$$

Para cada $t \geq 0$ e $u \in C(\mathbb{R})$ ponhamos

$$S(t)u(x) = u(x+t) = u_t(x).$$

Para cada $t \geq 0$ e cada $u \in C(\mathbb{R})$ tem-se $u_t \in C(\mathbb{R})$, como é óbvio, isto é, $S(t)$ é uma aplicação de $C(\mathbb{R})$ em $C(\mathbb{R})$. É evidentemente uma aplicação linear que é limitada porque de

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x+t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$$

vem $||S(t)|| = 1$. Logo,

$$S \colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(C(\mathbb{R})).$$

Obviamente S satisfaz I) e II) e, além disto, para cada $u \in C(\mathbb{R})$

$$||S(t)u - u|| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x+t) - u(x)| \to 0$$

quando $t \to 0^+$ porque u é uniformemente contínua. Logo S é um semigrupo de contrações lineares de classe C_0. Se $u \in \mathcal{D}(A)$, então existe

$$\lim_{h\to 0^+} A_h\, u(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

uniformemente em x e esse limite pertence a $C(\mathbb{R})$. Logo u é derivável à direita e $d^+u(x)/dx \in C(\mathbb{R})$. Segue-se, pelo Lema de Dini (Lema A.3.2 do Apêndice), que u é derivável e $u' \in C(\mathbb{R})$. Reciprocamente, se $u \in C(\mathbb{R})$ e $u' \in C(\mathbb{R})$, então de

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u'(x) = \frac{1}{h}\int_0^h [u'(x+t) - u'(x)|\, dt$$

decorre que existe $\lim\limits_{h\to 0^+} A_h\, u(x)$, uniformemente em x, quando $h \to 0$ e esse limite é $u'(x)$ (Proposição A.3.4 do Apêndice). Logo $u \in \mathcal{D}(A)$ e, assim,

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in C(\mathbb{R}); u' \text{ existe e pertence a } C(\mathbb{R})\}$$

e $Au = u'$. S é conhecido por *semigrupo das translações à esquerda* em $C(\mathbb{R})$.

O exemplo ainda é válido quando se substitui $C(\mathbb{R})$ por $L^p(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{R}^+)$ e $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \le p < \infty$.

3) Seja N_t, $t > 0$, a função definida em $\mathbb{R}^n$ por

$$N_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-|x|^2/4t}\,,$$

onde $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ se $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Da bem conhecida integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}\, dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$$

resulta imediatamente que $N_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $||N_t||_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. Pelo Teorema A.7.4 do Apêndice tem-se, então,

$$N_t * u \in L^2(\mathbb{R}^n)\ \forall\, u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, definindo $S(t)$ por $S(0)u = u$ e

$$(S(t)u)(x) = (N_1 * u)(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t}\, u(y)\, dy \tag{1.2.11}$$

se $t > 0$, $S(t)$ é um operador de $L^2(\mathbb{R}^n)$, obviamente linear e

$$||S(t)u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||N_t * u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,,$$

i.e., $S(t)$ é uma contração linear de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Vamos mostrar que S é um semigrupo de classe C_0 de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pela definição de S já se tem $S(0) = I$, i.e., a condição I) da Definição 1.2.1 é satisfeita. Pelo que está dito no §8 do Apêndice tem-se

$$\widehat{N_* N_s}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \widehat{N}_t(x)\widehat{N}_s(x)$$

e como pelo Exemplo A.8.1, ainda do Apêndice,

$$\widehat{N_t}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-t|x|^2}\,,$$

segue-se que

$$\begin{aligned}\widehat{N_t N_s}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \widehat{N_t}(x)\cdot \widehat{N_s}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-t|x|^2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-s|x|^2} = \\ = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-(t+s)|x|^2} = \widehat{N}_{r+s}(x).\end{aligned}$$

Daí vem

$$N_t * N_s = N_{t+s}$$

e, portanto,

$$S(t+s)u = N_{t+s} * u = (N_t * N_s) * u = N_t * (N_s * u) = S(t)S(s)u,$$

para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, S satisfaz II) da Definição 1.2.1. Como de

$$(S(h)u-u)^\wedge = (N_h * u - u)^\wedge = \widehat{N_h * u} - \hat{u} = (e^{-h|\cdot|^2}-1)\hat{u}$$

vem

$$||(S(h)u-u)^\wedge||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||(e^{-h|\cdot|^2}-1)\hat{u}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |(e^{-h|\xi|^2}-1)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |e^{-h|\xi|^2} - 1|^2\, |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \;\to\; 0$ quando $h \to 0^+$ segue-se que

$$||S(h)-I)u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \text{ quando } h \to 0,$$

visto que a transformação de Fourier é uma isometria de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, S é um semigrupo de contrações lineares de $L^2(\mathbb{R}^n)$, de classe C_0.

Vamos agora determinar o gerador infinitesimal de S. Temos

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{S(h)-I}{h}u - v\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\left(\frac{S(h)-I}{h}u - v\right)^\wedge\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \\ &\left\|\frac{\widehat{N_h * u} - \hat{u}}{h} - \hat{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\frac{e^{-h|\cdot|^2}\,\hat{u} - \hat{u}}{h} - \hat{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \\ &\left\|\frac{e^{-h|\cdot|^2}-1}{h}\,\hat{u} - \hat{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

donde $Au = v$ se, e só se, $-|\cdot|^2\,\hat{u} = \hat{v}$. Mas, sabe-se que, $-|x|^2\,\hat{u}(x) = \widehat{\Delta u}(x)$, onde Δ é o operador de Laplace tomado no sentido das distribuições. Logo, $Au = v$ se, e só se, $\widehat{\Delta u} = \hat{v}$ e, portanto, se, e só se, $\Delta u = v$. Conclui-se daí que:

$$\mathcal{D}(A) = \{u;\; u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ e } \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

e

$$Au = \Delta u \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A).$$

4) Seja S um semigrupo de classe C_0, A seu gerador infinitesimal e ponhamos

$$\widetilde{S}(t) = e^{\lambda t}\, S(t).$$

Vamos mostrar que $\widetilde{S}$ é, igualmente, um semigrupo de classe C_0 e que seu gerador infinitesimal é $A - \lambda I$.

Com efeito, as I) e II) são obviamente satisfeitas e, como

$$\widetilde{S}(t) - I = e^{-\lambda t}\, S(t) - I = e^{-\lambda t}(S(t) - I) + (e^{-\lambda t} - 1)I$$

segue-se que quanto $t \to 0^+$,

$$||(\widetilde{S}(t) - I)(x)|| \to 0, \quad \forall\, x \in X,$$

uma vez que S é um semigrupo de classe C_0 e $e^{-\lambda t} - 1 \to 0$ quando $t \to 0^+$. Logo $\widetilde{S}$ é um semigrupo de classe C_0. A igualdade

$$\frac{\widetilde{S}(h) - I}{h}\, x = \frac{e^{-\lambda h}(S(h) - I)}{h}\, x + \frac{e^{-\lambda h} - 1)I}{h}\, x$$

mostra que o gerador infinitesimal $\widetilde{A}$, de $\widetilde{S}$ é dado por $\widetilde{A} = A - \lambda I$.

1.2.13 Definição. Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Ponhamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A^n) &= \{x;\, x \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \text{ e } A^{n-1}\, x \in \mathcal{D}(A)\} \\ A^n\, x &= A(A^{n-1}\, x), \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A^n). \end{aligned}$$

1.2.14 Proposição. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Temos:*

i) *$\mathcal{D}(A^n)$ é um subespaço de X e A^n é um operador linear de X;*

ii) *Se $x \in \mathcal{D}(A^n)$, então $S(t)x \in \mathcal{D}(A^n)$, $\forall\, t \geq 0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n}\, S(t)x = A^n\, S(t)x = S(t)A^n x, \ \forall\, n \in \mathbb{N};$$

iii) *É válida a fórmula de Taylor: se $x \in \mathcal{D}(A^n)$, então*

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!}\, S^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1}\, A^n S(\tau)x\, d\tau;$$

iv) $(S(t_I)^n x = \int_0^t \dots \int_0^t S(\tau_1 + \cdots + \tau_n) A^n x \, d\tau_1 \dots d\tau_n \; \forall \, x \in \mathcal{D}(A^n)$;

v) $\bigcap_n \mathcal{D}(A^n)$ *é denso em* X.

Demonstração: i) e ii) são triviais; iii) é obtida por indução observando que por integração por partes do resto tem-se

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} A^n S(\tau) x \, d\tau =$$
$$= \frac{(t-a)^n}{n!} A^n \, S(a)x + \frac{1}{n!} \int_a^t (t-\tau)^n A^{n+1} S(\tau) x \, d\tau.$$

A iv) é uma generalização imediata de ii) da Proposição 1.2.10 com $s = 0$. Vamos demonstrar v). Seja Y o conjunto dos elementos de X da forma

$$y = \int_0^\infty \varphi(t) S(t) x \, dt \tag{1.2.12}$$

onde $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função infinitamente diferenciável e com suporte compacto contido em $[0, \infty)$. Como $\varphi(t)s(t)x$ é uma função contínua, definida em $\mathbb{R}^+$, com valores em X e que se anula fora de um intervalo limitado, a integral (1.2.12) existe. Temos

$$\begin{aligned} A_h \, y &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(t)[S(t+h) - S(t)] x \, dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty \varphi(t-h) S(t) x \, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(t) S(t) x \, dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty [\varphi(t-h) - \varphi(t)] S(t) x \, dt \end{aligned}$$

porque

$$\int_0^h \varphi(t-h) S(t) x \, dt = 0$$

uma vez que o suporte de φ está em $[0, \infty)$. Como, por hipótese,$h^{-1}(\varphi(t-h) - \varphi(t))$ tende uniformemente a $-\varphi'$ em $\mathbb{R}$, quando $h \to 0$ (Proposição A.3.4 do Apêndice), segue-se que

$$\lim_{h \to 0} A_h y = -\int_0^\infty \varphi'(t) S(t) x \, dt,$$

i.e., $y \in \mathcal{D}(A)$ e $Ay \in Y$. Por indução, $y \in \mathcal{D}(A^n)$, $\forall \, n \in \mathbb{N}$, donde $Y \subset \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}(A^n)$. Vamos mostrar que Y não é denso em X e, consequentemente, que $\bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}(A^n)$ é denso em X. Vamos supor que Y não seja denso em X. Então, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um $x_0 \in X$ e um $x^* \in X^*$ tais que

$$\langle x^*, x_0 \rangle = 1, \quad \text{e} \quad \langle x^*, y \rangle = 0, \quad \forall \, y \in Y.$$

Mas então

$$\int_0^\infty \varphi(t)\langle x^*, S(t)x\rangle dt = \left\langle x^*, \int_0^\infty \varphi(t)S(t)x\,dt\right\rangle = \langle x^*, y\rangle = 0 \qquad (1.2.13)$$

para todo $x \in X$ e para todo φ nas condições indicadas. Mas $\langle x^*, S(t)x_0\rangle$ é uma função contínua em $[0,\infty)$ que no ponto $t=0$ toma o valor 1. Consequentemente, é positiva em $(0,T)$ para algum T tal que $0 < T < \infty$. Portanto, para a função φ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \left(\frac{T}{2} - t\right)^2}\right) & \text{se} \quad 0 < t < T \\ 0 & \text{se} \quad t \le 0 \text{ ou } t \ge T, \end{cases}$$

que está nas condições indicadas, cujo suporte é $[0,T]$ e é positiva em $(0,T)$, tem-se

$$\int_0^\infty \varphi(t)\langle x^*, S(t)x_0\rangle dt \neq 0$$

o que contradiz (1.2.13).

1.2.15 Lema. *Seja A um operador linear fechado de X. Pondo, para cada $x \in \mathcal{D}(A^k)$,*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} ||A^j x|| \qquad (1.2.14)$$

o funcional $|\cdot|_k$ é uma norma em $\mathcal{D}(A^k)$ munido da qual $\mathcal{D}(A^k)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Como já foi visto na Proposição 1.2.14, $\mathcal{D}(A^k)$ é um subespaço de X e, como é imediato, $|\cdot|_k$ é uma norma em $\mathcal{D}(A^k)$. Se $x_n \in \mathcal{D}(A^k)$, $n = 1, \ldots,$ e $|x_m - x_n|_k \to 0$ quando $m, n \to \infty$, então, de acordo com (1.2.14),

$$||A^j x_m - A^j x_n|| \to 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k$$

e, portanto, $(A^j x_n)$ é uma sucessão convergente, $j = 0, 1, \ldots, k$. Em particular, (x_n) é convergente. Seja $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como A^j é fechado e $(A^j x_n)$ converge segue-se que $x \in \mathcal{D}(A^j)$ e $A^j x_n \to A^j x$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Logo $|x_n - x|_k \to 0$ o que mostra que $\mathcal{D}(A^k)$ com a norma (1.2.14) é um espaço normado completo, i.e., um espaço de Banach.

1.2.16 Definição. A norma (1.2.14) é dita *norma do gráfico.* O espaço de Banach que se obtém munindo $\mathcal{D}(A^k)$ da norma (1.2.14) será representado por $[\mathcal{D}(A^k)]$.

1.2.17 Observação. Resulta de (1.2.14) que se $u\colon [0,\infty) \to X$ é uma função tal que

i) $u(t) \in \mathcal{D}(A^k)$, $\forall\, t \in A \subset [0,\infty)$, Λ aberto;

ii) u admite n derivadas e

$$\frac{d^j u}{dt^j} \in \mathcal{D}(A^k) \ \forall\, t \in \Lambda,\ j = 1, \ldots, n;$$

iii) as funções
$$\frac{d^ju}{dt^j}, A\,\frac{d^ju}{dt^j}, \ldots, A^k\,\frac{d^ju}{dt^j}\,,\ j=1,\ldots,n$$
são contínuas em Λ;

então
$$u \in C^n(\Lambda, [\mathcal{D}(A^k)]).$$

1.2.18 Proposição. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo, S, de classe C_0, então, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A^n)$, $S(t)x \in C^{n-k}([0,\infty); [\mathcal{D}(A^k)])$,$k = 0, 1, \ldots, n$.*

Demonstração: De $x \in \mathcal{D}(A^n)$ vem $x \in \mathcal{D}(A^j)$ e $A^jx \in \mathcal{D}(A^{n-j})$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Como, pela Proposição 1.2.14, de $x \in \mathcal{D}(A^j)$ vem $S(t)x \in \mathcal{D}(A^j)$ e $\dfrac{d^j}{dt^j}\,S(t)x = A^jS(t)x = S(t)A^jx$ e de $A^jx \in \mathcal{D}(A^{n-j})$ vem $S(t)A^jx \in \mathcal{D}(A^{n-j})$, $t \geq 0$, tem-se
$$\frac{d^j}{dt^j}\,S(t)x \in \mathcal{D}(A^{n-j})\ \ \forall\, t \geq 0.$$
Mas se $0 \leq j \leq n-k$ e, portanto, $k \leq n-j$, então $\mathcal{D}(A^{n-j}) \subset \mathcal{D}(A^k)$. Logo
$$\frac{d^j}{dt^j}\,S(t)x\colon [0,\infty) \to \mathcal{D}(A^k), \quad 0 \leq j \leq n-k.$$
além disto, para $0 \leq j \leq n-k$ as funções
$$A^i\,\frac{d^j}{dt^j}\,S(t)x = A^iA^jS(t)x = S(t)A^{i+j}x, \quad 0 \leq i \leq k,$$
são contínuas. Logo, de acordo com a Observação 1.2.17,
$$S(t)x \in C^{n-k}([0,\infty); [\mathcal{D}(A^k)]), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

1.3 Semigrupos Diferenciáveis

1.3.1 Observação. Foi visto em i) da Proposição 1.2.10 que se $x \in \mathcal{D}(A)$ então $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, t \geq 0$; portanto, $S(t)\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$, $\forall\, t \geq 0$. Essa propriedade não é, em geral, válida para todo $x \in X$ porque de $S(t)X \subset \mathcal{D}(A)\ \forall\, t \geq 0$ vem $X = IX = S(0)X \subset \mathcal{D}(A)$, isto é, $\mathcal{D}(A) = X$ e, assim, de acordo com o Teorema do Gráfico Fechado, A é um operador linear limitado, recaindo-se no caso particular da convergência uniforme, já estudado no Teorema 1.1.1. Isto não acontece, contudo, se $S(t)X \subset \mathcal{D}(A)$ apenas para $t > 0$ e, de um modo mais geral, apenas para $t > t_0 \geq 0$. É esse caso particular que vamos considerar agora.

1.3.2 Definição. Diz-se que um semigrupo, S, de classe C_0, com gerador infinitesimal A, é *diferenciável para* $t > t_0 \geq 0$ se $S(t)X \subset \mathcal{D}(A)\ \forall\, t > t_0$. Diz-se que S é *diferenciável* se S é diferenciável para $t > 0$.

1.3.3 Teorema. *Seja S um semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e $S^{(n)}(t)$ o operador linear definido por $S^{(n)}(t) = A^n S(t)$, $A^0 = I$, $n = 0, 1, \dots$. Então:*

i) *O operador $S^{(n)}(t)$ tem as seguintes propriedades:*

a) $\forall\, t > (n+1)t_0$ *e todo s tal que $t - t_0 > s > nt_0$ tem-se*

$$S^{(n)}(t)x = S(t-s)S^{(n)}(s)x,\ \forall\, x \in X,\ n = 0, 1, \dots\ ; \tag{1.3.1}$$

b) $S^{(n)}(t)$ *é limitado para todo $t > nt_0$, $n = 0, 1, \dots$;*

c) $S^{(n)}(t) = \left[AS\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[S^{(1)}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n,\ \forall\, t > nt_0\,, n = 1, \dots\ ;$

ii) $\forall\, x \in X$ *a função $S(t)x$ é n vezes continuamente diferenciável em todo $t > nt_0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n}\, S(t)x = S^{(n)}(t)x, \quad n = 1, \dots\ ;$$

iii) $S^{(n)}$ *é uma função contínua na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ em todo $t > (n+1)t_0$, $n = 0, 1, \dots$;*

iv) *A função S é n vezes diferenciável na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ em todo $t > (n+1)t_0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n}\, S(t) = S^{(n)}(t), \quad n = 1. \dots .$$

Demonstração: i) De $t > t_0$ e $t - t_0 > s > 0$ vem $t - s > t_0$ e, como $t_0 \geq 0$, $t - s > 0$. Por II) da Definição 1.2.1 tem-se, então, $S^{(0)}(t)x = S(t)x = S(t-s)S(s)x = S(t-s)S^{(0)}(s)x$ $\forall\, x \in X$. Portanto a) é válida para $n = 0$. Suponhamos válida para n e seja $t > (n+2)t_0$ e $t - t_0 > s > (n+1)t_0$. Observe-se que se $\tau > (n+1)t_0$, então, da hipótese de indução, (1.3.1), resulta que $S^{(n)}(\tau)x \in \mathcal{D}(A)$ $\forall\, x \in X$. Logo, de $s > (n+1)t_0$ vem $S^{(n)}(s)x \in \mathcal{D}(A)$ $\forall\, x \in X$. Daí, por i) da Proposição 1.2.10,

$$S(t-s)S^{(n)}(s)x \in \mathcal{D}(A)$$

e

$$AS(t-s)S^{(n)}(s)x = S(t-s)AS^{(n)}(s)x\ \ \forall\, x \in X.$$

Mas $t > (n+2)t_0 > (n+1)t_0$ e $t - t_0 > s > (n+1)t_0 > nt_0$. Pela hipótese de indução segue-se, então, que

$$S^{(n)}(t)x = S(t-s)S^{(n)}(s)x\ \ \forall\, x \in X$$

donde

$$\begin{gathered} S^{(n+1)}(t)x = AS^{(n)}(t)x = AS(t-s)S^{(n)}(s)x = \\ S(t-s)AS^{(n)}(s)x = S(t-s)S^{(n+1)}(s)x\ \ \forall\, x \in X, \end{gathered}$$

i.e., a) é válida para $n+1$. Logo é válida para $n = 0, 1, \ldots$.
b) Para $n = 0$, b) é trivial. Suponhamos b) válida para n e seja $t > (n+1)t_0$. Daí vem $t > nt_0$, donde $S^{(n)}(t)$ é, pela hipótese de indução, um operador limitado de X e, portanto, fechado. Analogamente A é fechado pois é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 . Logo $S^{(n+1)}(t)$ é fechado pois $S^{(n+1)}(t) = AS^{(n)}(t)$. Além disto, de $t > (n+1)t_0$ segue-se, por (1.3.1), que $S^{(n)}(t)x \in \mathcal{D}(A)\ \forall\, x \in X$ e, daí, que $S^{(n+1)}(t)$ é definido em todo o espaço X. Pelo Teorema do Gráfico Fechado segue-se, então, que $S^{(n+1)}(t)$ é um operador limitado.
c) Para $n = 1$ a fórmula c) é trivial. Suponhamos válida para n e seja $t > (n+1)t_0$ e $t - t_0 > s > nt_0$. Daí vem, por a),

$$S^{(n+1)}(t) = AS^{(n)}(t) = AS(t-s)S^{(n)}(s) = AS(t-s)\left[AS\left(\frac{s}{n}\right)\right]^n$$

e, como da hipótese vem $t - t_0 > nt/(n+1) > nt_0$, podemos fazer$s = nt/(n+1)$. Então

$$\begin{aligned} S^{(n+1)}(t) &= AS\left(\frac{t}{n+1}\right)\left[AS\left(\frac{t}{n+1}\right)\right]^n \\ &= \left[AS\left(\frac{t}{n+1}\right)\right]^{n+1} = \left[S^{(1)}\left(\frac{t}{n+1}\right)\right]^{n+1}. \end{aligned}$$

ii) Por hipótese, se $t > t_0$, então $S(t)x \in \mathcal{D}(A)\ \forall\, x \in X$. Portanto, se $t > t_0$, existe o limite de $A_h S(t)x$ quando $h \to 0^+$ e

$$\lim_{h \to 0^+} A_h S(t)x = AS(t)x, \ \ \forall\, x \in X,$$

i.e., $S(t)x$ é derivável à direita em todo $t > t_0$ e

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = AS(t)x \ \ \forall\, x \in X.$$

Seja $t > s > t_0$. Então, por i), $AS(s)$ é um operador linear limitado e, como

$$AS(t) = AS(s)S(t-s),$$

tem-se que, para $|h| < t - s$,

$$\begin{aligned} ||AS(t+h)x - AS(t)x|| &= ||AS(s)S(t+h-s)x - AS(s)S(t-s)x|| \leq \\ &\leq ||AS(s)|| \cdot ||S(t+h-s)x - S(t-s)x|| \to 0 \end{aligned}$$

quando $h \to 0$, visto que S é fortemente contínuo. Logo, $AS(t)x$ é contínua em todo $t > t_0$, $\forall\, x \in X$. Segue-se, pelo Lema de Dini, que $S(t)x$ é continuamente diferenciável em todo $t > t_0$, $\forall\, x \in X$, e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S^{(1)}(t)x,$$

o que demonstra ii) para $n = 1$. Suponhamos ii) válida para n e seja $t > (n+1)t_0$ e $t - t_0 > s > nt_0$. Por (1.3.1) temos, então,

$$S^{(n)}(t)x = S(t-s)S^{(n)}(s)x \ \ \forall\, x \in X.$$

Mas $t - s > t_0$, donde $S(t-s)S^{(n)}(s)x$ é continuamente diferenciável pois ii) é válida para $n = 1$. Logo, $\forall\, x \in X$, $S^{(n)}(t)x$ é continuamente diferenciável para $t > (n+1)t_0$ donde, pela hipótese de indução, $S(t)x$ é $n+1$ vezes continuamente diferenciável para $t > (n+1)t_0$, $\forall\, x \in X$, e

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} S(t)x = \frac{d}{dt} S^{(n)}(t)x = AS(t-s)S^{(n)}(s)x = AS^{(n)}(t)x = S^{n+1}(t)x$$

o que completa a demonstração de ii).

iii) Seja $t > t_0, s$ tal que $t > s > t_0$ e $|h| < t - s$. Daí vem, por ii),

$$S(t+h)x - S(t)x = \int_t^{t+h} AS(\tau)x\, d\tau, \ \ \forall\, x \in X.$$

Se $\tau > s$ tem-se

$$AS(\tau)x = AS(s)S(\tau - s)x \ \ \forall\, x \in X.$$

Daí vem, para os pontos τ tais que $\tau > s$, $||AS(\tau)x|| = ||AS(s)S(\tau-s)x|| \leq ||AS(s)|| \cdot ||S(\tau-s)|| \cdot ||x|| \, \forall\, x \in X$, uma vez que, por i), $AS(s)$ é um operador linear limitado. Em particular, para os pontos τ do intervalo de extremos t e $t+h$ tem-se $||AS(\tau)x|| \leq M||x||$, onde M é uma constante, pois $||S(\tau - s)||$ é limitada nos intervalos limitados. Logo,

$$||S(t+h)x - S(t)x|| < M|h| \cdot ||x|| \ \ \forall\, x \in X,$$

donde $||S(t+h) - S(t)|| < M|h| \to 0$ quando $h \to 0$, i.e., S é contínua, na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, no ponto $t > t_0$. Deste modo, iii) é válida para $n = 0$.

Seja, agora, $t > (n+1)t_0$ e $t - t_0 > s > nt_0$. Daí vem $t - s > t_0$, donde se $|h| < t - s - t_0$, então $t + h - t_0 > s > nt_0$ e $(t+h) > (n+1)t_0$. Logo, por (1.3.1),

$$S^{(n)}(t) = S(t-s)S^{(n)}(s)$$

e

$$S^{(n)}(t+h) = S(t+h-s)S^{(n)}(s).$$

Agora, tendo em vista que $S^{(n)}(s)$ é, por i), um operador linear limitado, pois $s > nt_0$, e que, pelo que já foi demonstrado, S é uma função contínua, na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, no ponto $t - s$, segue-se que

$$||S^{(n)}(t+h) - S^{(n)}(t)|| \leq ||S(t+h-s) - S(t-s)|| \cdot ||S^{(n)}(s)|| \to 0$$

quando $h \to 0$, i.e., $S^{(n)}$ é contínua na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ para $t > (n+1)t_0$.

iv) Seja $t > (n+1)t_0$ e $|h| < t - (n+1)t_0$. Por ii) tem-se

$$S^{(n-1)}(t+h)x - S^{(n-1)}(t)x = \int_t^{t+h} S^{(n)}(\tau)x\,d\tau \ \forall\, x \in X. \tag{1.3.2}$$

Mas, por iii), $S^{(n)}$ é contínua, em todo $\tau > (n+1)t_0$, na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$; logo, $S^{(n)}$ é integrável no intervalo de extremos t e $t+h$ e

$$\int_t^{t+h} S^{(n)}(\tau)x\,d\tau$$

é um operador linear limitado. Portanto,

$$\int_t^{t+h} S^{(n)}(\tau)x\,d\tau = \left[\int_t^{t+h} S^{(n)}(\tau)d\tau\right] x$$

e daí, por (1.3.2),

$$[S^{(n+1)}(t+h) - S^{(n-1)}(t)]x = \left[\int_t^{t+h} S^{(n)}(\tau)d\tau\right] x \ \ \forall\, x \in X,$$

donde

$$S^{(n-1)}(t+h) - S^{(n-1)}(t) = \int_t^{t+h} S^{(n)}(\tau)d\tau.$$

Dividindo ambos os membros por h e passando ao limite quando $h \to 0$ temos

$$\frac{d}{dt} S^{(n-1)}(t) = S^{(n)}(t) \ \ \forall\, t > (n+1)t_0\,. \tag{1.3.3}$$

Para $n = 1$ tem-se, pois,

$$\frac{d}{dt} S(t) = S^{(1)}(t) \ \ \forall\, t > 2t_0\,,$$

i.e., iv) é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos verdadeira para $n - 1$, i.e.,

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} S(t) = S^{(n-1)}(t) \ \ \forall\, t > nt_0\,, \tag{1.3.4}$$

e seja $t > (n+1)t_0$. Então $t > nt_0$ e por (1.3.3) e (1.3.4)

$$S^{(n)}(t) = \frac{d}{dt} S^{(n-1)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} S(t) \ \ \forall\, t > (n+1)t_0\,,$$

o que completa a demonstração.

1.3.4 Corolário. *Se S é um semigrupo diferenciável, então S é n vezes diferenciável na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ em todo ponto $t > 0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n} S(t) = S^{(n)}(t) = A^n S(t) = [AS(t/n)]^n, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.3.5}$$

1.4 Geração de Semigrupos

1.4.1 O Resolvente de um Operador. Seja A um operador linear de X. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, ($\mathbb{C}$ = corpo dos números complexos) para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é invertível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, representado por $\rho(A)$, é dito *conjunto resolvente* de A. O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ é dito *espectro* de A. O operador linear $(\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, representado por $R(\lambda, A)$, é dito *resolvente* de A. Para simplificar a escrita, quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos simplesmente $\lambda - A$ em lugar de $\lambda I - A$.

Observe-se que, quando o operador linear A é fechado, $R(\lambda, A)$ é igualmente fechado, logo, $\forall\, \lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda, A)$ é um operador linear limitado e fechado em um conjunto denso em X. Seu domínio é, pois, X.

No caso particular em que $X = \mathbb{C}$, todo operador linear A de X é da forma $Ax = ax$ onde $a \in \mathbb{C}$. Nesse caso particular tem-se, pois, $R(\lambda, A) = (\lambda - a)^{-1}$. Além disto a é o gerador infinitesimal do semigrupo (função exponencial) e^{ta} e, como é imediato,

$$R(\lambda, A) = \frac{1}{\lambda - a} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, e^{at}\, dt, \quad \text{Re } \lambda > \text{Re } a.$$

Portanto, o resolvente do gerador infinitesimal é a transformada de Laplace do semigrupo. Essas considerações estendem-se facilmente aos operadores $A \in \mathcal{L}(X)$, qualquer que seja o espaço de Banach X. É natural, pois, indagar se tal representação não seria válida quando A não é limitado. O teorema a seguir mostra que é.

1.4.2 Teorema. *Seja S um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A. Se* Re$\lambda > \omega_0$ *, onde*

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log ||S(t)||}{t},$$

então $\lambda \in \rho(A)$, existe a integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)x\, dt, \quad \forall\, x \in X,$$

e

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)x\, dt, \quad \forall\, x \in X. \tag{1.4.1}$$

Demonstração: Seja Re $\lambda \geq \mu > \omega > \omega_0$. Então existe, pela Proposição 1.2.6, uma constante $M \geq 1$ tal que

$$||S(t)|| \leq M\, e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Logo, $||e^{-\lambda t}\, S(t)x|| \leq M\, e^{(z\omega - \text{Re }\lambda t}||x|| \leq M\, e^{(\omega-\mu\lambda)t}||x||$. Mas

$$\int_0^\infty e^{(\omega-\mu)t}\, dt = \frac{1}{\mu - \omega}$$

e como a função $e^{-\lambda t}\, S(t)x$ é contínua segue-se, pelo teste de Weierstrass, (A.5.1 do Apêndice), que a integral

$$R_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)x\, dt, \quad \text{Re } \lambda > \omega,\ x \in X,$$

é convergente. Além disto, R_λ é, obviamente, linear e é limitado porque $||R_\lambda|| \leq \dfrac{M}{(\text{Re } \lambda - \omega)}$. Temos

$$\begin{aligned} A_h R_\lambda(x) &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t+h)x\, dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)x\, dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)x\, dt, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{h\to 0^+} A_h R_\lambda(x) = \lambda R_\lambda x - x, \quad \forall\, x \in X.$$

Segue-se daí que

$$R_\lambda(x) \in \mathcal{D}(A)\ \forall\, x \in X \text{ e } (\lambda I - A)R_\lambda(x) = x. \tag{1.4.2}$$

Por outro lado, de $x \in \mathcal{D}(A)$ vem, levando em conta que, pela Proposição 1.2.11, A é fechado e que, pela Proposição 1.2.10, $S(t)Ax = AS(t)x$,

$$\begin{gathered} R_\lambda(Ax) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)Ax\, dt = \\ = \int_0^\infty Ae^{-\lambda t}\, S(t)x\, dt = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)x\, dt = AR_\lambda(x). \end{gathered}$$

Daí e de (1.4.2) vem

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$$

que, juntamente com (1.4.2) mostra que

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A),$$

o que completa a demonstração.

1.4.3 Corolário. *Nas mesmas condições do Teorema* 4.2:

$$\begin{aligned} &\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n\, n! R(\lambda, A)^{n+1} \\ &\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n\, S(t)x\, dt, \quad \forall\, x \in X. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Demonstração: A primeira das fórmulas (1.4.3) está demonstrada no Apêndice (Corolário A.1.4 do Apêndice). Como de $\omega_0 < \omega < \mu \leq \text{Re } \lambda$ vem

$$||e^{\lambda t}\, t^{n+1}\, S(t)x|| \leq M||x||t^{n+1}\, e^{(\omega - \text{Re } \lambda)t} \leq M||x||t^{n+1}\, e^{(\omega-\mu)t} = M(t)$$

e a função que figura no membro da direita dessa desigualdade é contínua e positiva e sua integral em relação a t converge em $[0,\infty)$ e, além disto, $e^{-\lambda t}\, t^{n+1}\, S(t)x$ é contínua, segue-se, pelo teste de Weierstrass, (A.5.1 do Apêndice) que a integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{n+1}\, S(t)x\, dt$$

converge uniformemente no semiplano Re $\lambda \geq \mu$. Logo, pelo Teorema A.5.2 do Apêndice, é permitida a diferenciação sob o sinal de integração em

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{n}\, S(t)x\, dt$$

e

$$\frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{n}\, S(t)x\, dt = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{n+1}\, S(t)x\, dt, \quad \text{Re}\, \lambda > \omega_0$$

pela arbitrariedade de μ e ω.
Por indução tem-se, então, a segunda das fórmulas (1.4.3).

1.4.4 Teorema. (Hille-Yosida). *Para que um operador linear A, definido em $\mathcal{D}(A) \subset X$ e com valores em X, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0, é necessário e suficiente que:*

i) *A seja fechado e seu domínio seja denso em X;*

ii) *Existam números reais M e ω tais que para cada real $\lambda > \omega$ se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: 1) Necessidade. Seja S um semigrupo de classe C_0. A Proposição 1.2.11 demonstra a necessidade de i). Para cada

$$\omega > \omega_0 = \lim_{t\to\infty}[(\log ||S(t)||)/t]$$

existe, pela Proposição 1.2.6, um M tal que

$$||S(t)|| \leq M\, e^{\omega t}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Pelo Teorema 1.4.2, se $\lambda > \omega$ então $\lambda \in \rho(A)$ e, pelo Corolário 1.4.3,

$$R(\lambda, A)^n\, x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{n-1}\, S(t)x\, dt. \tag{1.4.4}$$

Logo,

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-(\lambda-\omega)t}\, dt = \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

i.e., a condição ii) é necessária.

2) Suficiência. A demonstração da suficiência consiste em pôr

$$B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda f, \quad \lambda > \omega$$

e mostrar que o semigrupo (função exponencial) e^{tB_λ} tem para limite forte, quando $\lambda \to \infty$, um semigrupo de classe C_0 cujo gerador infinitesimal é A.

a) Vamos mostrar, em primeiro lugar, que

$$\lim_{\lambda \to \infty} R_\lambda x = Ax, \quad x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.4.5}$$

Como, por definição,

$$R(\lambda, A)(\lambda I - A) = I$$

tem-se

$$\lambda R(\lambda, A) - I = R(\lambda, A)A$$

donde, se $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$||\lambda R(\lambda, A)x - x|| = ||R(\lambda, A)Ax|| \leq M||Ax||(\lambda - \omega)^{-1} \to 0$$

quando $\lambda \to \infty$, isto é,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Mas, como, por hipótese,

$$||\lambda R(\lambda, A)|| \leq M|\lambda|(\lambda - \omega)^{-1}$$

tem-se

$$||\lambda R(\lambda, A)|| \leq 2M,$$

para λ suficientemente grande. Segue-se daí que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall\, x \in X,$$

uma vez que $\mathcal{D}(A)$ é, por hipótese, denso em X. Logo, levando em conta que $B_\lambda = \lambda R(\lambda, A)A$, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ tem-se

$$\lim_{\lambda \to \infty} B_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = Ax.$$

b) Da definição de B_λ e das hipóteses tem-se

$$||e^{tB_\lambda}|| = ||e^{t(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I)}|| \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n ||R(\lambda, A)^n||}{n!} \leq$$

$$\leq M\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!(\lambda - \omega)^n} = M\, e^{t\omega\lambda(\lambda - \omega)^{-1}}.$$

Mas, $\omega\lambda(\lambda-\omega)^{-1}$ é uma função de λ que tende a ω quando $\lambda \to \infty$. Logo, se $\gamma > \omega$, existe $\lambda(\gamma)$ tal que $\omega\lambda(\lambda-\omega)^{-1} < \gamma$, para todo $\lambda > \lambda(\gamma)$ e, assim,

$$||e^{tB_\lambda}|| \leq M\, e^{t\gamma}, \quad \forall\, \lambda > \lambda(\gamma). \tag{1.4.6}$$

c) Vamos mostrar agora que e^{tB_λ} tende fortemente para um operador linear limitado quando $\lambda \to \infty$. Ponhamos, por simplicidade, $E_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}$. Como, para cada λ e cada μ, $R(\lambda, A)$ comuta com $R(\mu, A)$, segue-se que $B_\lambda B_\mu = B_\mu B_\lambda$. Levando em conta que

$$S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B_\lambda^n}{n!}\,,$$

segue-se que $B_\mu S_\lambda = S_\lambda B_\mu$. Logo,

$$S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x = \int_0^t \frac{d}{d\tau}\,[S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)x]d\tau = \int_0^t S_\mu(t-\tau)S_\lambda(\tau)[B_\lambda - B_\mu]x\, d\tau,$$

donde, levando em conta (1.4.6),

$$||S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x|| \leq M^2 t\, e^{t\gamma}||B_\lambda x - B_\mu x||, \quad \forall\, \lambda, \mu > \lambda(\gamma),\ \gamma > \omega.$$

Mas, por (1.4.5), tem-se $||B_\lambda x - B_\mu x|| \to 0$ quando $\lambda, \mu \to \infty$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$. Logo, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, $S_\lambda(t)x$ converge, a convergência sendo uniforme em relação a t em cada intervalo compacto $[0, T]$ e isto é válido $\forall\, x \in X$ pois, $\mathcal{D}(A)$ é, por hipótese, denso em X e $S_\lambda(tg)$ é limitado quando $\lambda \to \infty$. Segue-se, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, que existe um operador linear limitado $S(t)$ tal que

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)x = S(t)x, \quad \forall\, x \in X \tag{1.4.7}$$

e a convergência é uniforme nos intervalos limitados.

d) Vamos demonstrar que S é um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A. Como, para cada $\lambda > \omega$, S_λ é um semigrupo, temos

$$S(0)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(0)x = x$$

$$S_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)S_\lambda(s)x = S(t)S(s)x,$$

para cada $x \in X$ e $t, s \geq 0$. Além disto, $S(t)x$ é o limite uniforme de $S_\lambda(t)x$, donde contínua. Consequentemente S é um semigrupo de classe C_0.

e) Resta demonstrar que o gerador infinitesimal de S é A. Temos, para $\lambda > \lambda(\gamma)$ e todo $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned}
||S_\lambda(t)B_\lambda x - S(t)Ax|| &\leq ||S_\lambda(t)B_\lambda x - S_\lambda(t)Ax|| + ||S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax|| \leq \\
&\leq ||S_\lambda(t)|| \cdot ||B_\lambda x - Ax|| + ||S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax|| \leq \\
&\leq Mt\, e^{t\gamma}||B_\lambda x - Ax|| + ||S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax||
\end{aligned}$$

e como, por (1.4.5), $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, $B_\lambda x \to Ax$ quando $\lambda \to \infty$ e, por (1.4.7)

$$S_\lambda(t)Ax \to S(t)Ax$$

uniformemente em relação a t em todo intervalo limitado, essa desigualdade mostra que $S_\lambda(t)B_\lambda x$ converge a $S(t)Ax$, uniformemente em relação a t, em todo intervalo $[0,T]$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$. Logo, passando ao limite, quando $\lambda \to \infty$, ambos os membros da igualdade

$$S_\lambda(t)x - x = \int_0^t S_\lambda(\tau)B_\lambda x\, d\tau$$

temos

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\tau)Ax\, d\tau, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Portanto, se B é o gerador infinitesimal de S, temos

$$Bx = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t S_\lambda(\tau)Ax\, d\tau = Ax,$$

para cada $x \in \mathcal{D}(A)$. Consequentemente $A \subset B$. Mas, por hipótese, $\lambda \in \rho(A)\ \forall\, \lambda > \omega$ e, como B é o gerador infinitesimal de S segue-se, pelo Teorema 1.4.2, que $\lambda \in \rho(B)$ para cada λ suficientemente grande, logo, se λ é suficientemente grande temos $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Para tais valores de λ temos

$$(\lambda I - A)\mathcal{D}(A) = X, \quad (\lambda I - B)\mathcal{D}(B) = X$$

e como $B \supset A$ tem-se

$$(\lambda I - B)\mathcal{D}()A) = X, \quad (\lambda I - A)\mathcal{D}(A) = X$$

donde,

$$\mathcal{D}(A) = (\lambda I - B)^{-1}\, X = \mathcal{D}(B).$$

Logo $A = B$ e, assim, A é o gerador infinitesimal de S, o que completa a demonstração.

1.4.5 Corolário. *Para que um operador linear A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de ckasse C_0 tal que $||S(t)|| \le e^{\omega t}$, $t \ge 0$ é necessário e suficiente que A seja fechado, seu domínio seja denso e se $\lambda > \omega$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$||R(\lambda, A)|| \le \frac{1}{\lambda - \omega}\cdot$$

Com efeito, como $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$||R(\lambda, A)^n|| \le ||R(\lambda, A)||^n \le \frac{1}{(\lambda - \omega)^n}\,,$$

o operador A satisfaz as condições do Teorema 1.4.4 com $M = 1$.

1.4.6 Corolário. *Para que um operador linear A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações lineares de classe C_0 é necessário e suficiente que A seja fechado, seu domínio seja denso,* $(0,\infty) \subset \rho(A)$ *e,* $\forall\, \lambda > 0$,

$$||\lambda R(\lambda, A)|| \leq 1.$$

Demonstração: Caso particular do Corolário 1.4.5 com $\omega = 0$.

1.4.7 Corolário. *Seja um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Se* $B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$, $\lambda > \omega > \omega_0$ *, então*

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tB_\lambda}\, x, \quad \forall\, x \in X. \tag{1.4.8}$$

1.4.8 Notação. Para simplificar a linguagem vamos escrever $A \in G(M,\omega)$ para exprimir que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0 , S, que satisfaz a condição $||S(t)|| \leq M\, e^{\omega t}$, $\forall\, t \geq 0$.

1.4.9 Proposição. $A - \omega \in G(M, 0)$ *se, e só se,* $A \in G(M,\omega)$.

Com efeito, por $[\lambda-(A-\omega)] = [(\lambda+\omega)-A]$ vê-se que $\lambda \in \rho(A-\omega) \Leftrightarrow \lambda+\omega \in \rho(A)$, donde

$$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A-\omega) \Leftrightarrow \mathbb{R}^+ + \omega \subset \rho(A) \tag{1.4.9}$$

e

$$||R(\lambda, A-\omega)^n|| \Leftrightarrow ||R(\lambda+\omega, A)^n|| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \lambda > 0.$$

Portanto, pondo λ no lugar de $\lambda+\omega$ no segundo membro dessa última equivalência,

$$||R(\lambda, A-\omega)^n|| \leq \frac{M}{\lambda^n}\ \forall\, \lambda > 0 \Leftrightarrow ||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}\,, \ \ \forall\, \lambda > \omega. \tag{1.4.10}$$

Além disto,

$$\overline{\mathcal{D}(A-\omega)} = X \Leftrightarrow \overline{\mathcal{D}(A)} = X \tag{1.4.11}$$

e

$$A-\omega \text{ é fechado } \Leftrightarrow A \text{ é fechado.} \tag{1.4.12}$$

A asserção feita decorre, agora, de (1.4.10)-(1.4.12), pelo Teorema 1.4.4.

Poder-se-ia, agora, indagar se, em vez de III) da Definição 1.2.1, fosse suposto que

III') $$\lim_{t\to 0^+} \langle x^*, (S(t)-I)x\rangle = 0 \ \ \forall\, x \in X \text{ e } \forall\, x^* \in X^*,$$

não se teria uma generalização dos semigrupos de classe C_0 e, portanto, uma condição menos restritiva que a estabelecida por Hille e Yosida para os geradores infinitesimais desses semigrupos? A resposta é negativa porque, como se mostra, todo semigrupo de operadores limitados de X (Definição 1.2.1) que satisfaz III') satisfaz também III). No caso dos semigrupos, III) e III') são, pois, equivalentes. A demonstração encontra-se em [24] e em [67].

Será feita a seguir uma outra caracterização dos geradores infinitesimais dos semigrupos de contrações lineares de classe C_0 devida a *Lumer e Phillips*.

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot , \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Ponhamos, para cada $x \in X$,

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \varnothing \ \forall x \in X$. Uma *aplicação dualidade* é uma aplicação $j\colon X \to X^*$ tal que $j(x) \in J(x)$, $\forall x \in X$.

Imediatamente se vê que $||j(x)|| = ||x||$.

1.4.10 Definição: i) Diz-se que o operador linear $A\colon X \to X$ é *dissipativo* se, para alguma aplicação dualidade, j,

$$\mathrm{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.4.13}$$

ii) Diz-se que A é *m-dissipativo* se for dissipativo e $\mathcal{I}(\lambda - A) = X$ para algum $\lambda > 0$ ($\mathcal{I}(\lambda - A) =$ imagem de $\lambda - A$).

iii) Diz-se que A é *acretivo* (*m-acretivo*) se $-A$ for dissipativo (m-dissipativo).

1.4.11 Proposição. *Se A é dissipativo, então*

$$||(\lambda - A)x|| \geq \lambda||x|| \ \forall \lambda > 0 \ \textit{e} \ \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.4.14}$$

Com efeito, se $\lambda > 0$ e A é dissipativo, então de

$$\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle = \lambda||x||^2 - \langle Ax, j(x)\rangle$$

vem

$$\begin{aligned}\lambda||x||^2 \leq \mathrm{Re}\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle \leq |\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle| \leq \\ \leq ||(\lambda - A)x|| \cdot ||j(x)|| = ||(\lambda - A)x|| \cdot ||x||, \ \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall x \in \mathcal{D}(A),\end{aligned}$$

donde (1.4.14).

1.4.12 Proposição. *Se A é m-dissipativo e $\mathcal{I}(\lambda_0 - A) = X$, $\lambda_0 > 0$, então:*

i) $\lambda_0 \in \rho(A)$ *e A é fechado;*

ii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$;

iii) $\mathcal{I}(\lambda - A) = X, \quad \forall \lambda > 0.$

Demonstração: i) Por hipótese $\mathcal{I}(\lambda_0 - A) = X$, $\forall\, \lambda_0 > 0$, e como, por (1.4.14), $\lambda_0 - A$ é injetiva; $(\lambda_0 - A)^{-1}$ existe, ainda por (1.4.14), $\forall\, x \in X$,

$$||x|| = ||(\lambda_0 - A)(\lambda_0 - A)^{-1}|| \geq \lambda_0 ||(\lambda_0 - A)^{-1}\, x||,$$

i.e., $(\lambda_0 - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Logo, $\lambda_0 \in \rho(A)$ e A é fechado.
ii) Tem-se $\lambda_0 > 0$, por hipótese, e $\lambda_0 \in \rho(A)$, por i). Portanto o conjunto

$$\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$$

não é vazio e como $\rho(A)$ é aberto, Λ é aberto em $(0, \infty)$. Vamos mostrar que Λ é fechado em $(0, \infty)$. Seja $\lambda_n \in \Lambda$ e $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda \in (0, \infty)$. De $\lambda_n \in \Lambda$ segue-se que

$$\mathcal{I}(\lambda_n - A) = X, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

pois A é fechado, como já se viu. Logo, se $y \in X$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, um x_n tal que $(\lambda_n - A)x_n = y$. Novamente por (1.4.14) temos

$$||x_n|| \leq \lambda_n^{-1} ||(\lambda_n - A)x_n|| = \lambda_n^{-1} ||y|| < C, \tag{1.4.15}$$

e, ainda por (1.4.14),

$$\lambda_n ||x_n - x_m|| \leq ||\lambda_n (x_n - x_m) - A(x_n - x_m)||. \tag{1.4.16}$$

Da definição de x_n vem

$$\lambda_n x_n - \lambda_m x_m - A(x_n - x_m) = 0$$

e, portanto,

$$\lambda_n x_n - \lambda_n x_m + \lambda_n x_m - \lambda_m x_m - A(x_n - x_m) = 0,$$

donde

$$\lambda_n (x_n - x_m) + (\lambda_n - \lambda_m) x_m - A(x_n - x_m) = 0.$$

Logo

$$\lambda_n (x_n - x_m) - A(x_n - x_m) = (\lambda_m - \lambda_n) x_m\,. \tag{1.4.17}$$

De (1.4.16) e (1.4.17) vem

$$\lambda_n ||x_n - x_m|| \leq ||(\lambda_m - \lambda_n) x_m|| \leq |\lambda_m - \lambda_n|\, ||x_m|| \leq |\lambda_m - \lambda_n| C,$$

donde, tendo em vista que $\lambda_n \to \lambda > 0$, segue-se que (x_n) é uma sucessão de Cauchy. Seja $x_n \to x$. Como $\lambda_n \to \lambda$ temos, então, $\lambda_n x_n \to \lambda x$, donde $Ax_n \to \lambda x - y$. Mas, como já foi visto, A é fechado; logo $Ax = \lambda x - y$ ou seja $(\lambda - A)x = y$ e, como y é um elemento arbitrário de X, $\mathcal{I}(\lambda - A) = X$. Daí e de $\lambda > 0$ segue-se, por i), que $\lambda \in \rho(A)$. Portanto $\lambda \in \Lambda$ e, assim, Λ é fechado em $(0, \infty)$. Logo, $\Lambda = (0, \infty)$ donde $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

iii) De $\lambda > 0$ vem $\lambda \in \rho(A)$, por ii), donde $(\lambda - A)^{-1}$ é um operador linear limitado e fechado com domínio denso em X. Logo $\mathcal{I}(\lambda - A) = X$.

1.4.13 Teorema. (Lumer-Phillips). *$A \in G(1,0)$ se, e só se, A é m-dissipativo e densamente definido.*

Demonstração: Se $A \in G(1,0)$ então, pelo Corolário 1.4.6, A é densamente definido, fechado e $(0,\infty) \subset \rho(A)$, donde $\mathcal{I}(\lambda - A) = X \ \forall\, \lambda > 0$. Além disto, para cada aplicação dualidade, j, tem-se

$$\mathrm{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle \leq |\langle S(t)x, j(x)\rangle| \leq ||S(t)x|| \cdot ||j(x)|| \leq ||x||^2$$

visto que, por hipótese, $||S(t)x|| \leq ||x||$, $\forall\, x \in X$. Portanto,

$$\mathrm{Re}\langle S(t)x - x, j(x)\rangle = \mathrm{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle - ||x||^2 \leq 0,$$

donde, dividindo por t e passando ao limite quando $t \to 0$ tem-se

$$\mathrm{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$$

e, assim, A é dissipativo. Reciprocamente, se A é m-dissipativo, então, pela Proposição 1.4.12, A é fechado, $(0,\infty) \subset \rho(A)$ e, por (1.4.14)

$$||x|| = ||(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}\, x|| \geq \lambda ||(\lambda - A)^{-1}\, x||$$

ou seja,

$$||(\lambda - A)^{-1}\, x|| \leq (1/\lambda)||x||, \quad \forall\, x \in X \text{ e } \forall\, \lambda > 0.$$

Logo,

$$||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \forall\, \lambda > 0$$

e, portanto, $A \in G(1,0)$ pelo Corolário 1.4.6.

Observação: Do teorema de Lumer-Phillips resulta imediatamente que se A é m-dissipativo e densamente definido então $\mathrm{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0$ para toda aplicação dualidade, j, e para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Vamos indicar por B^* o adjunto do operador B (A.1.5 do Apêndice).

1.4.14 Teorema. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e S um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A. Então, definindo $S^* \colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X^*)$ por $S^*(t) = S(t)^*$ $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, S^* é um semigrupo de classe C_0 e A^* seu gerador infinitesimal.*

Demontração: Como, por hipótese, X é reflexivo e A é fechado e densamente definido, A^* é, igualmente, fechado e densamente definido (Teorema A.1.6 do Apêndice). Tem-se, além disto, pela Proposição A.1.8 do Apêndice que

$$\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \rho(A^*) \text{ e } R(\lambda, A)^* = R(\overline{\lambda}, A^*).$$

Pelo Teoreema 1.4.4 existem $\omega \in M$ tais que, $\lambda > \omega \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ e

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq M/(\lambda - \omega)^n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda > \omega.$$

Mas então, para $\lambda > \omega$, $\lambda \in \rho(A^*)$ e tendo em vista a Proposição A.1.7 do Apêndice,

$$||R(\lambda, A^*)^n|| = ||R(\lambda, A)^{*n}|| = ||R(\lambda, A)^{n*}|| = ||R(\lambda, A)^n|| \leq M/(\lambda - \omega)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda > \omega,$$

donde, ainda pelo Teorema 1.4.4 A^* é o gerador infinitesimal de um semigrupo, T, de classe C_0. Pelo Corolário 1.4.7 temos $\forall x^* \in X^*$

$$T(t)x^* = \lim_{\lambda \to \infty} e^{\lambda^2 R(\lambda, A^*)t - \lambda t}\, x^* = \lim_{\lambda \to \infty} (e^{\lambda^2 R(\lambda, A)t - \lambda t})^* x^* = S(t)^* x^*.$$

1.4.15 Corolário. *Um semigrupo S, de classe C_0, é auto-adjunto ($S(t)^* = S(t)\ \forall t \in \mathbb{R}^+$) se, e só se, A é um operador auto-adjunto ($A^* = A$).*

1.4.16 Observação. O teorema de Lumer-Phillips será usado, agora, para descrever uma importante classe de operadores do tipo $G(1, \omega)$. Inicialmente serão apontados alguns resultados da teoria das equações diferenciais elíticas, essenciais à compreensão do assunto.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representa-se por $H^m(\Omega)$ o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, com produto escalar

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha v}\, dx$$

e norma induzida

$$||u||_m = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço de Sobolev $H^0(\Omega)$ reduz-se ao espaço $L^2(\Omega)$, com produto escalar

$$(u, v) = \int_\Omega u\overline{v}\, dx$$

e norma

$$||u|| = \left(\int_\Omega |u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

Como $H_0^m(\Omega)$ representa-se aderência de $C_0^m(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.

O conjunto Ω será sempre um aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira, Γ, é uma variedade infinitamente diferenciável, de dimensão $n - 1$, e Ω está do mesmo lado de Γ.

Sejam $a_{\alpha\beta}$, $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m$ funções complexas, infinitamente continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$. Considere-se o operador diferencial

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha (a_{\alpha\beta}) E^\beta. \tag{1.4.18}$$

Associa-se a L a forma sesquilinear

$$a(u,v) = (u, Lv) = \sum_{|\alpha|\le m, |\beta|\le m} \int_\Omega \overline{a}_{\alpha\beta}\, D^\alpha u \cdot D^\beta \overline{v}\, dx,$$

definida em $H_0^m(\Omega)$, conhecida por *forma de Dirichlet* de L. Quando $|\alpha| = |\beta| = m = 1$, por exemplo,

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \overline{a}_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_j}\, dx$$

é a forma de Dirichlet do operador diferencial

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Quando, em particular, $a_{ij} = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, tem-se

$$a(u,v) = \sum_{n=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\, dx,$$

forma de Dirichlet do operador de Laplace

$$L = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = -\Delta.$$

1.4.17 Proposição. *A forma $a(u,v)$ é contínua em $H_0^m(\Omega)$, i.e., existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u,v)| \le C||u||_m \cdot ||v||_m \quad \forall\, u, v \in H_0^m(\Omega).$$

Demonstração: De acordo com as hipóteses as funções $|a_{\alpha\beta}|$ são limitadas em $\overline{\Omega}$. Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a definição da norma de $H_0^m(\Omega)$, tem-se

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\le \sum_{|\alpha|\le m, |\beta|\le m} \int_\Omega |a_{\alpha\beta}|\, |D^\alpha u|\, |D^\beta v|\, dx \le \\
&\le C \sum_{|\alpha|\le m, |\beta|\le m} \int_\Omega |D^\alpha u|\, |D^\beta v|\, dx \le C \sum_{|\alpha|\le m, |\beta|\le m} ||D^\alpha u||\, ||D^\beta v|| \le \\
&\le C \sqrt{\sum_{|\alpha|\le m} ||D^\alpha u||^2} \cdot \sqrt{\sum_{|\alpha|\le m} ||D^\beta v||^2} \le C||u||_m \cdot ||v||_m \\
&\forall\, u, v \in H_0^m(\Omega).
\end{aligned}$$

O operador diferencial L, definido por (1.4.18), diz-se *fortemente elítico* em $\overline{\Omega}$, se existir uma constante $\gamma > 0$ tal que

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha\, \xi^\beta \ge \gamma |\xi|^{2m}$$

$\forall\, x \in \overline{\Omega}$ e $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$. Note-se que se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, então

$$\xi^n = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot \xi_n^{\alpha_n}.$$

Está nesse caso o operador $-\Delta$. Será admitido sem demonstração o lema a seguir.

1.4.18 Lema. (Desigualdade de Garding). *Se L é fortemente elítico, então existem duas constantes $c_0 > 0$ e $\gamma_0 \geq 0$ tais que*

$$\operatorname{Re} a(u, v) \geq c_0 ||u||_m^2 - \gamma_0 ||u||^2$$

para todo $u \in H_0^m(\Omega)$.

A demonstração encontra-se em [1], [15] e [67]. No caso do operador $-\Delta$, a desigualdade de Garding é imediata pois, neste caso,

$$\operatorname{Re} a(u, u) = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = ||\nabla u||^2 = ||u||_1^2 - ||u||^2.$$

Uma forma sesquilinear $B(u, v)$, definida em um espaço de Hilbert, H, é dita *coerciva* se existir uma constante $k > 0$ tal que $\operatorname{Re} B(u, u) \geq k||u||^2$, $\forall\, u \in H$. A Desigualdade de Garding exprime que, se L é fortemente elítico, a forma

$$a_\gamma \colon H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad \gamma \geq \gamma_0\,.$$

definida por $a_\gamma(u, v) = a(u, v) + \gamma(u, v)$, evidentemente sesquilinear, é coerciva:

$$\operatorname{Re} a_\gamma(u, v) \geq c_0 ||u||_m^2\,, \quad \forall\, u \in H_0^m(\Omega). \tag{1.4.19}$$

Será admitido, também sem demonstração, ([1] e [42]) o Lema de Lax-Milgram que assim se enuncia:

1.4.19 Lema. *Se $B(u, v)$ é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva em espaço de Hilbert H, então, para toda forma, f, linear e contínua em H, existe um único vetor $u \in H$ tal que*

$$B(v, u) = \langle v, f \rangle \quad \forall\, v \in H.$$

O *adjunto formal* L^* de L é definido por

$$L^*\varphi = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} D^\beta (\overline{a}_{\alpha\beta}\, D^\alpha \varphi) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Com integrações por partes vê-se que

$$(\varphi, L\psi) = a(\varphi, \psi) = (L^*\varphi, \psi), \quad \forall\, \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.4.20}$$

donde pela densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H_0^m(\Omega)$,

$$(L^*\varphi, u) = a(\varphi, u)\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \forall\, u \in H_0^m(\Omega). \tag{1.4.21}$$

Diz-se que a função u de $L^2(\Omega)$ é *solução fraca* da equação

$$Lu = f, \quad f \in L^2(\Omega),$$

se

$$(L^*\varphi, u) = (\varphi, f), \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pode-se, agora, demonstrar o resultado que segue.

1.4.20 Proposição. *Seja L fortemente elítico e $\gamma \geq \gamma_0$. Para cada $f \in L^2(\Omega)$, a equação*

$$Lu + \gamma u = f \tag{1.4.22}$$

tem uma única solução fraca em $H_0^m(\Omega)$.

Demonstração: Observe-se, inicialmente, que para cada $f \in L^2(\Omega)$, (v, f) é uma forma linear em $H_0^m(\Omega)$. É contínua em $H_0^m(\Omega)$ porque

$$|(v, f)| \leq ||f|| \cdot ||v|| \leq ||f|| \cdot ||v||_m\,, \quad \forall\, t \in H_0^m(\Omega).$$

Além disto, $\forall\, \gamma \geq \gamma_0$, a_γ é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva em $H_0^m(\Omega)$. Pelo Lema de Lax-Milgram existe, então, um único vetor $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que

$$a_\gamma(v, u) = (v, f) \quad \forall\, v \in H_0^m(\Omega).$$

Portanto, um único vetor $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que

$$a_\gamma(\varphi, u) = (\varphi, v) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

uma vez que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^m(\Omega)$. Por (1.4.21) segue-se que

$$\begin{aligned}(\varphi, f) &= a_\gamma(\varphi, u) = a(\varphi, u) + \gamma(\varphi, u) = (L^*\varphi, u) + \gamma(\varphi, u)\\ &= ((L^* + \gamma)\varphi, u) = ((L + \gamma)^*\varphi, u) \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Logo, u é solução fraca de (1.4.22), q.e.d..

1.4.21 Lema. *A solução fraca* (1.4.22) *pertence a $H^{2m}(\Omega)$.*

Este fato é demonstrado nos cursos de equações diferenciais elíticas e será admitido sem demonstração (Teorema A.9.2 do Apêndice no caso de $-\Delta$).

1.4.22 Definição. Seja L um operador fortemente elítico de ordem $2m$. Define-se um operador em $L^2(\Omega)$, representado ainda por L, por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(L) &= H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)\\ Lu &= \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha(a_{\alpha\beta}\, D^\beta u) \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(L).\end{aligned} \tag{1.4.23}$$

1.4.23 Proposição. *Se L é definido por* (1.4.23) *e $u \in \mathcal{D}(L)$, então $\forall\, \gamma \geq \gamma_0$*

i) $\text{Re}(u, (L + \gamma)u) \geq c_0||u||_m^2$

ii) $|(u, (L + \gamma)u)| \leq k||u||_m^2\,,\; k \geq 0.$

Demonstração: De (1.4.20) segue-se que $\forall\, u \in \mathcal{D}(L)$, $(u, Lu) = a(u, u)$. Logo, por (1.4.19)

$$\begin{aligned}\text{Re}(u, (L + \gamma)u) = \text{Re}(u, Lu) + \gamma(u, u) = \text{Re}\ a(u, u) + \gamma(u, u) = \\ \text{Re}\ a_\gamma(u, u) \geq c_0||u||_m^2\end{aligned}$$

$\forall\, u \in \mathcal{D}(L)$, o que demonstra i). Pela Proposição 1.4.17 temos

$$\begin{aligned}&|(u, (L + \gamma)u)| = |(u, Lu) + \gamma(u, u)| = |a(u, u) + \gamma(u, u)| \leq \\ &|a(u, u)| + \gamma||u||^2 \leq c||u||_m^2 + \gamma||u||^2 \leq (c + \gamma)||u||_m^2 = k||u||_m^2\,,\end{aligned}$$

o que demonstra ii).

1.4.24 Teorema. *Se L é o operador de $L^2(\Omega)$ definido por* (1.4.23), *então*

$$-L \in G(1, \gamma), \quad \forall\, \gamma \geq \gamma_0\,.$$

Demonstração: Como $H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, o operador $-(L + \gamma)$, $\gamma \geq \gamma_0$, é densamente definido. Além disto, por i) da Proposição 1.4.23, é dissipativo e como, pela Proposição 1.4.20,

$$\mathcal{I}(\mu - (-(L + \gamma))) = \mathcal{I}(L + \gamma + \mu) = L^2(\Omega), \quad \forall\, \mu > 0,$$

segue-se que é m-dissipativo. Logo, pelo Teorema de Lumer-Phillips, $-(L + \gamma) \in G(1, 0)$, $\forall\, \gamma > \gamma_0$, donde $-L \in G(1, \gamma)$, $\gamma > \gamma_0$, pela Proposição 1.4.9.

1.4.25 Corolário. *O operador Δ de $L^2(\Omega)$, definido por*

$$\begin{cases}\mathcal{D}(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \\ \Delta u = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\Delta),\end{cases} \tag{1.4.24}$$

pertence a $G(1, 0)$.

Demonstração: Pelo Teorema 1.4.24 basta mostrar que a constante γ_0 que figura na Desigualdade de Garding relativa a $-\Delta$ é 0.

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos, integrando por partes, (fórmula de Green),

$$(\varphi, -\Delta\varphi) = \sum_{i=1} \int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 dx = ||\nabla\varphi||^2. \tag{1.4.25}$$

Por outro lado, da Desigualdade de Poincaré-Driedrichs, $||\varphi| \ \leq \lambda||\nabla\varphi||$, onde λ é uma constante, vem

$$||\varphi||_1^2 = ||\varphi||^2 + ||\nabla\varphi||^2 \leq (1+\lambda^2)||\nabla\varphi||^2$$

e, portanto, $||\nabla\varphi||^2 \geq c||\varphi||_1^2$, com $c > 0$. Logo, no caso do operador $-\Delta$,

$$(\varphi, -\Delta\varphi) \geq c||\varphi||_1^2, \tag{1.4.26}$$

desigualdade essa que é válida para todo $\varphi \in C_0^\infty$ e, portanto por densidade, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo $\gamma_0 = 0$ e, assim, $\Delta \in G(1,0)$, q.e.d..

Como se acaba de ver, o operador Δ de $L^2(\Omega)$, definido por (1.4.24), pertence a $G(1,0)$, donde é m-dissipativo e densamente definido. Além disto, se $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ então

$$(\Delta u, v) = \int_\Omega (\Delta u)\overline{v} = -\int_\Omega \nabla u\, \overline{\nabla v} = \int_\Omega u\, \overline{\Delta v} = (u, \Delta v)$$

i.e., Δ é simétrico; logo é auto-adjunto pelo Teorema A.1.9 do Apêndice. Vamos mostrar que os semigrupos gerados por operadores com essas duas propriedades, i.e., m-dissipativos e auto-adjuntos são diferenciáveis. Iniciemos a demonstração com os dois lemas a seguir.

1.4.26 Lema. *Seja A um operador dissipativo de um espaço de Hilbert, H, e $u\colon [0,\infty) \to H$ uma função continuamente diferenciável em $[0,\infty)$ e que satisfaz a condição*

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad t \geq 0. \tag{1.4.27}$$

Então $||u||$ é uma função decrescente.

Demonstração: Multiplicando internamente por u ambos os membros de (1.4.27) tem-se $\left(\dfrac{du}{dt}, u\right) = (Au, u)$ e, como $\mathrm{Re}\left(\dfrac{du}{dt}, u\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||u||^2$, tem-se $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||u||^2 = \mathrm{Re}(Au, u)$. Integrando de s a t, $0 \leq s \leq t$, tem-se

$$\frac{1}{2}\,||u(t)||^2 - \frac{1}{2}\,||u(s)||^2 = \int_s^t \mathrm{Re}(Au(\tau), u(\tau))\, d\tau \leq 0$$

pois A é, por hipótese, dissipativo. Logo, $||u(t)| \ \leq ||u(s)||$; $0 \leq s \leq t$.

1.4.27 Lema. *Seja A um operador dissipativo e auto-adjunto de um espaço de Hilbert, H, e $u \in C^2([0,\infty); H)$ uma função que satisfaz as condições*

$$\frac{du}{dt} = Au \quad \text{e} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = A^2u.$$

Então

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| \leq \frac{1}{t}\,||u(0)||.$$

Demonstração: Pelo Lema 1.4.26, $\left\|\dfrac{du}{dt}\right\|$ é uma função decrescente, donde para $T > 0$ tem-se

$$\int_0^T \left(Au, \frac{du}{dt}\right) t\,dt = \int_0^T \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 t\,dt \geq \frac{T^2}{2} \left\|\frac{du}{dt}(T)\right\|^2. \tag{1.4.28}$$

Mas, como A é auto-adjunto e $\left(Au, \dfrac{du}{dt}\right)$ é, de acordo com as hipóteses, um número real, tem-se

$$\frac{d}{dt}(Au, u) = \left(A\frac{du}{dt}, u\right) + \left(Au, \frac{du}{dt}\right) = 2\left(Au, \frac{du}{dt}\right)$$

donde, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(Au, \frac{du}{dt}\right) t\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(Au, u)t\,dt = \\ = \frac{1}{2}(Au(T), u(T))T &- \frac{1}{2}\int_0^T (Au, u)t\,dt; \end{aligned} \tag{1.4.29}$$

Novamente, como A é auto-adjunto, de $\left(\dfrac{du}{dt}, u\right) = (Au, u)$ vem $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||u||^2 = (Au, u)$ e, portanto,

$$\frac{1}{2}||u(T)||^2 - \frac{1}{2}||u(0)||^2 = \int_0^T (Au, u)\,dt. \tag{1.4.30}$$

Logo, por (1.4.28), (1.4.29) e (1.4.30) tem-se

$$\frac{T^2}{2}\left\|\frac{du}{dt}(T)\right\|^2 \leq \frac{1}{2}(Au(T), u(T))T - \frac{1}{4}||u(0)||^2.$$

Mas A é dissipativo e (Au, u) é real. Segue-se que

$$\left\|\frac{du}{dt}(T)\right\| \leq \frac{1}{T}||u(0)||.$$

1.4.28 Proposição. *Se A é um operador m-dissipativo e auto-adjunto de um espaço de Hilbert, H, então o semigrupo S, de classe C_0, gerado por A, é diferenciável.*

Demonstração: Seja $x \in H$. Pela Proposição 1.2.14, $\mathcal{D}(A^2)$ é denso em H, donde existe uma sucessão (x_n) convergente a x e tal que $x_n \in \mathcal{D}(A^2)$, $n = 1, \ldots$. Mas

$$||S(t)x_n - S(t)x|| \leq ||S(t)||\,||x_n - x||,$$

pois $S(t)$ é um operador linear limitado; além disto, $||AS(t)x_n - AS(t)x_m|| \leq \dfrac{1}{t}||x_n - x_m||$ pelo Lema 1.4.27. Logo, quando $n \to \infty$, $S(t)x_n$ converge a $S(t)x$ e $AS(t)x_n$ converge em todo intervalo $[\delta, \infty)$, $\delta > 0$. Mas, então, como A é um operador fechado, $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ $\forall\, t \geq \delta > 0$ e, portanto, $\forall\, t > 0$. Logo S é um semigrupo diferenciável.

1.4.29 Teorema. *Seja A um operador m-dissipativo e auto-adjunto de um espaço de Hilbert, H, e S o semigrupo de classe C_0 gerado por A. Então, $\forall\, x \in H$ e inteiros não negativos n e k,*

$$S(t)x \in C^n((0,\infty)\ [\mathcal{D}(A^k)]). \tag{1.4.31}$$

Demonstração: Pela Proposição 1.4.28, S é um semigrupo diferenciável. Mas, então, por ii) do Teorema 1.3.3, $\forall\, x \in H$ e $m = 1, \ldots$ $S(t)$ é m vezes continuamente diferenciável em $(0,\infty)$ e

$$\frac{d^m}{dt^m}\, S(t)x = A^m\, S(t)x.$$

Portanto, $\forall\, x \in H$ a função $S(t)x\colon [0,\infty) \to H$ satisfaz, em $(0,\infty)$, a condição

$$\frac{d^j}{dt^j}\, S(t)x \in \mathcal{D}(A^k), \quad j,k = 0,1,\ldots\,,$$

e as funções

$$A^t\, \frac{d^j}{dt^j}\, S(t)x \quad i,j = 0,1,\ldots\,,$$

são contínuas em $(0,\infty)$. Logo, pela Observação 1.2.17,

$$S(t)x \in C^m((0,\infty);[\mathcal{D}(A^k)]), \quad k,n = 0,1\ldots\,.$$

1.5 Grupos de Classe C_0

1.5.1 Definição. Diz-se que uma aplicação $S\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ é um grupo *de operadores lineares limitados* de X se

I) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$.

II') $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, t,s \in \mathbb{R}$.
Diz-se que S é um *grupo de classe* C_0 se

III') $\lim\limits_{t\to 0} ||(S(t)-I)x|| = 0\ \forall\, x \in X$.

O gerador infinitesimal de S é definido por:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{x \in X;\ \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe}\right\},$$

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h}\,,\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

1.5.2 Proposição. *Para que A seja gerador infinitesimal de um grupo de operadores lineares limitados de classe C_0, é necessário e suficiente que $+A$ e $-A$ sejam geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0.*

Demonstração: Seja A gerador infinitesimal de grupo de operadores lineares limitados de classe C_0, S. A restrição de S a $\mathbb{R}^+$, é obviamente, um semigrupo, S_+, de classe C_0; o mesmo ocorre com a aplicação $S_- : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ definida por $S_-(t) = S(-t)$.

O gerador infinitesimal de S_+ é A. De fato, seja A_+ o gerador infinitesimal de S_+. Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então existe o limite de

$$\frac{S(h)x - x}{h}$$

quando $h \to 0$ e, em particular, quando $h \to 0^+$. Portanto, existe o limite de

$$\frac{S_+(h)x - x}{h}$$

quando $h \to 0^+$ e

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S_+(h)x - x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = Ax,$$

donde $x \in \mathcal{D}(A_+)$ e $A_+x = Ax$, il.e., $A \subset A_+$. Por outro lado, se$x \in \mathcal{D}(A_+)$, então

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{S_+(h)x - x}{h} = A_+x,$$

e

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S(-h)x - x}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{S_-(h)x - x}{-h} = \lim_{h \to 0^+} S_-(h)\, \frac{S_+(h)x - x}{h} = A_+x,$$

pois S_- é um semigrupo de classe C_0. Logo, existe o limite de

$$\frac{S(h)x - x}{h}$$

quando $h \to 0$ e tem-se

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{h} = A_+x$$

o que mostra que se $x \in \mathcal{D}(A)$ e $A_+x = Ax$. Desse modo $\mathcal{D}(A_+) = \mathcal{D}(A)$ e $A_+x = Ax$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, i.e., $A_+ = A$. Analogamente vê-se que o gerador infinitesimal de S_- é $-A$. Logo, a condição é ncessária.

Reciprocamente, vamos supor que A e $-A$ sejam geradores dos semigrupos de classe C_0, S_+ e S_-, respectivamente. Pelo Corolário 1.4.7 sabe-se, então, que

$$S_+(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{t(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I)x}$$
$$S_-(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{t(\lambda^2 R(\lambda, -A) - \lambda I)x}.$$

Logo, $S_+(t)$ comuta com $S_-(t)$ donde, ponto $T(t) = S_+(t)S_-(t)$, $T(t)$ é um semigrupo, como se verifica imediatamente; como S_+ é um semigrupo de classe C_0, $||S_+(t)||$ é limitado em todo intervalo limitado. Levando em conta a continuidade forte de S_+ e a de S_- temos

$$\begin{aligned}||T(t)x - x|| &\leq ||S_+(t)S_-(t)x - S_+(t)x|| + ||S_+(t)x - x|| \leq \\ &\leq ||S_+(t)|| \cdot ||S_-(t)x - x|| + ||S_+(t)x - x|| \to 0,\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$, i.e., T é de classe C_0. Além disto, como de $x \in \mathcal{D}(A) = (- A)$ e $h > 0$ vem

$$\begin{aligned}\frac{T(h)x - x}{h} = \frac{S_+(h)S_-(h)x - x}{h} &= S_+(h)\frac{S_-(h)x - x}{h} + \frac{S_+(h)x - x}{h} = \\ &= -Ax + Ax = 0;\end{aligned}$$

segue-se que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = 0, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Logo, se B é gerador infinitesimal de T, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e $B(x) = 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$. Como $\mathcal{D}(A)$ é denso em X, $\mathcal{D}(A)$ é densoo em $\mathcal{D}(B)$ e como B é fechado tem-se $B(x) = 0$ $\forall\, x \in \mathcal{D}(B)$. Por (1.2.7) temos, então, $T(x) = x\ \forall\, x \in X$, i.e., $T(t) = I$, $\forall\, t \geq 0$. Assim, $S_-(t) = S_+(t)^{-1}$ o que permite definir um grupo S de classe C_0, com gerador infinitesimal A, por

$$S(t) = \begin{cases} S_+(t) & \text{se} \quad t \geq 0 \\ S_-(-t) & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

Realmente, tem-se $S(0) = S_+(0) = I$, i.e., I) é satisfeita. Para demonstrar II') observe-se que: a) se $t > 0$ e $s > 0$, então

$$S(t + s) = S_+(t + s) = S_+(t)S_+(s) = S(t)S(s);$$

b) se $t < 0$ e $s < 0$, então

$$S(t + s) = S_-(-t - s) = S_-(-t)S_-(-s) = S(t)S(s);$$

c) se $t > 0$, $s < 0$ e $t + s > 0$, então

$$S(t + s) = S_+(t + s) = S_+(t + s)S_+(-s)S_+(-s)^{-1} = S_+(t)S_-(-s) = S(t)S(s);$$

d) se $t > 0$, $s < 0$ e $t + s < 0$, então

$$S(t_s) = S_-(-t - s) = S_-(-t - s)S_-(t)S_-(-t)^{-1} = S_-(-s)S_+(t) = S(t)S(s).$$

Portanto II') é válida. Temos

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0^+} ||S(h)x - x|| &= \lim_{h \to 0^+} ||S_+(h)x - x|| = 0, \quad \forall\, x \in X, \\ \lim_{h \to 0^-} ||S(h)x - x|| &= \lim_{-h \to 0^+} +||S_-(-h)x - x|| = 0, \quad \forall\, x \in X,\end{aligned}$$

donde III') é válida. Logo, S é um grupo de classe C_0. Seja B o gerador infinitesimal de S. Então, de $x \in \mathcal{D}(A)$ vem

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S_+(h)x - x}{h} = Ax$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{S(h)x - x}{h} = -\lim_{h\to 0^+} \frac{S_-(-h)x - x}{-h} = Ax,$$

donde $x \in \mathcal{D}(B)$ e $Bx = Ax \;\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, i.e., $A \subset B$. Se $x \in \mathcal{D}(B)$, então

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S_+(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = Bx,$$

donde $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = Bx$, i.e., $B \subset A$. Logo, $A = B$.

1.5.3 Teorema. *Para que A seja gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 é necessário e suficiente que A seja fechado, densamente definido e existam constantes reais M e ω tais que se λ é real e $|\lambda| > \omega$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.5.1}$$

Demonstração: Seja A o gerador infinitesimal de um grupo S de classe C_0; então, pela Proposição 1.5.2, A é o gerador infinitesimal do semigrupo S_+, restrição de S a $\mathbb{R}^+$ e $-A$ é o gerador infinitesimal de S_- definido por $S_-(t) = S(-t)$. Consequentemente, A é fechado densamente definido e existem reais $M_\pm$ e $\omega_\pm$ tais que se $\lambda > \omega_+$, então $\lambda \in \rho(A)$ e

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M_+}{(|\lambda| - \omega_+)^n}$$

e se $\lambda > \omega_-$, então $\lambda \in \rho(-A)$ e

$$||R(\lambda, -A)^n|| \leq \frac{M_-}{(|\lambda| - \omega_-)^n}.$$

Seja $\omega = \max\{\omega_+, \omega_-\}$, $M = \max\{M_+, M_-\}$ e $|\lambda| > \omega$. Então, se $\lambda > \omega$ tem-se $\lambda \in \rho(A)$ e

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \tag{1.5.2}$$

e se $-\lambda > \omega$ tem-se $-\lambda \in \rho(-A)$ e, portanto, $\lambda \in \rho(A)$ donde, tendo em vista que $R(\lambda, A) = -R(-\lambda, -A)$,

$$||R(\lambda, A)^n|| = ||[-R(-\lambda, -A)]^n|| = ||R(-\lambda, -A)^n| \;\leq \frac{M}{(-\lambda - \omega)^n}.$$

Daí e de (1.5.2) vem (1.5.1). Logo, a condição é necessária. Reciprocamene, suponhamos A fechado e densamente definido e (1.5.1) satisfeita. Então, de $\lambda > |\omega|$ vem $|\lambda| = \lambda > \omega$ donde $\lambda \in \rho(A)$ e

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \leq \frac{M}{(\lambda - |\omega|)^n},$$

e portanto, $+A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0. De $\lambda > \omega$ vem $|-\lambda| > |\omega| \geq \omega$ donde $-\lambda \in \rho(A)$ e, portanto, $\lambda \in \rho(-A)$ e

$$||R(\lambda, -A)^n|| = ||R(-\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \leq \frac{M}{(\lambda - |\omega|)^n},$$

donde $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0. Logo A é gerador infinitesimal de um grupo S de classe C_0, pela Proposição 1.5.2.

1.5.4 Proposição. *Seja S um semigrupo de classe C_0. Se, para algum $t_0 > 0$, $S(t_0)^{-1}$ existe e $S(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t)^{-1}$ existe e $S(t)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Da existência de $S(t_0)^{-1}$ e de $S(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ decorre que $S(t_0)$ é injetiva e sobrejetiva. Da injetividade de $S(t_0)$ segue-se a de $S(nt_0) = S(t_0)^n$. Seja $t \geq 0$, n tal que $nt_0 > t$ e $S(t)x = 0$. Então, $S(nt_0)x = S(nt_0 - t)S(t)x = 0$ donde $x = 0$ o que mostra $S(t)$ é injetiva para todo $t \geq 0$. Da sobrejetividade de $S(t_0)$, i.e., de $\mathcal{I}(S(t_0)) = X$, onde $\mathcal{I}(S(t_0))$ é a imagem de $S(t_0)$, vem $\mathcal{I}(S(nt_0)) = \mathcal{I}(S(t_0)^n) = X$. Se $t \geq 0$ e n é tal que $nt_0 > t$, de $S(nt_0) = S(t)S(nt_0 - t)$ decorre que $X = \mathcal{I}(S(nt_0)) \subset \mathcal{I}(S(t))$ donde $S(t)$ é sobrejetiva para todo $t \geq 0$. Portanto, $S(t)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, $\forall\, t \geq 0$, pelo Teorema do Operador Inverso de Banach.

1.5.5 Proposição. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S. Se, para algum $t_0 > 0$, $S(t_0)^{-1}$ existe e $S(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, então A é o gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0.*

Demonstração: Pela Proposição 1.5.4, $S(t)^{-1}$ existe para todo $t \geq 0$ e $S(t)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Pondo, então, $T(t) = S(t)^{-1}$ resulta que T é uma aplicação de $\mathbb{R}^+$ em $\mathcal{L}(X)$ e

$$\begin{aligned} T(0) &= S(0)^{-1} = I^{-1} = I \\ T(t+s) &= S(t+s)^{-1} = S(s+t)^{-1} = [S(s)S(t)]^{-1} \\ &= S(t)^{-1}S(s)^{-1} = T(t)T(s), \end{aligned}$$

isto é, um semigrupo. Como $S(t)X = X$ $\forall\, t \geq 0$, se $x \in X$ e $\tau > 1$, então existe $y \in X$ tal que $x = S(\tau)y$. Portanto para $0 < t < 1$ tem-se $x = S(\tau)y = S(t)S(\tau - t)y$ e

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} T(t)x &= \lim_{t \to 0^+} S(t)^{-1}x = \lim_{t \to 0^+} S(t)^{-1}S(t)S(\tau - t)y = \\ &= \lim_{t \to 0^+} S(\tau - t)y = S(\tau)y = x, \end{aligned}$$

isto é, T de classe C_0. Além disto, de $x \in \mathcal{D}(A)$ vem

$$\begin{aligned} \frac{T(h)x - x}{h} + Ax &= \frac{S(h)^{-1}x - x}{h} + Ax = -S(h)^{-1}\,\frac{S(h)x - x}{h} + Ax = \\ &= S(h)^1 \left[S(h)Ax - \frac{S(h)x - x}{h} \right]. \end{aligned}$$

Como $S(t)^{-1} = T(t)$ e T é um semigrupo de classe C_0, então $||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$ para algum M e algum ω reais. Logo,

$$\left\| \frac{T(h)x - x}{h} + ax \right\| \leq Me^{\omega t} \left\| S(h)Ax - \frac{S(h)x - x}{h} \right\| \to 0$$

quando $h \to 0^+$, i.e.,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = -Ax.$$

Logo, designando por A' o gerador infinitesimal de T, segue-se que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A')$ e $A'(x) = -Ax$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$. Analogamente mostra-se que se $x \in \mathcal{D}(A')$, então

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = -A'x.$$

donde $\mathcal{D}(A') \subset \mathcal{D}(A)$. Logo, $A' = -A$ donde, pela Proposição 1.5.2, A é o gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0.

1.5.6 Nota. Satisfeitas as hipóteses da Proposição 1.5.5, o grupo W gerado por A é, pela Proposição 1.5.5, dado por

$$W(t) = \begin{cases} S(t) & \text{se} \quad t \geq 0 \\ S(-t)\ {-1} & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

1.5.7 Definição. Um grupo S de operadores lineares limitados de um espaço de Hilbert é dito *grupo unitário* se $S(t)^* = S(t)^{-1}$, $\forall\, t \geq 0$.

Tem-se $||S(t)x|| = ||x||$ para todo semigrupo unitário, S, pois

$$\begin{aligned} ||S(t)x||^2 &= (S(t)x, S(t)x) = (S(t)^*S(t)x, x) = (S(t)^{-1}S(t)x, x) = \\ &= (x, x) = ||x||^2. \end{aligned}$$

1.5.8 Teorema de Stone. *Um operador linear, A, de um espaço de Hilbert, X, é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 se, e só se, $A^* = -A$.*

Demonstração: Seja A gerador infinitesimal de um grupo unitário, S, de classe C_0. Pela Proposição 1.5.2, A e gerador infinitesimal do semigrupo S_+ e $-A$ gerador infinitesimal do semigrup S_-. Pelo Teorema 1.4.14 A^* é o gerador infinitesimal do semigrupo S_+^*. Então, de $S_+^*(h) = S_+(h)^* = S(h)^* = S(h)^{-1} = S(-h) = S_-(h)$, vem

$$\frac{S_+^*(h) - I}{h} = \frac{S_-(h) - I}{h}$$

donde $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ e $A^*x = -Ax$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$. Logo, $A^* = -A$.

Reciprocamente, seja $A^* = -A$. Da existência de A^* segue-se que $\mathcal{D}(A)$ é denso em X. Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ temos

$$(Ax, x) = (x, A^*x) = -(x, Ax) = -\overline{(Ax, x)},$$

e, portanto, $\mathrm{Re}(Ax, x) = 0$. Logo os operadores $\pm A$ são dissipativos. Segue-se pela Proposição 1.4.11 que $i \pm A$ são operadores injetivos e $\forall\, x \in \mathcal{D}((\pm A)^{-1})$ tem-se $||x|| = ||(I \pm A)(I \pm A)^{-1}x|| \geq ||(I \pm A)^{-1}x||$ donde $||(I \pm A)^{-1}|| \leq 1$. Além disto, como o operador adjunto é fechado, segue-se, de $A^* = -A$, que $(I \pm A)^{-1}$ são fechados. Portanto, para demonstrar que $\mathcal{I}(I \pm A) = X$ é bastante demonstrar que $\mathcal{I}(I \pm A) = \mathcal{D}(I \pm A)^{-1}$ é denso. Seja, para isso, $y \perp \mathcal{I}(I \pm A)$. Então, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$ temos $((I \pm A)x, y) = 0$ ou seja, $(Ax, y) = (x, \pm y)$, donde $y \in \mathcal{D}(A^*)$ e $-Ay = A^*y = \pm y$. Logo, $\mathrm{Re}(Ay, y) = \mp ||y||^2$ e, como $\mathrm{Re}(Ay, y) = 0$ tem-se $y = 0$. Portanto, $\mathcal{I}(I \pm A) = X$. Pelo Teorema 1.4.13 segue-se, então, que $+A$ e $-A$ geram semigrupos de classe C_0 donde, pela Proposição 1.5.2, A gera um grupo, S, de classe C_0. Falta apenas demonstrar que S é unitário. O semigrupo S_- é gerado por $-A = A^*$ donde, pelo Teorema 1.4.14, S_-^* é gerado por $A^{**} = A$. Portanto, $S_-(t)^* = S(t)$ e como $S_-(t) = S(-t) = S(t)^{-1}$ tem-se $(S(t)^{-1})^* = S(t)$, i.e., $S(t)^{-1} = S(t)^*$, q.e.d..

1.5.9 Nota. Observe-se que $A^* = -A$ se, e só se, iA é auto-adjunto pois se $A^* = -A$, então $(iA)^* = \bar{i}A^* = -i(-A) = iA$, i.e., iA é auto-adjunto e se iA é auto-adjunto, então $iA = (iA)^* = \bar{i}A^* = i(-A^*)$, i.e., $A^* = -A$. Logo, pelo Teorema de Stone, A gera um grupo unitário de classe C_0 se, e só se, iA é auto-adjunto.

1.5.10 Exemplos. 1) Seja A_0 o operador de $L^2(\Omega)$ definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_0) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ A_0 u = i\Delta u, \ \forall\, u \in \mathcal{D}(A_0) \end{cases}$$

onde Δ é o laplaciano e Ω satisfaz as condições estipuladas em 1.4.16. Vamos mostrar que $-iA_0$ é auto-adjunto. Resultará daí que iA_0 é auto-adjunto donde, pela Nota 1.5.9, que A_0 é gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0.

Tem-se que $-iA_0$ é densamente definido e, $\forall\, u, v \in \mathcal{D}(A_0)$,

$$(-iA_0 u, v) = (\Delta u, v) = (u, \Delta v) = (u, -iA_0 v), \tag{1.5.3}$$

i.e., $-iA_0$ é simétrico. Pelo Corolário 1.4.25, $-iA_0 \in G(1, 0)$, donde $1 \in \rho(-iA_0)$, pelo Corolário 1.4.6, e $\mathcal{I}(1 - (-iA_0)) = L^2(\Omega)$, pelo Teorema de Lumer-Phillips. Logo, $-iA_0$ é auto-adjunto pelo Teorema A.1.9 do Apêndice.

2) Seja A_1 o operador de $L^2(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_1) = H^2(\mathbb{R}^n) \\ A_1 u = i\Delta u, \ \forall\, u \in \mathcal{D}(A_1), \end{cases}$$

onde Δ é o laplaciano. Como no exemplo anterior, vamos mostrar que $-iA_1$ é auto-adjunto donde resultará que iA_1 é auto-adjunto e, portanto, que A_1 é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de clase C_0, pela Nota 1.5.9.

Pela definição de A_1, $-iA_1$ é densamente definido donde simétrico porque a relação (1.5.3) continua válida quando nela se substitui o operador A_0 pelo operador A_1. Além disto, $-iA_1$ é dissipativo pois

$$(-iA_1u, u) = (\Delta u, u) = -(\nabla u, \nabla u) = -||\nabla u||^2.$$

Daí, pela Proposição 1.4.11, segue-se que, $\forall\, u \in \mathcal{D}(A_1)$, $||(1-(-iA_1))u|| \geq ||u||$, donde $I-(-iA_1)$ é injetivo e, portanto, invertível e, se $(1-(-iA_1)u = u$, então $||(1-(-iA_1)^{-1}v|| = ||u|| \leq ||v||$, i.e., $(1-(-iA_1)^{-1}$ é um operador limitado. Logo, $1 \in \rho(-iA_1)$. Além disto, pelo Teorema A.9.2 do Apêndice, a equação $iA_1u + u = v$ tem uma solução em $H^2(\mathbb{R}^n)$ $\forall\, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, $\mathcal{I}(1-(-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)$. Segue-se, pelo Teorema A.1.7 do Apêndice, que $-iA_1$ é auto-adjunto.

3) Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço medida e $q \colon \Omega \to \mathbb{C}$ uma função $\mathcal{A}$ mensurável. O operador M_q de $X = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, definido por

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(M_q) = \{u \in X; qu \in X\}\\ &M_q u = qu \;\; \forall\, u \in \mathcal{D}(M_q), \end{aligned}$$

é dito *operador multiplicação.*

Vamos mostrar que se q é real, então iM_q é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0. Pela Nota 1.5.9 é bastante demonstrar que $-M_q$ é auto-adjunto. Seja, para isto, $E_n = \{x \in \Omega; |q(x)| \leq n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Se $u \in X$ temos

$$\int_\Omega |q\, u\, \chi_{E_n}|^2\, d\mu \leq n^2 \int_\Omega |u|^2\, d\mu < +\infty,$$

i.e., $u\chi_{E_n} \in \mathcal{D}(M_q)$, $n = 1, \ldots$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} u\chi_{E_n} = i$ tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} ||u\chi_{E_n} - u|| = 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Logo, $\mathcal{D}(M_q)$ é denso em X. Além disto, para $u, v \in \mathcal{D}(M_q)$ tem-se $(M_q u, v) = (qu, v) = (u, qv) = (u, M_q v)$, i.e., M_q é simétrico. Portanto o adjunto M_q^* de M_q satisfaz as condições $\mathcal{D}(M_q) \subset \mathcal{D}(M_q^*)$ e $M_q^* u = M_q u$ $\forall\, u \in \mathcal{D}(M_q)$. Vamos mostrar que $\mathcal{D}(M_q) = \mathcal{D}(M_q^*)$. De $(\pm iI + M_q)u = (\pm iI + M_q)v$ vem, imediatamente, $u = v$, i.e., os operadores $\pm iI + M_q$ são injetivos. Temos $|\pm i + q(x)| \geq 1$ $\forall\, x \in \Omega$, donde de $v \in X$ e $|\pm iv/(\pm i + q)| \leq |v|$ vem $\pm iv/(\pm i + q) \in X$ e, portanto,

$$\frac{qv}{\pm i + q} = v - \frac{\pm iv}{\pm i + q} \in X.$$

Logo,

$$\frac{v}{\pm i + q} \in \mathcal{D}(M_q) \quad \text{e} \quad (\pm iI + M_q)\,\frac{v}{\pm i + q} = v,$$

i.e., os operadores $\pm iI + M_q$ são sobrejetivos. Suponhamos que $\mathcal{D}(M_q) \neq \mathcal{D}(M_q^*)$. Então, $iI + M_q^*$ não é injetivo e, portanto, existe $v \not\equiv 0$ tal que $iI + M_q^* v = 0$, donde $M_q^* v = -iv$. Para $u \in \mathcal{D}(M_q)$ tem-se, então,

$$(M_q u, v) = (u, M_q^* v_=(u, -iv) = (iu, v),$$

donde $((-iI + M_q)u, v) = 0$ e, como $(-iI + M_q)\mathcal{D}(M_q) = X$ tem-se $v = 0$, uma contradição. Logo $\mathcal{D}(M_q) = \mathcal{D}(M_q^*$, donde M_q é auto-adjunto e, portanto, $-M_q$ é, realmente, auto-adjunto.

1.6 Fórmulas Exponenciais

1.6.1 Como foi visto anteriormente, apenas os semigrupos uniformemente contínuos ou seja, as funções exponenciais, admitem representação da forma (1.1.1). Esses semigrupos admitem, além dessa, as seguintes representações:

a) $e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^n;$

b) $e^{tA} = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}$, onde $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda = A;$

c) $e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(I - \dfrac{tA}{n}\right)^{-n},$

onde A é seu gerador infinitesimal e, portanto, um operador limitado. A representação da forma a) é, também, própria dos semigrupos uniformemente contínuos; mas já demonstramos (Corolário 1.4.7) a validade de uma representação do tipo b) para os semigrupos apenas fortemente contínuos. Agora vamos demonstrar para esses semigrupos uma outra representação do mesmo tipo. Uma representação da forma c) será mostrada posteriormente.

1.6.2 Teorema. (Primeira *Fórmula Exponencial de Hille*). *Se S é um semigrupo de classe C_0 então*

$$S(t)x = \lim_{h\to 0^+} e^{tA_h}\, x, \tag{1.6.1}$$

onde $A_h = (S(h) - I)/h$, e o limite é uniforme em todo intervalo compacto, $[0, T]$.

Demonstração: Sejam $M \geq 1$ e w reais tais que $||S(t)|| \leq Me^{wt}$ e, A o gerador infinitesimal de S. Suponhamos $w > 0$, o que não é restritivo. Como A_h é um operador linear limitado, podemos escrever

$$e^{tA_h} = e^{t\frac{S(h)-I}{h}} = e^{-\frac{t}{h}}\, e^{\frac{t}{h}S(h)} = e^{-\frac{t}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n \frac{S(h)^n}{n!} = e^{-th} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n \frac{S(nh)}{n!}$$

donde,

$$||e^{tA_h}|| \leq e^{-\frac{t}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n \frac{||S(nh)||}{n!} \leq Me^{\frac{t}{h}(e^{wh}-1)}$$

e, se $0 < h \leq 1$,

$$||e^{tA_h}|| \leq Me^{t(e^w-1)}; \tag{1.6.2}$$

Como A_h comuta com $S(t)$, o mesmo se dá com e^{tA_h} e $S(t)$ donde, para $x \in \mathcal{D}(A)$ temos, levando em consideração que $dS(t)x/dt = AS(t)x$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\, e^{(t-\tau)A_h}\, S(\tau)x &= e^{(t-\tau)A_h}\, AS(\tau)x - A_h\, e^{(t-\tau)A_h}\, S(\tau)x \\ &= e^{(t-\tau)A_h}\, S(\tau)[Ax - A_h x]. \end{aligned}$$

Daí vem, para $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned} ||S(t)x - e^{tA_h}x|| &= \left\| \int_0^t \frac{d}{\tau} e^{(t-\tau)A)h} S(\tau)x d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^t ||^{(t-\tau)A_h}|| \cdot ||S(\tau)|| \cdot ||Ax - A_h x|| d\tau \end{aligned}$$

e, se $0 < h \leq 1$, temos por (1.6.2)

$$||S(t)x - e^{tA_h}\, x|| \leq tM^2\, e^{t(e^w+w-1)} ||Ax - A_h x||.$$

Desta última desigualdade resulta que a relação (1.6.1) é válida para $x \in \mathcal{D}(A)$, uma vez que $\lim\limits_{h\to 0^+} A_h x = Ax$. Mas $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e $||S(t)||$ e $||e^{tA_h}||$ são limitados em todo intervalo compacto $[0, T]$. Logo (1.6.1) é válida para todo $x \in X$, q.e.d..

1.6.3 Seja

$$\Delta_h^n\, S(t) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S(t + mh)$$

a *enésima diferença* de $S(t)$. Imediatamente se tem

$$\frac{\Delta_h^n\, S(t)}{h^n} = \left(\frac{S(h) - I}{h}\right)^n S(t) = (A_h)^n\, S(t).$$

1.6.4 Proposição. *Para todo semigrupo S de classe C_0 tem-se*

$$S(t)x = \lim_{h\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n \frac{\Delta_h^n S(0)}{n!}\, x, \tag{1.6.3}$$

uniformemente em $[0, T]$, $0 < T < \infty$.

1.6.5 Tomemos para X o espaço das funções uniformemente contínuas e limitadas em $\mathbb{R}^+$ e consideremos o semigrupo de classe C_0, S, dado por $[S(t)f](x) = f(x + t)$, já estudado no Exemplo 2) de 1.2.12. Nesse caso temos, por (1.6.3),

$$f(x + t) = \lim_{h\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n \frac{\Delta_h^n f}{n!}\, (x) \tag{1.6.4}$$

e o limite é uniforme em cada $[0, T]$. A fórmula (1.6.4) é uma generalização da série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

que dá o desenvolvimento de $f(x)$ em uma vizinhança V de a quando f admite derivadas de todas as ordens em V e $|f^{(n)}(x)| \leq M$ em V. Observe-se que, nesse caso,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{(\Delta_h^n f)}{h^n}(x) = f^{(n)}(x).$$

Fazendo uso de (1.6.4) facilmente se demonstra o Teorema de Weierstrass segundo o qual as funções contínuas em $[0, 1]$ podem ser aproximadas por polinômios. Seja, com efeito, f uma função contínua em $[0, 1]$ e ponhamos $f(x) = f(1)$, $\forall\, x > 1$. Então f é uniformemente contínua e limitada em $[0, \infty)$, donde f admite a representação (1.6.4), para todo $x \in [0, \infty)$ e todo $t \in \mathbb{R}^+$. Em particular para $t \in [0, 1]$. Dado $\varepsilon > 0$ tem-se então, para $h > 0$ e suficientemente pequeno,

$$\left| f(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n (\Delta_h^n f)(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

e, para N suficientemente grande,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n (\Delta_h^n f)(0) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n (\Delta_h^n f)(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Para h e N assim determinados tem-se, pois,

$$\left| f(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n (\Delta_h^n f)(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

e, portanto, o polinômio

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{h!} \left(\frac{t}{h}\right)^n (\Delta_h^n f)(0)$$

aproxima $f(t)$, a menos de ε, uniformemente em $[0, 1]$.

1.7 Semigrupos Compactos

1.7.1 Definição. Diz-se que um semigrupo S de classe C_0 é *compacto* se, para cada $t > 0$, $S(t)$ é um operador compacto.

Observe-se que se $S(t)$ for compacto para $t = 0$, i.e., se o operador identidade de X for compacto então necessariamente X tem dimensão finita.

1.7.2 Teorema. *Seja S um semigrupo compacto. Então:*

i) *a função S é contínua na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ em todo ponto $t > 0$*

ii) *$R(\lambda, A)$ é um operador compacto $\forall\, \lambda \in \rho(A)$.*

Reciprocamente, seja S um semigrupo de classe C_0 que satisfaz i) *e*

ii') *Para algum $\lambda\rho(A)$, $R(\lambda, A)$ é um operador compacto.*

Então, S é um semigrupo compacto.

Demonstração: i) Seja S um semigrupo compacto, m uma constante positiva tal que $||S(t)|| \leq m$, $0 \leq t \leq 1$ e ε um real positivo. Para cada $t > 0$, a aderência de $\{S(t)x; ||x|| = 1\}$ que, por hipótese, é compacta, pode ser recoberta por uma família finita de esferas V_i , $i = 1, \ldots, n$, com centro em $S(t)x_i$ e raio $\varepsilon/2(m+1)$. Para cada x tal que $||x|| = 1$ existe, pois, um x_i , tal que $||S(t)x - S(t)x_i|| < \varepsilon/2(m+1)$. Como, além disso, S é fortemente contínuo, existe um h_0 , $0 < h_0 < 1$, tal que $||S(t+h)x_i - S(t)x_i|| < \varepsilon/2$ se $0 < h < h_0$, $i = 1, \ldots, n$. Logo, se $0 < h < h_0$ temos, para $||x|| = 1$,

$$\begin{aligned} ||S(t+h)x - S(t)x| \leq & ||S(h)|| \cdot ||S(t)x - S(t)x_i|| + ||S(t+h)x_i - S(t)x_i|| + \\ & + ||S(t)x_i - S(t)x|| < \varepsilon, \end{aligned}$$

donde a continuidade de S à direita na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$. Além disto, se $0 < h < t$ e $0 < \delta < t - h$, então

$$||S(t-h) - S(t)|| = ||S(t-h+\delta-\delta) - S(t)|| \leq ||S(t-h-\delta)||\, ||S(\delta) - S(h+\delta)||$$

donde a continuidade à esquerda pois $||S(t-h-\delta)||$ é limitado quando $h \to 0$ e $||S(\delta) - S(h+\delta)|| \to 0$ quando $h \to 0$, pela continuidade à direita.

ii) Recorde-se que a família, $\mathcal{L}_0(X)$, dos operadores compactos de X é um ideal bilateral de $\mathcal{L}(X)$, fechado para a topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$. Como S é contínua na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ em todo ponto $t > 0$, para ε, $\rho > 0$ existe a integral

$$R(\varepsilon, \rho) = \int_\varepsilon^\rho e^{-\lambda t}\, S(t)\, dt$$

no sentido de Riemann, estando $\mathcal{L}(X)$ munido de sua topologia uniforme. O operador $R(\varepsilon, \rho)$ é, pelas propriedades de $\mathcal{L}_0(X)$, compacto e, como existem $w > w_0$ e $M \geq 1$ tais que $||S(t)|| \leq Me^{wt}$, segue-se que $R(\varepsilon, \rho)$ converge para um operador compacto quando $\varepsilon \to 0$ e, se $\mathrm{Re}\, \lambda > w$, converge, analogamente, para um operador compacto quando $\rho \to \infty$. Logo,

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, S(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}\, \lambda > w > w_0 \tag{1.7.1}$$

é um operador compacto. Da Primeira Equação Resolvente

$$R(\lambda, A) = R(\mu, A) + (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

resulta, agora, que se $R(\mu, A)$ for compacto então $R(\lambda, A)$ será compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$ porque, como se disse acima, $\mathcal{L}_0(X)$ é um ideal bilateral de $\mathcal{L}(X)$.

Reciprocamente, vamos supor que i) e ii') sejam verificados. De i) e de $\lambda > 0$, $\lambda > w > w_0$, segue-se da validade de (1.7.1), donde

$$\lambda R(\lambda, A)S(t) - S(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau}(S(t+\tau) - S(t))\, d\tau.$$

Portanto, para cada $\delta > 0$,

$$||\lambda R(\lambda, A)S(t) - S(t)|| \leq \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda\tau}||S(t+\tau) - S(t)||\, d\tau$$
$$+ \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda\tau}(||S(t+\tau)|| + ||S(t)||)\, d\tau \leq \sup_{0<\tau<\delta} ||S(t+\tau) - S(t)||$$
$$+ M\, e^{wt-\delta\tau}\left(\frac{\lambda e^{\lambda\delta}}{\lambda - w} + 1\right).$$

Mas daí vem

$$\lim_{\lambda\to\infty} ||\lambda R(\lambda, A)S(t) - S(t)|| \leq \sup_{0\leq\tau\leq\delta} ||S(t+\tau) - S(t)||$$

donde

$$\lim_{\lambda\to\infty} ||\lambda R(\lambda, A)S(t) - S(t)|| = 0$$

pela continuidade de S na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ e a arbitrariedade de δ. Como $R(\lambda, A)$ é compacto para cada $\lambda > w$, visto que, como já se observou acima, ii') $\Rightarrow$ ii), e como $\mathcal{L}_0(X)$ é fechado na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, segue-se que $S(t)$ é compacto. q.e.d..

Representemos por $\sigma_p(T)$ o *espectro pontual* do operador T de X, isto é, o conjunto dos autovalores de T.

1.7.3. Lema.

i) *Se* $\mu \in \sigma_p(A)$ *então* $1/(\lambda - \mu) \in \sigma_p(R(\lambda, A))$, $\forall\, \lambda \in \rho(A)$ *e se* $Ax = \mu x$ *então* $R(\lambda, A)x = x/(\lambda - \mu)$, $\forall\, \lambda \in \rho(A)$.

ii) *Se* $\mu \in \sigma_p(R(\lambda, A))$ *para algum* $\lambda \in \rho(A)$ *então* $(\lambda\mu - 1)/\mu \in \sigma_p(A)$ *e se* $R(\lambda, A)x = \mu x$ *então* $Ax = (\lambda\mu - 1)x/\mu$.

Demonstração: i) Seja $\mu \in \sigma_p(A)$ e x um autovetor de A associado a μ. Teremos, $\forall\, \lambda \in \rho(A)$

$$x = R(\lambda, A)(\lambda - A)x = \lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)Ax =$$
$$= \lambda R(\lambda, A)x - \mu R(\lambda, A)x = (\lambda, \mu)R(\lambda, A)x,$$

donde
$$R(\lambda, A)x = \frac{x}{(\lambda - \mu)} \cdot$$

ii) Seja, para algum $\lambda \in \rho(A)$, $\mu \in \sigma_p(R(\lambda, A))$ e x um autovetor de $R(\lambda, A)$ associado a μ. Teremos
$$x = (\lambda - A)R(\lambda, A)x = (\lambda - A)\mu x = \lambda\mu x - \mu Ax$$
e, portanto,
$$Ax = \frac{\lambda\mu - 1}{\mu} x.$$

1.7.4 Lema. *Seja S um semigrupo de clase C_0 com gerador infinitesimal A. Então,*
$$e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(S(t))$$
e se x é um autovetor de A associado ao autovalor μ então x é autovetor de $S(t)$ associado ao autovalor $e^{t\mu}$.

Demonstração: O operador $R(\lambda, t)$ definido por $R(\lambda, t)x = \int_0^t e^{-\lambda s}\, S(s)x\, ds$ é obviamente linear e limitado. Além disto,
$$\frac{S(h) - I}{h} R(\lambda, t)x = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^1 e^{-\lambda s} S(s)x\, ds$$
$$+ \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{-\lambda s} S(s)x\, ds - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} S(s)x\, ds$$
e, como $\forall\, x \in X$ o segundo membro tende a $\lambda R(\lambda, t)x + e^{-\lambda t} S(t)x - x$ quando $h \to 0$ segue-se que $R(\lambda, t)x \in \mathcal{D}(A)$ e $AR(\lambda, t)x = \lambda R(\lambda, t)x + e^{-\lambda t} S(t)x - x$, $\forall\, x \in X$. Mas, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, $AR(\lambda, t)x = R(\lambda, t)Ax$, visto que A é um operador fechado. Logo, $R(\lambda, t)(\lambda - A)x = x - e^{-\lambda t} S(t)x$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$. Segue-se daí que, se $\mu \in \sigma_p(A)$ e x é um autovetor de A associado a μ e, portanto, $(\mu - A)x = 0$, então $x - e^{\mu t} S(t)x = 0$, ou seja, $S(t)x = e^{\mu t} x$, o que demonstra a asserção feita.

1.7.5 Lema. *O espectro de um operador compacto é um conjunto finito ou enumerável cujo único possível ponto limite é o ponto do espectro, diferente de zero, pertence ao espectro pontual.*

Demonstração. Propriedades dos operadores compactos bem conhecidas.

1.7.6 Proposição. *Seja S um semigrupo compacto e A seu gerador infinitesimal. Então,*

i) $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$, $n = 1, \ldots$ *e* (λ_n) *não tem ponto limite no plano complexo;*

ii) $R(\lambda, A)$ *existe e é compacto para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \lambda_n$ *e, se* x_n *é qualquer autovetor de* A *associado a* λ_n *, então*
$$R(\lambda, A)x_n = \frac{x_n}{\lambda - \lambda_n}, \quad n = 1, \ldots,$$
$$S(t)x_n = e^{t\lambda_n}\, x_n\,, \quad n = 1, \ldots.$$

Demonstração: Seja S compacto e A seu gerador infinitesimal. Por ii) do Teorema 1.7.2, $R(\lambda, A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$. Pelo Lema 1.7.5, $\sigma(R(\lambda, A))$ é um conjunto finito ou enumerável e $\sigma_p(R(\lambda, A)) = \sigma(R(\lambda, A))\backslash\{0\}$. Seja $\mu \in \rho(A)$ e $\sigma_p(R(\mu, A)) = \{\gamma_n \,; n = 1, \dots\}$. Pelo Lema 1.7.3, pondo $\lambda_n = \dfrac{\mu\gamma_n - 1}{\gamma_n}$, tem-se $\lambda_n \in \sigma_p(A)$. Vamos mostrar que $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$. Com efeito, se $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 1, \dots$, e $\lambda \neq \mu$, então $\dfrac{1}{\mu - \lambda} \neq \gamma_n$, $n = 1, \dots$, donde $\dfrac{1}{\mu - \lambda} \notin \sigma(R(\mu, A))$. Logo $\dfrac{1}{\mu - \lambda} \in \rho(R(\mu, A))$, i.e., $\dfrac{1}{\mu - \lambda} - R(\mu, A)$ é invertível e seu inverso é um operador linear limitado. O mesmo acontece, pois, com o operador $I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)$, i.e.,

$$(I - (\mu - \lambda)R(\mu, A))^{-1} \in \mathcal{L}(X). \tag{1.7.2}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\lambda - A &= \lambda - \mu + \mu - A = (\mu - A) - \mu + \lambda = \\ &= (I - \mu(\mu - A)^{-1} + \lambda(\mu - \lambda^{-1})(\mu - A)) = \\ &= (I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1})(\mu - A) = (I - (\mu - \lambda)R(\mu, A))(\mu - A).\end{aligned}$$

Por (1.7.2) segue-se que $\lambda - A$ é invertível e seu inverso pertence a $\mathcal{L}(X)$. Logo $\lambda \in \rho(A)$ e, portanto, $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$.

Além disto, $\sigma(A)$ não tem ponto limite no plano complexo pois se λ fosse ponto limite de $\sigma_p(A)$ então, pelo Lema 1.7.3, $\dfrac{1}{\mu - \lambda}$ seria ponto limite de $\sigma_p(R(\mu, A))$ diferente de zero, o que contraria o Lema 1.7.5. Logo i) é válida. A ii) é uma consequência imediata do Teorema 1.7.2 e dos Lemas 1.7.3 e 1.7.4.

1.8 Semigrupos Holomorfos

Vamos designar por $\Delta(\alpha)$ o setor do plano complexo definido por

$$\Delta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0, |\arg z| < \alpha,\, 0 < \alpha \leq \pi\}.$$

1.8.1 Definição. Diz-se que uma função $S\colon \Delta(\alpha) \cup \{0\} \to \mathcal{L}(X)$, onde $0 < \alpha \leq \pi/2$, é um semigrupo holomorfo de classe C_0 em $\Delta(\alpha)$ se:

I) $S(0) = I$;

II") $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$, $\forall\, z_1, z_2 \in \Delta(\alpha)$;

III") $\lim\limits_{z \to 0} S(z)x = x \quad \forall\, z \in X, \quad z \in \Delta(\alpha - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \alpha$;

IV) S é holomorfa em $\Delta(\alpha)$.

A restrição de todo semigrupo holomorfo de classe C_0 ao eixo real não negativo que é, obviamente, um semigrupo de classe C_0, diferenciável, satisfaz uma condição adicional que será estudada a seguir.

Seja S um semigrupo holomorfo de classe C_0 em $\Delta(\alpha)$ e A o gerador infinitesimal da restrição de S a $\mathbb{R}^+$.

Se $t > 0$, o círculo de centro t e raio $t \operatorname{sen} \varphi$, onde $0 < \varphi < \alpha \leq \pi/2$, está contido na região $\Delta(\alpha)$, onde S é analítica. Portanto, pela Fórmula Integral de Caychy,

$$AS(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-t|=t \operatorname{sen} \varphi} \frac{S(z)}{(z-t)^2}\, dz. \tag{1.8.1}$$

Com argumento semelhante ao usado na Proposição 1.2.2, vê-se que existe uma constante $M \geq 1$ tal que $||S(z) \leq M \ \forall\, z \in \Sigma$, onde

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \operatorname{Re} z \leq 2, |\arg z| \leq \varphi\}.$$

Logo, se $0 < t \leq 1$, temos, por (1.8.1), $||AS(t)|| \leq M/t \operatorname{sen} \varphi$ donde se segue que existe uma constante $N \geq 1$ tal que

$$||tAS(t)|| \leq N, \quad 0 < t \leq 1. \tag{1.8.2}$$

Vamos mostrar que, reciprocamente, todo semigrupo, S, de classe C_0, diferenciável e que satisfaz a condição (1.8.2), admite uma extensão holomorfa em um setor $\Delta(\alpha)$, para algum α tal que $0 < \alpha \leq \pi/2$.

Realmente, satisfeitas essas hipóteses, de $0 < t/n \leq 1$ vem, por i) do Teorema 1.3.3,

$$||A^n S(t)|| \leq \left\| AS\left(\frac{t}{n}\right)\right\|^n \leq N^n \left(\frac{n}{t}\right)^n$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{(z-t)^n}{n!} A^n S(t) \right\| &\leq \frac{|z-t|^n}{n!} N^n \left(\frac{n}{t}\right)^n = \frac{|z-t|^n}{n!} N^n \frac{n^n}{t^n} \leq \\ &\leq \frac{|z-t|^n}{t^n} N^n e^n = \left(\frac{|z-t|}{t} Ne\right)^n.\end{aligned} \tag{1.8.3}$$

Logo, se $|z-t| < t/Ne$, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-t)^n}{n!} A^n S(t)$ converge, donde define uma função $\widetilde{S}$, holomorfa no círculo de centro t e raio t/Ne. E como t é arbitrário, $\widetilde{S}$ é uma função holomorfa para $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{sen} |\arg z| < 1/Ne$, i.e., holomorfa no setor $\Delta(\alpha)$, onde $\alpha = \operatorname{arc\,sen} 1/Ne$. Portanto, IV) é válida para $\widetilde{S}$ com $\alpha = \operatorname{arc\,sen} 1/Ne$. Como, por i) do Teorema 1.3.3, $A^n S(t) \in \mathcal{L}(X)$ para cada $n \geq 0$ e cada $t > 0$, $\widetilde{S}(z)$, $z \in \Delta(\alpha)$, é o limite uniforme de uma sequência de elementos de $\mathcal{L}(X)$, onde $\widetilde{S}(z) \in \mathcal{L}(X)$. Portanto, $\widetilde{S}\colon \Delta(\alpha) \to \mathcal{L}(X)$ e, pondo $\widetilde{S}(0) = I$, tem-se $\widetilde{S}\colon \Delta(\alpha) \cup \{0\} \to \mathcal{L}(X)$ e I) é válida.

Se $|z_1 - t_1| \le t_1/Ne$ e $|z_2 - t_2| \le t_2/Ne$, i.e., se z_1 e z_2 pertencem aos círculos de convergência de $\widetilde{S}$, de centros t_1 e t_2, respectivamente, então $|z_1 + z_2 - t_1 - t_2| \le (t_1+t_2)/Ne$, i.e., z_1+z_2 pertence ao círculo de convergência de $\widetilde{S}$, de centro t_1+t_2. Logo tendo em vista a fórmula elementar

$$\frac{(z_1 + z_2 - t_1 - t_2)^p}{p!} = \sum_{m+n=p} \frac{(z_1 - t_1)^n}{n!} \cdot \frac{(z_2 - t_2)^m}{m!}$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(z_1 + z_2) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[(z_1 + z_2) - (t_1 + t_2)]^p}{p!} A^p S(t_1 + t_2) = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m+n=p} \frac{(z_1 - t_1)^n}{n!} \cdot \frac{(z_2 - t_2)^m}{m!} A^{m+n} S(t_1 + t_2) = \widetilde{S}(z_1)\widetilde{S}(z_2) \end{aligned}$$

donde a validade de II”). Como $\widetilde{S}$ é holomorfa em $\Delta(\alpha)$, se $z_0 \in \Delta(\alpha)$ tem-se $\lim \widetilde{S}(z) = \widetilde{S}(z_0)$ quando $z \to$ _0 e $z \in \Delta(\alpha)$ e, portanto, $\lim \widetilde{S}(z)S(t) = \lim \widetilde{S}(z + t) = S(t)$, quando $z \to 0$, $z \in \Delta(\alpha)$ e $t > 0$, os limites sendo tomados no sentido da topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$. Daí resulta que

$$\lim \widetilde{S}(z)S(t)x = S(t)x \ \forall\, z \in X, \text{ quando } z \to 0, z \in \Delta(\alpha) \text{ e } t > 0.$$

Logo, quando $z \to 0$, $z \in \Delta(\alpha)$,

$$\lim \widetilde{S}(z)y = 0, \quad \forall\, y \in X_0 = \bigcup_{0<t\le 1} S(t)X.$$

Mas, em virtude de III), X_0 é denso em X; logo, III”) ficará demonstrada quando demonstrarmos que $||\widetilde{S}(z)||$ é uma função limitada na região $\Sigma(\nu) \subset \Delta(\alpha)$, onde

$$\Sigma(\nu) \left\{ z \in \mathbb{C};\ 0 < \text{Re } z < \frac{(Ne)^2 - \nu^2}{(Ne)^2}, |\arg z| < \text{arc sen } \frac{\nu}{Ne}, 0 < \nu < 1 \right\},$$

uma vez que, supondo $||\widetilde{S}(z)|| \le M(\nu) \ \forall\, z \in \Sigma(\nu)$ e escolhendo um $t_0 > 0$ tal que

$$||S(t)x - x|| \le \frac{\varepsilon}{2(M(\nu) + 1)}, \quad 0 < t < t_0,$$

e um $\delta > 0$ tal que

$$|||\widetilde{S}(z)S(t)x - S(t)x|| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{Re } z < \delta,\ z \in \Sigma(\nu)$$

teremos

$$\begin{aligned} ||\widetilde{S}(z)x - x|| &\le ||\widetilde{S}(z)x - \widetilde{S}(z)S(t)x|| + ||\widetilde{S}(z)S(t)x - S(t)x|| + ||S(t)x - x|| \\ &\le \frac{\varepsilon M(\nu)}{2(M(\nu) + 1)} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(M(\nu) + 1)} = \varepsilon, \quad \text{Re } z < \delta,\ z \in \Sigma(\nu), \end{aligned}$$

isto é, lim $\widetilde{S}(z)x = x$, quando $z \to 0$, $z \in \Sigma(\nu)$, que é a III").

Vamos, então, mostrar que $||\widetilde{S}(z)||$ é limitado em $\Sigma(\nu)$. Pondo $t = |z|/\cos|\arg z|$ teremos $|z-t|/t = \text{sen}\,|\arg z|$ donde, se $x \in \Sigma(\nu)$ então $|z-t|/t \leq \nu/Ne$ e, além disto, Re $z = |z|\cos|\arg z| = t\cos^2|\arg z|$ donde

$$t = \frac{\text{Re } z}{\cos^2|\arg z|} \leq \frac{\text{Re } z}{\frac{(Ne)^2-\nu^2}{(Ne)^2}} \leq 1.$$

Logo, por (1.8.3),

$$\frac{|z-t|^n}{n!}\,||A^nS(t)|| \leq \nu^n, \quad n = 1, \dots$$

e assim,

$$||\widetilde{S}(z)| \;\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-t|^n}{n!}\,||A^nS(t)|| \leq ||S(t)|| + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n \leq m + \frac{\nu}{1-\nu}$$

onde $m = \sup||S(t)||$, $t \leq 1$. Acabamos, assim, de demonstrar o teorema a seguir.

1.8.2 Teorema. *Para que um semigrupo de classe C_0 admita uma extensão holomorfa de classe C_0 em um setor $\Delta(\alpha)$, para algum α tal que $0 < \alpha \leq \pi/2$, é necessário e suficiente que esse semigrupo seja diferenciável e satisfaça a condição* (1.8.2).

1.8.3 Corolário. *Se S é um semigrupo de classe C_0, diferenciável, e*

$$\lim_{t\to 0^+} \sup\; t||AS(t)|| < e^{-1},$$

então A é um operador linear limitado e S admite uma extensão holomorfa em todo o plano complexo.

Com efeito, da hipótese resulta que existe um ρ, $0 < \rho < 1$, e um $\delta > 0$ tais que $t||AS(t)|| < \rho e^{-1}$, para cada t tal que $0 < t < \delta$. Neste caso tem-se, pois, $N = \rho e^{-1}$. Mas, por (1.8.3), a série,

$$\widetilde{S}(z) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!}\,A^nS(t)$$

converge se $|z-t| < \dfrac{t}{Ne}$; logo, converge se $|z-t| < \dfrac{1}{\rho}$ e, desse modo, seu círculo de convergência contém a origem, uma vez que $|0-t| = t < t/\rho$. Logo $S(t)$ é diferenciável na origem, o que significa que A é um operador linear limitado. Consequentemente, $S(t) = e^{tA}$, donde S admite a extensão e^{zA}, holomorfa em todo plano.

Deste corolário resulta que se o gerador infinitesimal, A, de um semigrupo holomorfo de classe C_0 é não limitado, então

$$\lim_{t\to 0^+} \sup\; t||AS(t)|| \geq \frac{1}{e}\cdot$$

1.8.4 Definição. Seja A um operador linear de X. Vamos dizer que A é de classe (θ, M), onde $\pi/2 < \theta \leq \pi$ e $M > 0$, e escrever $A \in (\theta, M)$ se

i) A é fechado e seu domínio é denso em X;

ii) $\Delta(\theta) \subset \rho(A)$;

iii) $||R(\lambda, A)|| \leq M/|\lambda|, \quad \forall\, \lambda \in \Delta(\theta)$.

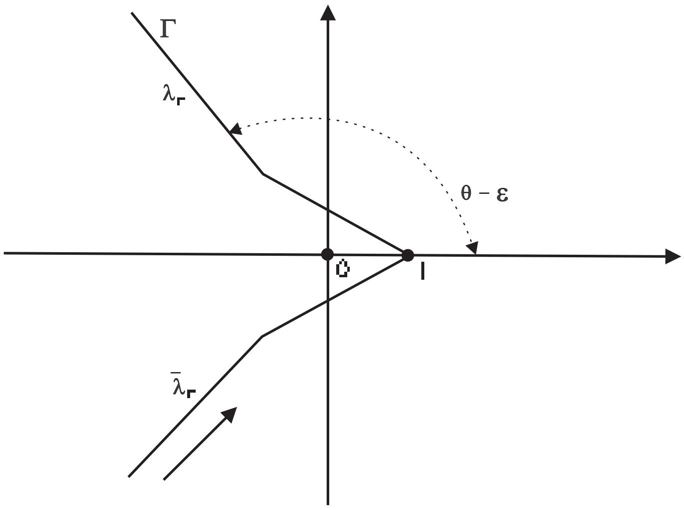

Figura 1

Seja $A \in (\theta, M)$, $\varepsilon > 0$ tal que $2\varepsilon < \theta - \pi/2$ e Γ a curva do plano complexo composta dos arcos $\tau e^{i(\theta-\varepsilon)}$ e $\tau e^{-i(\theta-\varepsilon)}$, $1 \leq \tau < \infty$, e dos segmentos que ligam os pontos $e^{i(\theta-\varepsilon)}$ e $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ ao ponto 1, orientada de $-\infty\ e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ para $+\infty\ e^{i(\theta-\varepsilon)}$.

Pela condição ii) da Definição 1.8.4, a função $e^{\lambda z}\, R(\lambda, A)$, $z \in \Delta(\alpha)$, onde $\alpha = \theta - \pi/2 - 2\varepsilon$, toma seus valores em $\mathcal{L}(X)$ e é contínua sobre Γ. Portanto, se $\Gamma_\tau = \{\lambda \in \Gamma; |\lambda| \leq \tau; \tau \geq 1\}$, a integral

$$S_\tau(z) = \int_{\Gamma_\tau} e^{\lambda z}\, R(\lambda, A)\, d\lambda, \quad z \in \Delta(\alpha),$$

pertence a $\mathcal{L}(X)$. Além disto, como $\pi/2 + \varepsilon < \arg \lambda z < 3\pi/2 - \varepsilon$, $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda| \geq 1$ e $z \in \Delta(\alpha)$, a estimativa

$$||e^{\lambda z}\, R(\lambda, A)|| \leq e^{\mathrm{Re}\ \lambda z}\, \frac{M}{|\lambda|}, \quad |\lambda| \geq 1,$$

mostra que, para cada $z \in \Delta(\alpha)$, a integral de Dunford-Taylor,

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda z}\, R(\lambda, A)\, d\lambda, \tag{1.8.4}$$

converge absolutamente e, assim, define um operador linear limitado, $S(z)$, em X. Vamos mostrar que S é um semigrupo holomorfo de classe C_0. Iniciemos com os lemas a seguir.

1.8.5 Lema. *Se $z \in \Delta(\alpha)$ então:*

i) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda = 0 \ \forall\, \lambda'$ *situado à direita de* Γ;

ii) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda = 2\pi i$;

iii) $\displaystyle\int_\Gamma e^{\lambda z}\, d\lambda = 0$;

iv) $\displaystyle\int_\Gamma R(\lambda, A)\, \frac{d\lambda}{\lambda} = 0$;

v) $\displaystyle\int_{|z|\Gamma} e^{\lambda\zeta}\, R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right) \frac{d\lambda}{|z|} = \int_\Gamma e^{\lambda\zeta}\, R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right) \frac{d\lambda}{|z|}$ onde $\zeta = z/|z|$.

Demonstração i) Sejam $\lambda_\tau = \tau e^{i(\theta-\varepsilon)}$ e $\overline{\lambda}_\tau = \tau e^{-i(\theta-\varepsilon)}$, $\tau \geq 1$. Portanto λ_τ e $\overline{\lambda}_\tau$ são os extremos do arco $\Gamma_\tau = \{\lambda \in \Gamma; |\lambda| \leq \tau\}$. Seja C_τ, $\tau \geq 1$, o arco da circunferência de centro na origem, raio τ, situado à esquerda de Γ e de extremos λ_τ e $\overline{\lambda}_\tau$. Pelo Teorema de Cauchy tem-se

$$\int_{\Gamma\cup C_\tau} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda = 0 \tag{1.8.5}$$

pois a função $e^{\lambda z}/(\lambda' - \lambda)$ é holomorfa sobre Γ e na região situada à esquerda de Γ. Mas de $\lambda \in C_\tau$ vem $\lambda = \tau e^{i\varphi}$, onde $\theta - \varepsilon \leq \varphi \leq 2\pi - \theta + \varepsilon$, donde pondo $z = \rho e^{i\varphi}$, $|\psi| < \alpha$, tem-se

$$\int_{C_\tau} e^{\mathrm{Re}\ \lambda z} |d\lambda| = \int_{\theta-\varepsilon}^{2\pi-\theta+\varepsilon} e^{\tau\rho\cos(\varphi+\varphi)}\, \tau d\varphi \leq 2\tau e^{\tau\rho\cos(\frac{\pi}{2})}(\pi - \theta + \varepsilon) \to 0 \tag{1.8.6}$$

quando $\tau \to \infty$, pois $\pi/2 + \varepsilon \leq \psi + \varphi \leq 3\pi/2 - \varepsilon$. Como de $m_\tau = \inf\{|\lambda' - \lambda|; \lambda \in C_\tau\}$ vem $m_\tau \to \infty$ quando $\tau \to \infty$, tem-se, por (1.8.6),

$$\left|\int_{C_\tau} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda\right| \leq \frac{1}{m_\tau} \int_{C_\tau} e^{\mathrm{Re}\ \lambda z} |d\lambda| \to 0$$

quando $\tau \to \infty$. Daí e de (1.8.5) vem i).

ii) Pela Fórmula de Cauchy tem-se

$$1 = e^{0z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\tau \cup C_\tau} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda.$$

Mas de $\lambda \in C_\tau$ vem $|\lambda| = \tau \geq 1$. Logo, por (1.8.6),

$$\left|\int_{C_\tau} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\, d\lambda\right| \leq \int_{C_\tau} e^{\mathrm{Re}\ \lambda z} |d\lambda| \to 0$$

quando $\tau \to \infty$, donde a validade de ii).

iii) Como $e^{\lambda z}$ é holomorfa em todo o plano complexo temos, pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_{\Gamma_\tau \cup C_\tau} e^{\lambda z}\, d\lambda = 0.$$

Mas, por (1.8.6),

$$\left|\int_{C_\tau} e^{\lambda z}\, d\lambda\right| \leq \int_{C_\tau} e^{\mathrm{Re}\ \lambda z}|d\lambda| \to 0$$

quando $\tau \to \infty$. Logo iii) é válida.

iv) A função $R(\lambda, A)/\lambda$ é, por ii) da Definição 1.8.4, holomorfa na região do plano complexo situada à direita e sobre Γ. Logo, se D, é o arco da circunferência de centro na origem, raio $\tau \geq 1$, situado à direita de Γ e de extremos λ_τ e $\overline{\lambda}_\tau$, então, pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_{\Gamma_\tau \cup C_\tau} R(\lambda, A)\, \frac{d\lambda}{\lambda} = 0.$$

Mas, orientando D_τ de $\overline{\lambda}_\tau$ para λ_τ temos, por iii) da Definição 1.8.4,

$$\left\|\int_{D_\tau} R(\lambda, A)\, \frac{d\lambda}{\lambda}\right\| \leq \frac{M}{\tau^2} \int_{D_\tau} |d\lambda| = \frac{2M(\theta - \varepsilon)}{\tau} \to 0$$

quando $\tau \to \infty$. Logo, iv) também é válida.

v) Se $|z| > 1$ a curva $|z|\Gamma$ é a união do arco $|z|\Gamma_1$ com as duas semiretas $\Gamma \backslash \Gamma_{|z|}$. Os extremos do arco $|z|\Gamma_1$ são os pontos $\lambda_{|z|}$ e $\overline{\lambda}_{|z|}$ que são justamente os extemos do arco $\Gamma_{|z|}$. Assim, para $|z| > 1$, $\Gamma_{|z|} \cup |z|\Gamma_1$ é um contorno simples e fechado e, como a função $e^{\lambda\zeta} R\left(\dfrac{\lambda}{|z|}, A\right)$ é holomorfa no interior e sobre ele tem-se, pelo Teorema de Cauchy,

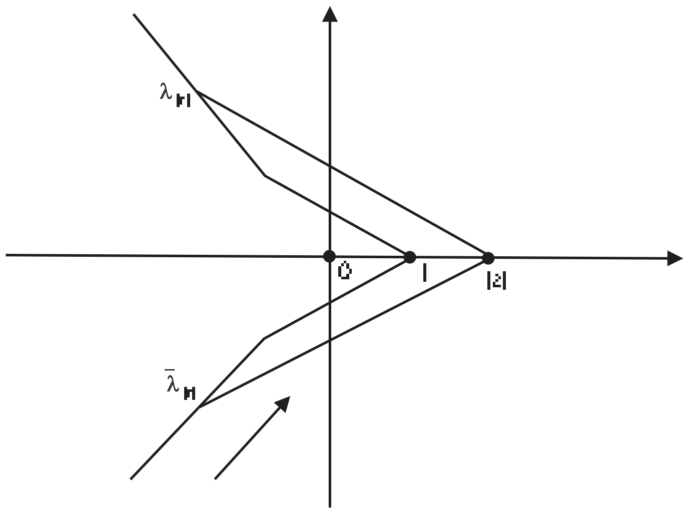

Figura 2

$$\int_{\Gamma_{|z|} \cup |z|\Gamma_1} e^{\lambda\zeta}\, R\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}, A\right) \frac{d\lambda}{|z|} = 0.$$

Logo,

$$\int_{|z|\Gamma} e^{\lambda\zeta} R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right)\frac{d\lambda}{|z|} = \int_{|z|\Gamma_1} e^{\lambda\zeta} R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right)\frac{d\lambda}{|z|} + \int_{\Gamma\backslash\Gamma_{|z|}} e^{\lambda\zeta} R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right)\frac{d\lambda}{|z|} =$$
$$= \int_{\Gamma_{|z|}} e^{\lambda\zeta} R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right)\frac{d\lambda}{|z|} + \int_{\Gamma\backslash\Gamma_{|z|}} e^{\lambda\zeta} R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right)\frac{d\lambda}{|z|} = \int_{\Gamma} e^{\lambda\zeta} R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right)\frac{d\lambda}{|z|},$$

i.e., v) é válida para $|z| > 1$. Se $|z| < 1$, então $|z|\Gamma = \Gamma\backslash\Gamma_1 \cup |z|_{\Gamma_{1/|z|}}$, $\Gamma_1 \cup |z|\Gamma_{1/|z|}$ é um contorno simples e fechado e a função $e^{\lambda\zeta} R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right)\frac{1}{|z|}$ é holomorfa no interior e sobre ele. Desse modo, com argumentação análoga à do caso $|z| > 1$, vê-se que v) ainda é válida se $|z| < 1$, $z \in \Delta(\alpha)$. Para $|z| = 1$, v) é trivial.

1.8.6 Lema. *Seja Γ' a curva do plano complexo definida por*

$$\Gamma' = \{\lambda' \in \mathbb{C}; \lambda' = \lambda + \delta,\ \lambda \in \Gamma,\ \delta > 0\},$$

com a orientação induzida pela de Γ. Então, $\forall\, z \in \Delta(\alpha)$:

i) $\displaystyle\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda;$

ii) $\displaystyle\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda' = 2\pi i\, e^{\lambda z}$, $\forall\, \lambda$ *situado à esquerda de* Γ'.

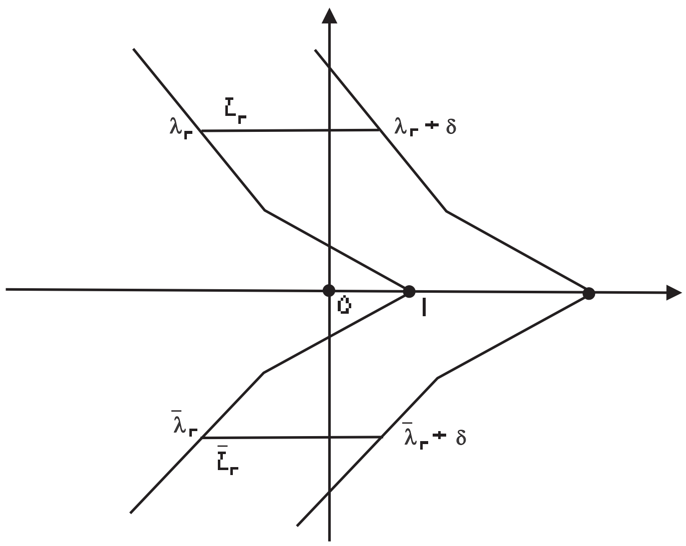

Figura 3

Demonstração: Os pontos λ_τ, $\overline{\lambda}_\tau$ e o arco Γ_τ foram definidos no lema anterior. Seja Γ'_τ o arco de Γ' de extremos $\overline{\lambda}_\tau + \delta$ e $\lambda_\tau + \delta$, L_τ o seguimento de reta de extemos λ_τ e $\lambda_\tau + \delta$, $\overline{L}_\tau$ o de extremos $\overline{\lambda}_\tau$ e $\overline{\lambda}_\tau + \delta$ e Λ_τ o contorno $\Gamma_\tau \cup L_\tau \cup \Gamma'_\tau \cup \overline{L}_\tau$. Pelo Teorema de Cauchy tem-se

$$\int_{\Lambda_\tau} e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda = 0 \tag{1.8.7}$$

pois, por ii) da Definição 1.8.4, $e^{\lambda z} R(\lambda, A)$ é holomorfa à direita Γ e sobre Γ. Mas, para τ suficientemente grande, tem-se $\mathrm{Re}(\lambda_\tau + \delta) < 0$ e, nesse caso, $|\lambda| \geq |\lambda_\tau + \delta|$, $\forall\, \lambda \in L_\tau$. Além disto, para τ suficientemente grande tem-se $\arg \lambda z > \pi/2 + \varepsilon/2 \; \forall\, \lambda \in L_\tau$. Logo, para τ suficientemente grande tem-se $|\lambda| > |\lambda_\tau + \delta|$ e $\mathrm{Re}\, \lambda z < 0 \; \forall\, \lambda \in L_\tau$, donde, por iii) da Definição 1.8.4,

$$||e^{\lambda z} R(\lambda, A)|| \leq e^{\lambda z} ||R(\lambda, A)|| \leq \frac{M}{|\lambda|} \leq \frac{M}{|\lambda_\tau + \delta|} \; \forall\, \lambda \in L_\tau\,.$$

Daí, orientando L_τ de λ_τ para $\lambda_\tau + \delta$, vem

$$\lim_{\tau \to \infty} \left\| \int_{L_\tau} e^{\lambda z} R(z\lambda, A)\, d\lambda \right\| \leq \lim_{\tau \to \infty} \frac{M\delta}{|\lambda_r + \delta|} = 0,$$

pois δ é uma constante. Segue-se que

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_{L_\tau} e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda = 0$$

e, analogamente, orientando $\overline{L}_\tau$ de $\overline{\lambda}_\tau$ para $\overline{\lambda}_\tau + \delta$, tem-se

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_{\overline{L}_\tau} e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda = 0.$$

Daí e de (1.8.7) vem i).

ii) Seja τ suficientemente grande para que λ esteja situado no interior da curva fechada $\Gamma'_\tau \cup L_\tau \cup C_\tau \cup \overline{L}_\tau = \Lambda'_\tau$. Pela Fórmula de Cauchy tem-se

$$\int_{\Lambda'_\tau} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda' = 2\pi i\, e^{\lambda z}. \tag{1.8.8}$$

Mas, se $\mu_\tau = \inf\{|\lambda' - \lambda|; \lambda' \in L_\tau\}$, então

$$\left| \int_{L_\tau} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda' \right| \leq \frac{1}{\mu_\tau} \int_{L_\tau} e^{\mathrm{Re}\, \lambda' z} |d\lambda'| \to 0$$

quando $\tau \to \infty$, uma vez que $\mu_\tau \to \infty$ quando $\tau \to \infty$ e para τ suficientemente grande tem-se $\mathrm{Re}\, \lambda' z < 0 \; \forall\, \lambda' \in L_\tau$; logo

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_{L_\tau} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda' = 0 \tag{1.8.9}$$

e, analogamente

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_{\overline{L}_\tau} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda' = 0. \tag{1.8.10}$$

Além disto, por (1.8.6) tem-se, para $m_\tau = \inf\{|\lambda' - \lambda|; \lambda' \in C_\tau\}$,

$$\left| \int_{C_\tau} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda' \right| \leq \frac{1}{m_\tau} \int_{C_\tau} e^{\mathrm{Re}\, \lambda' z} |d\lambda'| \to 0$$

quando $\tau \to \infty$. Daí e de (1.8.8)-(1.8.10) vem ii).

1.8.7 Teorema. *Seja $A \in (\theta, M)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ tal que $2\varepsilon < \theta - \pi/2$, A é o gerador infinitesimal da restrição a $\mathbb{R}^+$ de um semigrupo holomorfo de classe C_0 no setor $\Delta(\theta - \pi/2 - 2\varepsilon)$ e uniformemente limitado nesse setor.*

Demonstração: Vamos mostrar que a função $S\colon \Delta(\alpha)\cup\{0\} \to \mathcal{L}(X)$ dada por $S(0) = I$ e

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z} R(\lambda, A)\, d\lambda, \quad z \in \Delta(\alpha), \quad \alpha = \theta - \pi/2 - 2\varepsilon, \tag{1.8.11}$$

é um semigrupo holomorfo de classe C_0 , uniformemente limitado no setor $\Delta(\theta-\pi/2-2\varepsilon)$ e A é o gerador infinitesimal da restrição de S a $\mathbb{R}^+$.

Por i) do Lema 1.8.6 tem-se

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda'\omega} R(\lambda', A)\, d\lambda', \ \omega \in \Delta(\alpha), \ \alpha = \theta - \pi/2 - 2\varepsilon. \tag{1.8.12}$$

Logo, para $z, w \in \Delta(\alpha)$,

$$\begin{aligned} S(z)S(w) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} e^{\lambda z + \lambda' w} R(\lambda, A)R(\lambda', A)\, d\lambda'\, d\lambda\ = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} e^{\lambda z + \lambda' w}\left[\frac{R(\lambda, A) - R(\lambda', A)}{\lambda' - \lambda}\right] d\lambda' d\lambda, \end{aligned}$$

por (1.8.12) e a bem conhecida Primeira Equação Resolvente. Como Γ está à esquerda de Γ' e $\lambda' \in \Gamma'$ temos, por i) do Lema 1.8.5 e ii) do Lema 1.8.6,

$$\int_\Gamma \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda = 0, \quad \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' w}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda' = 2\pi i\, e^{\lambda w}.$$

Logo,

$$S(z)S(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda(z+w)} R(\lambda, A)\, d\lambda = S(z+w), \quad w \in \Delta(\alpha),$$

pelo Teorema de Fubini e por (1.8.12) o que demonstra II”).

Fazendo em (1.8.11) a mudança de variáveis $\lambda' = |z|\lambda$, $z \in \Delta(\alpha)$, a curva Γ será transformada na curva $|Z|\Gamma$ e temos por v) do Lema 1.8.5

$$\begin{gathered} S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|\Gamma} e^{\lambda'\zeta} R\left(\frac{\lambda'}{|z|}, A\right)\frac{dX'}{|z|} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda'\zeta} R\left(\frac{\lambda'}{|z|}, A\right)\frac{dX'}{|z|}\,, \\ \zeta = \frac{z}{|z|} = e^{i\arg z}. \end{gathered} \tag{1.8.13}$$

Mas, pela hipótese iii), tem-se

$$\left\| R\left(\frac{\lambda'}{|z|}, A\right)\right\| \le \frac{M|z|}{|\lambda'|}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||S(z)|| &\leq \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma}|e^{\lambda'\zeta}|\,\frac{|d\lambda'|}{|\lambda'|} = \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_1} e^{\operatorname{Re}\lambda'\zeta}\,\frac{|d\lambda'|}{|\lambda'|} + \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1} e^{\operatorname{Re}\lambda'\zeta}\,\frac{|d\lambda'|}{|\lambda'|} \leq \\ &\leq \frac{Me}{2\pi\tau_0}\int_{\Gamma_1}|d\lambda'| + \frac{M}{\pi}\int_1^{\infty} e^{\tau\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}\,\frac{d\tau}{\tau} = M_0(\varepsilon) < \infty,\ \forall\, z\in\Delta(\alpha), \end{aligned} \tag{1.8.14}$$

onde $\tau_0 = \inf\{|\lambda|; \lambda \in \Gamma_1\}$, i.e., o semigrupo S uniformemente limitado em $\Delta(\alpha)$.

Seja $z \in \Delta(\alpha)$, $|z| < 1$. Para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ vem por ii) do Lema 1.8.5 e por $\lambda R(\lambda, A) - I = R(\lambda, A)A$,

$$S(z)x - x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda z}[R(\lambda, A) - \lambda^{-1}]x\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda z}\, R(\lambda, A)Ax\,\frac{d\lambda}{\lambda}\cdot$$

Como a norma do integrando é limitada por $M||Ax||/|\lambda|^2$ temos, pelo Teorema da Convergência Dominada e por iv) do Lema 1.8.5,

$$\lim_{z\to 0}(S(z)x - x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\lambda, A)Ax\,\frac{d\lambda}{\lambda} = 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Mas, pela hipótese i), $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e, por (1.8.14), $||S(z)|| \leq M_0(\varepsilon)\ \forall\, z \in \Delta(\alpha)$. Logo, $S(z)x \to x$ quando $z \to 0$, $z \in \Delta(\alpha)$, $\forall\, x \in X$, o que demonstra III”). Viu-se, anteriormente, que a integral (1.8.4) converge. Vamos mostrar, agora, que a convergência é uniforme em $\Delta(\alpha)$. Fazendo a mudança de variáveis $\mu = |z|\lambda$, tendo em vista v) do Lema 1.8.5 e pondo $z/|z| = \zeta$ temos, para $\tau \geq 1$,

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda z}\, R(\lambda, A)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|\Gamma} e^{\mu\zeta}\, R\left(\frac{\mu}{|z|}, A\right)\frac{d\mu}{|z|} = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\mu\zeta}\, R\left(\frac{\mu}{|z|}, A\right)\frac{d\mu}{|z|} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_\tau} e^{\mu\zeta}\, R\left(\frac{\mu}{|z|}, A\right)\frac{d\mu}{|z|} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma\setminus\Gamma_\tau} e^{\mu\zeta}\, R\left(\frac{\mu}{|z|}, A\right)\frac{d\mu}{|z|}\right)\cdot \end{aligned}$$

Logo, se $\mu = \rho e^{i\varphi}$ então

$$\begin{aligned} &\left\|S(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\tau} e^{\mu\zeta}\, R\left(\frac{\mu}{|z|}, A\right)\frac{d\mu}{|z|}\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_\tau} e^{\mu\zeta}\, R\left(\frac{\mu}{|z|}, A\right)\frac{d\mu}{|z|}\right\| \leq \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_\tau} e^{\operatorname{Re}\mu\zeta}\,\frac{d|\mu|}{|\mu|} \leq \frac{M}{\pi}\int_{\tau}^{\infty} e^{\rho\cos(\pi/2+\varepsilon)}\, d\rho = \frac{M}{\pi}\left[\frac{e^{\rho\cos(\pi/2+\varepsilon)}}{\cos(\pi/2+\varepsilon)}\right]_{\tau}^{\infty} = \\ &= \frac{M}{\pi}\,\frac{e^{\rho\cos(\pi/2+\varepsilon)}}{\cos(\pi/2+\varepsilon)} \to 0 \end{aligned}$$

uniformemente em $\Delta(\alpha)$ quando $\tau \to \infty$. Logo,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\tau} e^{\lambda z}\, R(\lambda, A)\, d\lambda \to S(z)$$

uniformemente em $\Delta(\alpha)$. Pelo Teorema A.6.2-iv) do Apêndice segue-se que por (1.8.11) pode ser diferenciada sob o sinal de integração. Portanto S é holomorfa em $\Delta(\alpha)$ o que demonstra IV).

Resta apenas mostrar que o gerador infinitesimal do semigrupo $S\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é A. Seja, para isto, $x \in \mathcal{D}(A)$. De $R(\lambda, A)(\lambda I - A) = I$ vem, tendo em vista iii) do Lema 1.8.5,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} S(z)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}\,\lambda R(\lambda, A)x\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}[R(\lambda, A)A + I]x\,d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}\,R(\lambda, A)Ax\,d\lambda = S(z)Ax,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\frac{d}{dz} S(z)x = S(z)Ax \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.8.15}$$

Em vista de (1.8.15) tem-se

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax\,dt, \quad h > 0,$$

donde

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = Ax \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$$

o que vem mostrar que se B é o gerador infinitesimal do semigrupo $S\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$, então $A \subset B$. Como $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \varnothing$, a demonstração de que $A = B$ é feita com argumentos já usados na demonstração da suficiência do Teorema 1.4.4.

1.8.8 Corolário. *Seja $A \in (\theta, M)$. A extensão S, holomorfa em $\Delta(\alpha)$, $\alpha = \theta - \dfrac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, do semigrupo gerado por A, satisfaz as condições:*

i) *Para todo $n \geq 1$, $S(z)x$ pertence ao domínio de A^n, $\forall\, x \in X$ e $\forall\, z \in \Delta(\alpha)$;*

ii) *Para todo $n \geq 1$ existe $M_n(\varepsilon)$, constante que só depende de ε, tal que*

$$||A^n\, S(z)|| \leq \frac{M_n(\varepsilon)}{|z|^n}, \quad \forall\, z \in \Delta(\alpha).$$

iii) $||A[S(t) - S(s)]|| \leq M_2(\varepsilon) \cdot (t - s)/st, \quad 0 < s \leq t.$

Demonstração: Como S é holomorfo, $S(z)x \in \mathcal{D}(A)$ para todo $x \in X$ e para todo $z \in \Delta(\alpha)$. De $A^nS(z) = [AS(z/n)]^n$ segue-se, então, que $S(z)x \in \mathcal{D}(A^n)$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, z \in \Delta(\alpha)$ e $\forall\, n \geq 1$, o que demonstra i).

Como, por hipótese, A é fechado tem-se, por (1.8.13), levando em conta que $AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I$,

$$AS(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda\zeta}\, AR\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right)\frac{d\lambda}{|z|} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda\zeta}\left[\frac{\lambda}{|z|}\, R\left(\frac{\lambda}{|z|}, A\right) - I\right]\frac{d\lambda}{|z|}, \ \forall\, z \in \Delta(\alpha).$$

Logo,

$$||AS(z)| \ \le \frac{M+1}{2\pi}\int_\Gamma e^{\mathrm{Re}\,\lambda\zeta}\,\frac{d\lambda}{|z|} \le M_1(\varepsilon)/|z|, \quad \forall\, z \in \Delta(\alpha),$$

o que demonstra a asserção para $n = 1$. Desta última desigualdade vem

$$||A^n S(z)|| = \left\|\left[AS\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n\right\| \le \left\|AS\left(\frac{z}{n}\right)\right\|^n \le \frac{n^n M_1(\varepsilon)^n}{|z|^n}, \ \ \forall\, z \in \Delta(\alpha),$$

o que demonstra ii).

Temos

$$||A[S(t) - S(s)]|| = \left\|A\int_s^t As(u)du\right\| = \left\|\int_s^t A^2 s(u)du\right\| \le$$
$$\le M_2(\varepsilon)\int_s^t \frac{du}{u^2} = M_2(\varepsilon)(t-s)/st,$$

o que demonstra iii).

1.8.9 Teorema. *Seja S um aemigrupo de classe C_0, holomorfo e uniformemente limitado em um setor $\Delta(\alpha)$, $0 < \alpha \le \pi/2$, e A o gerador infinitesimal de sua restrição a $\mathbb{R}^+$. Então, $\forall\, \varepsilon > 0$ existem constantes θ_ε e M_ε positivas tais que $A - \varepsilon I \in (\theta_\varepsilon, M_\varepsilon)$.*

Demonstração: Se $\varepsilon > 0$, $\varepsilon + i\tau \in \rho(A)$ pois S é, por hipótese, uniformemente limitado. Assim

$$R(\varepsilon + i\tau, A) = \int_0^\infty e^{-(\varepsilon+i\tau)t}\, S(t)\, dt.$$

Podemos substituir a curva de integração dessa integral, que é o eixo real não negativo, por um raio $z = u\,e^{-i\Phi}$, $0 < |\Phi| < \alpha$. Com efeito, se $\tau > 0$ tomemos $\Phi > 0$ tal que $\Phi < \alpha$ e designemos por $\widehat{PQ}$ e $\widehat{AB}$ os arcos das circunferências de centro no ponto 0 e raios ρ e τ, respectivamente, $\rho < \tau$, compreendidos entre os raios $\mathbb{R}^+$ e $u\,e^{i\Phi}$. Se C é o contorno composto dos arcos $\widehat{PQ}$ e $\widehat{AB}$ e dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{QB}$ de $\mathbb{R}^+$ e $u\,e^{-i\Phi}$, respectivamente, orientado no sentido de A para B, temos, pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_C e^{-(\varepsilon+i\tau)z}\, S(z)\, dz = 0,$$

uma vez que, por hipótese, S é holomorfo em $\Delta(\alpha)$. Como a equação de $\widehat{AB}$ é $z = \tau e^{-i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \Phi$, temos, supondo $||S(z)|| \leq M$, $z \in \Delta(\alpha)$, $M \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\widehat{AB}} e^{-(\varepsilon+i\tau)z}\, S(z)\, dz \right\| = \left\| \int_0^{\Phi} e^{-(\varepsilon+i\tau)\tau e^{i\varphi}}\, S(\tau e^{-\tau\varphi}) d(\tau e^{i\varphi}) \right\| \leq \\
&\leq M\tau \int_0^{\Phi} e^{-(\varepsilon\cos\varphi + \tau \operatorname{sen}\varphi)\tau}\, d\varphi \leq M\, \tau e^{-\tau\varepsilon\cos\Phi} \int_0^{\Phi} d\varphi = \\
&= M\, \tau \Phi e^{-\tau\varepsilon\cos\Phi}.
\end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} e^{-(\varepsilon+i\tau)z}\, S(z)\, dz \to 0$ quando $\tau \to \infty$. Analogamente,

$$\left\| \int_{\widehat{PQ}} e^{-(\varepsilon+i\tau)z}\, S(z) dz \right\| \leq M\rho\Phi e^{-\rho\varepsilon\cos\Phi} \to 0 \text{ quando } \rho \to \infty.$$

Desse modo, se $\tau > 0$ e $0 < \Phi < \alpha$, então

$$R(\varepsilon + i\tau, A) = \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon+i\tau)t}\, S(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon+i\tau)ue^{-i\Phi}} S(ue^{-i\Phi}) e^{-i\Phi}\, du.$$

Se $\tau < 0$ tomamos $\Phi < 0$ tal que $|\Phi| < \alpha$ e a argumentação é a mesma.

A seguir, seja $\tau > 0$ e $0 < \Phi < \alpha$. Tem-se

$$\begin{aligned}
||R(\varepsilon + i\tau, A)|| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon\cos\Phi + \tau\operatorname{sen}\Phi)u}\, du \leq \frac{M}{\varepsilon\cos\Phi + \tau\operatorname{sen}\Phi} \leq \\
\leq \frac{M}{\tau\operatorname{sen}\Phi} = \frac{M_1}{\tau}\cdot
\end{aligned}$$

Analogamente, se $\tau < 0$ e $\Phi < 0$, $|\Phi| < \alpha$, tem-se,

$$||R * \varepsilon + i\tau, A)|| \leq \frac{M}{\tau\operatorname{sen}\Phi} = \frac{M}{(-\tau)(-\operatorname{sen}\Phi)} = \frac{M_2}{-\tau}\cdot$$

Logo,

$$||R(\varepsilon + i\tau, A)|| \leq \frac{M_2}{|\tau|} \tag{1.8.16}$$

onde M_3 é uma constante positiva. Além disto, pelo Teorema A.1.2 do Apêndice, se $\varepsilon + i\tau - \mu||R(\varepsilon + i\tau, A)|| \leq k < 1$, então $\mu \in \rho(A)$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon + i\tau - \mu)^n\, R(\varepsilon + i\tau, A)^{n+1}$$

converge e sua soma é $R(\mu, A)$. Tendo em vista (1.8.16), isto se dá, pois, se μ é tal que $|\varepsilon + i\tau - \mu \dfrac{M_3}{|\tau|} \leq \dfrac{1}{2}$ e em particular, se $\mu = \sigma + i\tau$ e $|\varepsilon - \sigma| < \dfrac{|\tau|}{2M_3}\cdot$ Portanto, pondo

$$\Delta_1 = \left\{ \mu \in \mathbb{C};\ \mu = \sigma_i\tau, |\sigma| < \frac{|\tau|}{2M_3} \right\},$$

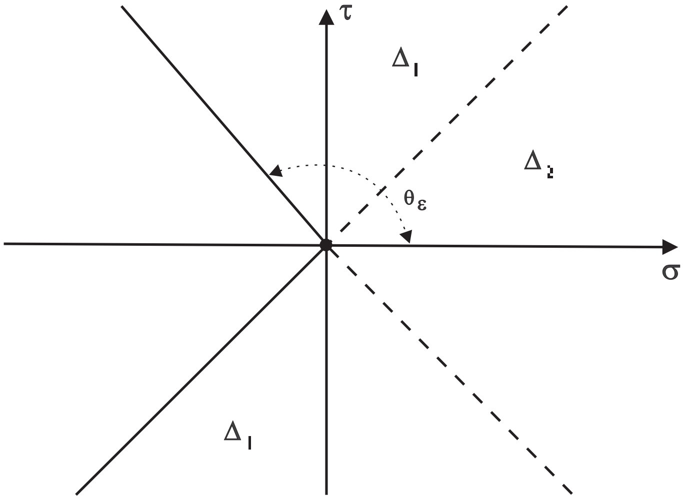

Figura 4

tem-se que, se $\mu = \sigma + i\tau \in \Delta_1 + \varepsilon$, então $\mu \in \rho(A)$ e $||R(\mu, A)|| \leq 2M_3/|\tau|$. Daí resulta que se $\lambda \in \Delta_1$ e, portanto, $\lambda+\varepsilon \in \Delta_1+\varepsilon$, então $\lambda+\varepsilon \in \rho(A)$ e $||R(\lambda+\varepsilon, A)|| \leq 2M_3/|\tau|$ ou equivalentemente, $||R(\lambda, A-\varepsilon I)|| \leq 2M_3/|\tau|$. Além disto, em Δ_1 temos $|\sigma|; |\tau| < 1/2M_3$, donde $(\sigma^2 + \tau^2)/\tau^2 < (1 + 4M_3^2)$ e, portanto, $2M_3/|\tau| \leq C|\lambda|$, onde C é uma constante positiva. Logo,

$$||R(\lambda, A - \varepsilon I)|| \leq \frac{2M_3}{|\tau|} \leq \frac{C}{|\lambda|} \quad \forall\, \lambda \in \Delta_1\,. \tag{1.8.17}$$

Analogamente, pondo

$$\Delta_2 = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda = \sigma + i\tau,\ \lambda \neq 0,\ \sigma \geq |\tau|/2M_3\},$$

tem-se

$$\frac{1}{\sigma} \leq \frac{C}{|\lambda|} \quad \forall\, \lambda = \sigma + i\tau \in \Delta_2\,. \tag{1.8.18}$$

Como S é por hipótese, uniformemente limitado tem-se, em particular, $||S(t)|| \leq M$, $t \geq 0$. Logo, designando por $\widetilde{S}$ o semigrupo gerado por $A - \varepsilon I$ tem-se, de acordo com o Exemplo 1.2.12-4),

$$||\widetilde{S}(t)|| = ||e^{-\varepsilon t}\, S(t)|| \leq e^{\varepsilon t}\, M \leq M$$

e, portanto,

$$||R(\lambda, A - \varepsilon I|| \leq \int_0^\infty e^{-\sigma t}\, ||\widetilde{S}(t)||\, dt \leq \frac{M}{\sigma} \cdot \tag{1.8.19}$$

para todo $\lambda = \sigma + i\tau$ tal que $\sigma > 0$ e, em particular, para $\lambda \in \Delta_2$. Logo, por (1.8.18) e (1.8.19),

$$||R(\lambda, A - \varepsilon I|| \leq \frac{M}{\sigma} \leq \frac{MC}{|\lambda|} \quad \forall\, \lambda \in \Delta_2 \tag{1.8.20}$$

e, pondo $MC = M_\varepsilon$, temos por (1.8.17) e (1.8.20),

$$||R(\lambda, A - \varepsilon I|| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \quad \forall\, \Delta_1 \cup \Delta_2\,,$$

uma vez que $M \geq 1$. Daí se $\theta_\varepsilon = \text{arctg}(-2M_3)$, então $\pi/2 < \theta_\varepsilon < \pi$ e $\Delta(\theta_\varepsilon) = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Portanto, $\Delta(\theta_\varepsilon) \subset \rho(A - \varepsilon I)$ e $||R(\lambda, A - \varepsilon I|| \leq M_\varepsilon/|\lambda|\ \forall\, \lambda \in \Delta(\theta_\varepsilon)$, o que completa a demonstração uma vez que, obviamente, $A - \varepsilon I$ é fechado e densamente definido.

1.8.10 Será mostrado, agora, que os operadores definidos por (1.4.23) são essencialmente, geradores infinitesimais de semigrupos holomorfos.

A seguinte notação será usada:

a) Seja A um operador linear de um espaço de Hilbert, X. Com $\nu(A)$ será representada a *imagem numérica* de A, i.e.,

$$\nu(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda = (Ax, x),\ x \in \mathcal{D}(A),\ ||x|| = 1\}.$$

b) Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Com $\delta(\lambda, \Gamma)$ será representada a distância de λ a Γ, i.e.,

$$\delta(\lambda, \Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \{|\lambda - \gamma|\}.$$

1.8.11 Lema. *Seja A um operador linear de um espaço de Hilbert, X. Se $\rho(A) \cap (\mathbb{C}\backslash\overline{\nu(A)}) \neq \varnothing$ então:*

i) $||R(\lambda, A) \leq \dfrac{1}{\delta(\lambda, \overline{\nu(A)})}\,,\ \forall\, \lambda \in \rho(A) \cap (\mathbb{C}\backslash\overline{\nu(A)})$;

ii) *$\rho(A)$ contém toda componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\overline{\nu(A)}$ cuja interseção com $\rho(A)$ é não vazia.*

Demonstaçao: Para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, $||x|| = 1$, e cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tem-se, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\delta(\lambda, \overline{\nu(A)}) \leq |\lambda - (Ax, x)| = |((\lambda - A)x, x)| \leq ||(\lambda - A)||x.$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\nu(A)}$ e, portanto, $\delta(\lambda, \overline{\nu(A)}) = d > 0$, tem-se, pois, $||(\lambda - A)x|| \geq d$ para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ tal que $||x|| = 1$. Logo, $||(\lambda - A)x|| \geq d||x||$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$. Segue-se daí que se $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{C}\backslash\overline{\nu(A)}$, então

$$||x|| = ||(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}\, x|| \geq ||(\lambda - A)^{-1}\, x|| \quad \forall\, x \in \mathcal{I}(\lambda I - A).$$

Logo

$$||R(\lambda, A)|\ \leq \frac{1}{d}, \quad \forall\, \lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{C}\backslash\overline{\nu(A)} \tag{1.8.21}$$

o que demonstra i). Seja Γ uma componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\overline{\nu(A)}$ tal que $\rho(A) \cap \Gamma \neq \varnothing$. Então $\rho(A) \cap \Gamma$ é, obviamente, um subconjunto relativamente aberto de Γ. Além disto, seja $\lambda \in \Gamma$ e $\lambda^n \in \rho(A) \cap \Gamma$ tal que $\lambda_n \to \lambda$. Como de $\lambda \in \Gamma$ vem $\delta(\lambda, \overline{\nu(A)}) > 0$, segue-se que existe um n_0 tal que $\forall\, n > n_0$ tem-se $|\lambda - \lambda_n| < \dfrac{1}{2}\,\delta(\lambda, \overline{\nu(A)})$ e, portanto,

$$|\lambda_n - \lambda| < \delta(\lambda, \overline{\nu(A)}),$$

donde, por i)

$$|\lambda_n - \lambda|\, ||R(\lambda_n, A)|| < 1.$$

Logo, $\lambda \in \rho(A)$ e, assim, $\rho(A) \cap \Gamma$ é relativamente fechado em Γ. Como Γ é conexo, $\rho(A) \cap \Gamma = \Gamma$, donde $\Gamma \subset \rho(A)$, o que demonstra ii).

1.8.12 Teorema. *Seja L o operador de $L^2(\Omega)$ definido por* (1.4.23). *Então para cada $\gamma \geq \gamma_0$, existem constantes θ_γ e M_γ tais que $-(L + \gamma I) \in (\theta_\gamma, M_\gamma)$.*

Demonstração: Ponhamos, para simplificar a escrita, $L_\gamma = L + \gamma I$, $\gamma \geq \gamma_0$. Pelo Teorema 1.4.24, $-L_\gamma$ é fechado e densamente definido, i.e., $-L_\gamma$ satisfaz a condição i) da Definição 1.8.4. Pela Proposição 1.4.23,

$$\operatorname{Re}(L_\gamma\, u, u) \geq c_0 ||u||_m^2, \quad c_0 > 0,$$

e

$$|\operatorname{Im}(L_\gamma\, u, u)| \leq |(L_\gamma\, u, u)| \leq k ||u||_m^2, \quad k \geq 0,$$

onde, com $\operatorname{Im} z$ indica-se a parte imaginária do complexo z. Portanto, $(L_\gamma\, u, u)$ é um número complexo do primeiro ou quarto quadrante e

$$|\arg(L_\gamma\, u, u)| = \operatorname{arctg} \frac{|\operatorname{Im}(L_\gamma\, u, u)|}{\operatorname{Re}(L_\gamma\, u, u)} \leq \operatorname{arctg} \frac{k||u||_m^2}{c_0||u||_m^2} = \operatorname{arctg} \frac{k}{c_0} < \alpha_0 < \frac{\pi}{2},$$

visto que $c_0 > 0$. Portanto, $\overline{\nu(L_\gamma)} \subset \Delta(\alpha_0)$ e, como $\nu(-L_\gamma) = -\nu(L_\gamma)$, tem-se $\overline{\nu(-L_\gamma)} \subset \mathbb{C} \backslash \Delta(\pi - \alpha_0)$. Como, pelo Teorema 1.4.24 e a Proposição 1.4.9,$-L_\gamma \in G(1, 0)$, de $\operatorname{Re} \lambda > 0$ vem $\lambda \in \rho(-L_\gamma)$. Logo,

$$\rho(-L_\gamma) \cap (\mathbb{C} \backslash \overline{\nu(-L_\gamma)}) \neq \varnothing.$$

Pelo Lema 1.8.11 segue-se, então, que $\rho(-L_\gamma)$ contém toda componente conexa de $\mathbb{C} \backslash \overline{\nu(-L_\gamma)}$ cuja interseção com $\rho(-L_\gamma)$ é não vazia. Mas se θ_γ é tal que $\dfrac{\pi}{2} < \theta_\gamma < \pi - \alpha_0$, então

$$\rho(-L_\gamma) \cap \Delta(\theta_\gamma) \neq \varnothing$$

e como $\Delta(\theta_\gamma)$ é conexo e $\Delta(\theta_\gamma) \subset \mathbb{C} \backslash \overline{\nu(-L_\gamma)}$ segue-se que, $\Delta(\theta_\gamma) \subset \rho(-L_\gamma)$, e assim, $-L_\gamma$ satisfaz também a condição ii) da Definição 1.8.4. Resta apenas mostrar que satisfaz iii). Seja, para isto, $\lambda \in \Delta(\theta_\gamma)$. Se $|\arg \lambda| \leq \dfrac{\pi}{2} - \alpha_0$, então $|\lambda| \leq \delta(\lambda, \overline{\nu(-L_\gamma)})$. Se $|\arg \lambda| > \dfrac{\pi}{2} - \alpha_0$ então

$$\delta(\lambda, \overline{\nu(-L_\gamma)}) \geq |\lambda| \operatorname{sen}(\pi - \alpha_0 - |\arg \lambda|) \geq |\lambda| \operatorname{sen}(\pi - \alpha_0 - \theta_\gamma).$$

Em ambos os casos tem-se, então,

$$\delta(\lambda, \overline{\nu(-L_\gamma)}) \geq |\lambda| \operatorname{sen}(\pi - \alpha_0 - \theta_\gamma)$$

e daí por i) do Lema 1.8.11,

$$||R(\lambda, -L_\gamma)|| \leq \frac{1}{\delta(\lambda, \overline{\nu(-L_\gamma)})} \leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha_0 - \theta_\gamma)} = \frac{M_\gamma}{|\lambda|},$$

para todo $\lambda \in \Delta(\theta_\gamma)$, onde $M_\gamma = 1/\operatorname{sen}(\pi - \alpha_0 - \theta_\gamma)$, o que completa a demonstração.

1.8.13 Corolário. *Para cada $\varepsilon > 0$, existem constantes θ_ve e M_ε tais que $\Delta - \varepsilon I \in (\theta_\varepsilon, M_\varepsilon)$, onde Δ é o operador definido por* (1.4.24).

Com efeito, por (1.4.25) a imagem numérica de $-\Delta$ está contida em $\mathbb{R}^+$ e, portanto, $\overline{\nu(\Delta)} \subset \mathbb{R}^-$. O corolário segue, então, do Teorema 1.8.12.

1.9 Teoria da Perturbação

1.9.1 Vamos agora estudar o comportamenteo dos semigrupos quando seu gerador infinitesimal é perturbado por outro operador linear.

1.9.2 Teorema. *Seja $A \in G(1,0)$ e B dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade. Se $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ e existem constantes a e b, $0 \leq a < 1$ e $b \geq 0$ tais que*

$$||Bx|| \leq a||Ax|| + b||x|| \quad \forall ??? \in \mathcal{D}(A), \tag{1.9.1}$$

então $A + B \in G(1,0)$.

Demonstração: Como $A \in G(1,0)$, A é dissipativo relativametne a toda aplicação dualidade (Teorema 1.4.13). Seja B dissipativo relativamente a j. Então $A + B$ é dissipativo relativamente a j, como é óbvio. Além disto, $\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A)$ é denso em X. Portanto, pelo Teorema 1.4.13, para demonstrar que $A + B \in G(1,0)$ é bastante mostrar que $\mathcal{I}(\lambda - (A + B)) = X$, para algum $\lambda > 0$. Mas, como $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e de $\lambda > 0$ vem $\lambda \in \rho(A)$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}[\lambda - (A + B)] &= \mathcal{I}[(\lambda - (A + B))(\lambda - A)^{-1}] = \mathcal{I}[I - B(\lambda - A)^{-1}] = \\ &= \mathcal{I}[I - BR(\lambda, A)],\end{aligned}$$

donde é bastante demonstrar que, para algum $\lambda > 0$, $I - BR(\lambda, A)$ é invertível em $\mathcal{L}(X)$ e, portanto, que $||BR(\lambda, A)|| < 1$. Mas, por (1.9.1),

$$\begin{aligned}||BR(\lambda, A)x|| &\leq a||AR(\lambda, A)x|| + b||R(\lambda, A)x|| = \\ &= a||[\lambda R(\lambda, A) - I]x|| + b||R(\lambda, A)x|| \leq 2a||x|| + \\ &+ \frac{b}{\lambda}||x|| = \left(2a + \frac{b}{\lambda}\right)||x||, \ \forall x \in X.\end{aligned}$$

Seja $a < 1/2$. Então, para λ suficientemente grande, $2a + b/\lambda < 1$, i.e., $||BR(\lambda, A)|| < 1$. Portanto se (1.9.1) for satisfeita para $a < 1/2$, então $A + B \in G(1, 0)$, isto é, o teorema é válido nesse caso particular. Para demonstrá-lo no caso geral, seja α um número tal que $0 \leq \alpha \leq 1$ e seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Teremos

$$||(A + \alpha B)x|| \geq ||Ax|| - \alpha||Bx|| \geq ||Ax|| - ||Bx|| \geq (1 - a)||Ax|| - b||x||$$

e se o inteiro n é tal que $a/n < (1 - a)/4$,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{n}\,Bx\right\| &\leq \frac{a}{n}\,||Ax|| + \frac{b}{n}\,||x|| \leq \frac{1-a}{4}\,||Ax|| + \frac{b}{n}\,||x|| \leq \\ &\leq \frac{1}{4}\,||(A + \alpha B)x|| + \left(\frac{b}{n} + \frac{b}{4}\right)||x||. \end{aligned}$$

Portanto, pelo que já foi demonstrado, se $A + \alpha B \in G(1, 0)$ o mesmo acontece com $A + \alpha B + (1/n)B$. Mas $A \in G(1, 0)$, por hipótese, donde $A + (1/n)B \in G(1, 0)$; daí, pelo mesmo argumento, $A + (2/n)B \in G(1, 0)$ e, deste modo, esse argumento repetido n vezes nos dá $A + B = A + (n/n)B \in G(1, 0)$, q.e.d..

1.9.3 Proposição. *Se $A \in G(1, 0)$ e $B \in \mathcal{L}(X)$ então $A + B \in G(1, ||B||)$.*

Demonstração: Para cada aplicação dualidade, j, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle (B - ||B||I)x, j(x)\rangle &= \mathrm{Re}\langle Bx, j(x)\rangle - ||B||\,||x||^2 \leq \\ &\leq ||B||\,||x||^2 - ||B||\,||x||^2 = 0, \end{aligned}$$

i.e., $B - ||B||I$ é dissipativo. Como $||(B - ||B||I)x|| \leq 2||B||\,||x|| \;\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, A e $B - ||B||I$ satisfazem as hipóteses do Teorema 1.9.2 com $a = 0$ e $b = 2||B||$. Segue-se que $A + B - ||B||I \in G(1, 0)$ e, pela Proposição 1.4.9, que $A + B \in G(1, ||B||)$, q.e.d..

1.9.4 Lema. *Se $A \in G(M, 0)$, então existe uma norma, $|\cdot|$, em X tal que*

$$||x|| \leq |x| \leq M||x||. \tag{1.9.2}$$

e na qual $A \in G(1, 0)$.

Demonstração: Se X é o semigrupo gerado por A temos

$$||S(t)|| \leq M, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{1.9.3}$$

Ponhamos

$$|x| = \sup_{t \geq 0} ||S(t)x||. \tag{1.9.4}$$

É imediato que $|\cdot|$ é uma norma em X; além disto,

$$||x|| = ||S(0)x|| \leq \sup_{t \geq 0} ||S(t)x|| = |x|$$

e, por (1.9.3),

$$|x| = \sup_{t\geq 0} ||S(t)x|| \leq \sup_{t\geq 0} ||S(t)||\,||x|| \leq M||x||,$$

o que demonstra (1.9.2). Com X munido da norma $|\cdot|$, $S(t)$ é uma contração $\forall\, t \geq 0$ visto que de (1.9.4) vem

$$|S(t)x| = \sup_{\tau\geq 0} ||S(\tau)S(t)x|| = \sup_{\tau\geq 0} ||S(t+\tau)x|| \leq \sup_{t\geq 0} ||S(t)x|| = |x|,$$

i.e., $A \in G(1,0)$ estando X munido da norma $|\cdot|$.

1.9.5 Teorema. *Se $A \in G(m,w)$ e $B \in \mathcal{L}(X)$, então $A + B \in G(m, w + M||B||)$.*

Demonstração: Seja S semigrupo gerado por A e consideremos o semigrupo $\widetilde{S} = e^{-wt}\, S$. Seu gerador infinitesimal é, pelo Exemplo 4 de 1.2.12, $\widetilde{A} = A - wI$. Pela Proposição 1.4.9, $\widetilde{A} \in G(M,0)$. Pelo Lema 1.9.4 existe uma norma $|\cdot|$ em X tal que

$$||x|| \leq |x| \leq M||x|| \quad \forall\, x \in X \text{ e } \widetilde{A} \in G(1,0). \tag{1.9.5}$$

As normas $|\cdot|$ e $||\cdot||$ sendo, por (1.9.5), equivalentes, $B \in \mathcal{L}(X)$ estando X munido da norma $|\cdot|$. Logo, pela Proposição .9.3, $\widetilde{A} + B \in G(1, |B|)$ donde, pela Proposição 1.4.9, $\widetilde{A} + B - |B|I \in G(1,0)$, isto é, $A + B - (w + |B|)I \in G(1,0)$. Novamente pela Proposição 1.4.9, $A + B \in G(1, w + |B|)$. Daí e de (1.9.5) vem

$$\begin{aligned} ||R(\lambda, A+B)^n x|| &\leq |R(\lambda, A+B)^n x| \leq |R(\lambda, A+B)^n|\,|x| \leq \\ &\leq \frac{M||x||}{[\lambda - (w + |B|)]^n}, \forall\, \lambda > w + |B|, \end{aligned}$$

$\forall\, x \in X$. Logo

$$||R(\lambda, A+B)^n|| \leq \frac{M}{[\lambda - (w+|B|)]^n}, \quad \lambda > w + |B|. \tag{1.9.6}$$

Por fim, como de

$$|Bx| \leq M||Bx|| \leq M||B||\,||x|| \leq M||B||\,|x|$$

vem $|B| \leq M||B||$ e, portanto, de $\lambda > w + M||B||$ vem $\lambda > w + |B|$, tem-se, por (1.9.6),

$$||R(\lambda, A+B)^n|| \leq \frac{M}{[\lambda - (w + M||B||)]^n}, \quad \lambda > w + M||B||,$$

i.e., $A + B \in G(M, w + M||B||)$, q.e.d..

1.9.6 Teorema. *Seja $A \in (\theta, M)$ e B um operador linear fechado tal que*

1) $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$

2) $||Bx|| \leq a||Ax|| + b||x|| \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$,

onde a e b são constantes, $b \geq 0$ e $0 \leq a < 1/(M+1)$. Então, existem constantes δ, θ' e M' tais que $A + B - \delta I \in (\theta', M')$.

Demonstração: Seja θ' tal que $\dfrac{\pi}{2} < \theta' \leq \theta$, $\theta' < \pi$. Observe-se inicialmente que existem duas constantes positivas α e β para as quais as desigualdades

$$\mu \leq \alpha|\lambda + \mu| \tag{1.9.7}$$

$$|\lambda| \leq \beta|\lambda + \mu| \tag{1.9.8}$$

são válidas para todo $\lambda \in \Delta(\theta')$ e todo $\mu > 0$. Ainda mais, para todo $\lambda \in \Delta(\theta')$ e todo $\mu > 0$ tem-se $\lambda + \mu \in \Delta(\theta')$. Logo, como $\Delta(\theta') \subset \rho(A)$ tem-se, por 2), $\forall\, x \in X$ e $\forall\, \lambda \in \Delta(\theta')$,

$$\begin{aligned} ||BR(\lambda+\mu, A)x|| &\leq a||AR(\lambda+\mu, A)x|| + \\ + b||R(\lambda+\mu, A)x|| &\leq ||((\lambda+\mu)R(\lambda+\mu, A) - I)x|| + \\ + \frac{bM}{|\lambda+\mu|}\, ||x|| &\left(a(M+1) + \frac{bM}{|\lambda+\mu|} \right) ||x||. \end{aligned} \tag{1.9.9}$$

De (1.9.7) vem $1/|\lambda + \mu| \leq \alpha/\mu \to 0$ quando $\mu \to \infty$, donde existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{bM}{|\lambda + \delta|} < 1 - a(M+1) \quad \forall\, \lambda \in \Delta(\theta').$$

Daí e de (1.9.9) vem $||BR(\lambda + \delta, A)|| \leq c < 1$. Portanto $I - ||BR(\lambda + \delta, A)||$ é invertível e

$$||[I - BR(\lambda+\delta, A)]^{-1}|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||BR(\lambda+\delta, A)||^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c}\cdot \tag{1.9.10}$$

Além disto tem-se $\forall\, \lambda \in \Delta(\theta')$

$$\begin{aligned} R(\lambda+\delta, A)[I - BR(\lambda+\delta, A)]^{-1} &= [I - BR(\lambda+\delta, A)(\lambda+\delta - A)]^{-1} \\ &= (\lambda + \delta - A - B)^{-1} = R(\lambda+\delta, A+B), \end{aligned}$$

donde resulta que $\lambda + \delta \in \rho(A + B)$ e, portanto, $\lambda \in \rho(A + B - \delta I)$. Como $A \in (\theta, M)$ segue-se, então, tendo em vista (1.9.8) e (1.9.10), que $\forall\, \lambda \in \Delta(\theta')$ tem-se

$$\begin{aligned} ||R(\lambda, A+B-\delta I)|| &= ||R(\lambda+\delta, A+B)|| \leq \\ &\leq ||R(\lambda+\delta, A)||| \cdot ||[I - BR(\lambda+\delta, A)]^{-1}|| \\ &\leq \frac{M}{|\lambda+\delta|} \cdot \frac{1}{1-c} \leq \frac{M\beta}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1-c} = \frac{M'}{|\lambda|}, \end{aligned}$$

onde $M' = M\beta/(1-c)$. Além disto, $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A)$ é denso e $A+B$ é fechado. Logo $A + B - \delta I \in (\theta', M')$.

1.9.7 Corolário. *Se $A \in (\theta, M)$ e $B \in \mathcal{L}(X)$ então existem δ, θ' e M' tais que $A + B - \delta I \in (\theta', M')$.*

Demonstração: Caso particular do Teorema 1.9.6 com $a = 0$ e $b = ||B||$.

1.9.8 Corolário. *Se* $A \in (\theta, M)$ *e* B *é um operador linear fechado tal que* $||Bx|| \leq a||Ax||$ *para todo* $x \in \mathcal{D}(A)$ *e* a *é uma constante tal que* $0 \leq a < 1/(M+1)$, *então existem constantes* δ, θ' *e* M' *tais que* $A + B - \delta I \in (\theta', M')$.

Demonstração: Caso particular do Teorema 1.9.6 com $b = 0$.

Capítulo 2

Problema de Cauchy Abstrato

2.1 A Equação Homogênea

2.1.1 Seja X um espaço de Banach, A um operador linear de X e consideremos, para cada $x \in X$ o problema de Cauchy abstrato,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t) \quad t > 0 \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Por *solução* de (2.1.1) entende-se toda função $u\colon \mathbb{R}^+ \to X$, contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, tal que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t > 0$ e que satisfaz (2.1.1). A segunda equação que figura em (2.1.1) será dita *condição inicial* do problema e x, seu *valor inicial.*

2.1.2 Teorema. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 então, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$,* (2.1.1) *tem uma só solução, continuamente diferenciável em todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Com efeito, a existência e a diferenciabilidade da solução resultam da Proposição 1.2.10. Seja A gerador do semigrupo de classe C_0, S, e $u(t)$ uma solução de (2.1.1). Se $0 \leq s \leq t < \infty$ tem-se, por i) da Proposição 1.2.10,

$$\frac{d}{ds}\left(S(t-s)u(s)\right) = S(t-s)Au(s) - S(t-s)Au(s) = 0,$$

donde $S(t - s(y(s)$ é independente de s. Para $s = 0$, $S(t-s)u(s)$ toma o valor $S(t)x$ e para $s = t$, o valor $u(t)$. Logo $u(t) = S(t)x$, $\forall\, t \geq 0$.

Dos Teoremas 1.4.24 e 2.1.2 decorre, imediatamente, que $\forall\, u_0 \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0 \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

onde L é o operador definido em (1.4.23), tem uma única solução continuamente diferenciável em todo $t \geq 0$. Em particular $\forall\, u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

tem uma única solução, continuamente diferenciável em todo $t \geq 0$. A recíproca do Teorema 2.1.2 será examinada a seguir. Inicialmente alguns lemas.

2.1.3 Seja A um operador linear fechado de X. Como ficou estabelecido no Lema 1.2.15, pondo, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$|x| = ||x|| + ||Ax|| \tag{2.1.2}$$

o funcional $|\cdot|$ é uma norma em $\mathcal{D}(A)$, a norma do gráfico, aqui representada simplesmente por $|\cdot|$, com a qual $\mathcal{D}(A)$ é um espaço de Banach. Portanto, no que segue, $|x| = ||x|| + ||Ax||\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$.

Observe-se que, se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 e $x \in \mathcal{D}(A)$ então, pelo Teorema 2.1.2, a solução do problema (2.1.1) satisfaz a condição

$$u \in C([0,\infty); [\mathcal{D}(A)]) \cap C^1([0,\infty); X).$$

2.1.4 Lema. *Seja A um operador linear fechado. Vamos supor que, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, o sistema* (2.1.1) *tenha uma só solução $u(x,t)$, continuamente diferenciável em* $[0,\infty)$. *Então, para cada $\tau \in \mathbb{N}$, existe uma constante M_τ tal que*

$$\sup_{0\leq t\leq \tau} |u(t,x)| \leq M_\tau |x|. \tag{2.1.3}$$

Demonstração: Como A é fechado podemos introduzir em $\mathcal{D}(A)$ a norma do gráfico. A seguir vamos definir uma aplicação

$$T_\tau\colon [\mathcal{D}(A)] \to C([0,\tau]; \mathcal{D}(A)]) \tag{2.1.4}$$

Pondo $T_\tau x = u(t,x)$, $0 \leq t \leq \tau$, onde $C([0,\tau]; [\mathcal{D}(A)])$ é o espaço das funções $u\colon [0,\tau] \to [\mathcal{D}(A)]$, contínuas, munido da norma do supremo. Se $x, y \in [\mathcal{D}(A)]$ e $v(t) = \alpha u(t,x) + \beta u(t,y)$, então

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= \alpha\, \frac{du(t,x)}{dt} - \beta\, \frac{du(t,y)}{dt} = \\ &= \alpha\, Au(t,x) - .\beta\, Au(t,y) = Av(t).\ v(0) = \alpha x - \beta y, \end{aligned}$$

isto é, $v(t)$ é a solução correspondente ao valor inicial $\alpha x + \beta y$. Mas então, pela unicidade da solução, $u(t, \alpha x + \beta y) = \alpha u(t,x) + \beta u(t,y)$ donde T_τ é linear. Seja $x_n \to x$ em $[\mathcal{D}(A)]$ e suponhamos que $T_\tau x_n \to v$ em $C([0,\tau]; [\mathcal{D}(A)])$. Isto significa que, quando $n \to \infty$,

$u(t, x_n) \to v(t)$ e $Au(t, x_n) \to Av(t)$ e, portanto, $du(t, x_n)/dt \to Av(t)$, na norma de X, uniformemente em $[0, \tau]$. Daí resulta que $v(t)$ é uniformemente diferenciável em $[0, \tau]$ e $dv(t)/dt = Av(t)$. Vamos estender v a $\mathbb{R}^+$ definindo v em (τ, ∞) por $v(t) = u(t-\tau, v(\tau))$; então $v(t)$ é uma solução de (2.1.1) com valor inicial x e continuamente diferenciável em $[0, \infty)$. Logo $v(t) = u(t, x)$, pela hipótese da unicidade, donde T_τ é fechada. Segue-se daí, pelo Teorema do Gráfico Fechado, que T_τ é limitada, donde existe M_τ tal que

$$\sup_{0 \le t \le \tau} |u(t, x)| \le M_\tau |x|.$$

2.1.5 Lema. *Seja A um operador linear fechado, densamente definido e tal que $\rho(A) \neq \varnothing$. Então $\mathcal{D}(A^2)$ é denso em X.*

Demonstração: Seja $\lambda \in \rho(A)$. Então existe $(\lambda - A)^{-1}$ e $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Como $(\lambda - A)^{-1}X = \mathcal{D}(A)$ tem-se $(\lambda - A)^{-1}\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$. Logo, de $y \in (\lambda - A)^{-1}\mathcal{D}(A)$ vem $y \in \mathcal{D}(A)$ e, se $y = (\lambda - A)^{-1}x$, então

$$(\lambda - A)y = (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x = x \in \mathcal{D}(A),$$

donde $Ay \in \mathcal{D}(A)$. Segue-se que $y \in \mathcal{D}(A^2)$, i.e., $(\lambda - A)^{-1}\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^2)$. Como $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e os operadores lineares limitados transformam conjuntos densos em seus domínios em conjuntos densos em suas imagens, $\mathcal{D}(A^2)$ é denso em $\mathcal{D}(A)$, donde em X, q.e.d..

2.1.6 Teorema. *Seja A um operador linear fechado, densamente definido e tal que $\rho(A) \neq \varnothing$. Vamos supor que para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, o sistema* (2.1.1) *tenha uma e uma só solução, continuamente diferenciável em* $[0, \infty)$. *Então, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo, S, de classe C_0 e $S(t)x = u(t, x)$, onde $u(t, x)$ é a solução com valor inicial x.*

Demonstração. Vamos definir, para cada $t \ge 0$, $\widetilde{S}(t)\colon [\mathcal{D}(A)] \to [\mathcal{D}(A)]$ pondo $\widetilde{S}(t)x = u(t, x)$. Como no Lema 2.1.4, da unicidade da solução de (2.1.1) decorre que $\widetilde{S}(t)$ é, para cada $t \ge 0$, um operador linear. O Lema 2.1.4 implica que $\widetilde{S}(t)$ é limitado e as hipóteses sobre a derivabilidade e a continuidade implicam que

$$|\widetilde{S}(t)x - x| = |u(t, x) - u(0, x)| = ||u(t, x) - x|| + ||Au(t, x) - Ax|| \to 0$$

quando $t \to 0$, isto é, que $S(t)$ é fortemente contínuo relativamente à topologia de $[\mathcal{D}(A)]$. Além disto, $\widetilde{S}(0)x = u(0, x) = x$, $\forall\, x \in [\mathcal{D}(A)]$ e como de

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t+s, x) = Au(t+s, x), \\ u(0+s, x) = u(s, x) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{d}{du}\, u(t, u(s, x)) = Au(t, u(s, x)), \\ u(0, u(s, x)) = u(s, x) \end{cases}$$

vem, pela unicidade,

$$\widetilde{S}(t+s)x = u(t+s, x) = u(t, u(s, x)) = \widetilde{S}(t)\widetilde{S}(s)x, \ \forall\, x \in [\mathcal{D}(A)] \text{ e } t, s \geq 0,$$

segue-se que $\widetilde{S}$ é um semigrupo de classe C_0 no espaço de Banach $[\mathcal{D}(A)]$.

Vamos estender $\widetilde{S}(t)$ a X. Ponhamos, para $y \in \mathcal{D}(A^2)$,

$$v(t) = y + \int_0^t u(s, Ay)\, ds.$$

Teremos $v'(t) = u(t, Ay)$ e

$$u(t, Ay) - Ay = \int_0^t \frac{d}{ds}\, u(s, Ay)\, ds = \int_0^t Au(s, Ay)\, ds.$$

Logo,

$$v'(t) = Ay + \int_0^t Au(s, Ay)\, ds = Ay + A\int_0^t u(s, Ay)\, ds = Av(t)$$

e, como $v(0) = y$, v é a solução de (2.1.1) com valor inicial y. Portanto, $v(t) = u(t, y)$, pela unicidade da solução de (2.1.1). Mas, então, $Au(t, y) = v'(t) = u(t, Ay)$ ou seja

$$A\widetilde{S}(t)y = \widetilde{S}(t)Ay \quad \forall\, y \in \mathcal{D}(A^2). \tag{2.1.5}$$

Seja $x \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda \in \rho(A)$ ($\rho(A) \neq \varnothing$, por hipótese). Então $(\lambda - A)^{-1}$ existe e $(\lambda - A)^{-1}\,\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$. Logo, pondo $y = (\lambda - A)^{-1}x$, tem-se $y \in \mathcal{D}(A)$. Além disto, $(\lambda - A)y = (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x = x \in \mathcal{D}(A)$; logo $Ay \in \mathcal{D}(A)$ e, portanto, $y \in \mathcal{D}(A^2)$. Por (2.1.5) tem-se, então,

$$\begin{aligned} ||\widetilde{S}(t)x|| = ||\widetilde{S}(t)(\lambda - A)y|| = ||(\lambda - A)\widetilde{S}(t)y|| \leq M'|\widetilde{S}(t)y| \leq \\ \leq M^n\, e^{wt}|y| = M''\, e^{wt}(||y|| + ||Ay||). \end{aligned}$$

onde $w > w_0 = \inf\{\log|\widetilde{S}(t)|/t, t > 0\}$. Mas $y = (\lambda - A)^{-1}x = R(\lambda, A)x$ e, portanto,

$$||y|| = ||R(\lambda, A)x|| \leq ||R(\lambda, A)||\, ||x|| = M_1||x||.$$

Além disto, $Ay = \lambda y - x$, donde

$$||Ay|| = ||\lambda y - x|| \leq |\lambda|\, ||y|| + ||x|| \leq |\lambda|\, M_1||x|| + ||x|| = (\lambda M_1 + 1)||x||.$$

Logo,

$$||y|| + ||Ay|| \leq M_1||x|| + (|\lambda|\, M_1 + 1)||x|| = ((|\lambda| + 1)M_1 + 1)||x|| - M||x||$$

onde $M = M''((\lambda+1)M_1+1)$ e, assim,

$$||\widetilde{S}(t)x|| \leq M\,e^{wt}||x|| \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Como, por hipótese, $\mathcal{D}(A)$ é denso em X, segue-se daí que $\widetilde{S}(t)$ admite uma extensão linear limitada, $S(t)$, a todo o conjunto X. Portanto, $\forall\, t \geq 0$, $S(t)$ é um operador linear limitado de X e, como se vê imediatamente, $S\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo. Como $S(t)$ é extensão contínua de $\widetilde{S}(t)$ ainda se tem $||S(t)|| \leq M\,e^{wt}$. Daí, de $||\widetilde{S}(t)x - x|| \to 0$ quando $t \to 0^+$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$ e de $\mathcal{D}(A)$ denso em X, segue-se que $||S(t)x - x|| \to 0$ quando $t \to 0^+$, $\forall\, x \in X$, i.e., S é um semigrupo de classe C_0.

Vamos mostrar agora que o gerador infinitesimal de S é A. Seja B o gerador infinitesimal de S. Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então $S(t)x = \widetilde{S}(t)x = u(t,x)$. Logo,

$$\frac{d}{dt}\,S(t)x = AS(t)x \quad \forall\, t \geq 0$$

que, para $t = 0$, dá $A \subset B$. Por outro lado, por (2.1.5), temos para $y \in \mathcal{D}(A^2)$ e $A \subset B$,

$$AS(t)y = S(t)Ay = S(t)By$$

donde, se λ é tal que Re $\lambda > w$,

$$A\int_0^\infty e^{\lambda t}\,S(t)y\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,S(t)By\,dt$$

ou seja, $AR(\lambda,B)y = R(\lambda,B)By$ e, daí,

$$AR(\lambda,B)y = BR(\lambda,B)y \quad \forall\, y \in \mathcal{D}(A^2). \tag{2.1.6}$$

Mas, $BR(\lambda,B)$ é limitado, A é fechado e $\mathcal{D}(A^2)$ é denso em X, pelo Lema 2.1.5; logo (2.1.6) é válida para todo $y \in X$ e, então,

$$\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{I}(R(\lambda,B)) = \mathcal{D}(B)$$

e, portanto, $B \subset A$, q.e.d..

Quando A é o gerador infinitesimal de um semigrupo diferenciável, o Teorema 2.1.2 pode ser melhorado como se vê a seguir.

2.1.7 Teorema. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo diferenciável, então para cada $x \in X$,* (2.1.1) *tem uma única solução; se $x \in \mathcal{D}(A)$ a solução é continuamente diferenciável em todo $t \geq 0$.*

Com efeito, a existência da solução resulta do Teorema 1.3.3, a diferenciabilidade, da Proposição 1.2.10 e a unicidade é demonstrada como no Teorema 2.1.2.

Tendo em vista os Teoremas 1.4.24 e]1.8.12, segue-se pelo Teorema 2.1.7 que se $\gamma > \gamma_0$, então $\forall\, u_0 \in L^2(\Omega)$ o problema

$$\frac{du}{dt} + Lu + \gamma u = 0, \quad u(0) = u_0$$

tem uma única solução; se $u_0 \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ a solução é continuamente diferenciável para $t \geq 0$.

2.1.8 Aplicações:

1) **Equação de Ondas**. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições estipuladas em 1.4.16 e consideremos o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad (0, \infty \times \Omega & (2.1.7) \\ u = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty) \times \partial\Omega & (2.1.8) \\ u(0) = u_0\,, \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega, & (2.1.9) \end{cases}$$

onde, $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Vamos mostrar que existe uma única função, u, que satisfaz (2.1.7), (2.1.8) e (2.1.9) e

$$u \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); L^2(\Omega)).$$

Além disto,

$$||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} = ||\nabla u_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_0||^2_{L^2(\Omega)}\,, \quad \forall\, t \geq 0.$$

A equação (2.1.7) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty) \times \Omega \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty) \times \Omega \end{cases}$$

ou seja, à equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} - AU = 0,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}.$$

Sejam $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $U_1 = \binom{u_1}{v_1}$, $U_2 = \binom{u_2}{v_2}$ pontos de H. Levando em conta que, pela Desigualdade de Poincaré-Friedrichs (Medeiros [42]), a integral $\int_\Omega \nabla u_1\, \nabla u_2\, dx$ define um produto interno em $H_0^1(\Omega)$, equivalente ao definido na Observação 1.4.16, podemos definir um produto interno em H pondo

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega (\nabla u_1 \, \nabla u_2 + v_1 \, v_2)\, dx$$

e com ele H é um espaço de Hilbert. Ponhamos

$$\mathcal{D}(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

Então, $A\colon \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ e o sistema (2.1.7), (2.1.9) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - AU = 0 \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Temos

$$\begin{aligned} (AU_1, U_2) &= \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \int_\Omega (\nabla v_1 \nabla u_2 + v_2 \Delta u_2)\, dx = \\ &= -\int_\Omega (\nabla u_1 \nabla u_2 + v_1 \Delta u_2)\, dx = \\ &= -(U_1, AU_2) = (U_1, (-A)U_2), \end{aligned}$$

donde $A^+ = -A$. Logo, pelo Teorema de Stone, A é o gerador infinitesimal de um grupo unitário, S, de classe C_0. Portanto, pelo Teorema 2.1.2, o problema (2.1.10) tem uma única solução, $U(t) = S_+(t)U_0$, continuamente diferenciável para $t \geq 0$, isto é,

$$U \in C([0,\infty); [\mathcal{D}(A)]) \cap C^1([0,\infty); H) \tag{2.1.11}$$

e, além disto, U é uma isometria e, portanto,

$$||U(t)||_H = ||U_0||_H\,, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.1.12}$$

Como toda função de H satisfaz (2.1.8) segue-se de (2.1.11) que se $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, então u é a única função que satisfaz (2.1.7), (2.1.8) e (2.1.9) e

$$u \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); L^2(\Omega)).$$

Além disto, de (2.1.12) tem-se $||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||v(t)||^2_{L^2(\Omega)} = ||\nabla u_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_0||^2_{L^2(\Omega)}$, ou seja,

$$||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} = ||\nabla u_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_0||^2_{L^2(\Omega)}\,, \quad \forall\, t \geq 0,$$

pois, $v = \partial u / \partial t$.

Consideremos agora o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega & (2.1.13)\\ u(0) = u_0\,, \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega, & (2.1.14)\end{cases}$$

onde Ω é um aberto do espaço $\mathbb{R}^n$.

Como no caso já estudado, (2.1.13) é equivalente à equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} - AU = 0$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Seja $H = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ munido do produto interno definido por

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega (\nabla u_1 \nabla u_2 + u_1 u_2 + v_1 v_2)\,dx,$$

onde $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H$.

Com o produto interno assim definido, H é um espaço de Hilbert. Pondo $\mathcal{D}(A) = (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times H_0^1(\Omega))$ tem-se, para $U \in \mathcal{D}(A)$,

$$((-I + A)U, U) = (AU, U) - (U, U) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv + v\Delta u)\,dx -$$
$$- \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2 + v^2)\,dx = -\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2 + v^2 - uv)\,dx \le 0,$$

i.e., $-I + A$ é dissipativo. Além disto, se $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$, a equação $2U - AU = F$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2u - v = f \\ 2v - \Delta u = g. \end{cases}$$

ou seja, à equação $-\Delta u + 4u = 2f + g$, a qual tem uma solução, u, em $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ (Proposição 1.4.20 e o Teorema A.9.2 do Apêndice). Logo, $v = 2u - f \in H_0^1(\Omega)$ e, portanto, a equação

$$2U - AU = F$$

tem uma solução $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, em $\mathcal{D}(A)$, i.e., o operador $2I - A = I - (-I + A)$ é sobrejetivo. Como $\mathcal{D}(-I + A)$ é denso temos, pelo Teorema de Lumer-Phillips, $-I + A \in G(1, 0)$, donde $A \in G(1, 1)$, pela Proposição 1.4.9. Pelo Teorema 2.1.2 o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - AU = 0 \\ U(0) = U_0\,, \end{cases}$$

onde $U_0 \in \mathcal{D}(A)$, tem uma única solução U, continuamente diferenciável para $t \geq 0$, i.e., $U \in C([0,\infty);\mathcal{D}(A)]) \cap C^1([0,\infty);H)$. Logo, se $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma única função u tal que

$$u \in C([0,\infty);H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty);H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty).L^2(\Omega))$$

e que satisfaz (2.1.13) e (2.1.14). Além disto, multiplicando ambos os membros de (2.1.13) por $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ e integrando em Ω tem-se

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \int_\Omega (-\Delta u)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = 0.$$

Mas

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2},\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\,dx$$

e

$$\int_\Omega (-\Delta u)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \int_\Omega \nabla u \nabla\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \int_\Omega \nabla u\,\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla u\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = 0$$

ou seja

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \text{ constante.}$$

Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx + \int_\Omega |u_0|^2\,dx$$

exatamente como no caso em que Ω é limitado.

Com os mesmos argumentos chega-se a essas mesmas conclusões quando $\Omega = \mathbb{R}^n$. Nesse caso põe-se $H = H(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ e toma-se para $\mathcal{D}(A)$ o espaço $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$.

2) **Equação de Schrödinger.** Consideremos a equação de Schrödinger em $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{1}{i}\,\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - qu,$$

onde Δ é o Laplaciano e q é uma função real e mensurável em $\mathbb{R}^n$. Vamos definir, como nos Exemplos 1.5.10, os operadores A_1 e M_q de $L^2(\mathbb{R}^n)$ pondo $A_1 u = i\Delta u$, $u \in H^2(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(A_1)$ e $M_q u = qu \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(M_q) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); qu \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Os operadores $-iA_1$ e $-M_q$ são simétricos, donde $-iA_1 - M_q$ é simétrico e, se $\mathcal{D}(M_q) \supset H^2(\mathbb{R}^n)$, $-iA_1 - M_q$ é densamente definido. E, como será mostrado a seguir, com adequadas restrições à função q tem-se, não só, $\mathcal{D}(M_q) \supset H^2(\mathbb{R}^n)$ como, também, $\mathcal{I}(\lambda_0 - (-iA_1 - M_q)) = L^2(\mathbb{R}^n)$

para algum $\lambda_0 \in \rho(-iA_1 - M_q)$. Portanto, com apropriadas restrições a q, o operador $-iA_1 - M_q$ é auto-adjunto (Teorema A.1.7 do Apêndice), o mesmo acontecendo, pois, com o operador $iA_1 + M_q$, donde pela Nota 1.5.9, o operador $A_1 - iM_q$ gera um grupo unitário de classe C_0 . Resultará daí que, para cada $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$, a equação de Schrödinger tem uma única solução, u, com valor inicial u_0 e continuamente diferenciável para $t \geq 0$. Além disto, $||u(t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, $t \geq 0$.

Vamos nos restringir aos três casos a seguir.

a) $q(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

b) $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) i) $\mathcal{D}(M_q) \supset H^2(\mathbb{R}^n)$ e existem constantes a e b, $0 \leq a < 1$ tais que

$$||M_q u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq a||iA_1 u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + b||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, u \in H^2(\mathbb{R}^n);$$

ii) $q \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$.

No primeiro caso temos $M_q = 0$, donde $\mathcal{D}(M_q) = L^2(\mathbb{R}^n) \supset H^2(\mathbb{R}^n)$ e, como já foi visto no Exemplo 1.5.10-2), $\mathcal{I}(I - (-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)$,$1 \in \rho(-iA_1)$. Portanto, $\mathcal{I}(I - (-iA_1 - M_q)) = \mathcal{I}(I - (-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ com $\lambda_0 = 1 \in \rho(-iA_1) = \rho(-iA_1 - M_q)$.

No segundo caso, M_q é um operador linear limitado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ pois, nesse caso, de $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vem $M_q u = qu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$||M_q u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |M_q u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |qu|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq ||q||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\, ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

i.e., M_q é limitado e $||M_q||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||q||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Além disto, como foi visto no Exemplo 1.5.10-2 $\mathcal{I}(I - (-iA_1)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ e como $-iA_1$ é densamente definido e dissipativo, segue-se que $-iA_1 \in G(1,0)$, pelo Teorema de Lumer-Phillips. Logo, $-iA_1 - M_q \in G(1, ||M_q||_{L^2(\mathbb{R}^n)})$, pela Proposição 1.9.3, donde $-iA_1 - M_q - ||M_q||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, I \in G(1,0)$ e, daí,

$$\mathcal{I}(\lambda - (-iA_1 - M_q - ||M_q||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, I) = L^2(\mathbb{R}^n), \quad \lambda > 0,$$

pelo Teorema de Lumer-Phillips. Portanto,

$$\mathcal{I}(\lambda_0 - (-iA_1 - M_q)) = L^2(\mathbb{R}^n) \text{ com } \lambda_0 = \lambda + ||M_q||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \in \rho(-iA_1 - M_q)$$

que é o que se queria demonstrar.

No terceiro caso, de ii) resulta que $-M_q$ é operador dissipativo e, como $-iA_1 \in G(1,0)$, tem-se $-iA_1 - M_q \in G(1,0)$ pelo Teorema 1.9.2. Logo, $\mathcal{I}(\lambda_0 - (-iA_1 - M_q)) = L^2(\mathbb{R}^n)$ para algum $\lambda_0 > 0$ e, portanto, $\lambda_0 \in \rho(-iA_1 - M_q)$, c.q.d..

Se, em particular, $q \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $p > n/2$ e $p \geq 2$, a condição i) de c) é satisfeita. Seja, com efeito, $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e ponhamos $v(x) = u(x/\rho)$, $\rho > 0$. Tem-se $v \in H^2(\mathbb{R}^n)$, donde a função $(1 + |x|^2)\widehat{v}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$; além disto, de $p > n/2$ resulta que a função $(1 + |x|^2)^{-1}$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$ ([42] pág. 97). Logo, pondo $s = 2p/(p + 2)$ e, portanto, $1/s = 1/p + 1/2$ e tendo em vista que $\widehat{v}(x) = (1 + |x|^2)^{-1}(1 + |x|^2)\widehat{v}(x)$ tem-se $\widehat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v}(x)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-p}\, x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)\widehat{v}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

pela Desigualdade de Hölder Generalizada (A.7.2 do Apêndice). Mas $(1 + |x|^2)\widehat{v}(x) = (v(x) - \Delta v(x)^\wedge$ donde, pelo Teorema de Plancharel,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)\widehat{v}(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x) - \Delta v(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= ||v - \Delta v||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||\Delta v||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||v||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Logo, pondo $a_{p,n} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-p}\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$ tem-se $||\widehat{v}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq a_{p,n}(||\Delta v||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||v||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Seja τ o conjugado de s, i.e., $1/\tau + 1/s = 1$. Como $1 \leq s \leq 2$ tem-se

$$||v||_{L^\tau(\mathbb{R}^n)} = ||\widehat{v}||_{L^\tau(\mathbb{R}^n)} = ||\widehat{\widehat{v}}||_{L^\tau(\mathbb{R}^n)} \leq 2\pi)^{n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} ||\widehat{v}||_{L^\tau(\mathbb{R}^n)}\,,$$

pelo Teorema de Hausdorff-Young (Teorema A.8.9 do Apêndice) aplicado à função $\widehat{v}$. Portanto, $||v||_{L^\tau(\mathbb{R}^n)} \leq a^1_{p,n}(||\Delta v||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||v||_{L^2(\mathbb{R}^n)})$, onde $a^1_{p,n}$ depende apenas de p e n. Mas $v(x) = u(x/\rho)$. Logo,

$$||u||_{L^\tau(\mathbb{R}^n)} = \rho^{-\frac{n}{\tau}} ||v||_{L^\tau(\mathbb{R}^n)} \leq \rho^{-\frac{n}{\tau}}\, a^1_{p,n} \left(\rho^{\frac{(n-2)}{2}}\, ||\Delta u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \rho^{\frac{n}{2}} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$

donde,

$$||u||_{L^\tau(\mathbb{R}^n)}\, ||q||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq a||\Delta u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + b||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,,$$

com $0 \leq a < 1$ e $b \geq 0$, para ρ convenientemente escolhido. Além disto, $1/p + 1/\tau = 1/2$ donde, pela Desigualdade de Hölder Generalizada, $qu \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e, portanto, $\mathcal{D}(M_q) \supset H^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$||M_q||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||qu||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||q||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, ||u||_{L^\tau(\mathbb{R}^n)} \leq a||\Delta u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + b||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,,$$

$0 \leq a < 1$ e $b \geq 0$.

3) **Equação do Calor.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto satisfazendo as condições estipuladas em (1.4.16) e consideremos o seguinte problema: determinar uma função $u\colon [0, \infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad (0, \infty) \times \Omega & (2.1.15) \\ u = 0 \quad \text{em} \quad (0, \infty) \times \partial\Omega & (2.1.16) \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, & (2.1.17) \end{cases}$$

onde Δ é o operador de Laplace.

A equação (2.1.15) é conhecida por *equação do calor*.

Definindo, como anteriormente, o operador A de $L^2(\Omega)$ por

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ &Au = \Delta u \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

o problema pode ser posto sob a forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - Au = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty) \times \Omega & (2.1.18) \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, & (2.1.19) \end{cases}$$

uma vez que se $u \in \mathcal{D}(A)$, então u satisfaz (2.1.16).

Pelo Teorema 2.1.2, se $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, então o semigrupo gerado por A é uma solução, continuamente diferenciável para todo $t \geq 0$, do Problema (2.1.18)-(2.1.19). Tendo em vista a Observação 2.1.3 e que a norma do gráfico é, neste caso, equivalente à do espaço H_0^1, segue-se que, para $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, a solução, $u(t) = S(t)u_0$, do problema (2.1.18)-(2.1.19), satisfaz a condição

$$u \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1(]0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

e, de modo mais geral, paa todo $u_0 \in L^2(\Omega)$

$$u \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

uma vez que S é um semigrupo diferenciável pela Proposição 1.4.28.

Além disto, pelo Teorema 1.4.29, $\forall\, u_0 \in L^2(\Omega)$,

$$u(t) = S(t)u_0 \in C^n((0,\infty); [\mathcal{D}(A^k)]) \quad \forall\, k, n \in \mathbb{N}.$$

Mas,

$$\mathcal{D}(A^k) = \{u \in H^{2k}.u = \Delta u = \cdots = \Delta^{k-1}u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Logo,

$$u(t) = S(t)u_0 \in C^n((0,\infty); H^{2k}) \quad \forall\, k, n \in \mathbb{N},$$

donde, pelos teoremas de imersão dos espaços de Sobolev,

$$u(t) = S(t)u_0 \in C^n((0,\infty); C^m(\overline{\Omega})), \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N},$$

onde $C^n(\overline{\Omega})$ é o espaço das funções $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que, juntamente com suas derivadas $D`\alpha\, f$, $0 \leq |\alpha| \leq n$, são uniformemente contínuas em Ω, munido da norma

$$||f|| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq n} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|.$$

2.2 Equação Não Homogênea

2.2.1 Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo, S, de classe C_0, $f\colon \mathbb{R}^+ \to X$ uma função contínua e consideremos o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,u(t) = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

2.2.2 Definição. Uma função $u\colon \mathbb{R}^+ \to X$ é dita *solução forte* de (2.2.1) se u é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ $\forall\, t > 0$ e u satisfaz (2.2.1).

Seja u uma solução forte de (2.2.1) e ponhamos $g(s) = S(t-s)u(s)$, $0 \leq s \leq t$. Teremos $g'(s) = S(t-s)f(s)$ donde, integrando de 0 a t, $0 < t < \infty$,

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(x)\,ds \tag{2.2.2}$$

que é uma condição necessária para que u seja solução forte de (2.2.1).

Satisfeitas as hipóteses estipuladas em (2.2.1), a função $S(t-s)f(s)$ é contínua e, portanto, a fórmula (2.1.2) tem sentido quer u seja ou não solução forte de (2.2.1). Dizemos, então, que (2.2.2) é uma *solução generalizada* de (2.2.1). As soluções generalizadas não são necessariamente soluções fortes como se vê tomando para $f(t)$ a função $S(t)y \notin \mathcal{D}(A)$, $t > 0$ e $y \in X$; nesse caso, $u(t) = S(t) + tS(t)y$ é uma solução generalizada que não é uma solução forte porque essa função não é diferenciável para $t > 0$. Portanto, para que uma solução generalizada seja uma solução forte é necessário que A ou f satisfaçam condições adicionais, algumas das quais serão estudadas aqui.

Como conseqüência imediata de (2.2.2) temos:

2.2.3 Proposição. *O sistema* (2.2.1) *tem no máixmo uma solução forte.*

2.2.4 Teorema. *O sistema* (2.2.1) *tem uma solução forte para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, se, e só se, a função v dada por*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds \tag{2.2.3}$$

é continuamente diferenciável para todo $t > 0$.

Demonstração: Quando (2.2.1) tem uma solução forte para $x \in \mathcal{D}(A)$, a função v é, por (2.2.2), diferença de duas funções continuamente diferenciáveis em todo $t > 0$; logo continuamente diferenciável em todo $t > 0$. Reciprocamente, como

$$A_h v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,ds \tag{2.2.4}$$

se v é continuamente diferencável em todo $t > 0$, então o segundo membro de (2.2.4) tem um limite quando $h \to 0^+$, $\forall\, t > 0$, o mesmo acontecendo, portanto, com o primeiro. Logo, no limite, quando $h \to 0^+$, $Av(t) = v'(t) - f(t)$. Além disto, $v(0) = 0$. Logo, a função u, dada por $u(t) = S(t)x + v(t)$, é solução forte de (2.2.1).

2.2.5 Corolário. *Se $v(t) \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, t \geq 0$, e Av é contínua, então o problema* (2.2.1) *tem solução forte $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$.*

Demonstração: De (2.2.4) vem

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} - A_h v(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,ds,$$

cujo segundo membro, de acordo com as hipóteses, tende para $Av(t) + f(t)\ \forall\, t > v$. Logo v é derivável à direita em todo $t > 0$ e $d^+v(t)/dt = Av(t) + f(t)$. Mas, por hipótese, $f(t)$ e $Av(t)$ são contínuas; logo $d^+v(t)/dt$ é contínua. Pelo Lema de Dini (Lema A.3.2 do Apêndice), é continuamente diferenciável para $t > 0$. Pelo Teorema 2.2.4 o sistema (2.2.1) tem uma solução forte que é dada por (2.2.2), q.e.d..

2.2.6 Proposição. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $f\colon \mathbb{R}^+ \to X$ uma função contínua e suponhamos que f satisfaça uma das seguintes condições:*

i) *f é continuamente diferenciável em todo $t \geq 0$;*

ii) *$f(t) \in \mathcal{D}(A)\ \forall\, t \geq 0$ e Af é contínua.*

Então, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, (2.2.1) *tem uma solução forte.*

Demonstração: i) De

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds = \int_0^t S(s)f(t-s)\,ds$$

vem, para $h > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{v(t+h) - v(t)}{h} =& \frac{1}{h}\int_0^t S(s)(f(t+h-s) - f(t-s))\,ds + \\ &+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)\,ds\end{aligned}$$

e, como o segundo membro tem um limite contínuo quando $h \to 0^+$, pois pela Proposição A.3.4 ao Apêndice, $\frac{1}{h}\,(f(t+h-s) - f(t-s)) \to f'(t-s)$ uniformemente, segue-se, pelo Lema de Dini, que v é continuamente diferenciável. Logo, pelo Teorema 2.2.4, o sistema (2.2.1) tem uma solução forte.

ii) De $f(s) \in \mathcal{D}(A)$, $0 \leq s \leq t$, vem, pela Proposição 1.2.10, $S(t-s)f(s) \in \mathcal{D}(A)$ e $AS(t-s)f(s) = S(t-s)Af(s)$. Mas Af é, por hipótese, contínua, donde $S(t-s)Af(s)$

é contínua e, portanto, $AS(t-s)f(s)$ é contínua. E, como $S(t-s)f(s)$ também é contínua e A é fechado segue-se, pelo Teorema A.4.4 do Apêndice, que $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ $\forall\, t > 0$ e

$$Av(t) = A\int_0^t S(t-s)f(s)\,ds = \int_0^t AS(t-s)f(s)\,ds$$

i.e., $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ $\forall\, t > 0$ e Av é contínua; pelo Corolário 2.2.5, o sistema (2.2.1) tem uma solução forte, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$.

Do Teorema 1.4.24 e da Proposição 1.12.6 decorre imediatamente que se $f\colon \mathbb{R}^+ \to L^2(\Omega)$ é contínua e satisfaz i) ou ii) da Proposição 2.2.6, então, $\forall\, u_0 \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu = f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

tem uma solução forte.

Em particular, se $f\colon \mathbb{R}^+ \to L^2(\Omega)$ é contínua e satisfaz i) ou ii) da Proposição 2.2.6, então, $\forall\, u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

tem uma solução forte.

2.2.7 Definição. Diz-se que uma função $f\colon \mathbb{R}^+ \to X$ é contínua no sentido de Hölder para $t \geq 0$ se

$$||f(t) - f(s)|| \leq L(t-s)^k, \quad 0 \leq s \leq t, \tag{2.2.5}$$

onde L e k são constantes e $0 < k \leq 1$.

2.2.8 Teorema. *Seja $A \in (\theta, M)$ e $f(t)$ contínua no sentido de Hölder para $t \geq 0$. Então, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, o sistema* (2.2.1) *tem uma solução forte.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.2.5 é bastante demonstrar que $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ $\forall\, t > 0$ e Av é contínua. Temos

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds = \int_0^t S(t-s)[f(s) - f(t)]\,ds + \\ + \int_0^t S(t-s)f(t)\,ds = v_1(t) + v_2(t).$$

Pela Proposição 1.2.10, item iii), $v_2(t) \in \mathcal{D}(A)$ e $Av_2(t) = (S(t) - I)f(t)$; como f é contínua, $Av_2(t)$ é contínua.

Vamos pôr

$$v_1(t,\varepsilon) = \int_0^t S(t+\varepsilon-s)[f(s) - f(t)]\,ds = S(\varepsilon)v_1(t), \quad \varepsilon > 0.$$

Pela continuidade forte de S segue-se, daí, que $v_1(t,\varepsilon) \to v_1(t)$ quando $\varepsilon \to 0$. Como, por hipótese, S é diferenciável, $v_1(t,\varepsilon) \in \mathcal{D}(A)\ \forall\, \varepsilon > 0$ e, portanto, tem sentido a integral

$$Av_1(t,\varepsilon) = \int_0^t AS(t+\varepsilon-s)[f(s)-f(t)]\, ds.$$

pelo Teorema 1.3.3, $AS = S^{(1)}$ é contínua em ε, donde se segue que

$$AS(t+\varepsilon-s)[f(s)-f(t)] \to AS(t-s)[f(s)-f(t)]$$

quando $\varepsilon \to 0$. Por outro lado, pelo Corolário 1.8.8-ii)

$$\begin{aligned} &||AS(t+\varepsilon-s)[f(s)-f(t)]|| \le ||AS(t+\varepsilon-s)|| \cdot ||f(s)-f(t)|| \le \\ &\le \frac{M_1(\varepsilon)}{|t+\varepsilon-s|} \cdot L|t-s|^k \le M_1(\varepsilon)L|t-s|^{k-1} \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Segue-se, pelo Teorema da Convergência Dominada, que $AS(t-s)[f(s)-f(t)]$ é integrável em $[0,T]$ e

$$\int_0^t AS(t-s)[f(s)-f(t)]\, ds = \lim \varepsilon \to 0\, Av_1(t,\varepsilon)$$

e como A é um operador fechado, $v_1 \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, t > 0$. Falta apenas demonstrar que Av_1 é contínua. Temos

$$\begin{aligned} Av_1(t+h) - Av_1(t) &= \int_0^{t+h} AS(t+h-s)[f(s)-f(t+h)]\, ds - \\ -\int_0^t AS(t-s)[f(s)-f(t)]ds &= \int_0^t A[S(t+h-s)-S(t-s)][f(s)-f(t)]ds + \\ +\int_0^t AS(t+h-s)[f(t)-f(t+h)]ds &+ \int_t^{t+h} AS(t+h-s)[f(s)-f(t+h)]ds = \\ = w_1 + w_2 + w_3\,. \end{aligned}$$

Seja $k < 1$. Pelo Corolário 1.8.8-iii) e por (2.1.5) temos

$$\begin{aligned} ||w_1|| &\le \int_0^t ||A[S(t+h-s)-S(t-s)]|| \cdot ||f(s)-f(t)||ds \le \\ &\le M_2(\varepsilon)Lh \int_0^t (t+h-s)^{-1}(t-s)^{k-1}ds = M_2(\varepsilon)Lh \int_0^t (s+h)^{-1}s^{k-1}ds \le \\ &\le M_2(\varepsilon)Lh^k \int_0^\infty (s+1)^{-1}\, s^{k-1}\, ds = M_2(\varepsilon)Lh^k\Gamma(k)\Gamma(1-k) = \\ &= M_2(\varepsilon)Lh^k \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi} = C_1 h^k. \end{aligned}$$

Por (1.2.10), (1.8.14) e (2.1.5)

$$||w_2|| \le ||S(h) - S(t+h)|| \cdot ||f(t)-f(t+h)| \le 2M_0(\varepsilon)Lh^k = C_2 h^k.$$

Por ii) do Corolário 1.8.8 e por (2.1.5)

$$
\begin{aligned}
||w_3|| &\leq \int_t^{t+h} ||AS(t+h-s)|| \cdot ||f(s) - f(t+h)||\, ds \leq \\
&\leq M_1(\varepsilon) L \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-1+k}\, ds = C_3 h^k.
\end{aligned}
$$

Logo, $||Av_1(t_h) - Av_1(t)|| \leq Ch^k$, donde Av_1 é contínua no sentido de Hölder. Se $k = 1$, então

$$
\begin{aligned}
||w_1|| &= M_2(\varepsilon) Lh \int_0^t (t+h-s)^{-1} ds = M_2(\varepsilon) Lh \int_0^t (s+h)^{-1} ds = \\
&= M_2(\varepsilon) Lh (\log(t+h) - \log h) \to 0.
\end{aligned}
$$

Analogamente, quando $h \to 0$, $||w_2|| \to 0$ e $||w_3|| \to 0$. Logo Av_1 é contínua, o que completa a demonstração.

Dos Teoremas 1.8.12 e 2.2.8 resulta, imediatamente, que se $f\colon \mathbb{R}^+ \to L^2(\Omega)$ é uma função contínua no sentido de Hölder, então, $\forall\, u_0 \in L^2(\Omega)$, o problema

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu + \gamma u = f, \quad \gamma \geq \gamma_0\,, \\
u(0) = u_0
\end{cases}
$$

tem uma única solução forte.

Em particular, do Corolário 1.8.13 resulta que se $f\colon \mathbb{R}^+ \to L^2(\Omega)$ é uma função contínua no sentido de Hölder, então, $\forall\, u_0 \in L^2(\Omega)$, o problema

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - (\Delta - \varepsilon) u = f, \\
u(0) = u_0
\end{cases}
$$

tem uma solução forte.

2.3 Equação Não Linear

2.3.1 Consideremos agora o problema de Cauchy abstrato não linear

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt} u(t) = Au(t) + f(t, u(t)) \\
u(0) = u_0
\end{cases}
\tag{2.3.1}
$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X e $f\colon \mathbb{R}^+ \times X \to X$ é uma função contínua.

Argumentação análoga à desenvolvida após a Definição 2.2.2 mostra que se S é o semigrupo gerado por A, toda solução forte, u, de (2.3.1) satisfaz a condição

$$u(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,ds. \tag{2.3.2}$$

Note-se, porém, que uma solução da equação (2.3.2) nem sempre é solução do sistema (2.3.1) porque nem sempre é diferenciável. Vamos chamar as soluções de (2.3.2), ainda, de *soluções generalizadas* de (2.3.1) e mostrar que impondo condições restritivas a f, o problema (2.3.1) tem solução generalizada.

Recorde-se que

2.3.2 Lema (Picard-Banach). *Seja $\mathcal{M}$ um espaço métrico completo com métrica d. Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$ a aplicação $T\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ satisfaça a condição*

$$d(T^m x.T^n y) \leq \theta d(x,y) \tag{2.3.3}$$

para todo $x, y \in \mathcal{M}$, onde $0 \leq \theta < 1$. Então T tem um e só um ponto fixo, i.e., existe um e só um $x \in \mathcal{M}$ tal que $Tx = x$.

Demonstração bem conhecida.

2.3.3 Teorema. *Seja Ω um subconjunto aberto de X e $x_0 \in \Omega$. Vamos supor que f seja contínua em $[0,\tau]$ e uniformemente lipschitziana em Ω, com constante $L = \ell(\tau)$, i.e.,*

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L||x-y|| \tag{2.3.4}$$

$\forall\, x, y \in \Omega$ e $\forall\, t \in [0,\tau]$. Então para τ suficientemente pequeno existe uma e uma só solução generalizada, u, de (2.3.1) e $y \in C([0,\tau];\Omega)$.

Demonstração: Seja $\tau > 0$, $V \subset \Omega$ uma bola fechada de centro x_0 e

$$\mathcal{M} = \{u; u \in C([0,\tau];X),\ u(0) = x_0 \text{ e } u([0,\tau]) \subset V\},$$

$C([0,\tau];X)$ munido da norma do supremo. Então $\mathcal{M}$ é um espaço métrico completo. Vamos definir $T\colon \mathcal{M} \to C([0,\tau];X)$ por

$$Tu(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,ds.$$

Como S é um semigrupo de classe C_0 existem M e $w > 0$ tais que $||S(t)|| \leq M\,e^{wt}$, $t \geq 0$. Logo, indicado por $|\cdot|$ a norma de $C([0,\tau];X)$ temos

$$\begin{aligned}
&|Tu - Tv| = \\
&= \sup_{0\leq t\leq\tau} ||Tu(t) - Tv(t)|| \leq \sup_{0\leq t\leq\tau} \int_0^t ||S(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]||ds \leq \\
&\leq Me^{w\tau} \int_0^\tau ||f(s,u(s)) - f(s,v(s))||ds \leq MLe^{w\tau} \int_0^\tau ||u(s) - v(s)||ds \leq \\
&\leq MLe^{w\tau}\,\tau \sup_{0\leq t\leq\tau} ||u(t) - v(t)|| = MLe^{w\tau}\,\tau|u-v|.
\end{aligned}$$

Como $MLe^{w\tau} \to 0$ quando $\tau \to 0$, para τ suficientemente pequeno, T é uma contração estrita de $\mathcal{M}$. Portanto, pelo Lema 2.3.2, T tem um e um só pono fixo. Mas os pontos fixos de T sendo justamente as soluções generalizadas de (2.3.1), está demonstrada a existência e a unicidade das soluções generalizadas de (2.3.1). Além disto, Tu é contínua $\forall\, u \in \mathcal{M}$; logo, a solução generalizada de (2.3.1) é contínua.

2.3.4 Teorema. *Seja $f\colon \mathbb{R}^+ \times X \to X$ contínua em t e suponhamos que, para cada $\tau > 0$, existe uma constante $L = L(\tau)$ tal que*

$$||f(t,s) - f(t,y)| \ \leq L||x-y||$$

$\forall\, x, y \in X$ *e* $\forall\, t \in [0,\tau]$. *Então, para cada $x_0 \in X$,* (2.3.1) *tem uma e uma só solução generalizada, u, contínua em $[0,\tau]$. Além disto, $x_0 \to u$ é uma aplicação contínua de X em $C([0,\tau].X)$.*

Demonstração: Com a notação adotada no teorema anterior e argumentação alí desenvolvida vê-se que para cada $\tau > 0$ tem-se

$$||Tu(t) - Tv(t)\| \leq MLe^{w\tau}\, t|u-v|$$

donde por indução

$$||T^n u(t) - T^n v(t)|| \leq (MLe^{w\tau}t)^n \, \frac{|u-v|}{n!} \tag{2.3.5}$$

pois, supondo (2.3.5) verdadeira para n, tem-se

$$\begin{aligned}
&||T^{n+1}u(t) - T^{n+1}v(t)|| \leq \int_0^t ||S(t-s)|| \cdot ||f(s, T^n u(s) - f(s, T^n v(s)||ds \leq \\
&\leq MLe^{w\tau} \int_0^t ||T^n u(s) - T^n v(s)||ds \leq MLe^{w\tau}(MLe^{w\tau})^n \, \frac{|u-v|}{n!} \int_0^t s^n ds = \\
&= (MLe^{w\tau}t)^{n+1} \, \frac{|u-v|}{(n_1)!} \, .
\end{aligned}$$

Para n suficientemente grande,

$$\theta = \frac{(MLe^{w\tau})^n}{n!} < 1$$

donde, por (2.3.5),

$$|T^n u - T^n v| \leq \theta |u-v| \quad \forall\, u, v \in C([0,\tau]; X), \ \ , \theta < 1.$$

Portanto, pelo Lema 2.3.2, T tem um e um só ponto fixo em $C([0,\tau]; X)$, i.e., (2.3.1) tem uma e uma só solução generalizada u e $u \in C([0,\tau]; X)$, com $\tau > 0$ arbitrário, o que demonstra a primeira asserção. Para demonstrar a segunda, seja v uma solução generalizada de (2.3.1) com valor inicial $v(0) = y_0$. De (2.3.2) vem, então,

$$\begin{aligned}
&||u(t) - v(t)| \leq \\
&\leq ||S(t)x_0 - S(t)y_0)|| + \int_0^t ||S(t-s)||.||f(x, u(s)) - f(s, v(s))||ds \leq \\
&\leq Me^{w\tau} ||x_0 - y_0|| + MLe^{w\tau} \int_0^t ||u(s) - v(s)||ds,
\end{aligned}$$

donde, pelo lema de Gronwall,

$$||u(t) - v(t)|| \leq Me^{w\tau} e^{ML\tau e^{w\tau}} ||x_0 - y_0|| \; \forall \, t \in [0, \tau],$$

e daí,

$$|u - v| \leq Me^{w\tau} e^{MLe^{w\tau}} ||x_0 - y_0||$$

o que completa a demonstração.

Vejamos agora um teorema devido a Pazy, cuja demonstração se baseia não no Teorema do Ponto Fixo de Picard-Banach mas no de Schauder. Recorde-se que

2.3.5 Lema (Schauder). *Toda aplicação contínua de um espaço de Banach real, que aplica um conjunto convexo e fechado em um subconjunto precompacto desse conjunto, tem um ponto fixo.*

Demonstração: Bem conhecida.

Recorde-se, também, que

2.3.6 Lema (Arzelà-Ascoli). *Seja X um espaço métrico compacto, Y um espaço métrico completo, $C(X, Y)$ o espaço das funções contínuas de X em Y com a topologia uniforme e $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ uma família equicontínua. Se, para cada $x \in X$, o conjunto dos pontos $f(x)$, $f \in \mathcal{F}$, é precompacto em Y, então $\mathcal{F}$ é precompacta em $C(X, Y)$.*

Demonstração: Bem conhecida.

2.3.7 Teorema (Pazy). *Seja $f\colon [0, \tau] \times X \to Y$ contínua e S um semigrupo compacto. Então, $\forall \, x_0 \in X$ a equação integral*

$$u(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds$$

tem uma solução local $u \in C([0, \tau]; X)$, onde $0 < \tau' \leq \tau$.

Demonstração: Sejam $t_1 > 0$, e $\rho > 0$ tais que $||f(s, x)|| \leq N$ para $0 \leq s \leq t_1$ e $||x - x_0|| < \rho$, seja $||S(t)|| \leq M$ para $0 \leq t \leq \tau$ e $t_2 > 0$ tal que $||S(t)x_0 - x_0|| < \rho/2$ para $0 \leq t \leq t_2$. Ponhamos

$$\tau' = \min\left\{t_1, t_2, \tau, \, \frac{\rho}{2MN}\right\}$$

e designemos por Y o espaço de Banach $C([0,\tau'];X)$. A aplicação T de Y em Y definida por

$$Tu(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds$$

aplica a bola $Y_0 = \{u \in Y; u(0) = x_0\,, ||u(t) - x_0|| \leq \rho\}$ em si própria porque para $u \in Y_0$ tem-se $||f(s,u(s))|| \leq N$ e, portanto,

$$||Tu(t) - x_0|| \leq ||S(t)x_0 - x_0|| + tMN \leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho.$$

Vamos mostrar que a imagem de Y_0 por T, i.e., a família de funções $\{Tu;\, u \in Y_0\}$ é equicontínua. Seja, para isto, $t_2 > t_1 \geq 0$. Teremos

$$\begin{aligned} ||Tu(t_2) - Tu(t_1)|| \leq ||S(t_2)x_0 - S(t_1)x_0||+ \\ + N\int_0^{t_1} ||S(t_2-s) - S(t_1-s_{|}|ds + (t_2-t_1)MN. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Pelo Teorema 1.7.2, a compacidade de $S(t)$ para $t > 0$ implica a continuidade de $S(t)$ para $t > 0$ na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$. Desse modo, o membro da direita de (2.3.6) tende a zero quando $t_2 - t_1$ tende a zero e, como não depende de u, a família $\{Tu;\, u \in Y_0\}$ é, de fato, equicontínua. Vamos, agora, demonstrar que para cada ponto t, $0 \leq t \leq \tau'$, o conjunto $\{Tu(t);\, u \in Y_0\}$ é precompacto em X. Para $t = 0$ isto é imediato pois, por definição $u(0) = x_0\ \ \forall\, u \in Y_0$. Seja, então, $t > 0$ e $0 < \varepsilon < t$. Teremos

$$\begin{aligned} T_\varepsilon\, u(t) = S(t)x_0 + \int_0^{t-\varepsilon} S(t-s)f(s,u(s))\,ds = S(t)x_0 + \\ + S(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} S(t-\varepsilon-s)f(s,u(s))\,ds \end{aligned}$$

e como $S(t)$ é um operador comapcto para $t > 0$, o conjunto $\{T_v eu(t); u \in Y_0\}$ é precompacto em X, para cada ε tal que $0 < \varepsilon < t$. Além disto, para cada $u \in Y_0$ e cada t fixo temos

$$||Tu(t) - T_\varepsilon\, u(t)|| \leq \int_{t-\varepsilon}^t ||S(t-s)f(s,u(s))||\, dx \leq MN_\varepsilon\,,$$

donde decorre que $\{Tu(t);\, u \in Y_0\}$ é precompacto. Segue-se, pelo Lema 2.3.6, que $\{Tu;\, u \in Y_0\}$ é um conjunto precompacto. Finalmente, pelo Lema 2.3.5 segue-se que T tem um ponto fixo em Y_0 o qual é a solução cuja existência desejávamos demonstrar.

Bibliografia

[1] Agmon, S., Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand Mathematical Studies nº 2.

[2] Balakrishnan, A.V., Applied Functional Analysis, Springer-Verlag, (1976).

[3] Beals, R., On the Abstract Cauchy Problem, J. Funct. Anal. 10 (1972), 281-299.

[4] Beurling, A., On Analytic Extension of Semi-Groups of Operators, J. Funct. Anal. 6 (1970), 387-400.

[5] Brezis, H., Analyse Fonctionnelle, Masson, (1983).

[6] Butzer, P. e Berens, H., Semi-Groups of Operators and Approximation, Springer-Verlag, (1967).

[7] Chazarain, J., Problèmes de Cauchy Abstraits et Applications à Quelques Problèmes Mixtes, Jour. Func. Anal. 7, (1971), 386-446.

[8] Chernoff, P.R., Note on Product Formulas for Operators Semigroups, J. Funct. Anal. 1, (1968), 238-242.

[9] Chernoff, P.R., Semigroup Product Formulas and Addition of Unbounded Operators, Bull. Amer. Math. Soc. 76, (1970), 395-398.

[10] Chernoff, P.R., Perturbations of Dissipative Operators with Relative Bound One, Proc. Amer. Math. Soc. 33, (1972), 72-74.

[11] Dunford, N. e J.T. Schwartz, Linear Operators, Vols. I e II, Interscience (1958, 1963).

[12] Fattorini, H.O., Ordinary Differential Equations in Linear Topological Spaces, I. Jour. Diff. Equat. 5, (1968), 72-105, II. Jour. Diff. Equat. 6, (1969), 50-70.

[13] Feller, W., On the Generation of Unbounded Semigroups of Bounded Linear Operators, Ann. of Math. 58, (1953), 166-174.

[14] Folland, G.B., Introduction to Partial Differential Equations, Princeton Univ. Press and University of Tokyo Press, (1976).

[15] Friedman, A., Partial Differential Equations, Holt, Rinehart and Winston, New York, (1969).

[16] Goldstein, J., Semigroups and Second Order Differential Equations, Jour. Funct. Anal. 4, (1969), 50-70.

[17] Goldstein, J., Abstract Evolution Equations, Trans. Amer. Math. Soc. 141, (1969), 159-185.

[18] Goldstein, J., Semi-groups of Operators and Abstract Cauchy Problems, Tulane Univ. Lecture Notes, (1970).

[19] Goldstein, J., Some Developments in Semigroups of Operators Since Hille-Phillips, Integral Equation and Operator Theory, vol. 4, nº 3, (1981), 350-365.

[20] Hasegawa, M., A note on the Convergence of Semigroups of Operators, Proc. Japan Acad. 40, (1964), 262-266;

[21] Hasegawa, M., On the Convergence of Resolvents of Operators, Pacif. Jour. of Math. 21, (1967), 35-47.

[22] Hille, E., On the Differentiability of Semigroups of Operators, Acata Sci. Math. (Szeged) 12B, (1950), 19-24.

[23] Hille, E., Une Généralization du Problem de Cauchy, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 4, (1953), 31-48.

[24] Hille, E., Phillips, R.S., Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 31, Providence, R.I., (1957).

[25] Hörmander, L., The Analysis of Linear Partial Differential Operators.

[26] Kato, T., Integration of the Equation of Evolution in Banach Space, J. Math. Soc. Japan 5, (1953), 208-234.

[27] Kato, T., On Linear Differential Equations in Banach Spaces, Comm. Pure Appl. Math. 9, (1956), 479-486.

[28] Kato, T., Remarks on Pseudo-Resolvents and Infinitesimal Generators of Semi-Groups, Proc. Japan Acad. 35, (1959), 467-468.

[29] Kato, T., A Characterization of Holomorphic Semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. 25, (1970), 495-498.

[30] Kato, T., Linear Evolution Equations of "Hyperbolic" Type, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo 17, (1970), 241-258.

[31] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, N.Y., (1966).

[32] Kato, T., Linear Evolution Equations of "Hyperbolic" Type, II, J. Math. Soc. Japan, vol. 25, nº 4, (1973).

[33] Kurtz, T.G., Extension of Trotter's Operator Semigroups Approximation Theorems, Jour. Funct. Anal. 3, (1969), 111-132.

[34] Kurtz, T.G., A General Theorem on the Convergence of Operator Semigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 148, (1970), 23-32.

[35] Ladas, G.E. e V. Lakshmikantham, Differential Equations in Abstract Spaces, Academic Press, (1972).

[36] Lapidus, M.L., Perturbation d'un Semi-Groupe par un Groupe Unitaire, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 291, (1980), 535-538.

[37] Lumer, G. e R.S. Phillips, Dissipative Operators in Banach Space, Pacific J. Math. 11, (1961), 676-698.

[38] Medeiros, L.A., Problema de Cauchy em Espaços de Banach, Atas da 1ª e 2ª Quinzenas de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais, vol. 3, (1970), Rio.

[39] Medeiros, L.A., An Application of Semigroups of Class C_0, Port. Math. vol. 26, fasc. 1, (1967).

[40] Medeiros, L.A. e E.A. de Mello, A Integral de Lebesgue, Textos de Métodos Matemáticos 18, Instituto de Matemática da UFRJ.

[41] Medeiros, L.A., Initial Value Problem for Non-Linear Wave Equation in Hilbert Space, Trans. Amer. Math. Soc., (1969), 305-327.

[42] Medeiros, L.A. e M.M. Miranda, Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos 25, Instituto de Matemática da UFRJ, (1989).

[43] Neuberg, J.W., Analyticity and Quasi-Analyticity for One-Parameter Semigroup, Proc. Amer. Math. Soc. 25, (1970), 488-494.

[44] Oharu, S., On the Convergence of Semigroups of Operators, Proc. Japan Acad. 42, (1966), 880-884.

[45] Oharu, S. e H. Snnouchi, On the Convergence of Semigroups of Linear Operators, J. Funct. Anal. 6, (1970), 292-304.

[46] Pazy, A., On the Differentiability and Compactness of Semigroups of Linear Operators, Jour. Math. and Mech. 17, (1968), 1131-1141.

[47] Pazy, A., Approximation of the Identity Operator by Semigroups of Linear Operators, Proc. Amer. Math. Soc. 30, (1971), 147-150.

[48] Pazy, A., Semi-groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag.

[49] Phillips, R.S., On the Generation of Semi-Groups of Linear Operators, Pac. Jour. Math. 2, (1952), 343-369.

[50] Phillips, R.S., Perturbation Theory for Semi-Groups of Linear Operators, Trans. Amer. Math. Soc. 74, (1953), 199-221.

[51] Phillips, R.S., A Note on the Abstract Cauchy Problem, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 40, (1954), 244-248.

[52] Rudin, W., Functional Analysis, McGraw-Hill, (1973).

[53] Sobolevskii, P.E., Equations of Parabolic Type in Banach Space, Trudy Moscow Math. Obš č 10, (1961), 297-350 (Russo). Tradução para o inglês em Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, 49, (1966), 1-62.

[54] Stone, M.H., On One-Parameter Unitary Group in Hilbert Space, Amer. Math. 33, (1932), 643-648.

[55] Taira, K., Analytic Semigroups and Semilinear Initial Boundary Value Problems, London Math. Society Lectures Notes Series 223.

[56] Tanabe, H., Remarks on the Equation of Evolution in Banach Space, Osaka Math. Jour. 12, (1960), 145-166.

[57] Tanabe, H., On the Equation of Evolution in Banach Space, Osaka Math. Jour. 12, (1960), 363-376.

[58] Tanabe, H., Equations of Evolution, Pitman Publ. Ltd., London, (1979).

[59] Thayer, F.J., Notes on Partial Differential Equations, Inst. Mat. Pura e Aplic. (1980).

[60] Trotter, H.F., Approximation of Semigroups of Operators, Pacif. J. Math. 8, (1958), 887-919.

[61] Trotter, H.F., On the Product of Semigroup Operators, Proc. Amer. Math. Soc. 6, (1970), 387-400.

[62] Yosida, K., On the Differentiability and Representation of One-Parameter Semigroup of Lineaar Operator, J. Math. Sec. Japan 1, (1948), 15-21.

[63] Yosida, K., On the Differentiability of Semigroups of Linear Operators, Proc. Japan Acad. 34, (1958), 337-340.

[64] Yosida, K., On the Integration of the Equation of Evolution, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 9, (1963), 397-402.

[65] Yosida, K., Time Dependent Evolution Equations in a Locally Convex Space, Math. Ann. 162, (1966), 83-86.

[66] Yosida, K., Some Aspects of E. Hille Contribution to Semigroup Theory, Integral Equation and Operator Theory, vol. 4, nº3, (1981), 311-329.

[67] Yosida, K., Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, (1966).

Apêndice A

Sobre a Exponencial e Funções Vetoriais

A.1 Operadores Lineares Limitados

Sejam X e Y dois espaços de Banach (reais ou complexos). Com $\mathcal{L}(X,Y)$ representa-se a família dos operadores lineares limitados com domínio X e imagem em Y, i.e., a família dos operadores lineares $A\colon X \to Y$ tais que

$$||A|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax|| < +\infty.$$

Com a norma assim definida, $\mathcal{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach. No caso em que $Y = X$ escreve-se, simplesmente, $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X,X)$.

Se $A, B \in \mathcal{L}(X)$, o produto de A por B é definido por $AB = A \circ B$, onde $A \circ B$ indicou-se a transformação composta de A e B. Vê-se, então que $\mathcal{L}(X)$, é uma álgebra e que de $A, B \in \mathcal{L}(X)$ vem $AB \in \mathcal{L}(X)$ e

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||, \tag{A.1.1}$$

i.e., $\mathcal{L}(X)$ é uma álgebra de Banach.

Recorde-se que a sucessão (A_n), $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $n = 1, \ldots,$, diz-se convergente se existir $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$||A_n - A|| \to 0 \tag{A.1.2}$$

quando $n \to \infty$. Escreve-se, neste caso, $A_n \to A$. Recorde-se, também, que para que (A_n) seja convergente é necessário e suficiente que (A_n) seja uma sucessão de Cauchy, i.e., dado em $\varepsilon > 0$ exista $N > 0$ tal que

$$||A_m - A_n|| < \varepsilon$$

para todo $m, n : N$. Se $A_n \to A$ a relação

$$| \, ||A_n|| - ||A|| \, | \leq ||A_n - A||,$$

cuja demonstração é análoga à do caso numérico, mostra que $||A_n|| \to ||A||$, i.e., a norma é uma função contínua.

A convergência de uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \,, \quad A_n \in \mathcal{L}(X, Y), \tag{A.1.3}$$

é definida exatamente como no caso numérico: diz-se que (A.1.3) converge para $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ se a sucessão (S_p), $p = 1, \ldots,$ das somas parciais

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} A_n$$

for convergente para A. Nesse caso a (A.1.3) é dita *convergente* e A, soma de (A.1.3).

A série (A.1.3) é dita *absolutamente convergente* quando a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||A_n|| \tag{A.1.4}$$

é convergente. Se $m > n$ tem-se

$$||S_m - S_n|| = ||A_{n+1} + \cdots + A_m|| \leq ||A_{n+1}|| + \cdots + ||A_m||,$$

por onde se vê que toda série absolutamente convergente é convergente e que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||A_n||.$$

A série de Neumann

$$I + A + A^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} A^n,$$

onde I é o operador indentidade de X e convencionou-se escrever $A^0 = I$, é absolutamente convergente se $||A|| < 1$. Designando sua soma por S temos, multiplicando termo a termo por A,

$$AS = SA = S - I.$$

Portanto,

$$(I - A)S = S(I - A) = I,$$

i.e.,

$$S = (I - A)^{-1}.$$

Logo, se $||A|| < 1$ o operador $I - A$ é invertível e

$$I + A + A^2 + \cdots = (I - A)^{-1},$$

como no caso numérico.

A.1.1 Lema. *Seja Y um subespaço de um espaço de Banach, X, tal que $\overline{Y} \neq X$ e $0 < \theta < 1$. Então existe um $y_0 \in X$ tal que $||y_0|| = 1$ e $||y_0 - y|| \geq \theta \;\; \forall\, y \in \overline{Y}$.*

Demonstração: Por hipótese existe um $y_1 \in X$ tal que $y_1 \notin \overline{Y}$ e, portanto, tal que a distância $\delta(y_i, \overline{Y})$ de y_i a $\overline{Y}$ é um número $d > 0$, i.e., $\inf\{||y_1 - y||; y \in \overline{Y}\} = d > 0$. Mas daí vem $\inf\left\{\left\|\frac{\theta y_1}{d} - \frac{\theta y}{d}\right\|; y \in \overline{Y}\right\} = \theta$ donde $\inf\left\{\left\|\frac{\theta y_1}{d} - y\right\|; y \in \overline{Y}\right\} = \theta$. Ponhamos $\frac{\theta y_1}{d} = y_2$. Então $\inf\{||y_2 - y||; y \in \overline{Y}\} = \theta$ donde existe um $y' \in \overline{Y}$ tal que $0 \leq ||y_2 - y'|| \leq 1$. Pondo, então, $y_0 = (y_2 - y')/||y_2 - y'||$ tem-se $||y_0|| = 1$ e $\forall\, y \in \overline{Y}$

$$\begin{aligned} ||y_0 - y|| &= \left\| \frac{y_2 - y'}{||y_2 - y'||} - y \right\| = \left\| \frac{y_2 - y' - ||y_2 - y'||\, y}{||y_2 - y'||} \right\| = \\ &= \frac{1}{||y_2 - y'||}\, ||y_2 - (y' + ||y_2 - y'||\, y)|| \geq \theta \end{aligned}$$

pois $y' + ||y_2 = y'||\, y \in \overline{Y}$.

Seja A um operador linear de X, i.e., $A\colon \mathcal{D}(A) \to X$, $\mathcal{D}(A) \subset X$, e $\rho(A)$ o *conjunto resolvente* de A, i.e., o conjunto dos números complexos λ tais que o operador $\lambda I - A$ é invertível e seu inverso é limitado e densamente definido. Se $\lambda \in \rho(A)$ o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é representado por $R(\lambda, A)$.

A.1.2 Teorema. *Se $\mu \in \rho(A)$ e $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{||R(\mu, A)||}$, então $\lambda \in \rho(A)$, a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n\, R(\mu, A)^{n+1} \tag{A.1.5}$$

converge e

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - A)^n\, R(\mu, A)^{n+1}. \tag{A.1.6}$$

Demonstração: Temos, para $\mu \in \rho(A)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n\, R(\mu, A)^{n+1} = R(\mu, A) \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n\, R(\mu, A)^n.$$

Portanto, a série (A.1.5) converge se $||(\mu - \lambda)(\mu, A)|| < 1$ ou seja, $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{||R(\mu, A)||}$ e tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n\, R(\mu, A)^{n+1} = R(\mu, A)[I - (\mu - \lambda) R(\mu, a)]^{-1}.$$

Temos

$$R(\mu, A)[I-(\mu-\lambda)R(\mu, A)]^{-1}(\lambda-A) =$$
$$= ([I-(\mu-\lambda)R(\mu, A)](\mu-A))^{-1}(\lambda-A) = (\lambda-A)^{-1}(\lambda-A) = I$$

e

$$(\lambda-A)R(\mu, A)[I-(\mu-\lambda)R(\mu, A)]^{-1} =$$
$$= (\lambda-\mu+\mu-A)R(\mu, A)[I-(\mu-\lambda)R(\mu, A)]^{-1} =$$
$$= [I-(\mu-\lambda)R(\mu, A)][I-(\mu-\lambda)R(\mu, A)]^{-1} = I.$$

Logo, $\lambda - A$ é invertível e

$$||(\lambda-A)^{-1}|| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\, R(\mu, A)^{n+1}\right\| \leq$$
$$\leq ||R(\mu, A)|| \sum_{n=0}^{\infty} |\mu-\lambda|^n \cdot ||R(\mu, A)||^n \leq \frac{||R(\mu, A)||}{1-|\mu-\lambda|\,||R(\mu, A)||},$$

i.e., $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado. Além disto, $\overline{(\lambda I - A)\mathcal{D}(A)} = X$. De fato, suponhamos o contrário e seja $|\mu-\lambda|\,||R(\mu, A)|| < \theta < 1$. Pelo Lema A.1.1 existe $y_0 \in X$ tal que $||y_0|| = 1$ e $||y_0 - y|| \geq \theta\, \forall\, y \in \overline{(\lambda I - A)\mathcal{D}(A)}$. Seja $y_n \in X$, $n = 1, \ldots,$ tal que $y_n \to y_0$ e, $x_n = R(\mu, A)y_n$. Temos que $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $(\mu - A)x_n = y_n$ e $(\lambda - A)x_n = (\lambda-\mu)x_n + (\mu-A)x_n$, donde $(\lambda-A)x_n = (\mu-A)x_n = (\lambda-\mu)x_n$ e, portanto,

$$||(\lambda-A)x_n - (\mu-A)x_n|| = |\lambda-\mu|\,||R(\mu, A)||\,||y_n||.$$

Mas como $(\lambda - A)x_n \in (\lambda - A)\mathcal{D}(A)$ tem-se

$$\theta \leq ||y_0 - (\lambda-A)x_n|| \leq ||y_0 - (\mu-A)x_n|| + ||(\mu-A)x_n - (\lambda-A)x_n|| \leq$$
$$\leq |\lambda-\mu|\,||R(\mu, A)||\,||y_n||.$$

No limite, quando $n \to \infty$ temos o absurdo

$$\theta \leq |\lambda-\mu|\,||R(\mu, A)|| < \theta.$$

Logo, $\lambda \in \mu(A)$ e

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^n\, R(\mu, A)^{n+1}.$$

A.1.3 Corolário. *O conjunto resolvente $\rho(A)$ é aberto e $R(\lambda, A)$ é uma função contínua em $\rho(A)$.*

Demonstração: Pelo Teorema A.1.2 se $\mu \in \rho(A)$, então o círculo de centro μ e raio $\dfrac{1}{||R(\mu, A)||}$ está contido em $\rho(A)$ donde $\rho(A)$ é um conjunto aberto. De (A.1.6) vem, $\lim\limits_{\lambda\to\mu}(\lambda, A) = R(\mu, A)$, donde $R(\lambda, A)$ é contínua.

A.1.4 Corolário. *$R(\lambda, A)$ é uma função analítica em $\rho(A)$ e*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n\, n^{\prime\prime\prime} R(\lambda, A)^{n+1}. \tag{A.1.7}$$

Demonstração: Pela bem conhecida Fórmula Resolvente

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

e tendo em vista o corolário anterior vem, passando ao limite quando μ tende a λ,

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2.$$

Por indução tem-se a fórmula (A.1.7).

A.1.5 Operador Adjunto. Como é bem sabido o produto cartesiano $X \times Y$ dos espaços de Banach X e Y, munido de uma adição e de um produto por escalares definidos por

$$\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

e de uma norma definida por

$$||(x, y)|| = \left(||x||^2 + ||y||^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Banach.

O *gráfico* de um operador linear $A\colon X \to Y$ é o subespaço $\mathcal{G}(A) = \{(x.Ax); x \in \mathcal{D}(A)\}$ do espaço $X \times Y$. Diz-se que A é um *operador fechado* se $\mathcal{G}(A)$ for um subconjunto fechado de $X \times Y$. Verifica-se que A é fechado se, e só se, for satisfeita a condição

$$x_n \in \mathcal{D}(A),\ x_n \to x \text{ e } Ax_n \to y \Rightarrow x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } Ax = y. \tag{A.1.8}$$

Diz-se que o operador linear $A\colon X \to Y$ é *fechável* se o fecho de $\mathcal{G}(A)$ em $X \times Y$ é o gráfico de um operador linear. Imediatamente se vê que A é fechável se e só se for satisfeita a condição:

$$x_n \in \mathcal{D}(A),\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \to 0 \text{ e } Ax_n \to y \Rightarrow y = 0.$$

Seja $A\colon X \to Y$ um operador linear com domínio, $\mathcal{D}(A)$, denso em X. Para cada $y^* \in Y^*$, o conjunto dos $x^* \in X^*$ tais que $\langle y^*, Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, se não for vazio, consta de um único elemento. Com efeito, se $x_1^*, x_2^* \in X^*$ e satisfazem tal condição, então $\langle x_1^*, x\rangle = \langle x_2^*, x\rangle\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$, donde $x_1^* = x_2^*$ uma vez que $\mathcal{D}(A)$ é denso em X. Pode-se, pois, definir um operador $A^*\colon Y^* \to X^*$ pondo:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(A^*) = \{y^* \in Y^*, \exists\, x^* \in X^* \quad \text{satisfazendo a condição} \\
&\langle y^*, Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle\, \forall\, x \in \mathcal{D}(A)\}
\end{aligned}$$

e

$$A^*y^* = x^*.$$

Tal operador, obviamente linear, é dito *adjunto* de A.

Tem-se, imediatamente,

$$\langle y^*, Ax\rangle = \langle A^*y^*, x\rangle \,\forall\, x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \forall\, y^* \in \mathcal{D}(A^*). \tag{A.1.9}$$

A.1.6 Teorema. *Seja $A\colon X \to Y$ um operador linear densamente definido. Então*:

i) *o adjunto de A, A^*, é um operador fechado*;

ii) *se Y é reflexivo e A é fechável, então A^* é densamente definido.*

Demonstração: i) Seja $y_n^* \to y^*$ e $A^*y_n^* \to x^*$. Então, por (A.1.9)

$$\langle y_n^*, Ax\rangle = \langle A^*y_n^*, x\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$$

donde

$$\langle y^*, Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Logo, $y^* \in \mathcal{D}(A^*)$ e $A^*y^* = x^*$, pela definição de A^*. Portanto A^* é um operador fechado.

ii) Seja y^{**} uma forma linear sobre Y^* nula em $\mathcal{D}(A^*)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, para demonstrar ii) é bastante que $y^{**} \equiv 0$. Como Y é reflexivo podemos supor que y^{**} é um elemento y_0 de Y. Portanto, por hipótese,

$$\langle y^*, y_0\rangle = 0 \quad \forall\, y^* \in \mathcal{D}(A^*). \tag{A.1.10}$$

Como A é fechável, $\overline{\mathcal{G}(A)}$ é o gráfico de um operador linear $\widetilde{A}\colon X \to Y$. Supondo, pois, que $y_0 \neq 0$, tem-se $(0, y_0) \notin \mathcal{G}(\widetilde{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)}$ donde existe, pelo Teorema de Hahn-Banach, uma forma linear $(x^*, w^*) \in (X \times Y)^* = X^* \times Y^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle (x^*, w^*), (x, \widetilde{A}x)\rangle < \langle (x^*, w^*), (0, y_0)\rangle = \langle w^*, y_0\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(\widetilde{A}).$$

Mas $\mathcal{G}(\widetilde{A})$ é um subespaço vetorial de $X \times Y$ donde

$$\langle (x^*, w^*), (x, \widetilde{A}x)\rangle = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$$

e, portanto,

$$\langle w^*, y_0\rangle \neq 0. \tag{A.1.11}$$

Como $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A})$ temos, então,

$$\langle (x^*, w^*), (x, Ax)\rangle = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$$

e como

$$\langle (x^*, w^*), (x, Ax)\rangle = \langle x^*, x\rangle + \langle w^*, Ax\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$$

segue-se que

$$\langle w^*.Ax\rangle = \langle -x^*, x\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$$

o que mostra que $w^* \in \mathcal{D}(A^*)$. Portanto por (A.1.11) temos $\langle w^*.y_0\rangle \neq 0$ como $w^* \in \mathcal{D}(A^*)$, o que está em contradição com (A.1.10). Logo, $y_0 = 0$ e assim, $\mathcal{D}(A^*)$ é denso em Y^*.

A.1.7 Proposição. *O adjunto de um operador linear limitado, $A\colon X \to Y$, com domínio $\mathcal{D}(A) = X$, é um operador linear limitado, $A^*\colon Y^* \to X^*$ com domínio $\mathcal{D}(A^*) = Y^*$ e $||A^*|| = ||A||$.*

Demonstração: A função $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \langle y^*, Ax\rangle, \quad y^* \in Y^*,$$

é, obviamente um funcional linear de X. Além disto,

$$|\varphi(x)| = |\langle y^*, Ax\rangle| \leq ||y^*||\,||Ax|| \leq ||y^*|, ||A||\,||x|| \quad \forall\, x \in X,$$

isto é, φ é limitado. Logo $\varphi \in X^*$ e, portanto, para todo $y^* \in Y^*$ existe $x^* = \varphi \in X^*$ tal que $\langle y^*, Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle$ $\forall\, x \in X$, isto é, $y^* \in \mathcal{D}(A^*)$ e, assim, $\mathcal{D}(A^*) = Y^*$. Além disto,

$$\begin{aligned} ||A^*y^*|| &= \sup_{\substack{x\in X\\ ||x||\leq 1}} |\langle A^*y^*, x\rangle| = \sup_{\substack{x\in X\\ ||x||\leq 1}} |\langle y^*, Ax\rangle| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{x\in X\\ ||x||\leq 1}} ||y^*||\,||A||\,||x|| = ||A||\,||y^*||, \end{aligned}$$

donde $||A^*|| \leq ||A||$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} ||Ax|| &= \sup_{\substack{y\in Y^*\\ ||y^*||\leq 1}} |\langle y^*, Ax\rangle| = \sup_{\substack{y\in Y^*\\ ||y^*||\leq 1}} |\langle A^*y^*, x\rangle| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{y\in Y^*\\ ||y^*||\leq 1}} ||y^*||\,||A^*||\,||x|| = ||A^*||\,||x||. \end{aligned}$$

Logo $||A|| \leq ||A^*||$. Portanto, $||A^*|| = ||A||$.

A.1.8 Proposição. *Seja A um operador linear fechado de um espaço de Banach, X, com domínio denso em X. Então, de $\lambda \in \rho(A)$ vem $\lambda \in \rho(A^*)$ e $R(\lambda, A^*) = R(\lambda, A)^*$.*

Demonstração: Seja $\lambda \in \rho(A)$. Então, $\forall\, x^* \in \mathcal{D}(A^*)$ e $\forall\, x \in X$ tem-se

$$\langle x^*, x\rangle = \langle x^*, (\lambda - A)R(\lambda, A)x\rangle = \langle(\lambda - A)^*x^*, R(\lambda, A)x\rangle.$$

Mas, como A é, por hipótese, fechado, o domínio de $R(\lambda, A)$ é o espaço X. Pela Proposição A.1.7, $R(\lambda, A)^*$ é, igualmente, um operador linear limitado com domínio X^*. Logo, $(\lambda - A)^*x^*$ pertence ao domínio de $R(\lambda, A)^*$ e, assim,

$$\langle x^*, x\rangle = \langle(\lambda - A)^*x^*, R(\lambda, A)x\rangle = \langle R(\lambda, A)^*(\lambda - A)^*x^*, x\rangle, \quad \forall\, x \in X,$$

donde

$$R(\lambda, A)^*(\lambda - A)^* x^* = x^* \quad \forall\, x^* \in \mathcal{D}(A^*). \tag{A.1.12}$$

De modo análogo, $\forall\, x \in \mathcal{D}(A)$ e $\forall\, x^* \in X^*$;

$$\begin{aligned}\langle x^*, x\rangle &= \langle x^*, R(\lambda, A)(\lambda - A)x\rangle = \langle R(\lambda, A)^* x^*, (\lambda - A)x\rangle = \\ &= \langle(\lambda - A)^*\, R(\lambda, A)^* x^*, x\rangle\end{aligned}$$

pois, pela Proposição A.1.7, $x^* \in \mathcal{D}(R(\lambda, A)^*)$ e, pela definição de operador adjunto, $R(\lambda, A)^* x^*$ pertence ao domínio de $(\lambda - A)^*$. Logo

$$(\lambda - A)^*\, R(\lambda, A)^* x^* = x^*, \quad \forall\, x^* \in X^*. \tag{A.1.13}$$

De (A.1.12) e (A.1.13) segue-se que $R(\lambda, A)^* = (\lambda - A)^{*^{-1}}$ e como $(\lambda - A)^* = \lambda^* - A^* = \lambda - A^*$ segue-se que $\lambda \in \rho(A^*)$ e $R(\lambda, A)^* = R(\lambda, A^*)$.

Seja X um espaço de Hilbert e $A\colon X \to X$ um operador linear densamente definido. Diz-se que A é *simétrico* se $A \subset A^*$, i.e., se $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ e $A^* = A$ em $\mathcal{D}(A)$. Equivalentemente,

$$(y, Ax) = (Ay, x) \quad \forall\, x, y \in \lceil(A).$$

Diz-se que o operador simétrico A é *auto-adjunto* se $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.

A.1.9 Teorema. *Se A é simétrico e $\mathcal{I}(\lambda_0 - A) = X$ para algum λ_0 real, $\lambda_0 \in \rho(A)$, então A é auto-adjunto.*

Demonstração: Satisfeitas as hipóteses, ponhamos $x' = R(\lambda_0, A)x$ e $y' = R(\lambda_0, A)y$, $x, y \in X$. Teremos $x = \lambda_0 x' - Ax'$, $y = \lambda_0 y' - Ay'$ e como A é simétrico, $(x', Ay') = (Ax', y')$, donde $(x', \lambda_0 y') - y) = (\lambda_0 x' - x, y')$ e, daí, $(x', y) = (x, y')$, e, portanto, $R(\lambda_0, A)$ é simétrico visto que $R(\lambda_0, A)$ é densamente definido. Além disto, $\mathcal{D}(R(\lambda_0, A)) = \mathcal{I}(\lambda_0 - A) = X$, donde $R(\lambda_0, A)$ é auto-adjunto. Seja $x \in \mathcal{D}(A^*)$ e $z = (\lambda_0 - A)^* x$. Se $y \in X$ e $w = R(\lambda_0, A)y$ temos

$$(w, z) = (R(\lambda_0, A)y, z) = (y, R(\lambda_0, A)x)$$

e

$$(w, z) = (w, (\lambda_0 - A)^* x) = ((\lambda_0 - A)w, x) = (y, x).$$

Logo, $(y, x) = (y, R(\lambda_0, A)z)$ $\forall\, y \in X$, donde $x = R(\lambda_0, A)z$ e, portanto, $x \in \mathcal{D}(A)$. Desse modo, $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$, donde A é auto-adjunto.

A.2 A Função Exponencial

Demonstra-se nos cursos de Cálculo que se A é um número real qualquer, a função exponencial $e^{tA}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser definida por

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{tA}{n}\right)^n,$$

por

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{tA}{n}\right)^{-n},$$

ou, ainda, por

$$e^{tA} = 1 + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nA^n}{n!} + \cdots$$

e que seu campo de definição é todo o eixo real. Desse modo, se com A se designa, agora, um elemento qualquer de $\mathcal{L}(X)$, a série

$$1 + \frac{|t|\,||A||}{1!} + \frac{|t|^2||A||^2}{2!} + \ldots$$

é convergente. Levando (A.1.1) em consideração vê-se, então, que a série

$$I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nA^n}{n!} + \ldots \tag{A.2.1}$$

onde I é o operador identidade de X, é absolutamente convergente e, portanto, convergente, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Define, pois, uma função dita, ainda, *funçãoo exponencial* e designada, ainda, por e^{tA}. Se puzermos $(tA)^0 = I$ podemos, pois, escrever

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!}\cdot$$

Note-se que $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ e $||e^{tA}|| \leq e^{|t|\,||A||}$.

A.3 Derivação das Funções Vetoriais

Seja $f\colon (a,b) \to X$ uma função definida no intervalo (a,b) e com valores em um espaço de Banach, X, (real ou complexo). Diz-se que f é *diferenciável* no ponto $t_0 \in (a,b)$ se existir, em X, o limite

$$f'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

dito *derivada* de f no ponto t_0. Diz-se que f é diferenciável em $\Omega \subset (a,b)$ se f for diferenciável em todo ponto de Ω.

São válidas para diferenciação das funções vetoriais as regras a seguir, cuja demonstração é análoga à do caso numérico: i) Se f é diferenciável no ponto t_0 então

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)f'(t_0) + \alpha(t, t_0),$$

onde α satisfaz a condição

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\alpha(t,t_0)}{t - t_0} = 0.$$

Em particular, se f é diferenciável no ponto t_0, então f é contínua nesse ponto;

ii) Se f é uma função constante, i.e., se $f(t) = x_0\,, \forall\, t \in (a, b)$, onde x_0 é um ponto de X, então f é diferenciável em todo ponto de (a, b) e

$$f'(t) = 0 \quad \forall\, t \in (a, b).$$

iii) Se f e g são diferenciáveis no ponto t_0, então $f + g$ é diferenciável em t_0 e

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

iv) Se γ é uma função numérica definida em (a, b) e diferenciável no ponto $t_0 \in (a, b)$ e $f\colon (a, b) \to X$ é diferenciável em t_0, então γf é diferenciável em t_0 e

$$(\gamma f)'(t_0) = \gamma'(t_0)f(t_0) + \gamma(t_0)f'(t_0).$$

Em particular, se γ for uma constante, $(\gamma f)'(t_0) = \gamma f'(t_0)$.

A.3.1 Teorema. *Se $f\colon (a, b) \to X$ é contínua em (a, b), derivável à direita em (a, b) e $f'_+ = 0$ em todo ponto de (a, b), então f é constante em (a, b).*

Demonstração: Seja $c \in (a, b)$ e $\varepsilon > 0$. de $f'_+(c) = 0$ segue-se que para $t > c$ suficientemente próximo de c tem-se

$$||f(t) - f(c)|| \leq \varepsilon(t - c). \tag{A.3.1}$$

Seja $[c, t_0)$ o máximo subintervalo de $[c, b)$ onde (A.3.1) é válida. Deve-se ter $t_0 = b$. Com efeito, suponha-se $t_0 < b$. Como $f'_+(t_0) = 0$ tem-se

$$||f(t) - f(t_0)|| \leq \varepsilon(t - t_0), \tag{A.3.2}$$

para $t > t_0$ e suficientemente próximo de t_0. Seja $t > t_0$ um ponto onde (A.3.2) é válida. De (A.3.1) e (A.3.2) vem, então,

$$\begin{aligned} ||f(t) - f(c)|| \leq ||f(t) - f(t_0)|| + ||f(t_0) - f(c)|| \leq \\ \leq \varepsilon(t - t_0)) = \varepsilon'(t_0 - c) \leq \varepsilon(t - c), \end{aligned}$$

isto é, (A.3.1) é válida para todo $t > t_0$ e suficientemente próximo de t_0, o que contraria a definição de t_0. Logo, $t_0 = b$ e temos $||f(t) - f(c)|| \leq \varepsilon(t - c)$ para todo $t \in [c, b)$. Pela arbitrariedade de ε, $f(t) = f(c)$ para todo $t \in [c, b)$. Como c é um ponto arbitrário de (a, b), f é constante em (a, b).

A.3.2 Lema de Dini. *Se $f\colon (a, b) \to X$ é contínua em (a, b) e admite uma derivada à direita, f'_+, contínua em (a, b), então f é continuamente diferenciável em (a, b).*

Demonstração: A função f'_+ é integrável em (a, t) $\forall\, t \in (a, b)$ donde, pondo

$$g(t) = \int_a^t f'_+(\tau)\, d\tau,$$

g é diferenciável em (a,b) e $g' = f'_+$ em (a,b). Mas, então, $g'_+ = f'_+$, i.e., $(f-g)'_+ = 0$ em todo ponto de (a,b) e, como f e g são contínuas, $f-g$ é uma constante, pelo Teorema A.3.1. Logo, f é diferenciável em (a,b) e sendo $f' = f'_+$ e, por hipótese, f'_+ contínua em (a,b) segue-se que f é continuamente diferenciável em (a,b).

Além das regras i)-iv) e do Teorema A.3.1 é válida, para as álgebras de Banach e, em particular, pra a álgebra $\mathcal{L}(X)$, a regra a seguir cuja demonstração é, também, análoga à do caso numérico.

A.3.3 Teorema. *Se f e g são duas funções definidas em (a,b), com valores em uma álgebra de Banach e diferenciáveis em um ponto $t_0 \in (a,b)$, então fg é diferenciável no ponto t_0 e*

$$(fg)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0).$$

A.3.4 Proposição. *Seja $u\colon (a,b) \to X$, onde X é um espaço de Banach. Se u' existe e é uniformemente contínua no intervalo (a,b), então $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(t+h)-u(t)}{h} = u'(t)$ uniformemente em (a,b).*

Demonstração: Se u' é uniformemente contínua em (a,b) então, dado $\varepsilon > 0$, existe $h_0 > 0$ tal que

$$|u'(t+\tau) - u'(t)| < \varepsilon \; 0 < \tau < h_0\,,\ \tau > 0,\ \forall\, t \in (a,b),\ t+\tau \in (a,b).$$

Logo,

$$\left|\frac{u(t+\tau)-u(t)}{h} - u'(t)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_0^h [u'(t+\tau) - u'(t)]d\tau\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_0^h |u'(t+\tau) - u'(t)|\, d\tau < \varepsilon$$

$0 < h < h_0$ e $\forall\, t \in (a,b)$, $t+h \in (a,b)$, i.e., $\dfrac{u(t+h)-u(t)}{h}$ converge uniformemente para $u'(t)$ em (a,b).

A.4 Integração das Funções Vetoriais

Seja $f\colon (a,b) \to X$, onde X é um espaço de Banach (real ou complexo), uma função contínua. Dada uma decomposição π de $[a,b]$, i.e., $n+1$ números reais, $t_0, \ldots, t_n$, satisfazendo a condição

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

e n números reais ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, fica definida uma soma de Riemann de f:

$$\sigma_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i).$$

Evidentemente $\sigma_\pi(f) \in X$. Seja

$$|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}.$$

Com os mesmos argumentos do caso numérico demonstra-se que $\sigma_\pi(f)$ tem um limite, $x \in X$, quando $|\pi| \to 0$. De modo mais preciso: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||g_\pi(f) - x|| < \varepsilon$$

para toda π tal que $|\pi| < \delta$. Como no caso numérico, diz-se que x é a *integral* de f em $[a, b]$ e escreve-se

$$x = \lim_{|x| \to 0} \sigma_\pi(f) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

A.4.1 São válidas para integral das funções vetoriais as regras usuais do caso numérico, a saber:

i) Se K é uma constante,
$$\int_a^b K f(t)\, dt = K \int_a^b f(t)\, dt$$

ii) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$

iii) Se $a \leq c \leq b$ então
$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b f(t)\, dt$$

iv) $\displaystyle\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b ||f(t)||\, dt$

v) $\displaystyle\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \max_{a \leq t \leq b} ||f(t)||(b-a)$

A demonstração é análoga à do caso real e será omitida.

A.4.2 Teorema da Média. *Tem-se*

$$\int_a^b f(t)\, dt = (b-a)\widetilde{x},$$

onde $\widetilde{x} \in \overline{\mathrm{conv\, f(a, b)}}$ (= *fecho do conjunto das combinações convexas dos elementos do conjunto de valores de* f *em* (a, b)).

Com efeito,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt = \frac{1}{b-a} \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i) = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\, f(\xi_i).$$

Mas,

$$\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a} > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a} = 1,$$

donde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \in \overline{\mathrm{conv}\,\mathrm{f(a,b)}}.$$

A.4.3 Corolário. *Para todo $t \in [a,b]$ tem-se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(\tau)\,d\tau = f(t). \tag{A.4.1}$$

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ tem-se $||f(\tau) - f(t)|| \le \varepsilon$ para $|\tau - t|$ suficientemente pequeno, uma vez que, por hipótese, f é contínua. Logo, designado por $B(x,r)$ a bola aberta de centro x e raio r temos, pelo Teorema da Média,

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(\tau)\,d\tau \in \overline{(B(f(t),\varepsilon)}$$

para h suficientemente pequeno; no limite, quando $h \to 0$ tem-e (A.4.1).

Uma outra propriedade da integral das funções numéricas que também é válida no caso das funções vetoriais é o Teorema Fundamental do Cálculo: se F é diferenciável em $[a,b]$ e $F'(t) = f(t)$, $t \in [a,b]$, então

$$\int_a^t f(\tau)\,d\tau = F(b) - F(a).$$

Recorde-se que, como já foi dito após o Corolário A.1.4 deste Apêndice, um operador linear, A, com domínio $\mathcal{D}(A) \subset X$ e valores em Y (X e Y espaços de Banach) é dito *fechado* se seu gráfico

$$\{(x, Ax); x \in \mathcal{D}(A)\}$$

é um subespaço fechado de $X \times Y$. Equivalentemente: de $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ decorre que $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = y$.

Todo operador limitado $A\colon X \to Y$ é fechado visto que nesse caso, $\mathcal{D}(A) = X$ e A é contínuo. E, reciprocamente, se A é fechado e $\mathcal{D}(A) = X$ então A é contínuo, i.e., limitado (Teorema do Gráfico Fechado).

A.4.4 Teorema. *Sejam A um operador linear fechado de X, i.e., um operador linear fechado com domínio e imagem contidos em X e f uma função contínua em $[a,b]$, com valores em $\mathcal{D}(A)$ e tal que Af é contínua em $[a,b]$. Então*

$$\int_a^b f(t)\,dt \in \mathcal{D}(A)$$

e

$$A\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b Af(t)\,dt.$$

Demonstração: Consideremos a decomposição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$, onde $t_i = a + i(b-a)/n$ e seja $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Então,

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i) \in \mathcal{D}(A), \quad n = 1, \ldots$$

visto que $f(\xi_i) \in \mathcal{D}(A)$ $i = 1, \ldots, n$ e $\mathcal{D}(A)$ é um subespaço de X. Como, por hipótese, f e Af são contínuas temos

$$x_n \to \int_a^b f(t)\, dt$$

e

$$Ax_n = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) Af(\xi_i) \to \int_a^b Af(t)\, dt.$$

Logo,

$$\int_a^b f(t)\, dt \in \mathcal{D}(A) \quad \text{e} \quad A \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b Af(t)\, dt$$

pois A é fechado, por hipótese.

A.5 Integrais Impróprias

A integral imprópria de uma função contínua, $f\colon [a, \infty) \to X$ é definida exatamente como no caso numérico:

$$\int_a^\infty f(t)\, dt = \lim_{\rho \to \infty} \int_a^\rho f(t)\, dt,$$

quando esse limite existe. Nesse caso diz-se que a integral

$$\int_a^\infty f(t)\, dt \tag{A.5.1}$$

é *convergente*. Diz-se que é *absolutamente convergente* se existir o limite

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_a^\rho ||f(t)||\, dt.$$

É imediato que toda integral absolutamente convergente é convergente.

Permanece válido para as integrais impróprias o seguinte teste.

A.5.1 Teste de Weierstrass. Seja $f\colon [a, \infty) \times \Lambda \to X$, Λ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, contínua em $t \in [a, \infty)$ para cada $\lambda \in \Lambda$ e $M\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ contínua e positiva em $t \in [a, \infty)$. Se $||f(t, \lambda)|| \le M(t)$ $\forall\, (t, \lambda) \in [a, \infty) \times \Lambda$ e

$$\int_a^\infty M(t)\, dt$$

converge, então

$$\int_a^\infty f(t, \lambda)\, dt$$

converge absolutamente para cada λ pertencente ao conjunto Λ e a convergência é uniforme nesse conjunto.

Também é válido o teorema a seguir.

A.5.2 Teorema. *Se* f *e* $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ *são contínuas para* $(t, \lambda) \in [0, \infty) \times \Lambda$*,* Λ *aberto de* $\mathbb{C}$*,*

$$\int_a^\infty f(t, \lambda)\, dt$$

é convergente para cada $\lambda \in \Lambda$ *e*

$$\int_a^\infty \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda}\, dt$$

é uniformemente convergente em Λ*, então*

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_a^\infty f(t, \lambda)\, dt = \int_a^\infty \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda}\, dt.$$

A.6 Funções Holomorfas

Seja, agora, X um espaço de Banach complexo e f uma função definida em uma região G do plano complexo e com valores em X. Diz-se que f é holomorfa em G se

$$\lim_{w \to \zeta} \frac{f(w) - f(\zeta)}{w - \zeta}$$

existe em todo $\zeta \in G$.

A demonstração do teorema a seguir encontra-se em [52] (pág. 79).

A.6.1 Teorema. *Para que* $f\colon G \to X$ *seja holomorfa em* G *é necessário e suficiente que a função complexa* $\langle x^*, f \rangle$ *seja holomorfa em* G*, para todo* $x^* \in X^*$ *(*X^* *é o dual de* X*). Para que a função* $A\colon G \to \mathcal{L}(X)$ *seja holomorfa em* G *é necessário e suficiente que a função complexa* $\langle x^*, A(\zeta)x \rangle$ *seja holomorfa em* G*,* $\forall\, x \in X$ *e* $\forall\, x^* \in X^*$*.*

Seja C uma curva retificável do plano complexo, de equação $\zeta(t)$, $0 \le t \le t_0$, com ζ contínua e de variação limitada em $[0, t_0]$. Seja $f\colon C \to X$ contínua. Então a integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_0^{t_0} f[\zeta(t)]\, d\zeta(t) = \int_G f(\zeta) d(\zeta)$$

existe e para todo $x^* \in X^*$,

$$\left\langle x^*, \int_G f(\zeta) d(\zeta) \right\rangle = \int_G \langle x^*, (\zeta) \rangle\, d(\zeta).$$

A.6.2 São válidos:

i) **Teorema de Cauchy.** Se f é uma função holomorfa no interior e sobre um contorno simples e fechado, C, então

$$\int_G f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

ii) **Fórmula Integral de Cauchy.** Se f é uma função holomorfa no interior e sobre um contorno simples e fechado, C, e ζ é um ponto do interior de C, então

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-\zeta}\, dw$$

e

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}}\, dw \quad n = 1, \ldots .$$

iii) **Desenvolvimento em Série de Taylor.** Se f é uma função holomorfa no interior e sobre um contorno simples e fechado, C, e a é um ponto interior de C, então

$$f(\zeta) = f(a) + (\zeta - a)f'(a) + \cdots + \frac{(\zeta - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

em um círculo de centro a e raio δ, onde δ é a distância de a a C.

iv) Seja C uma curva simples $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq h$, onde $x(t)$ e $y(t)$ têm derivada contínua em (a, h) e G uma região do plano complexo. Seja $f(z, w)$ uma função contínua para $z \in G$ e $\omega \in C$ e holomorfa em G para cada $w \in C$. Então a função

$$F(z) = \int_C f(z, w)\, dw$$

é holomorfa em G e

$$\frac{d^n F}{dz^n} = \int_C \frac{\partial^n f}{\partial z^n}\, dw;$$

v) Seja C uma curva simples $z(t) = x(t) + iy(t)$, $-\infty \leq t \leq +\infty$, suponhamos que as condições do teorema anterior sejam satisfeitas em cada arco limitado de C e que a integral

$$\int_C f(z, w)\, dw$$

seja uniformemente convergente. Então a função

$$F(z) = \int_C f(z, w)\, dw$$

é holomorfa em G e

$$\frac{d^n F}{dz^n} = \int_C \frac{\partial^n f}{\partial z^n}\, dw.$$

A.7 Espaços L^p

A norma de $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, é aqui representada por $||u||_p$, i.e.,

$$||u||_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$||u||_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |u(x)|.$$

Seja p' definido por $p' = p/(p-1)$ se $1 < p < \infty$, $p' = \infty$ se $p = 1$ e $p' = 1$ se $p = \infty$.

A.7.1 Desigualdade de Hölder. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $y \in L^{p'}(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$||uv||_1 \leq ||u||_p \, ||v||_{p'} .$$

(A demonstração encontra-se em [5] e [40]).

A.7.2 Desigualdade de Hölder Generalizada. Seja $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ e $\sum_{i=1}^{k} 1/p_i \leq 1$. Então pondo $1/p = \sum_{i=1}^{k} 1/p_i$, tem-se

$$u_1 \dots u_k \in L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad ||u_1 \dot{u}_k||_p \leq ||u_1||_{o_1} \dots ||u_k||_{p_k} . \tag{A.7.1}$$

Demonstração: Para $k = 1$ a desigualdade (A.7.1) é trivial. Suponhamos verdadeira para $k = n - 1$. Pndo $1/r = 1/p_1 + \cdots + 1/p_{n-1}$ tem-se, pois, por hipótese,

$$u_1 \dots u_{n-1} \in L^r(\Omega) \quad \text{e} \quad ||u_1 \dots u_{n-1}||_r \leq ||u_1||_{p_1} \dots ||u_{n-1}||_{o_{n-1}} \tag{A.7.2}$$

e $1/p = 1/r + 1/p_n$. De $r = \infty$ ou $p_n = \infty$ resulta imediatamente que (A.7.1) é verdadeira para $k = n$ uma vez que de $u \in L^s(\Omega)$ e $v \in L^\infty(\Omega)$ vem $uv \in L^s(\Omega)$ e $||uv||_s \leq ||u||_s ||v||_\infty$. Seja, então, $1 \leq r < \infty$ e $1 \leq p_n < \infty$. Neste caso tem-se $p < \infty$ e $1 = \dfrac{1}{r/p} + \dfrac{1}{p_n/p}\cdot$ De $u_n \in L^{p_n}(\Omega)$ vem $|u_n|^{p_n} \in L^1(\Omega)$ donde $|u_n|^{o\frac{p_n}{p}} \in L^1(\Omega)$ e daí, $|u_n|^p \in L^{\frac{p_n}{p}}(\Omega)$. Analogamente, $|u_1 \dots u_{n-1}|^p \in L^{r/p}(\Omega)$, logo, pela Desigualdade de Hölder, $|u_1 \dots u_{n-1}|^p \in L^1(\Omega)$ e

$$|| \, |u_1 \dots u_{n-1}|^p |u_n|^p ||_1 \leq || \, |u_1 \dots u_{n-1}|^p ||_{\frac{r}{p}} || \, |u_n|^p ||_{\frac{p_n}{p}} . \tag{A.7.3}$$

Mas

$$|| \, |u_n|^p ||_{\frac{p_n}{p}} = \left(\int_\Omega | \, |u_n|^p|^{\frac{p_n}{p}} \, dx\right)^{\frac{p}{p^n}} = \left(\int_\Omega |u_n|^{p_n}\right)^{\frac{p}{p_n}} = ||u||^p_{p^n} \tag{A.7.4}$$

e, analogamente,

$$|| \, |u_1 \dots u_{n-1}|^p ||_{\frac{r}{p}} = ||u_1 \dots u_{n-1}||^p_r , \tag{A.7.5}$$

$$|| \, |u_1 \dots u_{n-1}|^p |u_n|^p ||_1 = ||u_1 \dots u_{n-1} \, u_n||^p_p . \tag{A.7.6}$$

Logo, por (A.7.2)-(A.7.6).

$$||u_1 \dots u_{n-1}\, u_n||^p \leq ||u_1||_{p_1} \dots ||u_{n-1}||_{p_{n-1}} ||u_n||_{p_n}\,,$$

i.e., (A.7.1) é válida para $k = n$.

A.7.3 Desigualdade de Interpolação. Se $u \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$ $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, então, para todo real r que satisfaz a condição $p_1 \leq r \leq p_2$ tem-se $u \in L^r(\Omega)$ e, se $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1-a}{p_2}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, então

$$||u||_r \leq ||u||_{p_1}^{\alpha}\, ||u||_{p_2}^{1-\alpha}.$$

Demonstração: Para $r = p_1$ e $r = p_2$ a asserção é trivial. Seja, então, $p_1 < r < p_2$. Daí vem $0 < \alpha < 1$ e, portanto,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{p_1}{\alpha}} + \frac{1}{\frac{p_2}{1-\alpha}}\,.$$

Por hipótese tem-se $u \in L^{p_1}(\Omega)$, i.e., $|u|^{p_1} \in L^1(\Omega)$ donde $|u|^{\alpha \frac{p_1}{\alpha}} \in L^1(\Omega)$ e, portanto, $|u|^{\alpha} \in L^{\frac{p_1}{\alpha}}(\Omega)$. Analogamente $|u|^{1-\alpha} \in L^{\frac{p_2}{(1-\alpha}}(\Omega)$. Pela Desigualdade de Hölder Generalizada tem-se, então, $|u| = |i|^{\alpha}|u|^{1-\alpha} \in L^r(\Omega)$, donde $u \in L^r(\Omega)$ e

$$||u||_r \leq ||\, |u|^p||_{\frac{p_1}{\alpha}}\, ||\, |u|^{1-\alpha}||_{\frac{p_2}{)1-\alpha)}} = ||u||_{p_1}^{\alpha} \cdot ||u||_{p_2}^{1-\alpha}.$$

Para ser usado no Exemplo 1.2.12-3), do Capítulo 1, será demonstrado a seguir um resultado sobre as convoluções.

A.7.4 Teorema. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, a função $f(x-y)g(y)$ é integrável em $\mathbb{R}^n$ e, pondo*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy,$$

tem-se $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $||f * g||_p \leq ||f||_1 \cdot ||g||_p$.

Demonstração: Se $p = \infty$ tem-se, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, ||g(y)||_{\infty}\, dy =$$
$$= ||g(y)||_{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, dy = ||f||_1 \cdot ||g||_{\infty}\,.$$

Logo, $f * g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $||f * g||_{\infty} \leq ||f||_1 \cdot ||g||_{\infty}$. O teorema é pois, válido para $p = \infty$. Se $p = 1$ tem-se, para quase todo $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, dx = |g(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx = ||f_1|g(y)|$$

e, portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, dx = ||f||_1 \cdot ||g||_1 .$$

Pelo Teorema de Tonelli tem-se, então, $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Daí, pelo Teorema de Fubini tem-se, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\, dy < \infty$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dx = ||f||_1 \cdot ||g||_1 ,$$

i.e., o teorema é válido para $p = 1$. Se $1 < p < \infty$ tem-se $|g|^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$ donde, pelo que já foi demonstrado, a função $|f(x-y))|\, |g(y)|^p$ é integrável para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\, |g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^n)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e, como $|f(x-y)|^{\frac{1}{p1}} \in L^{p'}_y(\mathbb{R}^n)$ tem-se, pela Desigualdade de Hölder

$$|f(x-y)|\, |g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\, |g(y)|\, |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^1_y(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)| dy \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y))|\, |g(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

ou seja

$$|(f*g)(x)|^p \le (|f| * |g|^p)(x) \cdot ||f||_1^{\frac{p}{p'}} . \tag{A.7.7}$$

Mas, pelo que já foi demonstrado para $p = 1$, tem-se que $|f| * |g|^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$||\, |f| * |g|^p||_1 \le ||f||_1 \cdot ||\, |g|^p|| = ||f||_1 \cdot ||g||_p^p .$$

De (A.7.7) segue-se, então, que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$||f*g||_p \le ||f||_1^{\frac{1}{p}}\, ||g||_p\, ||f||_1^{\frac{1}{p'}} = ||f||_1 \cdot ||g||_p$$

o que completa a demonstração.

A.8 Transformação de Fourier

Seja $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ou, simplesmente, $\mathcal{S}$ o espaço das funções rapidamente decrescentes a 0, i.e., o espaço das funções $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$p(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta\, \mathcal{D}^\alpha\, \varphi(x)| < \infty$$

$\forall\, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_i \beta_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$, $x^\beta = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$, com a topologia definida pelas seminormas $p(\varphi)$. A *transformada de Fourier*, $\widehat{\varphi}$, de uma função $\varphi \in \mathcal{S}$ é definida por

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle x, \xi\rangle}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

e a transformada inversa, $\widetilde{\varphi}$, de $\varphi \in \mathcal{S}$ por

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi.$$

A.8.1 Exemplo. Temos

$$\left(e^{-a|\cdot|^2}\right)^{\wedge}(\xi) = (2a)^{-n/2}\, e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2\,. \tag{A.8.1}$$

Em primeiro lugar, (A.8.1) é válida para $n = 1$, i.e.,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\,,\ \xi \in \mathbb{R}. \tag{A.8.2}$$

Com efeito, o integrando em (A.8.2) é uma função analítica em todo o plano complexo donde, pelo Teorema de Cauchy, a integral em (A.8.2) não muda de valor quando calculada sobre qualquer reta $z = x + iy$, y constante, paralela ao eixo do x. Logo

$$\begin{aligned}\left(e^{-ax^2}\right)^{\wedge}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2}\, e^{-i\xi(x+iy)}\, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ay^2+\xi y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\xi)}\, dx.\end{aligned}$$

Pondo agora $y = -\dfrac{\xi}{2a}$ temos

$$\left(e^{-ax^2}\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx.$$

mas, como se sabe, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot$ Logo,

$$\left(e^{-ax^2}\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\,,$$

i.e., (A.8.1) é realmente válida para $n = 1$. No caso geral temos

$$\begin{aligned}\left(e^{-ax^2}\right)^{\wedge}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}\, e^{-i\langle\xi,x\rangle}\, dx = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_j^2}\, e^{-i\xi_j x_j^2}\, dx_j\end{aligned}$$

donde, por (A.8.2),

$$\begin{aligned}\left(e^{-ax^2}\right)^{\wedge}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi_j^2}{da}} = (2\pi)^{-n/2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}} = \\ &= (2a)^{-n/2}\, e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}\,.\end{aligned}$$

A.8.2 Lema. *É válida a fórmula*

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}\, dt.$$

Demonstração: Usando a teoria dos resíduos vê-se facilmente que

$$e^{-\lambda} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\, dx;$$

Além disto tem-se

$$\int_0^\infty e^{-(1+x^2)t}\, dt = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x \left(\int_0^\infty e^{-(1+x^2)t}\, dt \right) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x \left(\int_0^\infty e^{-t-tx^2}\, dt \right) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} \left(\int_0^\infty e^{-tx^2} \cos \lambda x\, dx \right) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-tx^2}\, e^{-i\lambda x}\, dx \right) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\lambda^2/4t} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, e^{-\lambda^2/4t}\, dt. \end{aligned}$$

A.8.3 Exemplo. É válida a fórmula

$$\left(e^{-|\cdot|}\right)^\wedge(\xi) = \sqrt{\frac{2^n}{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}\,.$$

Com efeito, pelo Lema A.8.2 e o Exemplo A.8.1 temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|}\, e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, dt \right) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx \right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, ((4\pi t)^{n/2}\, e^{-i|\xi|^2}) dt = \\ &= \frac{(4\pi)^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\frac{n-1}{2}}\, e^{-t|\xi|^2}\, dt = \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}} (2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \int_0^\infty e^{-(1+|\xi|^2)t}\, t^{\frac{n-1}{2}}\, dt = \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} \int_0^\infty e^{-s}\, s^{\frac{n-1}{2}}\, ds = \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(e^{-|\cdot|}\right)^\wedge(\xi) = \sqrt{\frac{2^n}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}\,.$$

A.8.4 Teorema. *Pondo $F(\varphi) = \widehat{\varphi}$, $\varphi \in \mathcal{S}$, F é uma transformação linear, contínua e bijetiva de $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{S}$ e $F^{-1}(\varphi) = \widetilde{\varphi}$.*

A.8.5 Teorema. *São válidas as fórmulas*

i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\,\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\widehat{\psi}\,dx$

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\widehat{\psi}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\,\overline{\widehat{\psi}}\,dx$

iii) $\widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n/2}\,(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})$

iv) *Se $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ então $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$ e $\widehat{\varphi * \psi} = (2\pi)^{n/2}\,\widehat{\varphi}\widehat{\psi}$.*

Seja $\mathcal{S}'$ o conjunto das distribvuições temperadas, i.e., dos funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{S}$. A transformada de Fourier, $\widehat{u}$, de $u \in \mathcal{S}'$ é definida por

$$\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Do Teorema A.8.4 resulta que $\widehat{u} \in \mathcal{S}'$.

Ponhamos

$$D_\alpha = (i)^{-|\alpha|}\,D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

e seja $P(t) = \sum\limits_\alpha c_\alpha t^\alpha = \sum\limits_\alpha c_\alpha t_1^{\alpha_1}\dots t_n^{\alpha_n}$. O operador diferencial $P(D)$ é definido por $P(D) = \sum\limits_\alpha c_\alpha D_\alpha$.

A.8.6 Teorema. $(P(D)u)^\wedge(\xi) = P(\xi)\widehat{u}(\xi)$, $(Pu)^\wedge = P(-D)\widehat{u}$, $\;u \in \mathcal{S}'$.

Pondo $\breve{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, $\varphi \in \mathcal{S}$, define-se $\breve{u}$, $u \in \mathcal{S}'$, por $\breve{u}(\varphi) = u(\breve{\varphi})$.

A.8.7 Teorema. *Se $u \in \mathcal{S}'$, então $\widehat{\widehat{u}} = \breve{u}$.*

Identifiquemos a função $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com a distribuição temperada

$$\varphi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} u\,\varphi\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

A.8.8 Teorema de Plancherel. *Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e a transformada F definida por $F(u) = \widehat{u}$ é uma isometria linear de $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

A.8.9 Teorema (Hausdorff-Young). *Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $1 \le p \le 2$, então $\widehat{u} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/p' = 1$ e*

$$||\widehat{u}||_{p'} \le (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\,||u||_p\,.$$

Os Teoremas A.8.4-A.8.8 es tão demonstrados em Rudin [52] e Yosida [67] e o Teorema A.8.9 em Hormander [25] (Teorema 7.1.13).

A.9 Espaços de Sobolev

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p < \infty$. O espaço de Sobolev $H^m(\Omega)$ é o espaço vetorial

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

munido da norma

$$||u||_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_2^2 \right)^{1/2},$$

onde D^α é a derivada $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ no sentido das distribuições. Com o produto interno definido por

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

$H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Tem-se $C_0^\infty(\Omega) \subset H^m(\Omega)$. Com $H_0^m(\Omega)$ representa-se o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.

A.9.1 Teorema. *$u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ se, e só se, $\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

A demonstração deste teorema bem como dos demais resultados sobre distribuição e espaços de Sobolev encontra-se em Medeiros e M.M. Miranda [42].

A.9.2 Teorema. *Para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a equação $u - \Delta u = f$ tem uma solução fraca em $H^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Seja $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$u = c_n^{-1}(1 - \Delta)^{(n-1)/2} \left(e^{-|\cdot|}\right) * f,$$

onde

$$c_n = (2\pi)^{n/2} \sqrt{\frac{2^n}{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Pelo Exemplo A.8.3 e os Teoremas A.8.5 e A.8.6 tem-se $\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)/(1+|\xi|^2)$, donde

$$(1 + |\xi|^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{A.9.1}$$

Pelo Teorema A.8.8, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ uma vez que $C_0^\infty(\mathcal{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo Teorema A.9.1, $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Mas, pelo Teorema A.8.6, o primeiro membro de (A.9.1) é a transformada de Fourier de $(1 - \Delta)u$. Logo, pelo Teorema A.8.8, $(1 - \Delta)u = f$, i.e., o resultado a demonstrar é válido se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; portanto é válido se f é uma função qualquer de $L^2(\mathbb{R}^n)$ pois $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Índice alfabético