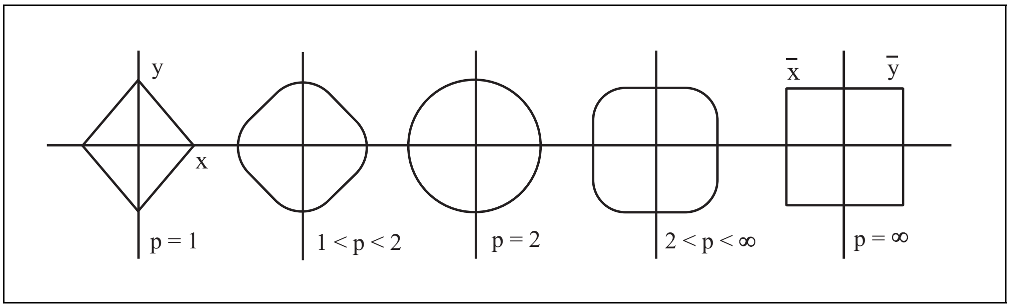
TEXTOS DE MATEMÁTICA
EDITORA INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

SEMIGRUPOS NÃO LINEARES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM ESPAÇOS DE BANACH

— ALVÉRCIO MOREIRA GOMES —



1a. Edição Digital– 2022

Gomes, Alvércio Moreira, 1916 - 2003.

G633s Semigrupos Não Lineares e Equações Diferenciais em Espaços de Banach / Alvércio Moreira Gomes. - 1a Ed. Dig. - Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2022.

304p.; 23cm.

Inclui bibliografia / inclui índice remissivo.

ISBN: **978-65-86502-07-7**

1. Equações diferenciais. 2. Semigrupos.

I. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática.

II. Título.

SEMIGRUPOS NÃO LINEARES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM ESPAÇOS DE BANACH

ALVERCIO MOREIRA GOMES

Primeira Edição Digital

Instituto de Matemática da
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro - RJ
2022

SUMÁRIO

Capítulo I

Preliminares

Capítulo II

Operadores monótonos e acretivos

Capítulo III

Semigrupos não lineares e equações de evolução

PREFÁCIO DA PRIMEIRA EDIÇÃO

Em 1959 R. Phillips [1] deu uma caracterização dos geradores dos semigrupos lineares de classe C_o em termos de monotonia dos operadores. Em 1962, G. Minty [2] definiu "operador máximo monótono" (multívoco) e demonstrou que, no caso dos espaços de Hilbert, um operador A é máximo monótono se e só se a imagem do operador $I+A$ é todo o espaço. A partir daí a teoria dos operadores monótonos e acretivos e dos semigrupos de aplicações não lineares desenvolveu-se rapidamente graças ao próprio Minty e a F. Browder, Y. Komura, T. Kato, M.G. Crandall, A. Pazy, H. Brezis e P. Benilan entre outros. Atualmente dispõe-se de uma bela teoria, com aplicações em várias áreas da Matemática e, em particular, às equações diferenciais parciais.

Nestas notas estão sistematizados os resultados mais significativos sobre os operadores monótonos e acretivos, os semigrupos de transformações não lineares de um espaço de Banach e a aplicação desses resultados à solução das equações diferenciais parciais. Foram redigidas com base nos cursos ministrados aos alunos da Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro a partir de 1986.

O Capítulo I é dedicado apenas aos preliminares da teoria. Visa-se com ele, a auto-suficiência destas notas. No Capítulo II são estudadas as principais propriedades dos operadores monótonos e acretivos. No Capítulo III são estudados os semigrupos não lineares incluindo aí estudo dos geradores infinitesimais, a aproximação e a geração de semigrupos; nesse mesmo capítulo são tratados o Problema de Cauchy Abstrato e as equações não homogêneas. Do caso não autonomo foi incluida apenas uma ligeira notícia no sentido de encaminhar o leitor a posteriores estudos.

Desejamos expressar nossa gratidão aos nossos alunos pelas preciosas correções e observações feitas em aula e aos colegas pelo estímulo, apoio e ajuda que nos deram. Em particular, ao Professor Nirzi Gonçalves de Andrade, pela cuidadosa leitura do texto, pelas inúmeras correções e valiosas sugestões. Desejamos também expressar nossa gratidão a Wilson Góes pelo esmero com que digitou estas notas no computador.

O Autor

PREFÁCIO DA SEGUNDA EDIÇÃO

Há pouca diferença conceitual e de conteúdo entre esta e a primeira edição. Durante os anos 2001 e 2002 a disciplina de Pós-Graduação do IM, a qual se destina o presente texto, foi ministrada pela Professora Sônia Maria Durães. Da leitura cuidadosa que fez sugeriu várias modificações e aperfeiçoamento para melhorar substancialmente a presente edição. Especificamente, entre outras, no Teorema 4.28, Cap. III foi eliminada a restrição $w \leq 0$.

Alvercio foi meu professor nos anos 50 quando freqüentava, como aluno, o Curso de Matemática da FNFi da Universidade do Brasil. Posteriormente fomos colegas e amigos quando trabalhávamos naquela instituição. Nos anos 60 a Universidade Brasileira passou por um período de escuridão e como resultado foram afastados de suas funções vários professores tendo retornado apenas nos anos 80. Houve profundas mudanças no país e conseqüentemente na Universidade. Dada sua inteligência brilhante rapidamente se adaptou aos novos métodos matemáticos contribuindo de modo eficiente na formação de jovens que se dirigiam ao IM-UFRJ. Lecionou várias disciplinas de pós graduação e escreveu textos correspondentes para facilitar o acesso dos alunos às novas áreas. Entre estes textos, inclui-se o presente sobre semi-grupos não lineares, bem atual, contendo os últimos resultados da área, expostos de modo inteligente e simples refletindo sua maneira pessoal de ser.

Rio de Janeiro, dezembro de 2002

Luis Adauto Medeiros

Dedicado à memória de Philippe Benilan,
como gratidão ao estímulo permanente
quando planejávamos escrever este livro.

Agradeço à Sônia Maria Durães, professora do IM-UFRJ,
pela leitura cuidadosa do manuscrito fazendo correções que
contribuiram enormemente para o aperfeiçoamento da presente
edição.

O Autor

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

1. Notação

1.1 – Os espaços normados a que nos referirmos serão sempre *espaços normados reais*. O *dual* de um espaço normado, X, i.e., o espaço dos funcionais lineares, x^*, contínuos em X, munido da norma *dual da norma de* X, i.e., da norma

$$||x^*|| = \sup_{||x|| \leq 1} |x^*(x)|,$$

será representado por X^*.

A dualidade de X e X^* será representada indiferentemente por $\langle x, x^* \rangle$ e $\langle x^*, x \rangle$, $x \in X$, $x^* \in X^*$. Portanto, $\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle = x^*(x) =$ valor que o funcional x^* assume no ponto x de X.

Escreveremos $x_n \to x$ e $x_n \rightharpoonup x$, respectivamente, para indicar que a sucessão (x_n) converge a x na topologia da norma de X e na topologia fraca de X. Portanto, $x_n \to x$ significa que $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$ e $x_n \rightharpoonup x$, que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n - x, x^* \rangle = 0, \quad \forall\, x^* \in X^*.$$

Escreveremos $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ para indicar que (x_n^*) tende a x^* na topologia fraca–* de X^*. Portanto, $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ significa que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n^* - x^*, x \rangle = 0, \quad \forall\, x \in X.$$

1.2 – Diz-se *operador* com domínio em um conjunto X e imagem em um conjunto Y, toda aplicação $A: X \to 2^Y$, onde 2^Y representa o conjunto das partes de Y. Portanto, Ax é um subconjunto de Y. O *gráfico* de A é o conjunto dos pontos $(x, y) \in X \times Y$ tais que $y \in Ax$ para algum $x \in X$. Como no caso dos operadores unívocos, pode-se identificar A a seu gráfico. Isto feito, o operador A é um subconjunto de $X \times Y$ e as inclusões $y \in Ax$ e $(x, y) \in A$ têm o mesmo significado.

Quando A for um operador com domínio em X e imagem em Y, diremos que A é um operador de X em Y; no caso particular em que $X = Y$ diremos, simplesmente, que A é um operador de X.

O conjunto $D(A)$ dos pontos $x \in X$ para os quais $Ax \neq \emptyset$ é dito *domínio* de A; o conjunto $\mathrm{Im}(A)$ dos pontos $y \in Y$ tais que $y \in Ax$ para algum $x \in D(A)$ é dito *imagem* de A. Portanto, $\mathrm{Im}(A) = \cup Ax, x \in D(A)$. Para exprimir que A é um operador com domínio em X e imagem em Y escreve-se $A: X \to Y$.

Sejam Y um espaço vetorial, $A: X \to Y$ e $B: X \to Y$. Definem-se $A + B$, λA e A^{-1}, respectivamente, por:

a) $A + B = \{(x, y + z); (x, y) \in A \text{ e } (x, z) \in B\}$;

b) $\lambda A = \{(x, \lambda y); (x, y) \in A\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

c) $A^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in A\}$.

Vê-se, então, que $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$, $D(\lambda A) = D(A)$ e $D(A^{-1}) = \mathrm{Im}(A)$.

Diz-se que $B: X \to Y$ é uma *extensão* de $A: X \to Y$ se $A \subset B$. Note-se que, no caso dos operadores unívocos, B é uma *extensão própria* de A se e só se $D(B)$ contém propriamente $D(A)$, mas isto não é verdade no caso não unívoco.

2. O operador dualidade

Seja X um espaço normado. Para cada $x \in X$, consideremos

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2\}.$$

2.1 - Proposição: *Seja X um espaço de Banach. Então, $\forall\, x \in X$ são válidas as seguintes propriedades de $F(x)$:*

i) $F(x) \neq \emptyset$;

ii) $F(x)$ *é convexo e compacto na topologia fraca–* de* X^*;

iii) $F(\lambda x) = \lambda F(x),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração: i) Conseqüência imediata do Teorema de Hahn-Banach.

ii) Temos, para $t \in [0,1]$ e $x_1^*, x_2^* \in F(x)$:

$$||x||^2 = t||x||^2 + (1-t)||x||^2 = t\langle x, x_1^*\rangle + (1-t)\langle x, x_2^*\rangle = \langle x, tx_1^* + (1-t)x_2^*\rangle. \quad (2.1)$$

Além disto

$$\langle x, tx_1^* + (1-t)x_2^*\rangle \leq \|x\|.\|tx_1^* + (1-t)x_2^*\|;$$

logo,

$$\|x\| \leq \|tx_1^* + (1-t)x_2^*\|.$$

Por outro lado,

$$\|tx_1^* + (1-t)x_2^*\| \leq t\|x_1^*\| + (1-t)\|x_2^*\| = t\|x\| + (1-t)\|x\| = \|x\|.$$

Logo, $\|tx_1^* + (1-t)x_2^*\| = \|x\|$ donde, levando em conta (2,1), $tx_1^* + (1-t)x_2^* \in F(x)$, o que demonstra que $F(x)$ é convexo.

Em vista do Teorema de Alaoglu, para demonstrar que $F(x)$ é compacto na topologia fraca–* de X^* é bastante demonstrar que $F(x)$ é fechado nessa topologia. Seja, para isto, x_0^* um ponto de X^* aderente a $F(x)$ na topologia fraca–* de X^*. Então, $\forall \varepsilon > 0$, a vizinhança $\{\xi \in X^*; |\langle x_0^* - \xi, x\rangle| < \varepsilon\}$ de x_0^*, na topologia fraca–* de X^*, contém um ponto x^* de $F(x)$, i.e., ponto $x^* \in F(x)$ tal que $|\langle x_0^* - x^*, x\rangle| < \varepsilon$. Daí vem $\|x\|^2 - \varepsilon < \langle x_0^*, x\rangle < \|x\|^2 + \varepsilon$ donde

$$\langle x_0^*, x\rangle = \|x\|^2. \quad (2.2)$$

De (2.2) vem $\|x\|^2 \leq \|x\|\|x_0^*\|$, donde $\|x\| \leq \|x_0^*\|$. Mas como, por outro lado, $F(x)$ está contido na bola $\{\xi \in X^*; \|\xi\| \leq \|x\|\}$ que, pelo Teorema de Alaoglu, é fechada na topologia fraca–* de X^*, segue-se que $\|x_0^*\| \leq \|x\|$. Logo $\|x_0^*\| = \|x\|$ donde, por (2.2), $x_0^* \in F(x)$.

iii) Seja $x^* \in F(x)$. Teremos para todo λ, $\langle \lambda x, \lambda x^* \rangle = \lambda^2 \langle x, x^* \rangle = \lambda^2 \|x\|^2 = \|\lambda x\|^2 = \|\lambda x^*\|^2$, donde $\lambda x^* \in F(\lambda x)$, i.e., $\lambda F(x) \subset F(\lambda x)$. Reciprocamente, de $y^* \in F(\lambda x)$ vem $\langle \lambda x, y^* \rangle = \|\lambda x\|^2 = \|y^*\|^2$, donde $\langle x, y^*/\lambda \rangle = \|x\|^2 = \|y^*/\lambda\|^2$, para $\lambda \neq 0$, i.e., $F(\lambda x) \subset \lambda F(x)$ para $\lambda \neq 0$. Como essa inclusão é trivial se $\lambda = 0$, temos $F(\lambda x) \subset \lambda F(x), \forall \lambda$. Logo $F(\lambda x) = \lambda F(x), \forall\, \lambda$, q.e.d..

Por i) da Proposição que se acaba de demonstrar, tem sentido a definição a seguir.

2.2 - Definição: a) Diz-se *operador dualidade* de X o operador $F : X \to X^*$ definido por

i) $D(F) = X$,

ii) $F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, \quad \forall\, x \in X$.

b) Diz-se *aplicação dualidade* de X toda aplicação $f\colon X \to X^*$ tal que $f(x) \in F(x)$, $\forall x \in X$.

Ainda por i) da Proposição 2.1 e pelo Axioma de Zermelo tem-se, imediatamente:

2.3 - Proposição: A família das aplicações dualidade de X não é vazia.

3. Funções convexas e semicontínuas

3.1 - Definição: Seja X um espaço topológico e $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$ uma função.

a) Diz-se que f é *semicontínua inferiormente* no ponto x_0 se

$$f(x_o) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x) \tag{3.1}$$

b) Diz-se que f é *semicontínua inferiormente* (abreviadamente, s.c.i.) se f for semicontínua inferiormente em cada ponto de X.

c) Diz-se que f é *seqüencialmente semicontínua inferiormente no ponto* x_0 de X se, para toda seqüência (x_n), $x_n \in X$, $n = 1, ..$, tal que $x_n \to x_0$, tem-se

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \tag{3.2}$$

e *seqüencialmente semicontínua inferiormente* se ela for seqüencialmente semicontínua inferiormente em cada ponto de X.

d) Para definir função *semicontínua superiormente e função seqüencialmente semicontínua superiormente* é bastante trocar o sinal e substituir $\liminf$ por $\limsup$ em (3.1) e (3.2), respectivamente. Observe-se que, se f é semicontínua superiormente, então $-f$ é semicontínua inferiormente o que permite limitar nosso estudo às funções semicontínuas inferiormente.

3.2 - Exemplos: a) Toda função $f: X \to (-\infty, +\infty)$ contínua no ponto $x_0 \in X$ é semicontínua inferiormente e superiormente no ponto x_o. Reciprocamente, toda função semicontínua inferiormente e superiormente no ponto x_0 é contínua no ponto x_0.

b) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1$ para $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ para $x > 0$ é s.c.i., porque é s.c.i. no ponto 0 e contínua nos demais. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1$ para $x < 0$ e $f(x) = 1$ para $x \geq 0$ é s.c.s.. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1$ para $x < 0$, $f(x) = 1$ para $x > 0$ e $f(0) = 0$ não é nem s.c.i nem s.c.s. no ponto $x = 0$.

c) Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$.

i) Se f é s.c.i., então f é seqüencialmente s.c.i..

ii) Se X satisfaz o Primeiro Axioma da Enumerabilidade e f é seqüencialmente s.c.i., então f é s.c.i. .

3.3 - Exemplos:

a) Se X é um espaço de Banach, a função $f(x) = \|x\|$ é seqüencialmente s.c.i. na topologia fraca de X, i.e.,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Com efeito, de $x, x_n \in X$, $n = 1, \ldots$ e $x_n \rightharpoonup x$ vem, $\forall\, x^* \in X^*$,

$$|\langle x, x^*\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle x_n, x^*\rangle| = \liminf_{n\to\infty} |\langle x_n, x^*\rangle| \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|\|x^*\| = \|x^*\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

donde

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\langle x, x^*\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

(Observe-se que $\|\,.\,\|$ é contínua na topologia da norma uma vez que $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$).

b) De acordo com a), a norma de X^* é seqüencialmente s.c.i. na topologia fraca de X^*, i.e., se $x^*, x_n^* \in X^*$, $n = 1, ...$, então

$$x_n^* \rightharpoonup x^* \Rightarrow \|x^*\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|.$$

Analogamente, a norma de X^* é seqüencialmente s.c.i. na topologia fraca–* de X^*, i.e., se $x^*, x_n^* \in X^*$, $n = 1, ...$, então

$$x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^* \quad \Rightarrow \quad \|x^*\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|.$$

A demonstração é análoga à do exemplo a).

c) Vê-se facilmente que se $f \geq 0$ então $\liminf_{x\to x_0} f^2(x) = \left(\liminf_{x\to x_0} f(x)\right)^2$. Logo, se f é s.c.i. e $f \geq 0$, então

$$f^2(x_0) \leq \left(\liminf_{x\to x_0} f(x)\right)^2 = \liminf_{x\to x_0} f^2(x),$$

i.e., f^2 é s.c.i.. Analogamente, se f é seqüencialmente s.c.i. e $f \geq 0$, então f^2 é seqüencialmente s.c.i.. Em particular, de a) e b) vem:

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad \|x\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|^2$$

$$x_n^* \rightharpoonup x^* \quad \Rightarrow \quad \|x^*\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|^2$$

$$x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^* \quad \Rightarrow \quad \|x^*\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|^2.$$

3.4 - Definição: Seja X um conjunto e $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ uma função. Diz-se *domínio efetivo* de f o conjunto $\mathrm{De}(f) = \{x \in X; f(x) < +\infty\}$. Diz-se que f é uma *função própria* se $\mathrm{De}(f) \neq \emptyset$.

3.5 - Exemplo: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e com fronteira regular. A função $f\colon L^2(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$, definida por

$$f(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx & \text{se } \ u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \text{no caso contrário,} \end{cases}$$

onde $H^1(\Omega)$ é o usual espaço de Sobolev de ordem 1, é própria e s.c.i.. É própria porque $\mathrm{De}(f) = H^1(\Omega)$ e para demonstrar que é s.c.i. é bastante demonstrar que é seqüencialmente s.c.i., uma vez que $L^2(\Omega)$ satisfaz o Primeiro Axioma da Enumerabilidade (Exemplo 3.2 - c)). Seja $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Se $\liminf_{n\to\infty} f(u_n) = +\infty$ a relação (3.2) é óbvia. Seja, então, $\liminf_{n\to\infty} f(u_n) = \lambda < +\infty$. Vamos supor que $(f(u_n))$ seja limitada, o que não é restritivo pois pode-se determinar uma subseqüência de $(f(u_n))$, limitada e com limite inferior igual a λ. Dessa hipótese e da convergência de (u_n) em $L^2(\Omega)$ resulta que (u_n) é limitada em $H^1(\Omega)$. Logo, uma subseqüência de (u_n) converge fracamente em $H^1(\Omega)$. Mas $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(\Omega)$ e a imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é continua nas topologias fracas desses espaços pois é contínua nas topologias fortes. Logo $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$. Daí e de c) do Exemplo 3.3 vem

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} =$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \right) = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx$$

e daí,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx.$$

3.6 - Proposição: *Para que f seja s.c.i. no ponto x_0 é necessário e suficiente que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < f(x_0)$, exista uma vizinhança V de x_0 tal que $\lambda < f(x)$, $\forall x \in V$.*

Demonstração: Conseqüência imediata das definições.

Trocando os sinais na Proposição 3.6 tem-se uma condição necessária e suficiente para que f seja semicontínua superiormente.

3.7 - Definição: Seja X um conjunto.

a) Diz-se *epigráfico* da função $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$ o conjunto $\text{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}; f(x) \leq \lambda\}$ e *conjunto de nível* λ de f o conjunto $N(\lambda, f) = \{x \in X; f(x) \leq \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

b) Diz-se *invólucro superior* da família de funções $f_i\colon X \to [-\infty, +\infty]$, $i \in I$, a função φ definida por $\varphi(x) = \sup\limits_{i\in I}\{f_i(x)\}$.

3.8 - Proposição: *Para que f seja s.c.i. é necessário e suficiente que todos os conjuntos de nível de f sejam fechados.*

Demonstração: Pela Proposição 3.6, para que f seja s.c.i. é necessário e suficiente que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $\lambda < f(x)$ seja aberto.

Logo, seu complemento $N(\lambda, f)$ é fechado.

3.9 - Exemplo: Seja $\varphi: \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ própria, s.c.i. e não negativa e $\Phi: L^p(0,T) \to \mathbb{R}$, $1 \leq p < +\infty$, definida por

$$\Phi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \varphi(u(t))dt & \text{se } \ \varphi(u) \in L^1(0,T) \\ \\ +\infty & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

Então Φ é própria e s.c.i.. É própria porque $\mathrm{De}(\Phi) = \{u \in L^p(0,T); \varphi(u) \in L^1(0,T)\}$ contém as funções constantes em $(0,T)$ e com valor em $\mathrm{De}(\varphi)$. Para demonstrar que Φ é s.c.i. é bastante mostrar que $N(\lambda, \Phi)$ é fechado (Proposição 3.8). Seja, para isto, $u_n \in N(\lambda, \Phi)$, $n = 1, \ldots$ e $u_n \to u$ em $L^p(0,T)$. Então $\displaystyle\int_0^T \varphi(u_n(t))dt \leq \lambda$ e como $\varphi \geq 0$ tem-se, pelo Lema de Fatou, $\liminf\limits_{n\to\infty} \varphi(u_n) \in L^1(0,T)$ e $\displaystyle\int_0^T \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n(t))dt \leq \lambda$. Além disto, de $u_n \to u$ em $L^p(0,T)$ resulta que uma subsucessão de (u_n) converge a u quase sempre em $(0,T)$. Sem quebra da generalidade podemos supor que (u_n) converge a u quase sempre em $(0,T)$. Daí resulta, pela semicontinuidade inferior de φ, que $\varphi(u) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \varphi(u_n)$ quase sempre em $(0,T)$. Logo,

$$\Phi(u) = \int_0^T \varphi(u(t))dt \leq \int_0^T \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n(t))dt \leq \lambda,$$

donde $u \in N(\lambda, \Phi)$.

3.10 - Exemplos: a) A função característica, χ_A, de um conjunto aberto, A, é s.c.i., como decorre imediatamente da Proposição 3.8.

b) A função indicatriz, I_A, do conjunto fechado A, isto é, a função, I_A, definida por

$$I_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x \in A \\ \\ +\infty & \text{se } \ x \notin A, \end{cases}$$

é s.c.i., pela Proposição 3.8.

3.11 - Proposição: *Para que f seja s.c.i. é necessário e suficiente que o epigráfico de f seja fechado em $X \times \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $(x, \lambda) \notin \operatorname{epi}(f)$. Então $\lambda < f(x)$, donde existe μ tal que $\lambda < \mu < f(x)$. Mas f é s.c.i. no ponto x se, e só se, existe uma vizinhança V de x tal que $\mu < f(x)$, $\forall\, x \in V$. Portanto, se e só se, $V \times (-\infty, \mu) \subset X \times \mathbb{R} \setminus \operatorname{epi}(f)$, i.e. se e só se (x, λ) for ponto do interior de $X \times \mathbb{R} \setminus \operatorname{epi}(f)$. Logo, f é s.c.i. se, e só se, $X \times \mathbb{R} \setminus \operatorname{epi}(f)$ for aberto e, portanto, se e só se, seu complemento, $\operatorname{epi}(f)$, for fechado.

3.12 - Proposição: *O invólucro superior de qualquer família de funções s.c.i. é s.c.i.. O invólucro inferior de qualquer família finita de funções s.c.i. é s.c.i..*

Demonstração: Seja φ o invólucro superior de (f_i), $i \in I$. Então,

$$\operatorname{epi}(\varphi) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{epi}(f_i)$$

donde φ é s.c.i. pela Proposição 3.11. Se ψ for o ínfimo da família finita $(f_i), i \in I$, então

$$\operatorname{epi} \psi = \bigcup_{i \in I} \operatorname{epi}(f_i)$$

donde ψ é s.c.i. ainda pela Proposição 3.11.

3.13 - Corolário: *O invólucro superior de qualquer família de funções afins contínuas em um espaço normado é s.c.i..*

Recorde-se que uma função afim contínua em X é uma função l definida por

$$l(x) = \langle x, x^* \rangle + \beta, \quad \textit{onde} \;\; x^* \in X^* \;\; \textit{e} \;\; \beta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: As funções afins contínuas são contínuas.

3.14 - Proposição: i) *A soma de duas funções s.c.i. é s.c.i..*

ii) *O produto de duas funções s.c.i., não negativas, é s.c.i..*

iii) *O produto de uma função s.c.i. por uma constante não negativa é s.c.i..*

Demonstração: Imediata.

3.15 - Proposição: *Se f é s.c.i. e* $\mathrm{De}(f)$ *é compacto, então f atinge seu ínfimo em* $\mathrm{De}(f)$*.*

Demonstração: Ponhamos $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$. Para cada $\lambda > m$, o conjunto de nível $N(\lambda, f)$ é fechado (Prop. 3.8) e $N(\lambda_1, f) \subset N(\lambda_2, f)$ se $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Portanto $\bigcap\limits_{\lambda > m} N(\lambda, f) \neq \emptyset$ e, em todo ponto x_0 dessa interseção, $f(x_o) \leq m$. Mas $f(x) \geq m, \;\; \forall\, x \in X$. Logo $f(x_o) = m$, q.e.d..

3.16 - Definição: Seja X um espaço vetorial e A um subconjunto convexo de X. Diz-se que $f\colon A \to [-\infty, +\infty]$ é uma *função convexa* se para cada $t \in [0, 1]$ tem-se

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall\, x, y \in A, \tag{3.3}$$

desde que o segundo membro tenha sentido.

A respeito dessa definição observemos o seguinte:

1) Seja $f\colon A \to [-\infty, +\infty]$ uma função e $\tilde{f}\colon X \to [-\infty, +\infty]$ definida por $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \in A$ e $\tilde{f}(x) = +\infty$ se $x \in X \backslash A$. Vê-se que $\tilde{f}$ é convexa se e só se f é convexa.

Desse modo não é restritivo supor que as funções convexas são definidas em todo o espaço.

2) Seja $f: X \to [-\infty, +\infty]$ uma função convexa. Se f assumir o valor $-\infty$ num ponto x_0 então, em toda semireta Γ com origem em x_0, ou $f(x) = -\infty \quad \forall x \in \Gamma$ ou existe um ponto x_1 em Γ tal que $f(x_1)$ é finito e portanto, $f(x) = -\infty$ em todos os $x \in \Gamma$ situados entre x_0 e x_1 e $f(x) = +\infty$ em todos os demais pontos de Γ.

3) Se além de convexa, f é s.c.i., então, de acordo com um resultado a ser demonstrado posteriormente (Proposição 3.26), ou f não assume o valor $-\infty$ ou $f(x) = -\infty \quad \forall x \in X$.

Para evitar os casos particulares descritos em 2) e 3) as funções convexas consideradas daqui em diante não assumem o valor $-\infty$.

Invertendo o sinal em (3.3) tem-se a definição de função côncava. Observe-se que se f é côncava, então $-f$ é convexa o que mostra que é bastante estudar as funções convexas.

3.17 - Exemplos: a) A função $f: X \to \mathbb{R}$ onde X é um espaço normado, definida por $f(x) = \|x\|$ é convexa.

b) A função f definida por $f(x) = \|x\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, em um espaço normado é convexa.

c) As funções afins de um espaço normado são convexas.

d) A função f definida no Exemplo 3.5 é convexa pois

$$f(tu + (1-t)v) = \int_\Omega |\nabla(tu + (1-t)v)|^2 dx \leq$$

$$\int_\Omega (t^2|\nabla u|^2 + (1-t)^2|\nabla v|^2 + 2t(1-t)|\nabla u||\nabla v|)dx =$$

$$= \int_\Omega (t|\nabla u|^2 + (1-t)|\nabla v|^2 - t(1-t)(|\nabla u| - |\nabla v|)^2)dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega (t|\nabla u|^2 + (1-t)|\nabla v|^2)dx = tf(u) + (1-t)f(v).$$

e) A indicatriz de um conjunto convexo é uma função convexa.

3.18 - Proposição: *A função f é convexa se, e só se, o epigráfico de f é convexo.*

Demonstração: Seja f convexa e $(x,\lambda),(y,\mu)\in \text{epi}(f)$. Então, $f(x)\leq\lambda$ e $f(y)\leq\mu$ donde, $\forall\, t\in[0,1]$ tem-se

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)\leq t\lambda+(1-t)\mu$$

o que mostra que todos os pontos

$$t(x,\lambda)+(1-t)(y,\mu)=(tx+(1-t)y,\, t\lambda+(1-t)\mu)$$

pertencem a $\text{epi}(f)$. Logo $\text{epi}(f)$ é convexo.

Recíprocamente, seja $\text{epi}(f)$ convexo. Como, para todo $x,y\in X\cap\text{De}(f)$, os pontos $(x,f(x))$ e $(y,f(y))$ pertencem a $\text{epi}(f)$ tem-se

$$t(x,f(x))+(1-t)(y,f(y))\in\text{epi}(f)\qquad\forall\, t\in[0,1],$$

i.e.,

$$(tx+(1-t)y,\, tf(x)+(1-t)f(y))\in\text{epi}(f)\qquad\forall\, t\in[0,1].$$

Daí,

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)\qquad\forall\, t\in[0,1],$$

i.e., f é convexa.

3.19 - Proposição: *Se f é convexa, então:* i) *$N(\lambda,f)$ é um conjunto convexo para todo $\lambda\in\mathbb{R}$;* ii) *$\text{De}(f)$ é convexo.*

Demonstração: i) Sejam x e y pontos de $N(\lambda,f)$. Por definição tem-se, então, $f(x)\leq\lambda$ e $f(y)\leq\lambda$, donde

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)\leq t\lambda+(1-t)\lambda=\lambda.$$

i.e., $tx + (1-t)y \in N(\lambda, f)$. Logo, $N(\lambda, f)$ é convexo. ii) De $x, y \in \mathrm{De}(f)$ vem $x, y \in N(\lambda, f)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$; logo, $tx + (1-t)y \in \mathrm{De}(f)$.

A recíproca de *i*) dessa proposição não é verdadeira; a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ x^2 + 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

não é convexa mas $N(\lambda, f)$ é convexo $\forall\, \lambda$.

Trivialmente, se X é um espaço normado e f é s.c.i. na topologia fraca de X, então f é s.c.i. na topologia da norma. A recíproca é verdadeira para as funções convexas como se mostra a seguir.

3.20 - Proposição: *Seja X um espaço normado e $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa. Se f é s.c.i., então f é s.c.i. na topologia fraca de X.*

Demonstração: Seja f convexa e s.c.i.. Então, pelas Proposições 3.8 e 3.19, respectivamente, os conjuntos de nível de f são fechados e convexos. Logo, são fracamente fechados donde f é s.c.i. na topologia fraca de X, pela Proposição 3.8.

3.21 - Proposição: i) *Se f é convexa e $c \geq 0$ então cf é convexa;*
ii) *se f e g são convexas então $f + g$ é convexa;*
iii) *o invólucro superior de qualquer família de funções convexas é uma função convexa.*

Demonstração: Imediata.

3.22 - Proposição: *Toda função convexa em um espaço de dimensão finita é contínua no interior de seu domínio efetivo.*

Demonstração: Seja X um espaço de dimensão n, f uma função convexa em X, $\mathrm{int}\ \mathrm{De}(f) \neq \emptyset$ e $x_0 \in \mathrm{int}\ \mathrm{De}(f)$. Por translações podemos reduzir a demonstração ao caso em que $x_0 = 0$ e $f(0) = 0$. Suponhamos, então que $0 \in$ int De(f), $f(0) = 0$ e demonstremos que f é contínua no ponto 0.

Para algum $r > 0$, int De(f) contém a bola de centro 0 e raio r. Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base de X, $0 < k < r$ e ponhamos $x_i = ke_i, i = 1, \ldots, n, x_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i/n$. Teremos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2n} + \frac{1}{2} x_{n+1} = 0$$

donde,

$$0 \in K = \left\{ x; x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i,\ t_i > 0,\ \sum t_i = 1 \right\} \subset \text{ int De}(f).$$

Pondo

$$\lambda = \sup_{1 \le i \le n+1} \{f(x_i)\}$$

temos, pela convexidade de f, $\forall\, x \in K$,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n+1} t_i \lambda = \lambda,$$

i.e., f é majorada por λ no conjunto aberto K. Ponhamos $V = K \cap (-K)$ e, dado $\varepsilon > 0$, seja $\mu < 1$ tal que $\mu\lambda < \varepsilon$. Então μV é uma vizinhança de 0 e $\forall\, x \in \mu V$ temos, pela convexidade de f,

$$f(x) = f\left((1-\mu)0 + \mu \frac{x}{\mu}\right) \le (1-\mu) f(0) + \mu f\left(\frac{x}{\mu}\right) \le \mu\lambda < \varepsilon$$

e

$$0 = f(0) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{-x}{2}\right) \le \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(-x).$$

Da primeira dessas desigualdades segue-se, pela simetria de V, que $f(-x) < \varepsilon$ donde, da segunda, $f(x) \geq -f(-x) > -\varepsilon$. Portanto, $\forall\, x \in \mu V$ tem-se $|f(x)| < \varepsilon$, o que mostra que f é contínua no ponto 0.

3.23 - Proposição: *Sejam X um espaço normado e $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e s.c.i.. Então f é contínua no interior de* $\mathrm{De}(f)$*.*

Demonstração: Vamos demonstrar que se $x_0 \in \mathrm{int}\ \mathrm{De}(f)$, então f é contínua no ponto x_0. Com uma translação podemos reduzir a demonstração ao caso em que $x_0 = 0$. Seja então, $0 \in \mathrm{int}\ \mathrm{De}(f)$ e $\lambda > f(0)$. Pelas Proposições 3.8 e 3.19, $N(\lambda, f)$ é um conjunto fechado e convexo e $0 \in N(\lambda, f)$. Logo o conjunto $V = N(\lambda, f) \cap (-N(\lambda, f))$ é convexo e fechado e $0 \in V$. Vamos mostrar que é balanceado. Seja $0 \leq \alpha \leq 1$. Se $x \in V$ temos

$$f(\alpha x) = f((1-\alpha)0 + \alpha x) \leq (1-\alpha) f(0) + \alpha f(x) \leq (1-\alpha)\lambda + \alpha\lambda = \lambda,$$

i.e., $\alpha x \in N(\lambda, f)$. Mas de $x \in V$ vem $-x \in V$. Logo, $-(\alpha x) = \alpha(-x) \in N(\lambda, f)$ ou seja $\alpha x \in -N(\lambda, f)$ e, assim, $\alpha x \in V$. Além disto $(-\alpha)x = \alpha(-x) \in V$. Logo, V é balanceado. Como, pela Proposição 3.22, a restrição de f a qualquer reta que passa por 0 é contínua numa vizinhança desse ponto, segue-se que V é absorvente. Portanto, V é uma vizinhança do ponto 0 tal que $f(x) < \lambda$, $\forall\, x \in V$. Desse modo, f é s.c.s. no ponto 0 e como, por hipótese, é s.c.i., segue-se que é contínua.

3.24 - Nota: A função f pode não ser contínua nos pontos de $\mathrm{De}(f) \setminus \mathrm{int}\ \mathrm{De}(f)$. Por exemplo, a indicatriz $I_{[a,b]}$ do intervalo fechado $[a, b]$ não é contínua nos pontos a e b.

3.25 - Teorema: *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, C um subconjunto convexo e fechado de X e $f\colon C \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria, s.c.i. e tal que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty, \tag{3.4}$$

caso C seja ilimitado. Então f tem um mínimo em C, i.e., existe um $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) = \inf\{f(x); x \in C\}$.

Demonstração: Como f é própria, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $N(\lambda, f) \neq \emptyset$. Pelas Proposições 3.8 e 3.19, $N(\lambda, f)$ é fechado e convexo. Logo, $N(\lambda, f)$ é, como se sabe, fracamente fechado. Mas, por (3.4), $N(\lambda, f)$ é limitado; portanto, fracamente compacto, uma vez que X é reflexivo. Além disto, pela Proposição 3.20, f é s.c.i. na topologia fraca. Logo, pela Proposição 3.15, a restrição de f a $N(\lambda, f)$ atinge seu mínimo em um ponto $x_0 \in N(\lambda, f)$. Segue-se que

$$\lambda \geq f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall\, x \in N(\lambda, f)$$

$$f(x) \geq \lambda \qquad \forall\, x \in C \backslash N(\lambda, f).$$

Logo, $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in C$.

Uma *função afim* sobre X é uma função da forma

$$x \to \varphi(x) + \gamma \quad \forall\, x \in X, \tag{3.5}$$

onde φ é uma forma linear sobre X e $\gamma \in \mathbb{R}$.

Vamos dizer que a função afim (3.5) *minora* a função $f: X \to (-\infty, +\infty]$ se

$$f(x) \geq \varphi(x) + \gamma \qquad \forall\, x \in X.$$

3.26 - Proposição: *Seja f convexa, s.c.i. e própria. Então existe uma função afim contínua que minora f.*

Demonstração: Seja $(x_0, \lambda_0) \notin \text{epi}(f)$, onde $x_0 \in \text{De}(f)$. Como epi(f) é um subconjunto fechado e $\{(x_0, \lambda_0)\}$ um subconjunto compacto de $X \times \mathbb{R}$, existe pelo Teorema de Hahn-Banach, um hiperplano fechado que separa epi(f) e $\{(x_0, \lambda_0)\}$, i.e., existe uma forma linear, Φ, contínua sobre $X \times \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\Phi(x, \lambda) > \alpha > \Phi(x_0, \lambda_0)$, $\forall\, (x, \lambda) \in \text{epi}(f)$. Portanto existe $y^* \in X^*$ e $k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle y^*, x\rangle + k\lambda > \alpha > \langle y^*, x_0\rangle + k\lambda_0 \quad \forall\, (x, \lambda) \in \text{epi}(f)$$

e, em particular, tais que

$$\langle y^*, x\rangle + kf(x) > \alpha > \langle y^*, x_0\rangle + k\lambda_0 \quad \forall x \in \mathrm{De}(f). \tag{3.6}$$

No ponto x_0,

$$\langle y^*, x_0\rangle + kf(x_0) > \langle y^*, x_0\rangle + k\lambda_0$$

ou seja

$$kf(x_0) > k\lambda_0.$$

Decorre daí que $k > 0$ uma vez que, por hipótese, $\lambda_0 < f(x_0)$. Logo, pondo $x^* = -y^*/k$ e $\beta = -\alpha/k$ temos, dividindo ambos os membros de (3.6) por $-k$,

$$\langle x^*, x\rangle - f(x) < \beta$$

para todo $x \in \mathrm{De}(f)$ e, portanto, para todo $x \in X$. Daí,

$$f(x) > \langle x^*, x\rangle - \beta \quad \forall x \in X$$

q.e.d..

A função afim $\langle x^*, x\rangle - \beta$ é uma minorante de f se e só se

$$\beta \geq \langle x^*, x\rangle - f(x) \;\; \forall\, x \in X.$$

Portanto, se e só se,

$$\beta \geq \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}.$$

Logo, pondo

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\},$$

$f^*(x^*)$ é o menor valor de β para o qual a função afim contínua $\langle x^*, x\rangle - \beta$ minora f. Por exemplo, a função $f\colon \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definida por $f(x) = x^2$ é convexa, s.c.i. e própria. Portanto, existem $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 \geq \langle a, x\rangle - \beta$. O menor valor de β que satisfaz essa desigualdade é

$$(x^2)^*(a) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{\langle a, x\rangle - x^2\} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{ax - x^2\} = \frac{a^2}{4}.$$

(A reta $y = ax - \dfrac{a^2}{4}$ é tangente à curva $y = x^2$).

3.27 - Definição: Dada a função própria $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$, a função $f^*\colon X^* \to (-\infty, +\infty]$ definida por

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$$

é dita *conjugada* (ou *polar*) de f.

3.28 - Exemplos:

a) Seja $X = \mathbb{R}$. Então, $(x^2)^*(a) = \dfrac{a^2}{4}$, $a \in \mathbb{R}$.

b) $(\|\cdot\|_X)^* = I_{B(X^*)}$, onde $B(X^*)$ é a bola unitária fechada de X^*.

c) $(I_{B(X)})^* = \|\cdot\|_{X^*}$, onde $B(X)$ é a bola unitária fechada de X.

3.29 - Proposição: *A conjugada de f é convexa e s.c.i..*

Demonstração: Com efeito, $\langle x^*, x\rangle$ é, para cada $x \in X$, uma função linear contínua sobre X^*; logo, $\{\langle x^*, x\rangle - f(x); x \in \mathrm{De}(f)\}$, é uma família de funções afins contínuas sobre X^*. Logo, o invólucro superior, f^*, dessa família de funções é convexa e s.c.i..

3.30 - Proposição: *Se f é convexa, s.c.i. e própria, então f^* é própria.*

Demonstração: Das hipóteses resulta, pela Proposição 3.26, que existe um $x^* \in X^*$ e um $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) > \langle x^*, x\rangle - \beta \quad \forall\, x \in X.$$

Daí vem

$$\beta > \langle x^*, x\rangle - f(x) \quad \forall\, x \in X$$

donde

$$\beta \geq \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} = f^*(x^*).$$

Portanto, $x^* \in \mathrm{De}\, f^*$ e, assim, f^* é própria.

Da proposição que se acaba de demonstrar resulta que se f é uma função convexa, s.c.i. e própria, então existe a conjugada de f^*, i.e., a *bipolar* de f:

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*}\{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\}.$$

3.31 - Teorema: *Seja f convexa, s.c.i. e própria. Então, $f^{**} = f$.*

Demonstração: De $f^*(x^*) = \sup\limits_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$ decorre que

$$f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle - f(x) \quad \forall\, x \in X \quad \text{e} \quad \forall\, x^* \in X^*.$$

Daí vem

$$f(x) \geq \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*) \quad \forall\, x \in X \quad \text{e} \quad \forall\, x^* \in X^*$$

e, portanto,

$$f(x) \geq \sup\{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\} = f^{**}(x), \quad \forall\, x \in X,$$

i.e., $f \geq f^{**}$. Para mostrar que $f = f^{**}$ é bastante mostrar que de $f(x_0) > f^{**}(x_0)$, para algum $x_0 \in X$ resulta uma contradição. Seja, então, $f(x_0) > f^{**}(x_0)$ para algum $x_0 \in X$ e observe-se que dessa hipótese vem $f^{**}(x_0) < +\infty$. Seja, em primeiro lugar, $f \geq 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\Phi \in (X \times \mathbb{R})^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\Phi(x, \lambda) > \alpha > \Phi(x_0, f^{**}(x_0)) \quad \forall\, (x, \lambda) \in \mathrm{epi}(f).$$

Portanto, existe $x^* \in X^*$ e $k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle x^*, x\rangle + k\lambda > \alpha \quad \forall\,(x,\lambda) \in \operatorname{epi}(f) \tag{3.7}$$

$$\langle x^*, x_0\rangle + kf^{**}(x_0) < \alpha. \tag{3.8}$$

Como (3.7) se verifica $\forall\,\lambda \geq f(x)$ tem-se, $k \geq 0$. Logo, $\forall\,\varepsilon > 0$, tem-se, por (3.7), com $\lambda = f(x)$

$$\langle x^*, x\rangle + (k+\varepsilon)f(x) > \alpha \quad \forall\, x \in X,$$

donde

$$\left\langle -\frac{x^*}{k+\varepsilon}, x\right\rangle - f(x) < -\frac{\alpha}{k+\varepsilon} \quad \forall\, x \in X$$

e, portanto,

$$f^*\left(-\frac{x^*}{k+\varepsilon}\right) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Daí vem

$$f^{**}(x_0) \geq \left\langle -\frac{x^*}{k+\varepsilon}, x_0\right\rangle + \frac{\alpha}{k+\varepsilon},$$

donde

$$\langle x^*, x_o\rangle + (k+\varepsilon)f^{**}(x_o) \geq \alpha,$$

em contradição com (3.8).

Consideremos, agora, o caso geral. Como f^* é própria segue-se que existe $x_o^* \in \operatorname{De}(f^*)$. Seja

$$\bar{f}(x) = f(x) - \langle x_o^*, x\rangle + f^*(x_o^*), x \in X. \tag{3.9}$$

Então, $\bar{f}$ é convexa, s.c.i. e $\bar{f} \geq 0$. Logo, pelo que já foi demonstrado, $\bar{f}^{**} = \bar{f}$. Mas

$$\bar{f}^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - \bar{f}(x)\} = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x) + \langle x_0^*, x\rangle - f^*(x_0^*)\} =$$

$$= \sup_{x\in X}\{\langle x^* + x_0^*, x\rangle - f(x) - f^*(x_0^*)\} = f^*(x^* + x_0^*) - f^*(x_0^*).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\bar{f}^{**}(x) &= \sup_{x^*\in X^*}\{\langle x^*, x\rangle - \bar{f}^*(x^*)\} = \\
&= \sup_{x^*\in X^*}\{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*+x_0^*) + f^*(x_0^*)\} = \\
&= \sup_{x^*\in X^*}\{\langle x^*, x\rangle + \langle x_0^*, x\rangle - \langle x_0^*, x\rangle - f^*(x^*+x_0^*) + f^*(x_0^*)\} = \\
&= \sup_{x^*\in X^*}\{\langle x^*+x_0^*, x\rangle - f^*(x^*+x_0^*)\} - \langle x_0^*, x\rangle + f^*(x_0^*) = \\
&= f^{**}(x) - \langle x_0^*, x\rangle + f^*(x_0^*), \quad \forall\, x \in X,
\end{aligned}
$$

i. e.,

$$
\bar{f}^{**}(x) = f^{**}(x) - \langle x_0^*, x\rangle + f^*(x_0^*)\ \forall\, x \in X. \tag{3.10}
$$

De (3.9) e (3.10) e $\bar{f}^{**} = \bar{f}$ vem $f^{**} = f$.

3.32 - Casos particulares: Em todo espaço normado, a norma e a função indicatriz de um conjunto fechado e convexo são convexas e s.c.i.. Logo, essas funções coincidem com suas bipolares. O mesmo pode-se dizer da função $(1/2)\|x\|^2$.

4. O subdiferencial de uma função

4.1 - Definição: Seja X um espaço normado e $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ uma função qualquer. Para cada $x \in \mathrm{De}(f)$, vamos indicar com $\partial f(x)$ o conjunto dos $x^* \in X^*$ tais que

$$
f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle, \quad \forall y \in \mathrm{De}(f). \tag{4.1}
$$

Diz-se que f é *subdiferenciável* no ponto x se $\partial f(x) \neq \emptyset$. Nesse caso o conjunto $\partial f(x)$ é dito *subdiferencial* de f no ponto x e os elementos de $\partial f(x)$, *subgradientes* de f no ponto x.

4.2 - Definição: Diz-se que $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ é *exata* no ponto x se existir uma minorante afim contínua, φ , de f tal que $\varphi(x) = f(x)$.

4.3 - Proposição: *A função $f: X \to (-\infty, +\infty]$ é subdiferenciável no ponto $x \in \mathrm{De}(f)$ se, e só se, f for exata no ponto x.*

Demonstração: De $x^* \in \partial f(x)$ vem

$$f(y) \geq \langle x^*, y \rangle - \langle x^*, x \rangle + f(x),$$

i.e., a função afim contínua

$$\varphi(y) = \langle x^*, y \rangle - (\langle x^*, x \rangle - f(x))$$

minora f e $\varphi(x) = f(x)$. Logo f é exata no ponto x. Reciprocamente, seja f exata no ponto x e $\varphi(y) = \langle x^*, y \rangle - \beta$ uma minorante afim contínua de f tal que $\varphi(x) = f(x)$. Então $\beta = \langle x^*, x \rangle - f(x)$ e, assim, $\varphi(y) = \langle x^*, y \rangle - (\langle x^*, x \rangle - f(x))$. Mas φ é minorante de f; logo,

$$f(y) \geq \langle x^*, y \rangle - (\langle x^*, x \rangle - f(x))$$

e, daí,

$$f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle, \quad x^* \in X^*,$$

i.e., f é subdiferenciável no ponto x.

Recorde-se que uma aplicação $\varphi: X \to Y$, onde X e Y são espaços de Banach, é *diferenciável à Gateaux* no ponto $x \in X$ se existir uma aplicação linear e contínua, $\varphi'(x): X \to Y$, tal que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda} = \varphi'(x)y \quad \forall\, y \in X.$$

4.4 - Proposição: *Seja $f: X \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa própria. Se f é diferenciável à Gateaux no ponto $x \in \mathrm{De}(f)$, então f é subdiferenciável no ponto x e a* *derivada de Gateaux de f no ponto x é o único elemento de $\partial f(x)$.*

Demonstração: Suponhamos satisfeitas as hipóteses. Da convexidade de f e de $x \in \mathrm{De}(f)$ vem

$$f(y) - f(x) = \frac{\lambda(f(y) - f(x))}{\lambda} = \frac{(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f(x)}{\lambda} \geq$$

$$\geq \frac{f((1-\lambda)x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} = \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad \forall\, y \in \mathrm{De}(f),$$

donde, designando por $f'(x)$ a derivada de Gateaux de f no ponto x tem-se $f'(x) \in X^*$ e

$$f(y) - f(x) \geq \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} = \langle f'(x), y - x \rangle \quad \forall\, y \in \mathrm{De}(f).$$

Logo, f é subdiferenciável no ponto x e $f'(x) \in \partial f(x)$. Além disto, se $x^* \in \partial f(x)$ então

$$f(x + \lambda y) - f(x) \geq \langle x^*, \lambda y \rangle$$

donde, $\forall\, \lambda > 0$

$$\frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} \geq \langle x^*, y \rangle$$

e, portanto,

$$\langle f'(x), y \rangle \geq \langle x^*, y \rangle, \quad \forall\, y \in X.$$

Daí, $x^* = f'(x)$ e, assim, $\partial f(x) = \{f'(x)\}$.

4.5 - Exemplo: A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ é subdiferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{se} \quad x < 0 \\ [-1, 1] & \text{se} \quad x = 0 \\ \{1\} & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

As minorantes afins contínuas de f que coincidem com f no ponto $x = 0$ são as funções $\alpha x, \quad -1 \leq \alpha \leq 1$.

4.6 - Exemplo: Seja C um conjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert. Temos

$$x^* \in \partial I_C(x) \iff \langle x^*, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall\, y \in C.$$

Daí decorre (Gomes [1], pág. 49) que

$$\partial I_C(x) = \begin{cases} \text{Cone das normais externas a } C \text{ no ponto } x \text{ se } x \in \text{front } C; \\ \{0\} \quad \text{se} \quad x \in \operatorname{int} C; \\ \emptyset \quad\quad \text{se} \quad x \notin C. \end{cases}$$

No caso particular em que C é o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\partial I_C(x) = \{0\} \quad \forall\, x \in (a, b)$, $\partial I_C(a) = \mathbb{R}^-$, $\partial I_C(b) = \mathbb{R}^+$ e $\partial I_C(x) = \emptyset$ se $x \notin [a, b]$.

4.7 - Exemplo: Seja X um espaço de Hilbert e determinemos o subdiferencial da norma. Temos

$$\|x + \lambda y\|^2 - \|x\|^2 = (\|x + \lambda y\| - \|x\|)(\|x + \lambda y\| + \|x\|)$$

donde

$$\|x + \lambda y\| - \|x\| = \frac{\|x + \lambda y\|^2 - \|x\|^2}{\|x + \lambda y\| + \|x\|} = \frac{2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2}{\|x + \lambda y\| + \|x\|}$$

e, portanto, se $\lambda \neq 0$ e $x \neq 0$,

$$\frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \frac{2\langle x, y \rangle + \lambda \|y\|^2}{\|x + \lambda y\| + \|x\|} \to \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|}$$

quando $\lambda \to 0$. Logo, pela Proposição 4.4 a norma é subdiferenciável nos pontos $x \neq 0$ e nesses pontos $\partial \| \cdot \|(x) = \{x / \|x\|\}$. A norma é também subdiferenciável no ponto $x = 0$ porque qualquer $x^* \in X$, tal que $\|x^*\| \leq 1$, satisfaz a condição

$$\|y\| - \|0\| = \|y\| \geq \|y\| \|x^*\| \geq \langle x^*, y \rangle,$$

isto é,

$$\partial\|\cdot\|(0) = \{x^* \in X; \|x^*\| \leq 1\}.$$

4.8 - Exemplo: Seja A um operador auto-adjunto de um espaço de Hilbert tal que $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ e ponhamos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 & \text{se} \quad x \in D(A^{\frac{1}{2}}) \\ \\ +\infty & \text{se} \quad x \notin D(A^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Vamos mostrar que, em todo ponto $x \in D(A)$, $Ax \in \partial f(x)$.

A função f é, como se vê imediatamente, convexa e própria. Para todo $x \in D(A)$ temos

$$\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}y\|^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 \geq \langle A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}y\rangle, \quad \forall y \in D(A^{\frac{1}{2}}).$$

Daí vem

$$f(y) - f(x) = \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}y\|^2 - \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 \geq \langle A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}y\rangle - \|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 =$$

$$= \langle Ax, y\rangle - \langle Ax, x\rangle = \langle Ax, y - x\rangle$$

donde, $Ax \in \partial f(x)$.

4.9 - Exemplo: Seja X um espaço normado, F o operador dualidade de X e f a função definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\|x\|^2, \quad x \in X.$$

Vamos mostrar que $\partial f(x) = F(x), \quad \forall\, x \in X$.

Seja $x^* \in F(x)$, i.e., $\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$. Teremos

$$\frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x\|^2 \geq \|x\|\|y\| - \|x\|^2$$

$$= \|x^*\| \cdot \|y\| - \|x\|^2 \geq \langle x^*, y\rangle - \langle x^*, x\rangle = \langle x^*, y - x\rangle$$

donde $x^* \in \partial f(x)$, i.e., $F(x) \subset \partial f(x)$.

Reciprocamente, seja $x^* \in \partial f(x)$. Teremos

$$\frac{1}{2}\,\|y\|^2 - \frac{1}{2}\,\|x\|^2 \geq \langle x^*, y - x\rangle \qquad \forall\, y \in X, \tag{4.2}$$

donde, pondo $y = x + tx$, t real,

$$\|x + tx\|^2 - \|x\|^2 \geq 2t\langle x^*, x\rangle. \tag{4.3}$$

Fazendo $t = 1/n$ em (4.3),

$$\left(\frac{1}{2n} + 1\right)\|x\|^2 \geq \langle x^*, x\rangle, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

donde, $\|x\|^2 \geq \langle x^*, x\rangle$. Fazendo $t = -\dfrac{1}{n}$ em (4.3),

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\|x\|^2 \leq \langle x^*, x\rangle,$$

donde $\|x\|^2 \leq \langle x^*, x\rangle$. Logo

$$\|x\|^2 = \langle x^*, x\rangle. \tag{4.4}$$

De (4.4) vem $\|x\|^2 \leq \|x^*\| \cdot \|x\|$, isto é,

$$\|x\| \leq \|x^*\|. \tag{4.5}$$

Pondo, agora, $y = x + tz$, $t > 0$, $z \in X$, em (4.2) temos

$$\frac{1}{2}\,\|x + tz\|^2 - \frac{1}{2}\,\|x\|^2 \geq t\langle x^*, z\rangle.$$

Daí, $t\langle x^*, z\rangle \leq \dfrac{1}{2}(\|x\| + t\|z\|)^2 - \dfrac{1}{2}\|x\|^2 = t\|x\| \cdot \|z\| + \dfrac{t^2}{2}\|z\|^2$ e, portanto,

$$\langle x^*, z\rangle \leq \|x\| \cdot \|z\| + \frac{t}{2}\,\|z\|^2, \quad t > 0,\ z \in X.$$

Daí vem $\langle x^*, z\rangle \leq \|x\| \cdot \|z\|, z \in X$, donde

$$\|x^*\| \leq \|x\|. \tag{4.6}$$

As relações (4.4), (4.5) e (4.6) mostram que $x^* \in F(x)$. Portanto, $\partial f(x) \subset F(x) \forall x \in X$, q.e.d..

4.10 - Proposição: *Seja* $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ *uma função própria.*

i) $x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x\rangle$

ii) $x^* \in \partial f(x) \Rightarrow x \in \partial f^*(x^*)$.

iii) *Se* f *for convexa e s.c.i., então* $x \in \partial f^*(x^*) \Rightarrow x^* \in \partial f(x)$.

Demonstração: i) Seja $x^* \in \partial f(x)$. Por definição tem-se, então,

$$f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle, \quad \forall\, y \in \mathrm{De}(f)$$

e, portanto,

$$\langle x^*, y\rangle - f(y) \leq \langle x^*, x\rangle - f(x), \quad \forall\, y \in \mathrm{De}(f).$$

Mas como, pela Definição 3.27,

$$f^*(x^*) = \sup_{y \in X}\{\langle x^*, y\rangle - f(y)\} = \sup_{y \in \mathrm{De}(f)}\{\langle x^*, y\rangle - f(y)\}$$

temos

$$f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - f(x),$$

visto que $x \in \mathrm{De}(f)$. Reciprocamente, de $f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x\rangle$ vem

$$\langle x^*, y\rangle - f(y) \leq f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - f(x),$$

donde

$$f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle,$$

i.e., $x^* \in \partial f(x)$. Logo i) é verdadeira.

ii) Seja $x^* \in \partial f(x)$. Por i) f^* é própria; logo existe f^{**} e, como na primeira parte da demonstração do Teorema 3.31, $f \geq f^{**}$. Por i) vem, então, $f^{**}(x) + f^*(x^*) \leq \langle x^*, x\rangle$. Por outro lado, de $f^{**}(x) = \sup\limits_{x^* \in X^*} \{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\} \geq \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)$ vem $f^{**}(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle$. Logo, $f^{**}(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$ donde, por i), $x \in \partial f^*(x^*)$, o que demonstra ii).

iii) Seja f convexa e s.c.i.. Pelo Teorema 3.31 temos $f^{**} = f$ donde de $x \in \partial f^*(x^*)$ vem, por i), $x^* \in \partial f(x)$.

4.11 - Proposição:

i) *O conjunto* $\partial f(x)$ *é convexo e fechado* $\forall\, x \in \mathrm{De}(f)$;

ii) $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x), \quad \forall\, \lambda > 0$;

iii) $\partial(f+g)(x) \supset \partial f(x) + \partial g(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{De}(f) \cap \mathrm{De}(g)$;

iv) $x^* \in \partial f(x), y^* \in \partial f(y) \Rightarrow \langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0$;

v) x *é ponto de mínimo para* f *se, e só se,* $0 \in \partial f(x)$.

Demonstração: Conseqüências imediatas das definições.

Seja X um espaço normado e $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ uma função qualquer. Associando a $x \in \mathrm{De}(f)$ o conjunto $\partial f(x)$, se $\partial f(x) \neq \emptyset$, tem-se um operador $\partial f\colon X \to X^*$ dito *operador subdiferencial* de f.

4.12 - Proposição: *Seja* X *um espaço normado e* $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ *uma função convexa e s.c.i.. Então,* $\operatorname{int} \mathrm{De}(f) = \operatorname{int} D(\partial f)$.

Demonstração: É bastante demonstrar que $\operatorname{int} \mathrm{De}(f) \subset D(\partial f)$ uma vez que pela definição de $\partial f, D(\partial f) \subset \mathrm{De}(f)$. Seja, então, $x \in \operatorname{int} \mathrm{De}(f)$ e V uma vizinhança de x convexa, aberta e $V \subset \operatorname{int} \mathrm{De}(f)$. Pela Proposição 3.23 f é contínua em V. Segue-se que o conjunto $C = \{(y, \lambda) \in X \times \mathbb{R}; y \in V, f(y) < \lambda\}$ é aberto, convexo e $(x, f(x)) \notin C$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach existe, então, um $\varphi \in (X \times \mathbb{R})^*$ tal que

$$\varphi(x, f(x)) \leq \mu < \varphi(y, \lambda), \quad \forall (y, \lambda) \in C.$$

Como $\varphi = (x_1^*, \alpha)$ para algum $x_1^* \in X^*$ e algum $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se, então,

$$\langle x_1^*, x\rangle + \alpha f(x) \leq \mu < \langle x_1^*, y\rangle + \alpha\lambda, \quad \forall\, (y, \lambda) \in C.$$

Daí vem $\alpha > 0$ e

$$\langle x_1^*, x\rangle + \alpha f(x) \leq \mu \leq \langle x_1^*, y\rangle + \alpha f(y)$$

donde, pondo $x^* = -\dfrac{x_1^*}{\alpha}$ temos

$$f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle,$$

i.e., $x \in D(\partial f)$, q.e.d..

5. Convexidade dos espaços de Banach

Com U_X será representada a *esfera unitária* de X, i.e. o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $\|x\| = 1$.

5.1 - Definição: Um espaço normado é dito *uniformemente convexo* quando dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $x, y \in U_X$ e $\|x - y\| > \varepsilon$ então

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

5.2 - Exemplo: Os espaços $\mathbb{R}^n$ munidos da norma $\|\cdot\|_2$ definida por

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

são uniformemente convexos. Com efeito, $\|\cdot\|_2$ satisfaz a relação

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2), \tag{5.1}$$

donde, se $x, y \in U_X$ e $\|x-y\|_2 > \varepsilon$, então

$$\|x+y\|_2^2 + \varepsilon^2 < 4$$

e, portanto,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 < \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}} = 1 - \left(1 - \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}\right) = 1-\delta$$

com $\delta = 1 - \sqrt{1-\dfrac{\varepsilon^2}{4}} > 0$, uma vez que $0 < \varepsilon \leq 2$.

5.3 - Exemplo: A relação (5.1) é válida para todo espaço de Hilbert; logo, os espaços de Hilbert são uniformemente convexos.

5.4 - Exemplo: Os espaços $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), 1 < p < \infty$, munidos da norma

$$\|x\|_p = \left(\int_\Omega \|x(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

são uniformemente convexos, o que resulta imediatamente das Desigualdades de Clarkson (Clarkson [1])

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\,(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p), \quad p \geq 2$$

e

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q \leq \left[\frac{1}{2}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)\right]^{q/p}, \quad 1 < p \leq 2,$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. A demonstração das Desigualdades de Clarkson também se encontra em Hewitt-Stromberg [1] e uma outra demonstração de que $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é uniformemente convexo, em Diestel [1].

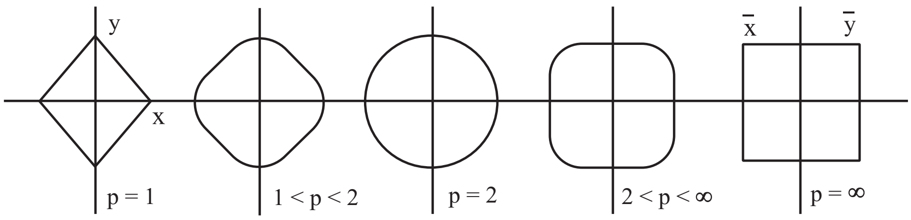
5.5 - Observação: O espaço $\mathbb{R}^n$ também é uniformemente convexo quando munido da norma $\|\cdot\|_p$, $1 < p < \infty$, definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Mas $\mathbb{R}^n$ não é uniformemente convexo quando munido das normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ definidas por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{e} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \{|x_i|\},$$

embora todas essas normas sejam equivalentes no sentido de que definem a mesma topologia. As esferas unitárias no caso de $\mathbb{R}^2$, por exemplo, são da forma



Nesse caso tem-se $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_1 = 1$ mas $\|x-y\|_1 = 2$ e, analogamente, $\left\|\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}\right\|_\infty = 1$ mas $\|\bar{x}-\bar{y}\|_\infty = 2$.

Um importante teorema devido a Milman é o seguinte:

5.6 - Teorema: *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

A demonstração encontra-se em Brezis [7] e em Yosida [1].

5.7 - Exemplo: Como $L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu), L^\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ e $C(0,1)$ não são reflexivos, segue-se pelo Teorema de Milman que esses espaços não são uniformemente convexos. No caso de $L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, por exemplo, pode-se ver isto diretamente considerando as funções $x = \chi_E/\mu(E)$ e $y = \chi_F/\mu(F)$, onde $E, F \subset \Omega, E\cap F = \emptyset,\ 0 < \mu(E) < \infty$ e $0 < \mu(F) < \infty$. Temos, com efeito,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_1 = \int_\Omega \frac{1}{2}\left|\frac{\chi_E}{\mu(E)} + \frac{\chi_F}{\mu(F)}\right| d\mu = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{\chi_E}{\mu(E)} + \frac{\chi_F}{\mu(F)}\right) d\mu \ =$$
$$= \frac{1}{2\mu(E)}\int_\Omega \chi_E d\mu + \frac{1}{2\mu(F)}\int_\Omega \chi_F d\mu = 1$$

mas

$$\|x-y\|_1 = \int_\Omega \left|\frac{\chi_E}{\mu(E)} - \frac{\chi_F}{\mu(F)}\right| d\mu = \int_\Omega \left(\frac{\chi_E}{\mu(E)} + \frac{\chi_F}{\mu(F)}\right) d\mu \ =$$
$$= \frac{1}{\mu(E)}\int_\Omega \chi_E \, d\mu + \frac{1}{\mu(F)}\int \chi_F \, d\mu = 2.$$

5.8 - Proposição: *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo e $x, x_n \in X$, $n = 1, \ldots$. Então X tem a seguinte propriedade:*

$$x_n \rightharpoonup x \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \sup \|x_n\| \leq \|x\| \Rightarrow x_n \to x. \tag{5.2}$$

Demonstração: Se $x = 0$ a afirmação é trivial. Suponhamos, então, $x \neq 0$. Pelo Exemplo 3.3a) temos $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| > 0$. Sem quebra da generalidade podemos supor $\|x_n\| > 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Ponhamos $y_n = x_n/\|x_n\|$, $y = x/\|x\|$ e $y^* = x^*/\|x^*\|$ onde $x^* \in F(x)$. Então, $y_n \in U_X, y \in U_X, y^* \in U_{X^*}$ e

$$\left\langle \frac{y_n + y}{2}, y^* \right\rangle \leq \left|\left\langle \frac{y_n + y}{2}, y^* \right\rangle\right| \leq \left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\left(\|y_n\| + \|y\|\right) = 1.$$

Mas

$$\left\langle \frac{y_n + y}{2}, y^* \right\rangle \to 1.$$

Logo $\|(y_n + y)/2\| \to 1$, donde, pela convexidade uniforme de X, tem-se $\|y_n - y\| \to 0$, i.e., $y_n \to y$ e, como $\|x_n\| \to \|x\|$ segue-se que $x_n \to x$, q.e.d..

5.9 - Definição: Diz-se que um espaço normado, X, é *estritamente convexo* se U_X não contém segmentos próprios, isto é, conjuntos do tipo

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y;\ x, y \in U_X,\ x \neq y,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Os espaços estritamente convexos são também conhecidos por *espaços rotundos.*

5.10 - Teorema: *São equivalentes as condições:*

i) *X é estritamente convexo;*

ii) *A igualdade $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$, implica $x = 0$ ou $y = tx$, $t \geq 0$;*

iii) *A igualdade $\|(x + y)/2\| = \|x\| = \|y\|$, $x, y \in X$, implica $x = y$.*

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii). Seja X estritamente convexo, $x, y \in X$, $x \neq 0$ e tais que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Se $y = 0$, então $y = tx$ com $t = 0$. Seja, pois, $y \neq 0$ e $0 < \lambda < 1$. Não é restritivo supor que $\lambda\|y\| \geq (1-\lambda)\|x\|$. Teremos

$$1 \geq \left\|\lambda \frac{x}{\|x\|} + (1-\lambda)\frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\lambda \frac{x}{\|x\|} + \frac{\lambda y}{\|x\|} - \frac{\lambda y}{\|x\|} + (1-\lambda)\frac{y}{\|y\|}\right\| \geq \left\|\lambda \frac{x+y}{\|x\|}\right\|$$

$$- \left\|\lambda \frac{y}{\|x\|} - (1-\lambda)\frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\lambda \frac{x+y}{\|x\|}\right\| - \left\|\frac{\lambda\|y\|y - (1-\lambda)\|x\|y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right\|$$

$$= \left\|\lambda \frac{x+y}{\|x\|}\right\| - \frac{(\lambda\|y\| - (1-\lambda)\|x\|)\|y\|}{\|x\| \cdot \|y\|} = 1.$$

Logo, $\lambda \dfrac{x}{\|x\|} + (1-\lambda)\dfrac{y}{\|y\|} \in U_X$ e como X é estritamente convexo, $\dfrac{x}{\|x\|} = \dfrac{y}{\|y\|}$, donde $y = \dfrac{\|y\|}{\|x\|}x$, i.e., $y = tx$ com $t = \dfrac{\|y\|}{\|x\|} > 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Seja $\|(x+y)/2\| = \|x\| = \|y\|$. Daí vem $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, donde, por ii), $x = 0$ ou $y = tx$, $t \geq 0$. Mas de $x = 0$ vem $\|y\| = \|x\| = 0$ donde $y = 0$. Caso contrário, $y = tx, t \geq 0$, donde $\|y\| = t\|x\|$ e como $\|y\| = \|x\|, t = 1$ e, portanto, $y = x$.

iii) $\Rightarrow$ i). Sejam $x, y \in U_X$. Se $(x+y)/2 \in U_X$ então $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| = 1 = \|x\| = \|y\|$ donde, por iii), $x = y$ e, portanto, o segmento de extremos x e y não é próprio.

A convexidade estrita é mais fraca que a uniforme como mostra a proposição a seguir.

5.11 - Proposição: *Todo espaço uniformemente convexo é estritamente convexo.*

Demonstração: Sejam x e y pontos de U_X com $x \neq y$. Teremos $\|x - y\| > \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$ donde, pela hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$. Decorre daí que $(x+y)/2 \notin U_X$, i.e., o segmento próprio de extremos x e y não está contido em U_X.

5.12 - Notação: Seja X um espaço normado e $C \subset X, C \neq \emptyset$. Vamos por

$$|C| = \inf\{\|x\|; x \in C\}$$

e

$$C^0 = \{x \in C; \|x\| = |C|\}.$$

5.13 - Lema: *Seja X um espaço de Banach e $C \neq \emptyset$ um subconjunto de X, convexo e fechado. Se (x_n) é uma sucessão de elementos de C tal que $\|x_n\| \to |C|$ e $x_n \rightharpoonup x$ então $x \in C^0$.*

Demonstração: Como C é convexo e fechado, C é fracamente fechado; logo, $x \in C$ donde, $\|x\| \geq |C|$. Por outro lado, pelo Exemplo 3.3a) tem-se $\|x\| \leq \liminf \|x_n\| = \lim \|x_n\| = |C|$. Segue-se que $\|x\| = |C|$ e, portanto, $x \in C^0$.

5.14 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach.*

i) *X é reflexivo se, e só se, para cada subconjunto C de $X, C \neq \emptyset$, convexo e fechado, tem-se $C^0 \neq \emptyset$.*

ii) *X é estritamente convexo se e só se para cada subconjunto C de $X, C \neq \emptyset$ convexo e fechado, C^0 contém no máximo um elemento.*

iii) *X é reflexivo e estritamente convexo se, e só se, para cada $C \subset X, C \neq \emptyset$ convexo e fechado, C^0 contém um único ponto.*

Demonstração: i) Seja X reflexivo e $(x_n) \subset C$ tal que $\|x_n\| \to |C|$. Então (x_n) é um conjunto limitado donde, pela compacidade fraca dos subconjuntos limitados dos espaços reflexivos, existe uma subsucessão (x_{n_k}) de (x_n) e um $x \in X$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Pelo Lema 5.13, $x \in C^0$. Logo, $C^0 \neq \emptyset$.

Vamos demonstrar a recíproca fazendo uso do Teorema de James segundo o qual X é reflexivo se todo $x^* \in X^*$ atinge o valor $\|x^*\|$ em algum ponto da bola unitária fechada de X (Diestel [1]). Seja, então, $x^* \in X^*$ e designemos por C o conjunto convexo e fechado

$$\{x \in X; \langle x^*, x\rangle \geq \|x^*\|\}.$$

Seja (x_n) tal que $\|x_n\| = 1, n = 1, \ldots, \|x^*\| = \lim\langle x^*, x_n\rangle$ e $y_n = \|x^*\|x_n/\langle x^*, x_n\rangle$. Então $\langle x^*, y_n\rangle = \|x^*\|$, donde $y_n \in C$, $n = 1, \ldots$ e $\lim\|y_n\| = 1$ donde $|C| \leq 1$. Por hipótese, $C^0 \neq \emptyset$, isto é, existe um $x_0 \in C$ com $\|x_0\| = |C|$. De $x_0 \in C$ vem $\langle x^*, x_0\rangle \geq \|x^*\|$ e de $\|x_0\| = |C| \leq 1$ vem $\langle x^*, x_0\rangle \leq \|x^*\|$. Logo $\langle x^*, x_0\rangle = \|x^*\|$, com x_0 pertencente à bola unitária fechada.

ii) Seja X estritamente convexo, C um subconjunto convexo e fechado de X e $x, y \in C^0$. Então $(x+y)/2 \in C$, donde $\|(x+y)/2\| \geq |C|$. Mas, $\|(x+y)/2\| \leq \dfrac{1}{2}\|x\| + \dfrac{1}{2}\|y\| = |C|$. Logo $\|(x+y)/2\| = |C| = \|x\| = \|y\|$, donde, por iii) do Teorema 5.10, $x = y$.

Reciprocamente, vamos supor que para cada $C \subset X$, convexo e fechado, C^0 contenha no máximo um elemento e seja

$$C = \{tx + (1-t)y;\ \ 0 \leq t \leq 1\} \subset U_X.$$

Então C é convexo e fechado e $C^0 = C$. Logo, $x = y$ donde X é estritamente convexo.

iii) Conseqüência trivial de i) e ii).

5.15 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

i) *X é reflexivo, estritamente convexo e goza da propriedade* (5.2)*;*

ii) *Para cada $C \subset X$, convexo e fechado, e cada $(x_n) \subset C$, tal que $\|x_n\| \to |C|$, existe um $x \in X$ tal que $x_n \to x$.*

Demonstração: i) $\to$ ii). Vamos supor i) e seja $C \subset X$ convexo e fechado e $(x_n) \subset C$ tal que $\|x_n\| \to |C|$. Como (x_n) é um conjunto limitado e X é um espaço reflexivo, existe uma subsucessão (x_{n_k}) de (x_n) e $x \in X$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Pelo Lema 5.13, $x \in C^0$ e como X é reflexivo e estritamente convexo, x é, pelo Teorema 5.14, o único ponto de C^0. Logo, $x_n \rightharpoonup x$. Além disto $\|x\| = |C| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Por (5.2) segue-se que $x_n \to x$.

ii) $\Rightarrow$ i) Vamos supor ii) e seja C convexo e fechado e $(x_n) \subset C$ tal que $\|x_n\| \to |C|$. Por hipótese existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Pelo Lema 5.13 $x \in C^0$ donde $C^0 \neq \emptyset$ e, portanto, X é reflexivo pelo Teorema 5.14. Se $y \in C^0$ então a sucessão (z_n), onde $z_{2n} = x_n$ e $z_{2n+1} = y$ é tal que $\|z_n\| \to |C|$. Logo, existe $z \in X$ tal que $z_n \to z$. Mas daí vem $y = z = x$. Logo, X é estritamente convexo pelo Teorema 5.14.

Resta demonstrar que é válida a propriedade (5.2). Seja, para isto, $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \rightharpoonup x_0$ e $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x_0\|$. Pelo Exemplo 3.3, $\|x_0\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$. Como dessas hipóteses resulta que $\dfrac{x_n}{\|x_0\|} \rightharpoonup \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \dfrac{x_n}{\|x_0\|} \right\| = \left\| \dfrac{x_0}{\|x_0\|} \right\| = 1$, pode-se, sem quebra da generalidade, supor que $\|x_0\| = 1$, o que será feito. Seja $x_0^* \in F(x_0)$; portanto $\langle x_0^*, x_0 \rangle = \|x_0^*\| = \|x_0\| = 1$. O conjunto $C = \{x \in X; \langle x_0^*, x \rangle \geq 1\}$ é convexo e fechado e como $x_0 \in C$ e $\|x_0\| = 1$ tem-se $|C| < 1$. Além disto, de $z \in C$ e $\|z\| < 1$ vem

$$\left\langle x_0^*, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle = \frac{1}{\|z\|} \langle x_0^*, z\rangle \geq \frac{1}{\|z\|} > 1,$$

absurdo porque $\left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1$ e $\langle x_0^*, x\rangle \leq \|x_0^*\| = 1$ para todo x tal que $\|x\| = 1$; logo, $|C| = 1$ e, portanto, $x_0 \in C^0$. Segue-se, pelo Teorema 5.14, que x_0 é o único elemento de C^0 pois, pelo que já foi demonstrado, X é reflexivo e estritamente convexo. Não é restritivo supor que $\langle x_0^*, x_n\rangle > 0, n = 1, \ldots,$ visto que $\lim_{n\to\infty} \langle x_0^*, x_n\rangle = \langle x_0^*, x_0\rangle = 1$. Pondo, então, $y_n = x_n/\langle x_0^*, x_n\rangle$ temos $\langle x_0^*, y_n\rangle = 1$ e $\|y_n\| \to 1$, ou seja, $(y_n) \subset C$ e $\|y_n\| \to |C|$. Segue-se daí, por ii), que existe $y \in X$ tal que $y_n \to y$; pelo Lema 5.13 $y \in C^0$, donde $y = x_0$ visto que x_0 é o único elemento de C^0. Logo $y_n \to x_0$ e portanto, $x_n = \langle x_0^*, x_n\rangle y_n \to x_0$ uma vez que $\langle x_0^*, x_n\rangle \to \langle x_0^*, x_0\rangle = 1$. Logo, X tem a propriedade (5.2).

5.16 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|$. Então existe uma norma $|\cdot|$, equivalente a $\|\cdot\|$, tal que X e X^* são estritamente convexos quando munidos de $|\cdot|$ e $|\cdot|^*$, respectivamente.*

Esse importante teorema, cuja demonstração será omitida, é devido a Asplund [1].

5.17 - Definição: Diz-se que o espaço de Banach, X, é *liso no ponto $x \in X$* se $F(x)$ contém um único elemento; diz-se que X é *liso* se X é liso em todos os pontos de U_X.

5.18 - Proposição: *Se X é liso então X é liso em todos os seus pontos.*

Demonstração: Decorrência imediata de iii) da Proposição 2.1.

5.19 - Teorema: i) *Se X^* é estritamente convexo, então X é liso;*

ii) *Se X^* é liso, então X é estritamente convexo.*

Demonstração: i) Seja $x \in U_X$. Pela Proposição 2.1, $F(x)$ é convexo e $F(x) \subset U_{X^*}$. Mas, por hipótese, U_{X^*} não contém segmentos próprios. Logo $F(x)$ tem um único elemento, i.e., X é liso no ponto x.

ii) Vamos supor que X^* seja liso e que os elementos $x, y \in U_X$ são tais que o segmento de extremos x e y está contido em U_X. Decorre daí que $(x+y)/2 \in U_X$. Seja $z^* \in F((x+y)/2)$. Teremos

$$\left\langle \frac{x}{2}, z^* \right\rangle + \left\langle \frac{y}{2}, z^* \right\rangle = \left\langle \frac{x+y}{2}, z^* \right\rangle = \|z^*\|^2 = 1.$$

Mas,

$$\left\langle \frac{x}{2}, z^* \right\rangle \leq \|\frac{x}{2}\|.\|z^*\| = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle \frac{y}{2}, z^* \right\rangle \leq \|\frac{y}{2}\|.\|z^*\| = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\langle x, z^* \rangle = \langle y, z^* \rangle = 1$, donde lembrando que $X \subset X^{**}$, $x, y \in F(z^*)$. Portanto, $x = y$ uma vez que X^* é, por hipótese, liso; assim, U_X não contém segmentos próprios, i.e., X é estritamente convexo.

5.20 - Corolário: *Seja X reflexivo. Então:*

i) *X é estritamente convexo se, e só se, X^* é liso;*

ii) *X é liso se, e só se, X^* é estritamente convexo.*

Demonstração: Ambas as afirmações decorrem do Teorema 5.19 e de $X^{**} = X$.

6. Diferenciabilidade da norma de X

Seja X um espaço de Banach. Vamos por, $\forall\, x, y \in X$,

$$\frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = [x, y]_\lambda, \quad \lambda \neq 0.$$

6.1 - Proposição: *São válidas as seguintes propriedades:*

i) $\forall\ x^* \in F(x)$ *tem-se*

$$\langle x^*, y\rangle \leq \|x\|[x,y]_\lambda \quad se \quad \lambda > 0.$$

ii) *A função* $\lambda \to [\cdot\,,\cdot]_\lambda$ *é não decrescente em* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$*;*

$$\langle x^*, y\rangle \geq \|x\|[x,y]_\lambda \quad se \quad \lambda < 0.$$

iii) $\forall\ z^* \in F(x+\lambda y)$ *tem-se*

$$\langle z^*, y\rangle \geq \|x+\lambda y\|[x,y]_\lambda \quad \lambda > 0$$

$$\langle z^*, y\rangle \leq \|x+\lambda y\|[x,y]_\lambda \quad \lambda < 0$$

iv) $-\|y\| \leq [x,y]_\lambda \quad se \quad \lambda > 0$

$\|y\| \geq [x,y]_\lambda \quad se \quad \lambda < 0.$

Demonstração: i) De $x^* \in F(x)$ vem

$$\langle x^*, x+\lambda y\rangle = \|x\|^2 + \lambda\langle x^*, y\rangle$$

e daí,

$$\lambda\langle x^*, y\rangle = \langle x^*, x+\lambda y\rangle - \|x\|^2 \leq \|x\|\|x+\lambda y\| - \|x\|^2 = \lambda\|x\|[x,y]_\lambda$$

donde as desigualdades i).

ii) De $0<\lambda<\mu$ vem $0 < \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ donde

$$||x+\lambda y|| = \left\| x - \frac{\lambda}{\mu}\,x + \frac{\lambda}{\mu}\,x + \frac{\lambda}{\mu}\,\mu y \right\| \leq \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) ||x|| + \frac{\lambda}{\mu}\,||x+\mu y||.$$

Logo,

$$||x+\lambda y|| - ||x|| \leq \frac{\lambda}{\mu}\big(||x+\mu y|| - ||x||\big)$$

e, daí,

$$\frac{||x+\lambda y||-||x||}{\lambda} \leq \frac{||x+\mu y||-||x||}{\mu}\ , \text{ i.e., } [x,y]_\lambda \leq [x,y]_\mu\,.$$

De $\lambda < \mu < 0$ vem $0 < \dfrac{\mu}{\lambda} < 1$ donde

$$||x+\mu y|| = \left\| x - \frac{\mu}{\lambda}\,x + \frac{\mu}{\lambda}\,x + \frac{\mu}{\lambda}\,\lambda y \right\| \leq \Big(1 - \frac{\mu}{\lambda}\Big)\,||x|| + \frac{\mu}{\lambda}\,||x+\lambda y||.$$

Logo,

$$||x+\mu y|| - ||x|| \leq \frac{\mu}{\lambda}\,\big(||x+\lambda y|| - ||x||\big)$$

e, daí,

$$\frac{||x+\mu y||-||x||}{\mu} \geq \frac{||x+\lambda y||-||x||}{\lambda}\ , \text{ i.e., } [x,y]_\lambda \leq [x,y]_\mu\,.$$

Portanto $[x,y]_\lambda$ é não decrescente em $(-\infty,0)$ e em $(0,+\infty)$ donde, por i) é não decrescente em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

iii) Temos, $\forall\, z^* \in F(x+\lambda y)$ e $\lambda > 0$

$$\|x+\lambda y\|[x,y]_\lambda = \frac{\|x+\lambda y\|^2 - \|x\|\|x+\lambda y\|}{\lambda} \leq \frac{\|x+\lambda y\|^2 - |\langle z^*,x\rangle|}{\lambda} =$$

$$\frac{\langle z^*, x+\lambda y\rangle - |\langle z^*,x\rangle|}{\lambda} = \frac{\langle z^*,x\rangle + \lambda\langle z^*,y\rangle - |\langle z^*,x\rangle|}{\lambda} \leq \langle z^*,y\rangle$$

Se $\lambda < 0$ as desigualdades são válidas com o sinal invertido.

iv) Por i) tem-se $-\|x\|\cdot\|y\| \leq \langle x^*,y\rangle \leq \|x\|[x,y]_\lambda$, $\forall\,\lambda > 0$ e $\forall\, x^* \in F(x)$. Logo, $-\|y\| \leq [x,y]_\lambda$ $\forall\lambda > 0$.

A segunda desigualdade tem demonstração análoga.

Por ii) e iv) a função $[x,y]_\lambda$ tem, $\forall\, x,y \in X$, um limite à direita $[x,y]_+$ e um limite à esquerda $[x,y]_-$ quando $\lambda \to 0$ e

$$[x,y]_+ = \inf_{\lambda>0}[x,y]_\lambda$$

$$[x,y]_- = \sup_{\lambda<0}[x,y]_\lambda.$$

6.2 - Proposição: *São válidas as seguintes propriedades da derivada* $[\cdot,\cdot]_+$*:*

i) $[\alpha x, \beta y]_+ = |\beta|[x,y]_+$ *se* $\alpha\beta > 0$

ii) $[x, \alpha x + y]_+ = \alpha\|x\| + [x,y]_+$

iii) $-[x,-y]_+ \leq [x,y]_+$

iv) $|[x,y]_+| \leq \|y\|$

v) $[x,\beta y]_+ \geq \beta[x,y]_+$

Demonstração: i) Temos, para $\alpha\beta > 0$,

$$[\alpha x, \beta y]_\lambda = \frac{\|\alpha x + \lambda\beta y\| - \|\alpha x\|}{\lambda} =$$

$$= |\beta|\frac{\|\frac{\alpha}{\beta}x + \lambda y\| - \|\frac{\alpha}{\beta}x\|}{\lambda} = |\beta|\frac{\|x + \lambda\frac{\beta}{\alpha}y\| - \|x\|}{\lambda\frac{\beta}{\alpha}} = |\beta|[x,y]_{\lambda\frac{\beta}{\alpha}}$$

Tomando o limite quando $\lambda \to 0$, $\lambda > 0$, temos a igualdade i).

ii) Se $\alpha = 0$ a igualdade ii) é trivial. Seja $\alpha \neq 0$ e λ_0 tal que $1 + \lambda\alpha > 0$ se $0 < \lambda < \lambda_0$. Para $0 < \lambda < \lambda_o$ temos, então,

$$|[x, \alpha x + y]_\lambda - [x,y]_\lambda - \alpha\|x\| \; |$$

$$= \left|\frac{\|x + \lambda\alpha x + \lambda y\| - \|x\| - \|x + \lambda y\| + \|x\| - \lambda\alpha\|x\|}{\lambda}\right|$$

$$= \left|\frac{\|(1+\lambda\alpha)x + \lambda y\| - \|x+\lambda y\| - \lambda\alpha\|x\|}{\lambda}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\lambda}\left((1+\lambda\alpha)\left\|x + \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}y\right\| - \|x+\lambda y\| - \lambda\alpha\|x\|\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\lambda}\left(\left\|x + \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}y\right\| - \|x+\lambda y\|\right) + \alpha\left(\|x + \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}y\| - \|x\|\right)\right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{\lambda} \left(\left\| x + \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha} y \right\| - \|x + \lambda y\| \right) \right| + \left| \alpha \left(\left\| x + \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha} y \right\| - \|x\| \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \left\| x + \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha} y - x - \lambda y \right\| + \left| \alpha \left(\left\| x + \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha} y \right\| - \|x\| \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{1+\lambda\alpha} - 1 \right| \|y\| + \left| \alpha \left(\left\| x + \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha} y \right\| - \|x\| \right) \right| \to 0$$

quando $\lambda \to 0$. Daí vem $[x, \alpha x + y]_+ = \alpha \|x\| + [x, y]_+$.

iii) Temos $\forall\, \lambda > 0$

$$[x, y]_\lambda + [x, -y]_\lambda = \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\| + \|x - \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(\|x + \lambda y\| + \|x - \lambda y\| - 2\|x\| \right) \geq \frac{1}{\lambda} \left(\|x + \lambda y + x - \lambda y\| - 2\|x\| \right) = 0.$$

Logo, $-[x, -y]_\lambda \leq [x, y]_\lambda$, $\forall\, \lambda > 0$, donde $-[x, -y]_+ \leq [x, y]_+$.

iv) Temos

$$[x, y]_\lambda = \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \leq \frac{\|x\| + \lambda \|y\| - \|x\|}{\lambda} = \|y\|, \ \forall \lambda > 0,$$

donde $[x, y]_+ \leq \|y\|$. Por outro lado, de iv) do Lema 6.1 vem $-\|y\| \leq [x, y]_+$. Logo $|[x, y]_+| \leq \|y\|$.

v) Se $\beta = 0$ a desigualdade a demonstrar é trivial e se $\beta > 0$, é válida por i). Se $\beta < 0$ tem-se, por i) e iii),

$$\beta [x, y]_+ = -|\beta| [x, y]_+ = -[x, |\beta| y]_+ = -[x, -\beta y]_+ \leq [x, \beta y]_+.$$

6.3 - Lema: *Para cada $x, y \in X$ existe $x^* \in F(x)$ tal que $\langle x^*, y \rangle = \|x\| [x, y]_+$.*

Demonstração: Se x e y forem linearmente dependentes, $y = \rho x$ para algum $\rho \in \mathbb{R}$ e como, para λ suficientemente pequeno, $1 + \lambda\rho > 0$, tem-se

$$[x, y]_\lambda = [x, \rho x]_\lambda = \frac{\|x + \lambda \rho x\| - \|x\|}{\lambda} = \frac{\|(1 + \lambda\rho) x\| - \|x\|}{\lambda} = \rho \|x\|.$$

Por outro lado, para todo $x^* \in F(x)$ tem-se $\langle x^*, y\rangle = \langle x^*, \rho x\rangle = \rho\|x\|^2$. Nesse caso tem-se, então, $\langle x^*, y\rangle = \|x\|[x,y]_+$ para todo $x^* \in F(x)$.

Sejam x e y linearmente independentes, V o subespaço de X gerado por x e y e ξ^* o funcional definido em V por

$$\langle \xi^*, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\|x\| + \beta[x,y]_+,$$

i.e., o funcional que toma o valor $\|x\|$ no ponto x e o valor $[x,y]_+$ no ponto y. Teremos, por ii) , iv) e v) da Proposição 6.2,

$$\langle \xi^*, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\|x\| + \beta[x,y]_+ \leq \alpha\|x\| + [x,\beta y]_+ = [x, \alpha x + \beta y]_+ \leq \|\alpha x + \beta y\|.$$

Logo, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\xi_1^* \in X^*$ que estende ξ^* a X e é tal que $\|\xi_1^*\| \leq 1$. Como ξ_1^* é uma extensão de ξ^*, ξ_1^* coincide com ξ^* nos pontos x e y, i.e., $\langle \xi_1^*, x\rangle = \|x\|$ e $\langle \xi_1^*, y\rangle = [x,y]_+$. Portanto, pondo $x^* = \|x\|\xi_1^*$ temos

$$\|x\|^2 = \langle x^*, x\rangle \leq \|x^*\| \cdot \|x\|.$$

Logo, $\|x\| \leq \|x^*\|$ e como de $\|\xi_1^*\| \leq 1$ vem $\|x^*\| \leq \|x\|$, tem-se $\|x^*\| = \|x\|$. Portanto,

$$x^* \in F(x) \quad \text{e} \quad \langle x^*, y\rangle = \|x\|[x,y]_+.$$

6.4 - Teorema: *Pondo* $\langle y, x\rangle_s = \sup\{\langle y, x^*\rangle, x^* \in F(x)\}$, *então*

$$\langle y, x\rangle_s = \|x\|[x,y]_+. \tag{6.1}$$

Demonstração: Temos, por ii) da Proposição 6.1, $\langle y, x^*\rangle \leq \|x\|[x,y]_\lambda$, $\forall x^* \in F(x)$ e $\forall\,\lambda > 0$. Logo, $\langle y, x^*\rangle \leq \|x\|[x,y]_+$, $\forall\, x^* \in F(x)$ e, portanto, $\langle y, x\rangle_s \leq \|x\|[x,y]_+$. Por outro lado, pelo Lema 6.3, $\langle y, x\rangle_s \geq \|x\|[x,y]_+$. Logo, $\langle y, x\rangle_s = \|x\|[x,y]_+$.

6.5 - Teorema: *São válidas as propriedades:*

i) $\langle \alpha x + y, x\rangle_s = \alpha\|x\|^2 + \langle y, x\rangle_s$;

ii) $\langle \beta y, \alpha x\rangle_s = \alpha\beta\langle y, x\rangle_s$ *se* $\alpha\beta \geq 0$;

iii) $\langle y + z, x\rangle_s \leq \|x\| \cdot \|z\| + \langle y, x\rangle_s$;

iv) *a função* $\langle \cdot\, , \cdot\rangle_s : X \times X \to \mathbb{R}$ *é semicontínua superiormente;*

v) $|\langle y, x\rangle_s| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Demonstração: i), ii) e iii) são conseqüências imediatas da definição da função $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ e das propriedades do supremo. iv) Para todo $\lambda > 0$, $[\cdot,\cdot]_\lambda$ é uma função contínua de seus dois argumentos. Portanto o invólucro inferior, $[\cdot,\cdot]_+$, da família $\{[\cdot,\cdot]_\lambda; \lambda > 0\}$ é s.c.s.. Pelo Teorema 6.4, $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ é, pois, s.c.s.. v) Temos, pelo Teorema 6.4, $|\langle y, x\rangle_s| = \|x\|\,|[x,y]_+|$, donde v), por iv) da Proposição 6.2.

6.6 - Teorema: *Seja* $x \in X$, $x \neq 0$. *São equivalentes:*

i) X *é liso no ponto* x*;*

ii) *Toda aplicação dualidade de* X *é demicontínua no ponto* x *(i.e., contínua quando* X *está munido da topologia da norma e* X^* *da topologia fraca* $-*$ *).*

iii) *A norma de* X *é diferenciável à Gateaux no ponto* x.

Demonstração: Vamos supor que a aplicação dualidade f não seja demicontínua no ponto x. Então existe uma seqüência (x_n) de elementos de X tal que $x_n \to x$ mas $(f(x_n))$ não converge fraco–* a $f(x)$. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos determinar uma vizinhança fraca–*, V, de $f(x)$ tal que $f(x_n) \notin V$, $n = 1, \ldots$. Pelo Teorema de Alaoglu, $(f(x_n))$ tem um valor de aderência fraco–*, x^*. Temos

$$\begin{aligned}
&|\,\langle x^*, x\rangle - \|x\|^2\,| \leq |\,\langle x^*, x\rangle - \langle f(x_n), x\rangle| + |\langle f(x_n), x\rangle - \langle f(x_n), x_n\rangle| + \\
&+ |\langle f(x_n), x_n\rangle - \|x\|^2| = |\langle x^* - f(x_n), x\rangle| + |\langle f(x_n), x - x_n\rangle| + \\
&+ |\|x_n\|^2 - \|x\|^2\,| \leq |\langle x^* - f(x_n), x\rangle| + \|f(x_n)\|\,\|x - x_n\| + |\,\|x_n\|^2 - \|x\|^2\,|. \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

Como $x_n \to x$ tem-se que $\|x - x_n\| \to 0$, $\|x_n\| \to \|x\|$ e que $\{f(x_n)\}$ é um conjunto limitado. Dado $\varepsilon > 0$ existe, pois, n_0 tal que $\|f(x_n)\| \; \|x - x_n\| + | \; \|x_n\|^2 - \|x\|^2 \; | < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Além disto, como x^* é valor de aderência de $(f(x_n))$, existe $m > n_0$ tal que $f(x_m)$ pertence à vizinhança fraca–* $\{\xi \in X^*; |\langle x^* - \xi, x\rangle| < \varepsilon\}$ de x^*, i.e., $|\langle x^* - f(x_m), x\rangle| < \varepsilon$. Logo, $\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2$, por (6.2) e, daí, $\|x\| \leq \|x^*\|$. Por outro lado, ainda de $x_n \to x$ resulta que dado $\delta > 0$ existe um índice n_1 tal que $\|x_n\| \leq \|x\| + \delta \; \forall\, n \geq n_1$ e, portanto, $\|f(x_n)\| \leq \|x\| + \delta \; \forall n \geq n_1$. Além disto, a bola $\{\xi \in X^*; \|\xi\| \leq \|x\| + \delta\}$ é fechada na topologia fraca–*. Logo, $\|x^*\| \leq \|x\| + \delta \; \forall\, \delta > 0$, donde $\|x^*\| \leq \|x\|$. Portanto, $\|x^*\| = \|x\|$ e, assim, $x^* \in F(x)$. Mas supondo i), $F(x)$ tem um só elemento donde $x^* = f(x)$, i.e., $f(x)$ é um valor de aderência de $(f(x_n))$, o que está em contradição com a escolha de $(f(x_n))$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Fazendo $x^* = f(x)$ e $z^* = f(x + \lambda y)$ em i) e iii) da Proposição 6.1 tem-se, para $\lambda > 0$,

$$\langle f(x), y\rangle \leq \|x\| [x, y]_\lambda \qquad \text{e} \qquad \langle f(x + \lambda y), y\rangle \geq \|x + \lambda y\| [x, y]_\lambda.$$

Logo, por ii) vem $\langle f(x), y\rangle = \|x\| [x, y]_+$. Analogamente, ainda por i) e iii) da Proposição 6.1 e a continuidade de f tem-se $\langle f(x), y\rangle = \|x\| [x, y]_-$. Portanto,

$$\lim_{\lambda \to 0} [x, y]_\lambda = \left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle, \quad \forall\, y \in X,$$

i.e., a norma de X é diferenciável à Gateaux no ponto x.

iii) $\Rightarrow$ i). Se a norma de X é diferenciável à Gateaux no ponto x, então $[x, y]_+ = [x, y]_- \quad \forall\, y \in X$. Mas, então, por i) da Proposição 6.1 tem-se, $\forall\, x^* \in F(x)$,

$$\langle x^*, y\rangle = \|x\| [x, y]_+, \quad \forall\, y \in X.$$

Logo, $F(x)$ tem um só elemento, i.e., X é liso no ponto x.

6.7 - Proposição: *Seja X^* estritamente convexo. Então:*

i) *O operador dualidade é unívoco e demicontínuo.*

ii) *A norma de X é diferenciável à Gateaux em todo ponto $x \neq 0$.*

Demonstração: Decorrência imediata dos Teoremas 5.19 e 6.6.

6.8 - Observações: a) Pelo Teorema 6.6 a norma de X é diferenciável à Gateaux no ponto $x \neq 0$ se e só se $F(x)$ consta de um único ponto e, portanto, se e só se todas as aplicações dualidade coincidem no ponto x. Logo, se a norma de X for diferenciável à Gateaux no ponto $x \neq 0$, teremos

$$\lim_{\lambda \to 0} [x, y]_\lambda = \left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle$$

para toda aplicação dualidade f, i. e., $f(x)/\|x\|$ é a derivada de Gateaux da norma de X no ponto x, qualquer que seja a aplicação dualidade, f.

b) Para que a norma de X seja diferenciável à Gateaux no ponto x é suficiente que, para todo $h \in U_X$, exista o limite de $[x, h]_\lambda$ quando λ tende a zero. Com efeito, se isto acontece e $y \in X$, $y \neq 0$, então, como $y/\|y\| \in U_X$, existe o limite de $[x, y/\|y\|]_\lambda$ quando λ tende a zero e

$$\|y\| \lim_{\lambda \to 0} \left[x, \frac{y}{\|y\|} \right]_\lambda = \|y\| \lim_{\lambda \to 0} \frac{\left\| x + \lambda \frac{y}{\|y\|} \right\| - \|x\|}{\lambda} =$$

$$\|y\| \lim_{\lambda \to 0} \frac{\left\| x + \lambda \|y\| \frac{y}{\|y\|} \right\| - \|x\|}{\lambda \|y\|} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\left\| x + \lambda \|y\| \frac{y}{\|y\|} \right\| - \|x\|}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} [x, y]_\lambda$$

i.e., existe o limite de $[x, y]_\lambda$ quando $\lambda \to 0$ e, portanto, a norma de X é diferenciável à Gateaux no ponto x por i) da Proposição 6.1.

c) Se a norma de X é diferenciável à Gateaux no ponto x, o mesmo acontece no ponto kx, $\forall\, k > 0$ e

$$\lim_{\lambda \to 0} [kx, y]_\lambda = \left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle \quad \forall\, y \in X,$$

i.e., a derivada à Gateaux da norma de X tem o valor constante $f(x)/\|x\|$ ao longo do raio $\{kx; k > 0\}$. Com efeito, tem-se

$$[kx, y]_\lambda = \frac{\|kx + \lambda y\| - \|kx\|}{\lambda} = \frac{\left\|x + \frac{\lambda}{k}y\right\| - \|x\|}{\frac{\lambda}{k}} = [x, y]_{\lambda/k}. \tag{6.3}$$

Logo, pondo $\lambda/k = \mu$,

$$\lim_{\lambda\to 0}[kx, y]_\lambda = \lim_{\mu\to 0}[x, y]_\mu = \left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle \quad \forall\ y \in X.$$

Pela Observação 6.8a), se a norma de X for diferenciável à Gateaux em um conjunto $C \subset X$, então todas as aplicações dualidade de X coincidem em C e, portanto, se f é uma qualquer delas tem-se, levando em conta a Observação 6.8b),

$$\lim_{\lambda\to 0}[x, y]_\lambda = \left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle \quad \forall\ y \in U_X,$$

em cada ponto x de C. Quando a convergência é uniforme em C, diz-se que a norma de x é *uniformemente diferenciável à Gateaux em* C. Portanto, a norma de X é uniformemente diferenciável à Gateaux em C se, e só se, dado $\varepsilon > 0$ pode-se, para cada $y \in U_X$, determinar $\lambda_0 > 0$ tal que, qualquer que seja a aplicação dualidade f, tem-se

$$\left| \left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle - [x, y]_\lambda \right| < \varepsilon \quad \forall\ x \in C \quad \text{se} \quad 0 < |\lambda| \le \lambda_0.$$

6.9 - Proposição: *Se C é limitado e tal que $|C| > 0$ então a norma de X é uniformemente diferenciável à Gateaux em C se e só se ela é uniformemente diferenciável à Gateaux no conjunto $C_1 = \{h; h = x/\|x\|, x \in C\}$.*

Demonstração: Fazendo $k = 1/\|x\|$ e $k = ||x||$ em (6.3) tem-se, para todo $x \neq 0$,

$$\left[\frac{x}{\|x\|}, y\right]_\lambda = [x, y]_{\lambda\|x\|} \text{ e } [x, y]_\lambda = \left[\frac{x}{||x||}, y\right]_{\lambda/||x||}. \tag{6.4}$$

Suponhamos que a norma de X seja uniformemente diferenciável à Gateaux no conjunto C. Então, dados $\varepsilon > 0$ e $y \in U_X$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\left|\left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle - [x,y]_\lambda \right| < \varepsilon \;\forall\, x \in C \quad \text{se} \quad 0 < |\lambda| \leq \lambda_0$$

donde, por (6.4),

$$\left|\left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle - \left[\frac{x}{\|x\|}, y\right]_{\lambda/\|x\|} \right| < \varepsilon$$

$\forall\, x \in C$ se $0 < |\lambda| \leq \lambda_0$ e, portanto, se $0 < |\lambda|/\,\|x\| \leq \lambda_0/\,\|x\|$. Mas, por hipótese, existe M tal que $\|x\| \leq M \;\forall\, x \in C$. Tem-se $||x|| \geq |C|$. Logo, $|\lambda|\,/\,\|x\| \leq \lambda_0/|C| \;\forall\, x \in C$, então $|\lambda|\,/\,\|x\| \leq \lambda_0/|C| \;\forall\, x \in C$ e, portanto,

$$\left|\left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle - \left[\frac{x}{\|x\|}, y\right]_{\mu} \right| < \varepsilon \quad \forall\, x \in C \quad \text{se} \quad 0 < |\mu| \leq \frac{\lambda_0}{|C|}. \tag{6.5}$$

i.e., a norma de X é uniformemente diferenciável à Gateaux em C_1.

Reciprocamente, suponhamos que a norma de X seja uniformemente diferenciável à Gateaux em C_1. Então, dados $\varepsilon > 0$ e $y \in U_X$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\left|\left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle - \left[\frac{x}{\|x\|}, y\right]_{\lambda} \right| < \varepsilon \;\; \forall\, x \in C \quad \text{se} \quad 0 < |\lambda| \leq \lambda_0.$$

Portanto, por (6.4),

$$\left|\left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle - [x,y]_{\lambda\|x\|} \right| < \varepsilon \;\; \forall\, x \in C \quad \text{se} \quad 0 < |\lambda| \leq \lambda_0,$$

donde

$$\left|\left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle - [x,y]_{\mu} \right| < \varepsilon \;\; \forall\, x \in C \quad \text{se} \quad 0 < |\mu| \leq \lambda_0\, M,$$

i.e., a norma de X é uniformemente diferenciável à Gateaux em C.

Vamos dizer que a norma de X é *uniformemente diferenciável à Gateaux* se ela for uniformemente diferenciável à Gateaux em U_X. A Proposição 6.9 justifica essa definição.

6.10 - Teorema: *São equivalentes:*

i) *A norma de X é uniformemente diferenciável à Gateaux;*

ii) *O operador dualidade de X é unívoco e uniformente demicontínuo em todo conjunto limitado (i.e., uniformemente contínuo estando X munido da topologia da norma e X^* da topologia fraca–*).*

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii). Vamos supor que a norma de X seja uniformemente diferenciável à Gateaux. Como daí resulta, pelo Teorema 6.6, que F é unívoco, resta mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, $M > 0$ e $z \in X$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| \leq M$ e $\|x - y\| < \delta$, então $|\langle F(x) - F(y), z\rangle| < \varepsilon$. Isto equivale a mostrar que as hipóteses $\|x_n\| \leq M$, $\|x_n - y_n\| \to 0$ e $|\langle F(x_n) - F(y_n), z\rangle| \geq \varepsilon_0 > 0$, $n = 1, \ldots$, levam a uma contradição. Suponhamos satisfeitas essas hipóteses. Se $x_n \to 0$ então $y_n \to 0$ donde $\|F(x_n)\| = \|x_n\| \to 0$ e $\|F(y_n)\| = \|y_n\| \to 0$. Logo, $\|F(x_n) - F(y_n)\| \to 0$ donde $|\langle F(x_n) - F(y_n), z\rangle| \leq \|F(x_n) - F(y_n)\| \, \|z\| \to 0$, i.e., $|\langle F(x_n) - F(y_n), z\rangle| \to 0$, uma contradição. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor, então, que $\|x_n\| \geq \alpha > 0$, $n = 1, \ldots$. Resulta que existe n_0 tal que $\|y_n\| \geq \alpha/2$ para todo $n > n_0$. Seja $\mu > 0$ e $n \geq n_0$. Por i) pode-se determinar λ_0 tal que

$$\left|\left\langle \frac{F(x_n)}{\|x_n\|}, z \right\rangle - [x_n, z]_\lambda \right| < \frac{\mu}{2} \quad \text{e} \quad \left|\left\langle \frac{F(y_n)}{\|y_n\|}, z \right\rangle - [y_n, z]_\lambda \right| < \frac{\mu}{2} \quad \text{se} \quad 0 < |\lambda| \leq \lambda_o.$$

Mas

$$\left|[x_n, z]_{\lambda_0} - [y_n, z]_{\lambda_0}\right| = \left| \frac{\|x_n + \lambda_0 z\| - \|x_n\|}{\lambda_0} - \frac{\|y_n + \lambda_0 z\| - \|y_n\|}{\lambda_0} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\|x_n + \lambda_0 z\| - \|y_n + \lambda_0 z\|}{\lambda_0} \right| + \left| \frac{\|x_n\| - \|y_n\|}{\lambda_0} \right| \leq \frac{2}{\lambda_0} \|x_n - y_n\| \to 0$$

quando $n \to \infty$ e como

$$\left|\left\langle \frac{F(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{F(y_n)}{\|y_n\|}, z \right\rangle\right| \leq$$

$$\leq \left|\left\langle \frac{F(x_n)}{\|x_n\|}, z \right\rangle - [x_n, z]_{\lambda_0}\right| + \left|[x_n, z]_{\lambda_0} - [y_n, z]_{\lambda_0}\right| +$$

$$+ \left|\left\langle \frac{F(y_n)}{\|y_n\|}, z \right\rangle - [y_n, z]_{\lambda_0}\right| < \mu + \frac{2}{\lambda_0}\|x_n - y_n\|$$

tem-se

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\left\langle \frac{F(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{F(y_n)}{\|y_n\|}, z \right\rangle\right| < \mu$$

e daí, $\left|\left\langle \frac{F(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{F(y_n)}{\|y_n\|}, z \right\rangle\right| \to 0$ quando $n \to \infty$, pela arbitrariedade de μ. Além disto,

$$\left|\left\langle \frac{F(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{F(y_n)}{\|y_n\|}, z \right\rangle\right| = \left|\left\langle \frac{F(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{F(y_n)}{\|x_n\|}, z \right\rangle - \left\langle \frac{F(y_n)}{\|y_n\|} - \frac{F(y_n)}{\|x_n\|}, z \right\rangle\right| \geq$$

$$\geq \left|\left\langle \frac{F(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{F(y_n)}{\|x_n\|}, z \right\rangle\right| - \left|\left\langle \frac{F(y_n)}{\|y_n\|} - \frac{F(y_n)}{\|x_n\|}, z \right\rangle\right| =$$

$$= \frac{1}{\|x_n\|}|\langle F(x_n) - F(y_n), z\rangle| - \left|\frac{1}{\|y_n\|} - \frac{1}{\|x_n\|}\right| |\langle F(y_n), z\rangle| \geq$$

$$\geq \frac{1}{M}|\langle F(x_n) - F(y_n), z\rangle| - \frac{2}{\alpha^2}\|F(y_n)\| \cdot \|z\| \cdot \|x_n - y_n\|.$$

Logo,

$$|\langle F(x_n) - F(y_n), z\rangle| \leq M\left|\left\langle \frac{F(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{F(y_n)}{\|y_n\|}, z \right\rangle\right| + \frac{2M}{\alpha^2}\|F(y_n)\| \cdot \|z\| \, \|x_n - y_n\|$$

e como $\|F(y_n)\| = \|y_n\|$ é, por hipótese, limitado tem-se $|\langle F(x_n) - F(y_n), z\rangle| \to 0$, uma contradição. Logo F é uniformemente demicontínuo em todo conjunto limitado.

ii) $\Rightarrow$ i)

Vamos supor ii) verdadeira. Pondo $x^* = F(x)$ e $z^* = F(x+\lambda y)$ em i) e iii) da Proposição 6.1 temos, para $x, y \in U_X$

$$\left\langle \frac{F(x+\lambda y)}{\|x+\lambda y\|}, y \right\rangle \leq [x,y]_\lambda \leq \langle F(x), y\rangle \quad \text{se} \quad \lambda < 0$$

e

$$\langle F(x), y\rangle \leq [x,y]_\lambda \leq \left\langle \frac{F(x+\lambda y)}{\|x+\lambda y\|}, y \right\rangle \quad \text{se} \quad \lambda > 0.$$

Logo,

$$|[x,y]_\lambda - \langle F(x), y\rangle| \leq \left| \left\langle \frac{F(x+\lambda y)}{\|x+\lambda y\|}, y \right\rangle - \langle F(x), y\rangle \right|. \tag{6.6}$$

Mas sendo $C = B(0, 1+\rho)\backslash B(0, 1-\rho)$, $0 < \rho < 1$, onde $B(0,r)$ é a bola aberta de centro na origem e raio r, um conjunto limitado, F é uniformemente demicontínuo em C. Logo, dado $\varepsilon > 0$ e $y \in U_X$ existe $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 < \rho$, tal que para todo $x \in U_X$ tem-se

$$|\langle F(x+\lambda y), y\rangle - \langle F(x), y\rangle| < \varepsilon \quad \text{se} \quad 0 < |\lambda| \leq \lambda_0.$$

Mas, então, $\langle F(x+\lambda y), y\rangle$ converge a $\langle F(x), y\rangle$ uniformemente em U_X e como $1/\|x+\lambda y\|$ converge a $1/\|x\|$ uniformemente em U_X e essas funções são limitadas para $x \in U_X$ e $0 < |\lambda| \leq \rho$, o produto delas $\left\langle \frac{F(x+\lambda y)}{\|x+\lambda y\|}, y \right\rangle$ converge a $\langle F(x), y\rangle$ uniformemente em U_X. Por (6.6) segue-se que, para cada $y \in U_X$, $[x,y]_\lambda$ converge a $\langle F(x), y\rangle$ uniformemente em U_X, i.e., a norma de X é uniformemente diferenciável à Gateaux.

Recorde-se que uma aplicação $\varphi\colon X \to Y$, onde X e Y são espaços de Banach, é *diferenciável à Fréchet* no ponto $x \in X$ se existe uma aplicação $L(x)\colon X \to Y$, linear e contínua, tal que $\forall\, y \in X$ tem-se

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) = L(x)y + \omega(x,y)$$

onde

$$\lim_{y\to 0}\frac{\omega(x,y)}{\|y\|}=0\,,\quad y\neq 0.$$

6.11 - Lema: *Uma aplicação $\varphi\colon X\to Y$ é diferenciável à Fréchet no ponto x se, e só se, φ é diferenciável à Gateaux no ponto x e*

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\varphi(x+\lambda y)-\varphi(x)}{\lambda}=\varphi'(x)y \tag{6.7}$$

uniformemente em y no conjunto U_X, onde $\varphi'(x)$ designa a derivada de Gateaux de φ no ponto x.

Demonstração: Se φ é diferenciável à Fréchet no ponto x tem-se, para $y\in X$,

$$\varphi(x+\lambda y)-\varphi(x)=L(x)\lambda y+\omega(x,\lambda y),$$

onde

$$\lim_{\lambda y\to 0}\frac{\omega(x,\lambda y)}{\|\lambda y\|}=0. \tag{6.8}$$

Mas de (6.8) vem $\lim\limits_{\lambda\to 0}\omega(x,\lambda y)/\lambda=0$ e a convergência é uniforme em y no conjunto U_X. Logo,

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\varphi(x+\lambda y)-\varphi(x)}{\lambda}=L(x)y$$

e esse limite é uniforme em y no conjunto U_X, i.e. φ é diferenciável à Gateaux no ponto x e o limite (6.7) é uniforme em y no conjunto U_X. Reciprocamente, vamos supor que essa condição seja satisfeita. Se $y\in X$, seja $\lambda=\|y\|$, $h=y/\|y\|$ e

$$\omega(x,\lambda h)=\varphi(x+\lambda h)-\varphi(x)-\varphi'(x)\lambda h.$$

Então

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\omega(x,\lambda h)}{\lambda}=0\quad\text{uniformemente em } h \text{ no conjunto } U_X \tag{6.9}$$

e, portanto,

$$0 = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\omega(x, \lambda h)}{\lambda} = \lim_{\lambda h \to 0} \frac{\omega(x, \lambda h)}{\|\lambda h\|} = \lim_{y \to 0} \frac{\omega(x, y)}{\|y\|} \cdot$$

Logo, $\varphi(x+y) - \varphi(x) = \varphi'(x)y + \omega(x, y)$ com $\lim\limits_{y \to 0} \omega(x, y)/\|y\| = 0$ i.e., φ é diferenciável à Frechet no ponto x.

6.12 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

i) *A norma de X é diferenciável à Fréchet no ponto $x \neq 0$;*

ii) *Toda aplicação dualidade, f, é contínua no ponto x.*

Demonstração: Seja i) válida. Vamos mostrar que se $f\colon X \to X^*$ é uma aplicação dualidade e $x_n \to x$ em X, então $f(x_n) \to f(x)$ em X^*. É bastante demonstrar que $f(x_n)/\|x_n\| \to f(x)/\|x\|$ em X^* porque se isto acontecer teremos

$$\|f(x_n) - f(x)\| = \|x_n\| \left\| \frac{f(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{f(x)}{\|x_n\|} \right\| =$$

$$= \|x_n\| \left\| \frac{f(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{f(x)}{\|x\|} + \frac{f(x)}{\|x\|} - \frac{f(x)}{\|x_n\|} \right\| \leq$$

$$\leq \|x_n\| \left(\left\| \frac{f(x_n)}{\|x_n\|} - \frac{f(x)}{\|x\|} \right\| + \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|x_n\|} \right| \|f(x)\| \right) \to 0$$

quando $n \to \infty$ visto que a sucessão $(\|x_n\|)$ é limitada. Ponhamos para simplificar a escrita, $x/\|x\| = u$, $x_n/\|x_n\| = u_n$, $f(x)/\|x\| = u^*$ e $f(x_n)/\|x_n\| = u_n^*$. Teremos

$$|\langle u_n^*, u\rangle - 1| = |\langle u_n^*, u\rangle - \langle u_n^*, u_n\rangle| = |\langle u_n^*, u - u_n\rangle| \leq \|u_n^*\|\|u - u_n\| \to 0$$

uma vez que $\|u_n^*\| = 1$ e $u_n \to u$. Logo,

$$\langle u_n^*, u\rangle \to 1 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{6.10}$$

Se existir n_o tal que $u_n^* = u^*$ para todo $n \geq n_0$ nada há demonstrar. Caso contrário, passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que $u_n^* \neq u^*$, $n = 1, \dots$. Daí vem $\langle u_n^*, u\rangle < \langle u^*, u\rangle$, $n = 1, \dots$, pois de $\langle u_n^*, u\rangle \leq \|u_n^*\|\,\|u\| = 1$ e $\langle u^*, u\rangle = 1$ vem $\langle u_n^*, u\rangle \leq \langle u^*, u\rangle$ e se, para algum n, $\langle u_n^*, u\rangle = \langle u^*, u\rangle$, então $u_n^* \in F(u)$, donde $u_n^* = u^*$ pois $u^* \in F(u)$ e, pelo Lema 6.11 e o Teorema 6.6, $F(u)$ tem um único elemento. Tendo em vista (6.10) temos então,

$$\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle > 0, \ \ n = 1, \dots, \langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, \ \ u\rangle \to 0. \tag{6.11}$$

Suponhamos que $u_n^* \not\to u^*$. Passando a uma subseqüência, se necessário, temos para alguma seqüência (z_n) de elementos de U_X e algum $\alpha > 0$

$$\langle u_n^* - u^*, z_n\rangle \geq 2\alpha > 0, \quad n = 1, \dots .$$

Então

$$\frac{1}{\alpha}\langle u_n^* - u^*, z_n\rangle - 1 \geq 1, \ \ n = 1, \dots$$

e temos

$$\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle \leq (\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle)(\frac{1}{\alpha}\langle u_n^* - u^*, z_n\rangle - 1) =$$

$$= \langle u_n^*, u\rangle - \langle u^*, u\rangle + \frac{1}{\alpha}(\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle)\langle u_n^* - u^*, z_n\rangle =$$

$$\langle u_n^* - u^*, u + \frac{1}{\alpha}(\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle) z_n\rangle \leq$$

$$\leq |\langle u_n^*, u + \frac{1}{\alpha}(\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle) z_n\rangle| -$$

$$-\langle u^*, u + \frac{1}{\alpha}(\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle) z_n\rangle \leq$$

$$\leq \|u + \frac{1}{\alpha}(\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle) z_n\| - \|u\| -$$

$$-\langle u^*, \frac{1}{\alpha}(\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle)z_n\rangle.$$

Daí, pondo $y_n = \dfrac{1}{\alpha}(\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle)z_n$ vem, por (6.11), $y_n \neq 0$, $n = 1, \ldots, y_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e

$$0 < \alpha = \frac{\langle u^*, u\rangle - \langle u_n^*, u\rangle}{\|y_n\|} \leq \frac{\|u + y_n\| - \|u\| - \langle u^*, y_n\rangle}{\|y_n\|} = \frac{\omega(u, y_n)}{\|y_n\|},$$

pois a norma de X sendo, por hipótese, diferenciável à Fréchet no ponto x, é diferenciável à Fréchet no ponto u e sua derivada à Fréchet no ponto u coincide com a de Gateaux que é u^*. Mas isto é um absurdo visto que $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(u, y_n)/\|y_n\| = 0$. Logo, $u_n^* \to u^*$, q.e.d..

Reciprocamente, seja ii) válida. Fazendo $x^* = f(x)$ e $z^* = f(x + \lambda y)$ em i) e iii) da Proposição 6.1, decorre da continuidade de f que

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \left\langle \frac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle,$$

uniformemente em y no conjunto U_X. Logo, pelo Lema 6.11, a norma de X é diferenciável à Fréchet no ponto x.

6.13 - Definição: Diz-se que a norma de X é *uniformemente diferenciável à Fréchet* se ela for uniformemente diferenciável à Fréchet em U_X.

Do Lema 6.11 resulta que a norma de X é uniformemente diferenciável à Fréchet se, e só se, $[x, y]_\lambda \to \left\langle \dfrac{f(x)}{\|x\|}, y \right\rangle$ quando $\lambda \to 0$, uniformemente em x, y no conjunto U_X.

6.14 - Definição: Diz-se que um espaço de Banach X é *uniformemente liso* se dado $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $x \in U_X$ e $\|y\| < \delta$, então

$$\|x + y\| + \|x - y\| \leq 2 + \varepsilon\|y\|.$$

Do teorema a seguir resulta que se X é uniformemente liso então X é liso.

6.15 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

i) *X é uniformemente liso;*

ii) *X^* é uniformemente convexo;*

iii) *O operador dualidade, F, é unívoco e uniformemente contínuo, em todo conjunto limitado;*

iv) *A norma de X é uniformemente diferenciável à Fréchet.*

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii). Seja $\varepsilon > 0$ e $x^*, y^* \in U_{X^*}$ tais que $\|x^* - y^*\| > \varepsilon$. Supondo i) verdadeira, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x+y\| + \|x-y\| \leq 2 + \frac{\varepsilon}{2}\|y\|$$

se $x \in U_X$ e $\|y\| < \delta$; de $\|x^* - y^*\| > \varepsilon$ resulta que, para algum y tal que $\|y\| = \delta/2$, tem-se $\langle x^* - y^*, y\rangle \geq \varepsilon\,\delta/2$. Mas então

$$\|x^* + y^*\| = \sup\{\langle x^* + y^*, x\rangle; x \in U_X\} =$$

$$= \sup\{\langle x^*, x+y\rangle + \langle y^*, x-y\rangle - \langle x^* - y^*, y\rangle; x \in U_X\} \leq$$

$$\leq \sup\{\|x+y\| + \|x-y\| - \varepsilon\,\delta/2; x \in U_X\} \leq$$

$$\leq 2 + \frac{\varepsilon}{2}\|y\| - \frac{\varepsilon\delta}{2} = 2 - \frac{\varepsilon\delta}{4},$$

o que mostra que X^* é uniformemente convexo. ii) $\Rightarrow$ iii). De ii) resulta pela Proposição 5.11 e o Corolário 5.20 que F é unívoco. Para demonstrar que F é uniformemente demicontínuo devemos demonstrar que para cada $\varepsilon > 0$ e cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| < M$ e $\|x - y\| < \delta$ implicam $\|F(x) - F(y)\| < \varepsilon$. É bastante demonstrar que as condições

$$\|x_n\| \leq M,\ \|x_n - y_n\| \to 0 \quad \text{e} \quad \|F(x_n) - F(y_n)\| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad n = 1, \ldots$$

levam a uma contradição.

De $x_n \to 0$ vem $y_n \to 0$, donde $\|F(x_n)\| = \|x_n\| \to 0$ e $\|F(y_n)\| = \|y_n\| \to 0$. Logo, $\|F(x_n) - F(y_n)\| \to 0$ e, nesse caso, tem-se uma contradição. Podemos, então, supor que $\|x_n\| \geq \alpha > 0$, $n = 1, \ldots$. Resulta que para n suficientemente grande, $\|y_n\| \geq \alpha/2 > 0$. Vamos por $u_n = x_n/\|x_n\|$ e $v_n = y_n/\|y_n\|$. Então $u_n, v_n \in U_X$ e

$$\|u_n - v_n\| = \left\| \frac{x_n - y_n}{\|x_n\|} + \left(\frac{1}{\|x_n\|} - \frac{1}{\|y_n\|} \right) y_n \right\| \leq 2 \frac{\|x_n - y_n\|}{x_n} \to 0.$$

Como $F(u_n), F(v_n) \in U_{X^*}$ tem-se

$$\langle u_n, F(u_n) + F(v_n) \rangle = \langle u_n, F(u_n) \rangle + \langle v_n, F(v_n) \rangle + \langle u_n - v_n, F(v_n) \rangle \geq$$

$$\geq 1 + 1 - \|u_n - v_n\| \to 2$$

e, portanto, como $\langle u_n, F(u_n) + F(v_n) \rangle \leq \|F(u_n) + F(v_n)\|$, tem-se

$$\liminf_{n \to \infty} \|F(u_n) + F(v_n)\| \geq 2.$$

Da convexidade uniforme de X^* segue-se agora que $\|F(u_n) - F(v_n)\| \to 0$ e como de

$$F(x_n) - F(y_n) = \|x_n\|(F(u_n) - F(v_n)) + (\|x_n\| - \|y_n\|)F(v_n) \tag{6.12}$$

e $\|x_n\| \leq M$ vem $\|F(x_n) - F(y_n)\| \to 0$, tem-se uma contradição. A igualdade (6.12) é justificada por iii) da Proposição 2.1. iii) $\Rightarrow$ iv). Suponha-se iii) verdadeira. Então, exatamente como na demonstração do Teorema 6.10, F é uniformemente contínua em $C = B(0, 1+\rho) \backslash B(0, 1-\rho)$, $0 < \rho < 1$. Logo, $F(x + \lambda y)$ converge a $F(x)$ uniformemente em U_X, relativamente a x, y e como $1/\|x + \lambda y\|$ converge a $1/\|x\| = 1$ uniformemente em U_X relativamente a x, y, segue-se que $F(x+\lambda y)/\|x+\lambda y\|$ converge a $F(x)$ uniformemente em U_X, em relação a x, y. Por (6.6) segue-se, daí, que $\lim_{\lambda \to 0} [x, y]_\lambda = \langle F(x), y \rangle$, uniformemente em U_X relativamente a x, y. Logo a norma de X é uniformemente diferenciável à Fréchet, pelo Lema 6.11. iv) $\Rightarrow$ i). Supondo-se a norma de X uniformemente diferenciável à Fréchet temos, pelo Lema 6.11,

$$\|x + \lambda y\| - \|x\| = \langle F(x), \lambda y \rangle + \omega(x, \lambda y),$$

onde $\lim\limits_{\lambda \to 0} \omega(x, \lambda y)/\lambda = 0$ uniformemente em U_X relativamente a x, y. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que de $0 < \lambda < \delta$ vem

$$\frac{\omega(x, \lambda y)}{\lambda} + \frac{\omega(x, -\lambda y)}{\lambda} < \varepsilon,$$

i.e.,

$$\|x + \lambda y\| + \|x - \lambda y\| \leq 2 + \epsilon\|\lambda y\|,$$

q.e.d..

7. Teorema do ponto sela (Teorema Minimax)

7.1 - Definição: Sejam A e B conjuntos quaisquer. Diz-se que o ponto (x_0, y_0) de $A \times B$ é *ponto sela* da aplicação $f: A \times B \to \mathbb{R}$ se

$$f(x_0, y) \leq f(x, y_0), \qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B. \tag{7.1}$$

Nota: A desigualdade (7.1) sendo válida para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ é, em particular, válida para $x = x_0$, donde $f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0)$, e para $y = y_0$, donde $f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0)$. Logo (x_0, y_0) é ponto sela de f se e só se

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0), \qquad \forall\, x \in A,\ \forall y \in B, \tag{7.2}$$

condição que é freqüentemente tomada para definição de ponto sela.

7.2 - Lema: *Para cada aplicação $f: A \times B \to \mathbb{R}$ tem-se*

$$\sup_{y \in B} \inf_{x \in A} f(x, y) \leq \inf_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y).$$

Demonstração: Tem-se, com efeito,

$$\inf_{x \in A} f(x, y) \leq f(x, y), \qquad \forall x \in A, \forall y \in B$$

donde

$$\sup_{y\in B}\ \inf_{x\in A} f(x,y) \le \sup_{y\in B} f(x,y) \qquad \forall\, x\in A$$

e daí,

$$\sup_{y\in B}\ \inf_{x\in A} f(x,y) \le \inf_{x\in A}\ \sup_{y\in B} f(x,y).$$

7.3 - Proposição: *A aplicação $f\colon A\times B\to\mathbb{R}$ admite um ponto sela se, e só se,*

$$\min_{x\in A}\ \sup_{y\in B} f(x,y) = \max_{y\in B}\ \inf_{x\in A} f(x,y), \tag{7.3}$$

onde substituiu-se inf *por* min *e* sup *por* max *para indicar que o* inf *e o* sup, *respectivamente, são atingidos.*

Demonstração: Seja (x_0,y_0) ponto sela de f. Teremos por (7.2)

$$\sup_{y\in B} f(x_0,y) = f(x_0,y_0) = \inf_{x\in A} f(x,y_0) \tag{7.4}$$

e como

$$\inf_{x\in A}\ \sup_{y\in B} f(x,y) \le \sup_{y\in B} f(x_0,y) \tag{7.5}$$

e

$$\inf_{x\in A} f(x,y_0) \le \sup_{y\in B}\ \inf_{x\in A} f(x,y) \tag{7.6}$$

resulta que

$$\inf_{x\in A}\ \sup_{y\in B} f(x,y) \le \sup_{y\in B}\ \inf_{x\in A} f(x,y).$$

Daí e do Lema 7.2 tem-se

$$\inf_{x\in A}\ \sup_{y\in B} f(x,y) = \sup_{y\in B}\ \inf_{x\in A} f(x,y)$$

donde, tendo em vista (7.4), é válida a igualdade em (7.5) e (7.6). Portanto,

$$\min_{x\in A}\sup_{y\in B} f(x,y) = \sup_{y\in B} f(x_0,y)$$

$$\inf_{x\in A} f(x,y_0) = \max_{y\in B}\inf_{x\in A} f(x,y).$$

Daí e de (7.4) vem a igualdade (7.3).

Reciprocamente, vamos supor que (7.3) seja válida e designemos por x_0 e y_0 pontos onde o ínfimo e o supremo, respectivamente, são atingidos. Então,

$$\inf_{x\in A} f(x,y_0) = \sup_{y\in B} f(x_0,y)$$

e, daí,

$$f(x,y_0) \geq f(x_0,y), \qquad \forall\ x\in A,\ \forall\ y\in B$$

que é (7.1).

7.4 - Teorema: *Sejam X e Y espaços de Banach reflexivos, A e B subconjuntos convexos, limitados e fechados de X e Y, respectivamente. Vamos supor que a função $f\colon A\times B\to\mathbb{R}$ satisfaz as condições:* i) *Para cada $y\in B$, $f(x,y)$ é uma função convexa e s.c.i.;* ii) *Para cada $x\in A$, $f(x,y)$ é uma função côncava e s.c.s. .*
Então f possui um ponto sela $(x_0,y_0)\in A\times B$ e

$$\min_{x\in A}\max_{y\in B} f(x,y) = \max_{y\in B}\min_{x\in A} f(x,y) = f(x_0,y_0) \tag{7.7}$$

Demonstração: Vamos supor, inicialmente, que $\forall\ y\in B$, f é estritamente convexa, i.e.,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, y\right) = f(x_1,y) = f(x_2,y), \quad x_1,x_2\in A, \quad \text{implica} \quad x_1 = x_2. \tag{7.8}$$

Das hipóteses resulta que A e B são fracamente compactos. Pelo Teorema 3.20, $\forall\ y \in B$, $f(x, y)$ é fracamente s.c.i. e $\forall x \in A$, $f(x, y)$ é fracamente s.c.s.. Logo, pela Proposição 3.15, $\forall y \in B$, $f(x, y)$ atinge seu mínimo em um ponto de A o qual, por argumento análogo ao usado em ii) do Teorema 5.14, é único. Representemos esse ponto por $\varphi(y)$ e o mínimo atingido em $\varphi(y)$ por $m(y)$. Desse modo,

$$m(y) = \min_{x \in A} f(x, y) = f(\varphi(y), y) \tag{7.9}$$

A função m é côncava pois $\forall y_1, y_2 \in B$ e $\forall t \in [0, 1]$ tem-se

$$m(ty_1 + (1-t)y_2) = \min_{x \in A} f(x, ty_1 + (1-t)y_2) \geq$$

$$\geq \min_{x \in A} [tf(x, y_1) + (1-t)f(x, y_2)] \geq t \min_{x \in A} f(x, y_1) + (1-t) \min_{x \in A} f(x, y_2) =$$

$$= tm(y_1) + (1-t)m(y_2)$$

e é fracamente s.c.s. pois, por (7.9), é o invólucro inferior de funções fracamente s.c.s.. Portanto, m atinge seu máximo em um ponto $y_0 \in B$. Temos, então, por (7.9)

$$m(y_0) = \max_{y \in B} m(y) = \max_{y \in B} \min_{x \in A} f(x, y) \ = f(\varphi(y_0), y_0)) \leq f(x, y_0) \quad \forall\ x \in A. \tag{7.10}$$

Em particular, para $x = \varphi_t = \varphi(ty + (1-t)y_0)$, $0 < t < 1$, $y \in B$, temos

$$m(y_0) \geq m(ty + (1-t)y_0) = f(\varphi_t, ty + (1-t)y_0) \geq$$

$$tf(\varphi_t, y) + (1-t)f(\varphi_t, y_0) \geq tf(\varphi_t, y) + (1-t)m(y_0)$$

e daí,

$$m(y_0) \geq f(\varphi_t, y),\ \forall\ y \in B. \tag{7.11}$$

Como X é reflexivo e A é limitado, A é fracamente seqüencialmente compacto. Existe, pois, uma sucessão (t_n), $t_n \geq 0$, $t_n \to 0$ e um $x_0 \in A$ tais que $\varphi_{t_n} \rightharpoonup x_0$. Além disto,

$$t_n f(\varphi_{t_n}, y) + (1-t_n)f(\varphi_{t_n}, y_0) \leq f(\varphi_{t_n}, t_n y + (1-t_n)y_0) \leq f(x, t_n y + (1-t_n)y_0).$$

Logo, pela semicontinuidade de $f(x, y_0)$ e o fato que, por (7.9), $f(\varphi_t, y)$ é limitada inferiormente por $m(y)$, temos, no limite quando $n \to \infty$,

$$f(x_0, y_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(\varphi_{t_n}, y_0) \leq \limsup_{n\to\infty} f(x, t_n y + (1 - t_n) y_0) \leq$$

$$\leq f(x, y_0)\,, \qquad \forall\, x \in A.$$

Segue-se que $x_0 = \varphi(y_0)$, donde x_0 não depende de (t_n) e de y. Podemos, pois, passar (7.11) ao limite e temos

$$m(y_0) \geq f(x_0, y), \quad \forall\, y \in B. \tag{7.12}$$

Por (7.10) e (7.12), (x_0, y_0) é ponto sela de f. Devido à semicontinuidade, o sup e o inf em (7.3) são atingidos, donde a primeira das igualdades (7.7). A segunda resulta de (7.10) e de $x_0 = \varphi(y_0)$.

Suponhamos agora que (7.8) não seja necessariamente satisfeita. O espaço X sendo, por hipótese, reflexivo, podemos, pelo Teorema 5.16, substituir sua norma por uma norma equivalente e estritamente convexa, $|\cdot|$. Ponhamos,

$$f_\varepsilon(x, y) = f(x, y) + \varepsilon |x|, \quad \varepsilon > 0.$$

Então, $\forall\, y \in B$, $f_\varepsilon(x, y)$ satisfaz (7.8), donde, pelo que já foi demonstrado, f_ε possui um ponto sela $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in A \times B$. Portanto,

$$f(x_\varepsilon, y) + \varepsilon |x_\varepsilon| \leq f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) + \varepsilon |x_\varepsilon| \leq f(x, y_\varepsilon) + \varepsilon |x|. \tag{7.13}$$

Pela compacidade fraca de A e B existem (ε_n), $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tais que $\varepsilon_n \to 0$, $x_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x_0$ e $y_{\varepsilon_n} \rightharpoonup y_0$. Logo, passando (7.13) ao limite temos

$$f(x_0, y) \leq \liminf_{n\to\infty} (f(x_{\varepsilon_n}, y) + \varepsilon_n |x_{\varepsilon_n}|) \leq \limsup_{n\to\infty} (f(x, y_{\varepsilon_n}) + \varepsilon_n |x|) \leq$$

$$\leq f(x, y_0) \quad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B.$$

Logo, (x_0, y_0) é ponto sela de f.

8. Integração das funções vetoriais

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço medida, X um espaço de Banach e $u\colon \Omega \to X$ uma aplicação de Ω em X.

8.1 - Definição: a) Diz-se que u é uma *função simples* se u toma apenas um número finito de valores. b) Diz-se que a função simples u é $\mathcal{A}$-*mensurável* se $u^{-1}(x) \in \mathcal{A}$ para cada $x \in X$. c) Diz-se que a função simples e $\mathcal{A}$-mensurável u é μ-*integrável* se $\mu(u^{-1}(x)) < \infty$ para cada $x \in X$, $x \neq 0$; nesse caso a soma finita

$$\int_\Omega u\, d\mu = \sum_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \mu(u^{-1}(x))x$$

é dita μ-*integral* de u.

8.2 - Definição: Diz-se que u é *fortemente* $\mathcal{A}$-*mensurável* se existir uma seqüência (u_n) de funções simples e μ-integráveis tal que $u_n \to u$ μ-q.s. em Ω, i.e., $\|u_n(t) - u(t)\| \to 0$ μ-q.s. em Ω.

8.3 - Proposição: *Temos:* i) *Toda função simples e μ-integrável é fortemente $\mathcal{A}$-mensurável.*

ii) *Se u é fortemente $\mathcal{A}$-mensurável, a função numérica $t \to \|u(t)\|$, que será representada por $\|u\|$, é $\mathcal{A}$-mensurável.*

iii) *A soma de funções fortemente $\mathcal{A}$-mensuráveis é fortemente $\mathcal{A}$-mensurável; os produtos de escalares e de funções numéricas $\mathcal{A}$-mensuráveis por funções fortemente $\mathcal{A}$-mensuráveis são fortemente $\mathcal{A}$-mensuráveis.*

Demonstração: i) é trivial. ii) Se (u_n) é uma seqüência de funções simples e μ-integráveis tal que $u_n \to u$ μ-q.s. em Ω, então $(\|u_n\|)$ é uma seqüência de funções numéricas simples e μ-integráveis e tal que $\|u_n\|$ converge a $\|u\|$ μ-q.s. visto que $|\|u_n\| - \|u\|| \leq \|u_n - u\| \to 0$ μ-q.s.. iii) Demonstra-se como no caso das funções numéricas.

8.4 - Definição: a) Diz-se que u é *fracamente $\mathcal{A}$-mensurável* se a função numérica $\langle u, x^* \rangle$ for $\mathcal{A}$-mensurável $\forall\ x^* \in X^*$. b) Diz-se que u é uma função a *valores separáveis* se $\mathrm{Im}(u)$ é um conjunto separável; diz-se que u é *μ-quase* a *valores separáveis* se existir um conjunto $N \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $\{u(t); t \in \Omega \backslash N\}$ é separável.

A demonstração do Teorema a seguir será omitida (cf. Yosida [1], Hille e Phillips [1]).

8.5 - Teorema (Pettis): *A função u é fortemente $\mathcal{A}$-mensurável se e só se u for fracamente $\mathcal{A}$-mensurável e μ-quase a valores separáveis.*

8.6 - Proposição: *Se u é o limite μ-q.s. de uma seqüência de funções fortemente $\mathcal{A}$-mensuráveis, então u é fortemente $\mathcal{A}$-mensurável.*

Demonstração: Se u é o limite μ-q.s. de uma seqüência (u_n) de funções fortemente $\mathcal{A}$-mensuráveis, então, pelo Teorema de Pettis, cada u_n é fracamente $\mathcal{A}$-mensurável e μ-quase a valores separáveis donde u tem idênticas propriedades e, desse modo é, ainda pelo Teorema de Pettis, fortemente $\mathcal{A}$-mensurável.

8.7 - Definição: Diz-se que u é μ-integrável (no sentido de Bochner) se existir uma seqüência (u_n) de funções simples e μ-integráveis que converge a u μ-q.s. em Ω e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|u_n - u\|\ d\mu = 0.$$

Diz-se que (u_n) é uma *seqüência aproximante* de u.

Observe-se que a Definição 8.7 tem sentido visto que, de acordo com a Proposição 8.3, $\|u_n - u\|$ é uma função numérica $\mathcal{A}$-mensurável.

Seja u μ-integrável e (u_n) uma seqüência aproximante de u. Então,

$$\left\| \int_\Omega u_n d\mu - \int_\Omega u_m d\mu \right\| \leq \int_\Omega \|u_n - u_m\| d\mu \leq$$

$$\int_\Omega \|u_n - u\| d\mu + \int_\Omega \|u - u_m\| d\mu \to 0$$

quando $m, n \to \infty$, o que mostra que a seqüência $\left(\int_\Omega u_n d\mu \right)$ é convergente. Além disto, se (v_n) é outra seqüência aproximante de u, então

$$\left\| \int_\Omega u_n d\mu - \int_\Omega v_n d\mu \right\| \leq \int_\Omega \|u_n - u\| d\mu + \int_\Omega \|v_n - u\| d\mu \to 0,$$

o que mostra que o limite de $\int_\Omega u_n \, d\mu$ não depende de (u_n). O limite

$$\int_\Omega u \, d\mu = \lim_{n \to w} \int_\Omega u_n \, d\mu$$

é dito *μ-integral* de u (no sentido de Bochner).

8.8 - Teorema (Bochner): *A função fortemente $\mathcal{A}$-mensurável u é μ-integrável se e só se a função numérica $\|u\|$ é μ-integrável.*

Demonstração: Seja u μ-integrável. Como u é fortemente $\mathcal{A}$-mensurável, $\|u\|$ é $\mathcal{A}$-mensurável, por ii) da Proposição 8.3. Além disto, se (u_n) é uma seqüência aproximante de u, então como $\|u\| \leq \|u - u_n\| + \|u_n\|$ tem-se

$$\int_\Omega \|u\| d\mu \leq \int_\Omega \|u - u_n\| d\mu + \int_\Omega \|u_n\| d\mu < \infty,$$

uma vez que $\|u_n\|$ é μ-integrável e $\int_\Omega \|u - u_n\| \to 0$.

Reciprocamente, seja $\|u\|$ μ-integrável e (u_n) uma seqüência de funções simples e μ-integráveis tal que $u_n \to u$ μ-q.s. em Ω. Ponhamos, para $\varepsilon > 0$,

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t) & \text{se} \quad \|u_n(t)\| \leq \|u(t)\|(1+\varepsilon) \\ \\ 0 & \text{se} \quad \|u_n(t)\| > \|u(t)\|(1+\varepsilon). \end{cases}$$

Então (v_n) é uma seqüência de funções simples e μ-integráveis que satisfaz as condições $\lim \|u - v_n\| = 0$ μ-q.s. e $\|v_n\| \leq \|u\|(1+\varepsilon)$, donde $\|u - v_n\| \leq \|u\| + \|v_n\| \leq 2\|u\|(1+\varepsilon)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int \|u - v_n\| d\mu = 0,$$

o que mostra que u é μ-integrável no sentido de Bochner.

Boa parte da teoria clássica da integral mantém-se na integral de Bochner. Vamos citar apenas alguns resultados que serão usados. As respectivas demonstrações não oferecem dificuldade.

8.9 - Teorema: a) *Se u e v são funções μ-integráveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha u + \beta v$ é μ-integrável e*

$$\int_\Omega (\alpha u + \beta v) d\mu = \alpha \int_\Omega u\, d\mu + \beta \int_\Omega v\, d\mu;$$

b) *Se u é μ-integrável, então*

$$\left\| \int_\Omega u\, d\mu \right\| \leq \int_\Omega \|u\| d\mu;$$

c) *Se u é μ-integrável e $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, \cdots$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $m \neq n$ e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então*

$$\int_A u\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} u\, d\mu,$$

onde a μ-integral de u sobre $E \in \mathcal{A}$ é definida por

$$\int_E u\, d\mu = \int_\Omega \chi_E u\, d\mu$$

($\chi_E(x) = 1$ se $x \in E, \chi_E(x) = 0$ se $x \notin E$).

d) *Se Y é um espaço de Banach, $T\colon X \to Y$ um operador linear limitado e $u\colon \Omega \to X$ uma função μ-integrável, então $Tu\colon \Omega \to Y$ é μ-integrável e*

$$T \int_\Omega u\, d\mu = \int_\Omega Tu\, d\mu.$$

Em particular

$$\langle x^*, \int_\Omega u\, d\mu \rangle = \int_\Omega \langle x^*, u \rangle d\mu, \quad \forall\, x^* \in X^*$$

e) (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)

Seja (u_n) uma seqüência de funções μ-integráveis tal que $u_n \to u$ μ-quase sempre em Ω e suponhamos que exista uma função $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrável e tal que $\|u_n(t)\| \leq f(t)$ μ-q.s. em $\Omega, n = 1, \dots$. Então u é μ-integrável e

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n\, d\mu = \int_\Omega u\, d\mu.$$

f) (Lema de Fatou). *Se (u_n) é uma seqüência de funções μ-integráveis tal que $u_n(t) \to u(t)$ fracamente μ-q.s. em Ω e*

$$\liminf_{n \to \infty} \int_\Omega \|u_n\|\, d\mu < \infty$$

então u é μ-integrável e

$$\int_\Omega \|u\| d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega \|u_n\| d\mu.$$

g) *Seja* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ *e* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *dois espaços medida* σ*-finitos,* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ *a* σ*-álgebra gerada em* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *pela família dos conjuntos* $A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ *e* $\mu_1 \times \mu_2$ *a medida produto em* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Teorema de Fubini: *Se* $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to X$ *é* $\mu_1 \times \mu_2$*-integrável, então para quase todo* $t \in \Omega_1$ *a função* $s \to u(t,s)$ *é* μ_2*-integrável e* $\int_{\Omega_2} u(t,s)d\mu_2$ *é* μ_1*-integrável; analogamente, para quase todo* $s \in \Omega_2$ *a função* $t \to u(t,s)$ *é* μ_1*-integrável e* $\int_{\Omega_1} u(t,s)d\mu_1$ *é* μ_2*-integrável e tem-se*

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} u(t,s)d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} u(t,s)d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} u(t,s)d(\mu_1 \times \mu_2).$$

h) *Designando por* $L^p(\Omega, X)$, $1 \leq p \leq \infty$ *a classe das funções* u *fortemente* $\mathcal{A}$*-mensuráveis e tais que a função numérica* $\|u\|\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *pertence a* $L^p(\Omega)$*, então* $\|u\|_p = \left(\int_\Omega \|u\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ *é uma semínorma em* $L^p(\Omega, X), 1 \leq p < \infty$*, e* $\|u\|_\infty = \operatorname*{supess}_{t\in\Omega}\|u(t)\|$ *uma seminorma em* $L^\infty(\Omega, X)$*. Identificando funções iguais q.s. em* Ω*, o respectivo espaço das classes de equivalência, representado ainda por* $L^p(\Omega, X)$*, é um espaço de Banach. Se* X *for reflexivo,* μ *uma* σ*-medida e* $1 < p < \infty$*, então o espaço dual de* $L^p(\Omega, X)$ *é* $L^{p'}(\Omega, X^*)$*, onde* $1/p + 1/p' = 1$*. Se* X *é um espaço de Hilbert, então* $L^2(\Omega, X)$ *é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por*

$$(u, v) = \int_\Omega (u(t), v(t))d\mu.$$

i) *Se* $u \in L^p(\Omega, X)$*,* $1 \leq p < \infty$*, então* $\lim_{h\to 0} \|u(t+h) - u(t)\|_p = 0$.

j) *Seja* $\mathcal{A}$ *a classe dos subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *mensuráveis à Lebesgue e* μ *a usual medida de Lebesgue em* $\mathbb{R}$.

1 - *Se* $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*, então, para quase todo* $t \in \mathbb{R}$*, a função* $s \to \varphi(t-s)u(s)$ *é integrável em* $\mathbb{R}$ *e pondo*

$$\varphi * u(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t-s)u(s)ds, \quad \textit{(convolução de } \varphi \textit{ por } u\textit{)}$$

tem-se $\varphi * u \in L^p(\mathbb{R}, X)$*,* $\|\varphi * u\|_{L^p(\mathbb{R},X)} \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}.\|u\|_{L^p(\mathbb{R},X)}$ *e* $\text{supp}(\varphi * u) \subset \overline{\text{supp}\ \varphi + \text{supp}\ u}$*.*

2 - *Se* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}), u \in L^p(\mathbb{R}, X)$ *e* $\psi \in L^{p'}(\mathbb{R})$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}} (\varphi * u)\psi = \int_{\mathbb{R}} u(\breve{\varphi} * \psi),$$

onde $\breve{\varphi}(t) = \varphi(-t)$*.*

3 - *Se* (ρ_n) *é uma sucessão regularizante (i.e.,* $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \rho_n \geq 0$ *em* $\mathbb{R}$*,* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$ *e* $\text{supp}\ \rho_n \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$*,* $n = 1, \ldots,$*) e* $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é integrável,* $\text{supp}\ \varphi \subset [a+\eta, b-\eta]$*,* $\eta < (b-a)/2$*, então, para* $n > 1/\eta, \rho_n * \varphi \in C_0^\infty(a, b)$*.*

4 - *Se* (ρ_n) *é uma sucessão regularizante e* $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$*,* $1 \leq p < \infty$*, então* $\rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$ *e* $\rho_n * u \to u$ *em* $L^p(\mathbb{R}, X)$*.*

Vamos nos limitar, daqui por diante, ao caso em que $\Omega = [0, T]$, $0 < T < \infty$, $\mathcal{A}$ é a classe dos subconjuntos de $[0, T]$ mensuráveis à Lebesgue e μ a usual medida de Lebesgue.

8.10 - Teorema: *Se* $u: [0, T] \to X$ *é integrável em* $[0, T]$*, então para quase todo* $t \in (0, T)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(\tau)\, d\tau = u(t).$$

Demonstração: A afirmação é verdadeira no caso das funções numéricas (Teorema de Lebesgue). Além disto temos

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(\tau)d\tau - u(t) \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (u(\tau) - u(t))d\tau \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|u(\tau) - u(t)\| d\tau.$$

Mas como $\|u(\tau) - u(t)\|$ é integrável temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|u(\tau) - u(t)\| d\tau = \|u(t) - u(t)\| = 0 \quad \text{q.s.}.$$

Logo,

$$\limsup_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(\tau) d\tau - u(t) \right\| = 0 \quad \text{q.s.},$$

donde o resultado a demonstrar.

8.11 - Corolário: *Se u é integrável em $[0, T]$, a função*

$$v(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

é diferenciável quase sempre em $(0, T)$ e

$$\frac{dv}{dt}(t) = u(t)$$

quase sempre em $(0, T)$.

8.12 - Definição: Seja $u: [0, T] \to X$ uma aplicação.

a) Diz-se *variação total* de u em $[a, b] \subset [0, T]$ o número

$$\sup_P \left\{ \sum_{i=1}^n \|u(a_i) - u(a_{i-1})\| \right\} = V(u, [a, b]),$$

onde P é a família das partições $a_o = a < a_1 < ... < a_n = b$ de $[a, b]$. Quando $V(u, [0, T])$ é finito, diz-se que u é uma *função de variação limitada.*

Por simplicidade, poremos $V(u, [0, t]) = V_u(t)$.

b) Diz-se que u é *absolutamente contínua* se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para cada família $\{(a_i, b_i)\}$, $i = 1, ..., n$, de subintervalos de $[0, T]$, disjuntos dois a dois, que verifica a condição $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, tem-se $\sum_{i=1}^{n} \|u(b_i) - u(a_i)\| < \varepsilon$.

Toda função absolutamente contínua é, obviamente, de variação limitada.

8.13 - Teorema: *Seja $u : [0, T] \to X$ uma função de variação limitada. Então,*

$$\int_0^{T-h} \|u(t+h) - u(t)\| dt \leq Ch,$$

onde C é uma constante.

Demonstração: A função $t \to V_u(t)$ sendo crescente, o conjunto de suas descontinuidades é, no máximo, numerável. O mesmo acontece, então, com u. Logo u é quase sempre a valores separáveis. Além disto, para todo $x^* \in X^*$ a função numérica $t \to \langle x^*, u(t) \rangle$ é de variação limitada e, portanto, mensurável. Segue-se pelo Teorema de Pettis (Teorema 8.5) que u é fortemente mensurável, donde integrável no sentido de Bochner (Teorema 8.8). Então, como

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq V_u(t+h) - V_u(t) \quad \forall\ t \in [0, T-h],$$

temos

$$\int_0^{T-h} \|u(t+h) - u(t)\| dt \leq \int_0^{T-h} (V_u(t+h) - V_u(t)) dt \leq$$

$$\leq \int_{T-h}^{T} V_u(t) dt \leq h V_u(T) = Ch.$$

Quando $X = \mathbb{R}$ toda função de variação limitada é diferenciável q.s.. No caso geral isto não é verdade. O exemplo a seguir mostra que não é verdade mesmo que a função seja absolutamente contínua.

Exemplo: Seja $u\colon [0,T] \to L^1(0,T)$ definida por $u(t) = \chi_{[0,t]}$, onde $\chi_{[0,t]}$ é a função característica do intervalo $[0,t]$. Portanto

$$u(t)(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq \tau \leq t \\ \\ 0 & \text{se} \quad t < \tau \leq T. \end{cases}$$

Se $\{(a_i, b_i)\}$, $i = 1, ..., n$ é uma família de subintervalos de $[0,T]$, disjuntos dois a dois, e tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \|u(b_i) - u(a_i)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|\chi_{[0,b_i]} - \chi_{[0,a_i]}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|\chi_{(a_i,b_i]}\|_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^T |\chi_{(a_i,b_i]}(\tau)| d\tau = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} d\tau = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta.$$

Portanto $u(t)$ é absolutamente contínua. Vamos mostrar que $u(t)$ não é diferenciável em t_0, $\forall\ t_0 \in (0,T)$.

Com efeito, se $u(t)$ fosse diferenciável em um $t_0 \in (0,T)$, então a função real de variável real $\langle u(t), f\rangle$ seria diferenciável no ponto t_0 para todo $f \in L^\infty(0,T)$. (Recorde-se que $L^\infty(0,T)$ é o dual de $L^1(0,T)$). Mas, se f é a função

$$f(\tau) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad 0 \leq \tau \leq t_0 \\ \\ 1 & \text{se} \quad t_0 < \tau \leq T \end{cases}$$

então

$$\langle u(t), f\rangle = \int_0^T u(t)(\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^T \chi_{[0,t]}(\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \begin{cases} -t & \text{se} \quad t \leq t_0 \\ \\ t - 2t_0 & \text{se} \quad t > t_0, \end{cases}$$

que não é diferenciável no ponto t_0, o que é uma contradição.

No entanto, é válido o teorema a seguir, devido a Komura [1], Apêndice.

8.14 - Teorema: *Se X é reflexivo, cada função absolutamente contínua, $u: [0, T] \to X$, é diferenciável q.s. em $(0, T)$ e*

$$u(t) - u(0) = \int_0^t \frac{du}{d\tau}(\tau)\, d\tau, \qquad \forall\ t \in [0, T]$$

Demonstração: Seja $u: [0, T] \to X$ absolutamente contínua. Então o subespaço de X gerado por $\mathrm{Im}(u)$ é separável, uma vez que u sendo contínua, $\mathrm{Im}(u)$ é um conjunto compacto. Podemos, então, sem quebra da generalidade, supor que X é separável. A variação total $V_u(t)$ de u em $[0, T]$ é derivável q.s. em $(0, T)$ visto que V_u é uma função numérica monótona crescente em $[0, T]$. Logo, de

$$\|u(t + h) - u(t)\| \leq V_u(t + h) - V_u(t) \tag{8.1}$$

resulta que

$$\limsup_{h \to 0} \left\| \frac{u(t + h) - u(t)}{h} \right\| \leq \frac{dV_u}{dt}(t) \quad \text{q.s. em} \quad [0, T]$$

e, portanto, o conjunto

$$\left\{ t;\ \limsup_{h \to 0} \left\| \frac{u(t + h) - u(t)}{h} \right\| = +\infty \right\} = N_0$$

tem medida nula.

Como X é, por hipótese, reflexivo e separável, seu dual, X^*, é separável, donde existe uma seqüência $\{x_k^*\}$ de elementos de X^* densa em X^*. Para cada $k = 1, ...,$ a função numérica $\langle u, x_k^* \rangle$ é absolutamente contínua em $[0, T]$, donde diferenciável q.s. em $[0, T]$, i.e., para cada k existe

$$\lim_{h \to 0} \left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, x_k^* \right\rangle = \lim_{h \to 0} \frac{\langle u(t+h), x_k^* \rangle - \langle u(t), x_k^* \rangle}{h} =$$

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), x_k^* \rangle, \tag{8.2}$$

exceto num subconjunto N_k de $[0, T]$ de medida nula e

$$\langle u(t) - u(0), x_k^* \rangle = \int_0^t \frac{d}{dt} \langle u(\tau), x_k^* \rangle \, d\tau \qquad \forall \ t \in [0, T]. \tag{8.3}$$

Mas no conjunto $[0, T] \backslash N_0$ o conjunto $\{(u(t+h) - u(t))/h\}$ é limitado; portanto, fracamente precompacto visto que X é reflexivo, por hipótese. Daí, de (8.2) e do fato que $\{x_k^*\}$ é denso em X^* segue-se que, pondo $N = \bigcup_{k=o}^{\infty} N_k$, existe $u'(t) \in X$ tal que

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \rightharpoonup u'(t), \tag{8.4}$$

$\forall \ t \in [0, T] \backslash N$. E, como a norma é semicontínua na topologia fraca, tem-se, então

$$\|u'(t)\| \leq \liminf_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\|$$

para todo $t \in [0, T] \backslash N$. Além disto, pelo Teorema 8.13

$$\int_0^{T-h} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\| dt \leq C.$$

Podemos, então, aplicar o Lema de Fatou uma vez que, u' sendo fracamente mensurável e X separável, u' é fortemente mensurável, pelo Teorema de Pettis. Logo, $u' \in L^1(0, T-h; X)$, $0 < h < T$. Ponhamos

$$\tilde{u}(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau)\, d\tau.$$

Tendo em vista (8.2) - (8.4) e d) do Teorema 8.9 temos

$$\langle u(t) - u(0), x_k^* \rangle = \int_0^t \frac{d}{d\tau} \langle u(\tau), x_k^* \rangle\, d\tau = \int_0^t \langle u'(\tau), k_k^* \rangle\, d\tau =$$

$$= \left\langle \int_0^t u'(\tau) d\tau, x_k^* \right\rangle = \langle \tilde{u}(t) - u(0), x_k^* \rangle, \quad \text{q.s. em } [0,T], \;\; k = 1, \dots .$$

Logo, $u(t) = \tilde{u}(t)$ q.s. em $[0,T]$ i.e.,

$$u(t) - u(0) = \int_0^t u'(\tau)\, d\tau,$$

donde $\dfrac{du}{dt}(t) = u'(t)$ q.s. em $[0,t]$, q.e.d..

Corolário 8.15: *Se X é reflexivo e $f\colon X \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua, então, $\forall\, h > 0$, $h \leq T$, tem-se*

$$\lim_{h \to 0} \int_0^{T-h} e^{-\omega t} \left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right\| dt \leq \int_0^T e^{-\omega t} \left\| \frac{df}{dt}(t) \right\| dt.$$

Demonstração: De acordo com o Teorema 8.14 temos

$$f(t+h) - f(t) = \int_t^{t+h} f'(\tau)\, d\tau, \quad h > 0, \; h \leq T,$$

donde, pondo $\tau = t + sh$,

$$f(t+h) - f(t) = h \int_0^1 f'(t+sh)\, ds$$

e, portanto,

$$||f(t+h) - f(t)|| \leq h \int_0^1 ||f'(t+sh)||\, ds$$

ou, ainda,

$$e^{-\omega t}||f(t+h) - f(t)|| \leq h \int_0^1 e^{-\omega t}||f'(t+sh)||\, ds.$$

Logo,

$$\int_0^{T-h} e^{-\omega t}||f(t+h) - f(t)||\, dt \leq h \int_0^{T-h} dt \int_0^1 e^{-\omega t}||f'(t+sh)||\, ds =$$

$$= h \int_0^1 ds \int_0^{T-h} e^{-\omega t}||f'(t+sh)||\, dt.$$

Mas como $0 \leq s \leq 1$ tem-se

$$\int_0^{T-h} e^{\omega t}||f'(t+sh)||\, dt = \int_{sh}^{T-(1-s)h} e^{-\omega(\tau - sh)}||f'(\tau)||\, d\tau \leq$$

$$\leq e^{\omega sh} \int_0^T e^{-\omega\tau}||f'(\tau)||\, d\tau.$$

Logo,

$$\int_0^{T-h} e^{-\omega t}||f(t+h) - f(t)||\, dt \leq h \int_0^1 e^{\omega sh}\, ds \int_0^T e^{-\omega\tau}||f'(\tau)||\, d\tau =$$

$$= \frac{e^{\omega h} - 1}{\omega} \int_0^T e^{-\omega\tau}||f'(\tau)||\, d\tau.$$

Portanto,

$$\int_0^{T-h} e^{-\omega t} \left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right\| dt \leq \frac{e^{\omega t} - 1}{\omega h} \int_0^T e^{-\omega t}||f'(\tau)||\, d\tau$$

donde

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{T-h} e^{-\omega t}\left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\| dt \le \int_0^T e^{-\omega t}||f'(\tau)||\,d\tau =$$

$$= \int_0^T e^{-\omega t}\left\|\frac{df}{dt}(t)\right\| dt.$$

8.16 - Lema (Du Bois Reymond): Se $u \in L^1(0,T;X)$ e

$$\int_0^T u\varphi = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,T), \tag{8.6}$$

então $u = 0$ q.s. em $(0,T)$.

Demonstração: a) Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que $X = \mathbb{R}$ e u é contínua em $(0,T)$. Se num ponto $t_0 \in (0,T)$ tivéssemos $u(t_0) \neq 0$, então $u(t)$ teria o mesmo sinal de $u(t_0)$ em uma vizinhança V de x_0 donde, $\int_0^T u\varphi \neq 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ tal que $\varphi \neq 0$, $\varphi \geq 0$ e supp $\varphi \subset V$, o que está em desacordo com a hipótese (8.6). Logo $u(t) = 0\ \forall\, t \in (0,T)$.

b) Seja agora X um espaço de Banach qualquer, (ρ_n) uma sucessão regularizante e $\eta > 0$ tal que $\eta < T/2$. Se $\varphi \in C_0^\infty(\eta, T-\eta)$, então por j) do Teorema 8.9, $\rho_n * \varphi \in C_0^\infty(0,T)$ para $n > 1/\eta$. Logo, designando por $\tilde{u}$ a função igual a u em $(0,T)$ e zero fora de $(0,T)$ temos para $n > 1/\eta$ e $\varphi \in C_0^\infty(\eta, T-\eta)$

$$\int_\eta^{T-\eta} (\rho_n * \tilde{u})\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_n * \tilde{u})\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\rho_n * \varphi) = \int_0^T u(\rho_n * \varphi) = 0.$$

Daí vem para $n > 1/\eta$

$$\int_\eta^{T-\eta} \langle x^*, \rho_n * \tilde{u}\rangle\varphi = \left\langle x^*, \int_\eta^{T-\eta} (\rho_n * \tilde{u})\varphi \right\rangle = 0\ \forall\, x^* \in X^* \text{ e } \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\eta, T-\eta).$$

Mas por j) do Teorema 8.9 $\rho_n * \tilde{u}$ é contínua, donde $\langle x^*, \rho_n * \tilde{u}\rangle$ é contínua. Logo, pelo que foi demonstrado em a), para $n > 1/\eta$, $\langle x^*, \rho_n * \tilde{u}\rangle = 0$ em $(\eta, T-\eta)$ $\forall\, x^* \in X^*$ e, portanto, $\rho_n * \tilde{u} = 0$ em $(\eta, T-\eta)$. Segue-se daí que $\tilde{u} = 0$ q.s. em $(\eta, T-\eta)$, visto que, ainda por j) do Teorema 8.9, $\tilde{u} = \lim \rho_n * \tilde{u}$ em $L^1(\mathbb{R}, X)$. Logo $u = 0$ q.s. em $(\eta, T-\eta)$ donde $u = 0$ q.s. em $(0, T)$, pela arbitrariedade de η.

8.17 - Lema: *Seja $u \in L^1(0, T; X)$ tal que*

$$\int_0^T u \frac{d\varphi}{dt} = 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0, T). \tag{8.7}$$

Então existe $c \in X$ tal que $u = c$ q.s. em $(0, T)$.

Demonstração: Seja $\varphi_0 \in C_0^\infty(0, T)$ tal que $\displaystyle\int_0^T \varphi_0 = 1$ e $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$. Ponhamos

$$\lambda = \int_0^T \varphi \;\text{ e }\; \psi(t) = \int_0^t (\varphi - \lambda\varphi_0).$$

Teremos $\psi \in C_0^\infty(0, T)$ e $\psi' = \varphi - \lambda\varphi_0$. Logo, por (8.7)

$$0 = \int_0^T u\frac{d\psi}{dt} = \int_0^T u(\varphi - \lambda\varphi_0) = \int_0^T u\varphi - \int_0^T u\varphi_0 \int_0^T \varphi =$$

$$= \int_0^T u\varphi - \int_0^T \varphi \int_0^T u\varphi_0 = \int_0^T \left(u - \int_0^T u\varphi_0 \right) \varphi.$$

Pelo Lema de Du Bois Reymond temos, então, $u = \displaystyle\int_0^T u\varphi_0 = c \in X$ q.s. em $(0.T)$.

8.18 - Lema: *Se $u \in L^1(0, T; X)$ e*

$$v(t) = \int_a^t u(\tau)d\tau, \quad a \in [0, T],$$

então

$$\int_0^T v\frac{d\varphi}{dt} = -\int_0^T u\varphi, \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Demonstração: Tem-se

$$\int_0^T v(t)\frac{d\varphi}{dt}(t)\,dt = \int_0^T \left[\int_a^t u(\tau)\,d\tau\right]\frac{d\varphi}{dt}(t)\,dt = \int_0^T \left[\int_a^t u(\tau)\,\frac{d\varphi}{dt}(t)\,d\tau\right]dt =$$

$$-\int_0^a \left[\int_t^a u(\tau)\,\frac{d\varphi}{dt}(t)\,d\tau\right]dt + \int_a^T \left[\int_a^t u(\tau)\,\frac{d\varphi}{dt}(t)\,d\tau\right]dt.$$

Mas, pelo Teorema de Fubini temos, observando que $\varphi(0) = \varphi(T) = 0\ \forall\ \varphi \in C_0^\infty(0,T)$,

$$\int_0^a dt \int_t^a u(\tau)\,\frac{d\varphi}{dt}(t)\,d\tau = \int_0^a d\tau \int_0^\tau u(\tau)\,\frac{d\varphi}{dt}(t)\,dt =$$

$$\int_0^a [\varphi(\tau) - \varphi(0)]\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^a u(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$$

e

$$\int_a^T dt \int_a^t u(\tau)\,\frac{d\varphi}{dt}(t)\,d\tau = \int_a^T d\tau \int_\tau^T u(\tau)\,\frac{d\varphi}{dt}\,dt =$$

$$\int_a^T [\varphi(T) - \varphi(\tau)]\,u(\tau)\,d\tau = -\int_a^T u(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Logo,

$$\int_0^T v\,\frac{d\varphi}{dt} = -\int_0^T u\varphi \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

8.19 - Definição: O espaço de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ é o conjunto das funções $u \in L^p(0,T;X)$ para as quais existe uma função $Du \in L^p(0,T;X)$ que satisfaz à condição

$$\int_0^T u\,\frac{d\varphi}{dt} = -\int_0^T (Du)\,\varphi, \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

8.20 - Teorema: *São equivalentes:*

i) $u \in W^{1,p}(0,T;X)$

ii) $u(t) = \tilde{u}(t)$ *q.s. em* $(0,T)$ *onde* $\forall\, t \in [0,T]$,

$$\tilde{u}(t) = c + \int_0^t v(\tau)d\tau, \quad c \in X,\ v \in L^p(0,T;X).$$

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii). Seja, com efeito, $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ e

$$\bar{u}(t) = \int_a^t (Du)(s)\, ds.$$

Pelo Lema 8.18

$$\int_0^T \bar{u}\, \frac{d\varphi}{dt} = -\int_0^T (Du)\, \varphi \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Mas, pela definição de Du,

$$\int_0^T u\, \frac{d\varphi}{dt} = -\int_0^T (Du)\, \varphi.$$

Logo,

$$\int_0^T (u - \bar{u})\, \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,T),$$

donde, pelo Lema 8.17, $u - \bar{u} = c \in X$ q.s. em $(0,T)$. A função $\tilde{u} = \bar{u} + c$ satisfaz ii) com $v = Du$.

ii) $\Rightarrow$ i) Com efeito, pondo

$$\bar{u}(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau$$

temos, pelo Lema 8.18,

$$\int_0^T u\,\frac{d\varphi}{dt} = \int_0^T \tilde{u}\,\frac{d\varphi}{dt} = \int_0^T c\,\frac{d\varphi}{dt} + \int_0^T \bar{u}\,\frac{d\varphi}{dt} = -\int_0^T v\varphi.$$

Logo u satisfaz a Definição 8.19 com $Du = v$.

8.21 - Lema: *Seja a uma constante não negativa, $m \in L^1(s,t)$ tal que $m \geq 0$ q.s. em (s,T) e $\varphi\colon [s,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que*

$$\frac{1}{2}\,\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}\,a^2 + \int_s^t m(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \qquad \forall\ t \in [s,T].$$

Então,

$$|\varphi(t)| \leq a + \int_s^t m(\tau)\,d\tau \qquad \forall\ t \in [s,T].$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ e

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\,(a+\varepsilon)^2 + \int_s^t m(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [s,T].$$

Então,

$$\frac{1}{2}\,\varphi^2(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \leq \psi_\varepsilon(t) \qquad \forall\ t \in [s,T].$$

Temos

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} = \frac{1}{2\sqrt{\psi_\varepsilon(t)}}\,\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}\,(t) = \frac{1}{2\sqrt{\psi_\varepsilon(t)}}\,m(t)\varphi(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,m(t)$$

q.s. em $[s,T]$. E como $\sqrt{\psi_\varepsilon}$ é absolutamente contínua temos, integrando de s a t,

$$\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \leq \sqrt{\psi_\varepsilon(s)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_s^t m(\tau)\,d\tau,$$

donde

$$|\varphi(t)| \leq \sqrt{2}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \leq \sqrt{2}\sqrt{\psi_\varepsilon(s)} + \int_s^t m(\tau)\,d\tau = a + \varepsilon + \int_s^t m(\tau)\,d\tau$$

ou, ainda,

$$|\varphi(t)| \leq a + \int_s^t m(\tau)\,d\tau,$$

pela arbitrariedade de ε.

8.22 - Lema de Gronwall: *Seja a uma constante não negativa, $m \in L^1(s,T)$ tal que $m \geq 0$ q.s. em (s,T) e $\varphi\colon [s,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que*

$$\varphi(t) \leq a + \int_s^t m(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \qquad \forall\ t \in [s,T].$$

Então

$$\varphi(t) \leq a\,e^{\int_s^t m(\tau)d\tau} \qquad \forall\ t \in [s,T].$$

Demonstração: Pondo

$$\psi(t) = a + \int_s^t m(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \qquad \forall\ t \in [s,T]$$

temos

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = m(t)\varphi(t) \leq m(t)\psi(t) \quad \text{q.s. em} \quad [s,T].$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{-\int_s^t m(\tau)d\tau}\right) \leq 0 \quad \text{q.s. em} \quad [s,T]$$

e, como a função $t \to \psi(t)e^{-\int_s^t m(\tau)d\tau}$ é absolutamente contínua, essa função é decrescente. Portanto,

$$\psi(t)\,e^{-\int_s^t m(\tau)d\tau)} \leq \psi(s) = a \qquad \forall\ t \in [s,T],$$

donde

$$\psi(t) \leq a\, e^{\int_s^t m(\tau) d\tau}, \qquad \forall\, t \in [s, T],$$

q.e.d. .

9. Equações Diferenciais

9.1 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach, $C \subset X$ um cone convexo e fechado de vértice* 0 *e J uma aplicação lipschitziana de C em C, i.e., tal que*

$$\|Jx - Jy\| \leq \alpha \|x - y\|, \qquad \forall\, x, y \in C,$$

onde α é uma constante. Se $f \in L^1(0, T; X)$, $T > 0$, é tal que $f(t) \in C$ para quase todo $t \in (0, T)$, então para cada $x_0 \in C$ existe uma única função $u : [0, T] \to C$ tal que:

i) *u é absolutamente contínua em $[0, T]$, derivável quase sempre em $(0, T)$ e $u(t) \in C\ \forall t \in [0, T]$;* (9.1)

ii) $\dfrac{du}{dt}(t) + (I - J)u(t) = f(t)$ *q.s. em* $(0, T)$*;* (9.2)

iii) $u(0) = x_0$. (9.3)

Demonstração: Recorde-se que C satisfaz as condições $C + C \subset C$ e $\lambda C \subset C\ \forall\ \lambda > 0$. Pondo $j(t)x = Jx + f(t)$, $x \in C$, $t \in [0, T]$, então, para quase todo $t \in (0, T)$, $j(t)$ é uma aplicação de C em C tal que $\|j(t)x - j(t)y\| \leq \alpha \|x - y\|$, $\forall\ x, y \in C$, $j(t)x$ é integrável em $[0, T]\ \forall\ x \in C$ e (9.2) toma a forma

$$\frac{du}{dt}\,(t) + (I - j(t))\, u(t) = 0 \quad \text{q.s. em (0,T).}$$

Logo, pondo $v(t) = e^t u(t)$,

$$\frac{dv}{dt}\,(t) = e^t j(t)(e^{-t} v(t)),$$

que, juntamente com (9.3), dá

$$v(t) = x_o + \int_0^t e^s j(s)(e^{-s} v(s))\, ds.$$

Portanto, as condições (9.1), (9.2) e (9.3) são equivalentes a

$$u(t) = e^{-t} x_o + \int_0^t e^{s-t} j(s)(u(s))\, ds. \tag{9.4}$$

Vamos mostrar que (9.4) tem uma única solução.

Indiquemos por $\widetilde{C}$ o subconjunto convexo e fechado

$$\{u; u \in C(0,T;X) \ \text{ e } \ u(t) \in C \quad \forall\, t \in [0,T]\},$$

do espaço $C(0,T;X)$, munido da norma do supremo $\left(\|u\| = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\| \right)$ e seja $\phi\colon C(0,T;X) \to C(0,T;X)$ definida por

$$\phi u(t) = e^{-t} x_0 + \int_0^t e^{s-t}\, j(s)(u(s))\, ds, \quad t \in [0,T].$$

Pondo $\mu(s) = \displaystyle\int_0^s e^{\rho - t} d\rho$ temos, para $u \in \widetilde{C}$,

$$\frac{1}{1-e^{-t}} \int_0^t e^{s-t}\, j(s)(u(s))\, ds = \frac{1}{\mu(t)} \int_0^t j(s)(u(s))\, d\mu(s)$$

e, como a média que figura no segundo membro é o limite de uma sucessão de combinações convexas de elementos de C,

$$\frac{1}{1-e^{-t}} \int_0^t e^{s-t}\, j(s)(u(s))\, ds \in C \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

Daí e de $x_0 \in C$ vem

$$\phi u(t) = e^{-t} x_0 + \int_0^t e^{s-t}\, j(s)(u(s))\, ds \in C \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Portanto, $\phi\colon \widetilde{C} \to \widetilde{C}$. Vamos mostrar que ϕ^n, para n suficientemente grande, é uma contração estrita. Temos

$$\|\phi u(t) - \phi v(t)\| \leq \int_0^t e^{s-t} \|j(s)(u(s)) - j(s)(v(s))\| ds \leq$$

$$\leq \alpha \int_0^t e^{s-t} \|u(s) - v(s)\| ds \leq \alpha t \|u-v\|_{C([0,T];X)}.$$

Daí vem

$$\left\|\phi^2 u(t) - \phi^2 v(t)\right\| \leq \alpha \int_0^t e^{s-t} \,\|\phi u(s) - \phi v(s)\|\, ds \leq \frac{\alpha^2 t^2}{2!} \,\|u-v\|_{\,C([0,T];X)},$$

e, por indução,

$$\|\phi^n u(t) - \phi^n v(t)\| \leq \frac{\alpha^n t^n}{n!} \,\|u-v\|_{\,C([0,T];X)} \leq \frac{\alpha^n T^n}{n!} \,\|u-v\|_{\,C([0,T];X)}.$$

Resulta daí que, para n suficientemente grande, ϕ^n é, de fato, uma contração estrita. Logo, ϕ tem um e um só ponto fixo em $\widetilde{C}$, i.e., (9.4) tem uma única solução.

9.2 - Corolário: *Nas mesmas hipóteses do Teorema* 9.1, *para cada* $x_0 \in C$ *e cada* $\lambda > 0$, *existe uma única função* $u\colon [0,T] \to C$ *que satisfaz* (9.1), (9.3) *e*

$$\frac{du}{dt}\,(t) + \frac{1}{\lambda}(I-J)u(t) = f(t) \quad \text{q.s. em} \quad (0,T). \tag{9.5}$$

Demonstração: Pondo $v(t) = u(\lambda t)$, (9.5) toma a forma (9.2).

9.3 - Corolário: *Seja C um subconjunto convexo e fechado de X, $J: C \to C$ lipschitziana com constante $\alpha, \lambda > 0$ e $T > 0$. Então, $\forall\, x_0 \in C$ existe uma única $u: [0,T] \to C$ que satisfaz* (9.1), (9.3) *e*

$$\frac{du}{dt}(t) + \frac{1}{\lambda}(I - J)u(t) = 0 \quad q.s.\ em \quad (0,T). \tag{9.6}$$

Demonstração: Com a transformação $v(t) = u(\lambda t)$, (9.6) toma a forma (9.2) com $f = 0$ e a demonstração do Teorema 9.1 é, então, aplicável visto que $j(t) = J: C \to C$, não sendo, pois, necessário supor que C seja um cone.

9.4 Colorário: *Nas condições do Corolário* 9.3, *se $x_0, y_0 \in C$ e u e v satisfazem* (9.1), (9.6) *e $u(0) = x_0$, $v(0) = y_0$, então:*

i) $\|u(t) - v(t)\| \le e^{\frac{(\alpha-1)t}{\lambda}} \|x_0 - y_0\|$;

ii) $\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| \le e^{\frac{(\alpha-1)t}{\lambda}} \left\|\frac{du}{dt}(0)\right\|$.

Demonstração: i) Temos

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} x_0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda}} Ju(s)\, ds$$

$$v(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} y_0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda}} Jv(s)\, ds,$$

donde

$$e^{\frac{t}{\lambda}} \|u(t) - v(t)\| \le \|x_0 - y_0\| + \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^t e^{\frac{s}{\lambda}} \|u(s) - v(s)\|\, ds.$$

e, portanto,

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{\frac{(\alpha-1)t}{\lambda}} \|x_0 - y_0\|,$$

pelo Lema 8.22.

ii) Seja $h \in (0, T)$ e $t \in [0, T - h)$. Pondo $v(t) = u(t + h)$ temos, por i),

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\| \leq e^{\frac{(\alpha-1)t}{\lambda}} \left\| \frac{u(h) - u(0)}{h} \right\|,$$

donde, no limite, quando $h \to 0$,

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq e^{\frac{(\alpha-1)t}{\lambda}} \left\| \frac{du}{dt}(0) \right\|.$$

A estimativa que será estabelecida a seguir é devida a Chernoff [1] no caso linear e a Miyadera e Oharu [1] no caso geral. A demonstração que daremos é encontrada em Brezis [4] e Pazy [2].

9.5 - Teorema: *Seja C um subconjunto convexo e fechado de X, $J\colon C \to C$ uma aplicação lipschitziana com constante $\alpha \geq 1$, $x_0 \in C, T > 0$ e $u\colon [0, T] \to C$ satisfazendo* (9.1), (9.3) *e* (9.6). *Então, $\forall$ inteiro positivo n e $\forall\ t \geq 0$ tem-se*

$$\|u(t) - J^n x_0\| \leq \alpha^n e^{\frac{(\alpha-1)t}{\lambda}} \|x_0 - Jx_0\| \left[\left(n - \alpha \frac{t}{\lambda} \right)^2 + \alpha \frac{t}{\lambda} \right]^{1/2}. \tag{9.7}$$

Demonstração: É bastante demonstrar (9.7) para $\lambda = 1$. Por ii) do Corolário 9.4 temos, para $\lambda = 1$,

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq e^{(\alpha-1)t} \left\| \frac{du}{dt}(0) \right\| \leq e^{(\alpha-1)t} \|(J - I)x_o\|.$$

Portanto, se $Jx_0 = x_0$, então $u(t) = x_0 \ \forall \ t \geq 0$ e, nesse caso, é válida a estimativa (9.7). Seja, então, $Jx_0 \neq x_0$ e ponhamos para $n = 0, 1, \ldots$

$$\varphi_n(t) = \|u(t) - J^n x_0\| \|x_0 - Jx_0\|^{-1}. \tag{9.8}$$

Como, para $\lambda = 1$,

$$u(t) = e^{-t} x_0 + \int_0^t e^{s-t} Ju(s) ds$$

tem-se

$$\|u(t) - J^n x_0\| \leq e^{-t} \|x_0 - J^n x_0\| + \int_0^t e^{s-t} \|Ju(s) - J^n x_0\| ds \leq$$

$$\leq e^{-t} \|x_0 - J^n x_0\| + \alpha \int_0^t e^{s-t} \|u(s) - J^{n-1} x_0\| ds.$$

Logo,

$$\varphi_n(t) \leq e^{-t} \|x_0 - J^n x_0\| \|x_0 - Jx_0\|^{-1} + \alpha \int_0^t e^{s-t} \varphi_{n-1}(s) ds. \tag{9.9}$$

Mas

$$\|x_0 - J^n x_0\| = \|J^0 x_0 - Jx_0 + Jx_0 - \cdots - J^n x_0\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \|J^{i-1} x_0 - J^i x_0\| \leq \sum_{i=1}^n \alpha^{i-1} \|x_0 - Jx_0\|$$

e como, por hipótese, $\alpha \geq 1$, $\|x_0 - J^n x_0\| \leq n\alpha^n \|x_0 - Jx_0\|$. Daí e de (9.9) vem, para $n = 1 \ldots,$

$$\varphi_n(t) \leq n\alpha^n e^{-t} + \alpha \int_0^t e^{s-t} \varphi_{n-1}(s) \, ds. \tag{9.10}$$

Além disto,

$$u(t) - x_0 = \int_0^t e^{s-t} (Ju(s) - x_0) \, ds =$$

$$= \int_0^t e^{s-t}(J-I)u(s)\,ds + \int_0^t e^{s-t}(u(s)-x_0)\,ds.$$

Mas, pelo Corolário 9.4,

$$\|(J-I)u(s)\| = \left\|\frac{du}{dt}(s)\right\| \leq e^{(\alpha-1)s}\left\|\frac{du}{dt}(0)\right\| = e^{(\alpha-1)s}\|x_0 - Jx_0\|.$$

Logo,

$$\|u(t)-x_0\| \leq \|x_0 - Jx_0\| \int_0^t e^{\alpha s - t}\,ds + \int_0^t e^{s-t}\|u(s)-x_0\|\,ds =$$

$$= e^{-t}\|x_0 - Jx_0\| \int_0^t e^{\alpha s}\,ds + e^{-t}\int_0^t e^{s}\|u(s)-x_0\|\,ds,$$

isto é, a fórmula

$$\|u(t)-x_0\| \leq e^{-t}\|x_0 - Jx_0\| \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-s)^k}{k!}\, e^{\alpha s}\,ds +$$

$$+ \frac{e^{-t}}{n!}\int_0^t (t-s)^n\, e^{s}\|u(s)-x_o\|\,ds$$

é válida para $n = 0$. Por indução vê-se que é válida para todo inteiro não negativo donde, no limite quando $n \to \infty$

$$\|u(t)-x_0\| \leq \|x_0 - Jx_0\| \int_0^t e^{(\alpha-1)s} ds \leq te^{(\alpha-1)t}\,\|x_0 - Jx_0\|.$$

Logo,

$$\varphi_0(t) = \|u(t)-x_0\|\|x_0 - Jx_0\|^{-1} \leq te^{(\alpha-1)t}. \tag{9.11}$$

De (9.8), (9.10) e (9.11) vem (9.7) pelo lema a seguir

9.6 - Lema: *Seja* (φ_n) *uma seqüência de funções localmente integráveis em* $[0,\infty)$ *tal que*

$$\varphi_n(t) \leq n\alpha^n e^{-t} + \alpha \int_0^t e^{s-t}\varphi_{n-1}(s)\,ds, \quad n = 1, ..., \alpha \geq 1,$$

e $\varphi_0(t) \leq te^{(\alpha-1)t}$. *Então, para todo inteiro não negativo, n, e $t \geq 0$ tem-se*

$$\varphi_n(t) \leq \alpha^n e^{(\alpha-1)t} \left[(n-\alpha t)^2 + \alpha t\right]^{1/2}. \tag{9.12}$$

Demonstração: Tem-se

$$\varphi_0(t) \leq te^{(\alpha-1)t} \leq e^{(\alpha-1)t}(\alpha^2 t^2 + \alpha t)^{1/2}$$

visto que $\alpha \geq 1$ e $t \geq 0$; logo, (9.12) é válida para $n = 0$. Supondo válida para $n-1$ teremos, pelas hipóteses,

$$\varphi_n(t) \leq n\alpha^n e^{-t} + \alpha^n \int_0^t e^{(s-t)} e^{(\alpha-1)s} \left[(n-1-\alpha s)^2 + \alpha s\right]^{1/2} ds.$$

Logo, (9.12) estará demonstrada se demonstrarmos que

$$n\alpha^n e^{-t} + \alpha^n \int_0^t e^{s-t} e^{(\alpha-1)s} \left[(n-1-\alpha s)^2 + \alpha s\right]^{1/2} ds \leq$$

$$\leq \alpha^n e^{(\alpha-1)t} \left[(n-\alpha t)^2 + \alpha t\right]^{1/2}$$

ou, equivalentemente,

$$n + \int_0^t e^{\alpha s} \left[(n-1-\alpha s)^2 + \alpha s\right]^{1/2} ds \leq e^{\alpha t} \left[(n-\alpha t)^2 + \alpha t\right]^{1/2}$$

e como ambos os membros são iguais a n no ponto $t = 0$ é bastante demonstrar que a derivada do primeiro é menor ou igual à derivada do segundo, i.e., que

$$e^{\alpha t} \left[(n-1-\alpha t)^2 + \alpha t\right]^{1/2} \leq \alpha e^{\alpha t} \left[(n-\alpha t)^2 + \alpha t\right]^{1/2} +$$

$$+\alpha e^{\alpha t} \left[(n-\alpha t)^2 + \alpha t\right]^{-1/2} (\frac{1}{2} - n + \alpha t).$$

Mas essa desigualdade é verdadeira porque o segundo membro é positivo, visto que

$$\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]^{1/2}+\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]^{-1/2}(\frac{1}{2}-n+\alpha t)=$$

$$=\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]^{-1/2}\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t+\frac{1}{2}-n+\alpha t\right]=$$

$$=\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]^{-1/2}\left[(n-1-\alpha t)^2+n-\frac{1}{2}\right]\geq 0,$$

e o quadrado do primeiro é menor ou igual ao quadrado do segundo porque de $0\leq(\frac{1}{2}-n+\alpha t)^2$ vem

$$\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]^2+2\left[\frac{1}{2}-n+\alpha t\right]\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]\leq$$

$$\leq\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]^2+2\left[\frac{1}{2}-n+\alpha t\right]\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]+(\frac{1}{2}-n+\alpha t)^2$$

donde, por ser $(n-\alpha t)^2+\alpha t>0$ para $n\geq 1$,

$$(n-\alpha t)^2+\alpha t+2\,(\frac{1}{2}-n+\alpha t)\leq$$

$$\leq(n-\alpha t)^2+\alpha t+2\,(\frac{1}{2}-n+\alpha t)+\frac{(\frac{1}{2}-n+\alpha t)^2}{(n-\alpha t)^2+\alpha t}$$

ou seja

$$(n-1-\alpha t)^2+\alpha t\leq\{\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]^{\frac{1}{2}}+\left[(n-\alpha t)^2+\alpha t\right]^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-n+\alpha t)\}^2,$$

donde a afirmação tendo em vista que $\alpha\geq 1$. $\square$

CAPÍTULO II

OPERADORES MONÓTONOS E ACRETIVOS

1. Operadores Monótonos

1.1 - Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Isto quer dizer que se $x, y \in D(f)$ e $x \leq y$ então $f(x) \leq f(y)$. Equivalentemente,

$$(x - y) \cdot (f(x) - f(y)) \geq 0, \quad \forall\ x, y \in D(f). \tag{1.1}$$

Observe-se que se R_θ é a rotação do plano, do ângulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, tem-se, para todo par de vetores $x, y \in \mathbb{R}^2$, $(x - y | R_\theta(x) - R_\theta(y)) \geq 0$, onde $(\cdot|\cdot)$ é o produto interno de $\mathbb{R}^2$. E, de um modo geral, se T é um operador linear positivo de um espaço de Hilbert X, i.e., $(x|Tx) \geq 0\ \forall\ x \in X$, onde $(\cdot|\cdot)$ é o produto interno de X, então

$$(x - y|Tx - Ty) = (x - y|T(x - y)) \geq 0, \quad \forall x, y \in X,$$

que é a desigualdade (1.1) quando o produto de números reais é ali visto como o produto interno do espaço $\mathbb{R}$.

Um outro exemplo: seja $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Podemos definir um operador $\tilde{\beta}$ no espaço $L^2(\Omega)$ pondo

$$\tilde{\beta} = \{(u, v); u, v \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad v(x) = \beta u(x), \quad \text{q.s. em} \quad \Omega\}.$$

Tem-se, $\forall\ (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \tilde{\beta}$,

$$(u_1 - u_2|v_1 - v_2)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (u_1(x) - u_2(x)) \cdot (v_1(x) - v_2(x)) dx \geq 0$$

uma vez que, sendo β uma função monótona crescente, tem-se

$$(u_1(x) - u_2(x)) \cdot (v_1(x) - v_2(x)) \geq 0 \quad \text{q.s. em} \quad \Omega.$$

Em todos esses exemplos tem-se um operador, A, de um espaço de Hilbert com a propriedade:

$$(x_1 - x_2 | y_1 - y_2) \geq 0 \quad \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A. \tag{1.2}$$

Tais operadores são conhecidos por *operadores monótonos*. A noção de operador monótono de um espaço de Hilbert é, desse modo, uma generalização natural da noção de função monótona crescente.

Para generalizar ainda mais a noção de função monótona crescente, observe-se que, no caso dos espaços de Hilbert, X^* pode ser identificado com X e, assim, os operadores monótonos de X podem ser considerados como operadores $A\colon X \to X^*$, sendo o produto em (1.2) encarado como o produto interno derivado da dualidade de X e X^*. Esta observação nos leva a considerar operadores como $\partial f\colon X \to X^*$ pois iv) da Proposição I-4.11 diz que se X é um espaço vetorial normado qualquer, então

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (x, x^*), (y, y^*) \in \partial f.$$

Neste mesmo caso está o operador dualidade $F\colon X \to X^*$, estudado no §2 do Capítulo I: de $(x, x^*), (y, y^*) \in F$ vem

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle + \langle y, y^* \rangle - \langle x, y^* \rangle - \langle y, x^* \rangle \geq$$

$$\geq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0.$$

Essas considerações nos levam à definição a seguir.

1.2 - Definição: Seja X um espaço vetorial topológico real, X^* seu dual e $A\colon X \to X^*$. Diz-se que A é um *operador monótono* de X se

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall\ (x, x^*), (y, y^*) \in A. \tag{1.3}$$

No caso dos espaços de Hilbert a monotonia de um operador pode ser expressa pela condição a seguir, que envolve apenas a norma.

1.3 - Proposição: *Um operador A de um espaço de Hilbert é monótono se, e só se,*

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\|, \ \forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \quad e \quad \forall \lambda > 0. \tag{1.4}$$

Demonstração: Temos, com efeito,

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 + 2\lambda\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle.$$

Daí, trivialmente, (1.2) implica (1.4). Supondo (1.4) verdadeira temos

$$\lambda\|y_1 - y_2\|^2 + 2\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \geq 0 \quad \forall\ \lambda > 0$$

e daí vem (1.2), no limite, quando $\lambda \to 0$.

1.4 - Proposição: *Seja $\mathcal{M}$ a família dos operadores monótonos de X. Então:*

i) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A + B \in \mathcal{M}$;

ii) $A \in \mathcal{M}$ *e* $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda A \in \mathcal{M}$;

iii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^{-1}\colon X^* \to X^{**}$ *é monótono;*

iv) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{M}$, *onde o fecho é tomado no espaço* $X \times X^*$, *estando* X^* *munido da topologia fraca*$-*$;

v) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \hat{A} \in \mathcal{M}$, *onde* $\hat{A}x = \overline{\operatorname{conv} A(x)}, \ \forall\ x \in D(A)$.

Demonstração: Todas essas propriedades decorrem diretamente das definições.

1.5 - Proposição: *A monotonia do operador A de X é equivalente à do operador $\widetilde{A}$ definido por*

$$D(\widetilde{A}) = D(A) - a \quad e \quad \widetilde{A}x = A(x + a) - a^*, \ \forall\ a \in X \quad e \quad \forall\ a^* \in X^*.$$

Demonstração: Com efeito, $\forall\ a \in X$ e $a^* \in X^*$, $(x, x^*) \in A \Leftrightarrow (x-a, x^*-a^*) \in \widetilde{A}$. Além disto,

$$\langle x_1 - x_2, x_1^* - x_2^* \rangle = \langle (x_1+a) - (x_2+a), (x_1^*+a^*) - (x_2^*+a^*) \rangle.$$

1.6 - Definição: Diz-se que o operador A de X, X normado, é *localmente limitado* no ponto $x_0 \in X$ se existir um $\rho > 0$ tal que o conjunto $\cup Ax,\ x \in D(A)$, $\|x - x_0\| < \rho$, é limitado.

1.7 - Teorema: *Todo operador monótono é localmente limitado em cada ponto do interior de seu domínio.*

A demonstração deste teorema envolve o lema a seguir.

1.8 - Lema: *Sejam (x_n) e (x_n^*) sucessões de elementos de X e X^*, respectivamente, tais que $\|x_n\| \to 0$ e $\|x_n^*\| \to \infty$, quando $n \to \infty$. Então, dado $\rho > 0$, existe um elemento $z(\rho)$ de X e duas subseqüências (x_{n_i}) e $(x_{n_i}^*)$, de (x_n) e (x_n^*), respectivamente, tais que*

i) $\|z(\rho)\| < \rho$

ii) $\lim\limits_{i \to \infty} \langle x_{n_i}^*, z(\rho) - x_{n_i} \rangle = \infty.$

Demonstração: Seja $\omega_n^* = x_n^*/(1 + |\langle x_n^*, x_n \rangle|)$. Tem-se

$$\|\omega_n^*\| = \frac{\|x_n^*\|}{1 + |\langle x_n^*, x_n \rangle|} \geq \frac{\|x_n^*\|}{1 + \|x_n^*\| \cdot \|x_n\|} = \frac{1}{\frac{1}{\|x_n^*\|} + \|x_n\|},$$

donde, $\|\omega_n^*\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Pelo Teorema da Limitação Uniforme existe, então, uma subseqüência $(\omega_{n_i}^*)$ de (ω_n^*) e um ponto $z \in X$ tais que $\langle \omega_{n_i}^*, z \rangle \to \infty$. Pondo $z(\rho) = \rho z / 2\|z\|$ tem-se $\|z(\rho)\| < \rho$ e como, além disto, $|\langle \omega_n^*, x_n \rangle| \leq 1$ vem

$$\langle x_{n_i}^*, z(\rho) - x_{n_i} \rangle = (1 + |\langle x_{n_i}^*, x_{n_i} \rangle|) \cdot \langle \omega_{n_i}^*, z(\rho) - x_{n_i} \rangle \geq$$

$$\geq \langle \omega_{n_i}^*, z(\rho) - x_{n_i} \rangle \geq \langle \omega_{n_i}^*, z(\rho) \rangle - 1 \to \infty.$$

Demonstração do Teorema 1.7: Seja A um operador monótono de X, $x \in \operatorname{int} D(A)$ e $\rho > 0$ tal que $D(A)$ contenha a bola de centro x e raio ρ. Se o teorema fosse falso, existiriam seqüências (x_n) e (x_n^*) em X e X^*, respectivamente, tais que $(x_n, x_n^*) \in A$, $x_n \to x$, $\|x_n^*\| \to \infty$. Pelo Lema 1.8 existiriam, então, duas subseqüências (x_{n_i}) e $(x_{n_i}^*)$ de (x_n) e (x_n^*), respectivamente, e um $z(\rho) \in X$ tais que $\|z(\rho)\| < \rho$ e

$$\langle x_{n_i}^*, z(\rho) - (x_{n_i} - x)\rangle \to \infty \quad \text{quando} \quad i \to \infty. \tag{1.5}$$

De $\|z(\rho)\| < \rho$ resulta que $z(\rho) + x$ pertence à bola de centro x e raio ρ; logo $z(\rho) + x \in D(A)$. Pela monotonia de A tem-se, então,

$$\langle y^* - x_{n_i}^*, z(\rho) + x - x_{n_i}\rangle \geq 0 \quad \forall\, y^* \in A(z(\rho) + x).$$

Mas, desta última desigualdade vem

$$\langle y^*, z(\rho) + x - x_{n_i}\rangle \geq \langle x_{n_i}^*, z(\rho) + x - x_{n_i}\rangle,$$

donde, por (1.5) teríamos $\langle y^*, z(\rho) + x - x_{n_i}\rangle \to \infty$, em contradição com $x_{n_i} \to x$, q.e.d..

1.9 - Proposição: *Seja X um espaço vetorial topológico localmente convexo, C um subconjunto convexo e compacto de X, $A\colon X \to X^*$ um operador monótono tal que $D(A) \subset C$ e $H\colon X \to X^*$ uma aplicação contínua tal que $D(H) = C$. Então existe um x em C tal que*

$$\langle x - y, Hx + y^*\rangle \leq 0, \quad \forall\, (y, y^*) \in A.$$

Demonstração: Ponhamos, para cada $z \in C$,

$$Tz = \{x \in C; \langle x - y, Hz + y^*\rangle \leq 0 \ \forall\, (y, y^*) \in A\}.$$

Se $x_1, x_2 \in Tz$ e $t \in [0, 1]$ então, $\forall\, (y, y^*) \in A$ tem-se

$$t\langle x_1 - y, Hz + y^*\rangle \leq 0 \ , \ (1 - t)\langle x_2 - y, Hz + y^*\rangle \leq 0$$

donde, pondo $x = tx_1 + (1-t)x_2$ temos $x \in C$ e

$$\langle x - y, Hz + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A,$$

i.e., Tz é convexo. Além disto, seja (z_n) uma seqüência de elementos de C e $x_n \in Tz_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$; então

$$\langle x_n - y, Hz_n + y^* \rangle \leq 0\ \forall (y, y^*) \in A \quad \text{e} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

donde, se $z_n \to z$ e $x_n \to x$, tem-se, pela continuidade de H,

$$\langle x - y, Hz + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A.$$

Logo, $T: C \to C$ é um operador fechado. Portanto, se demonstrarmos que $D(T) = C$, i.e., que $Tz \neq \emptyset$ para todo $z \in C$, decorrerá, pelo Teorema do Ponto Fixo de Kakutany, que T admite um ponto fixo, i.e., existe um $x \in C$ tal que $x \in T(x)$. E é exatamente essa a conclusão a que se deseja chegar. Vamos, então, demonstrar que $Tz \neq \emptyset,\ \forall\ z \in C$.

Seja $z \in C$ e ponhamos, para cada $(y, y^*) \in A$,

$$C(y, y^*) = \{x \in C; \langle x - y, Hz + y^* \rangle \leq 0\}.$$

Temos $C(y, y^*) \neq \emptyset\ \forall\ (y, y^*) \in A$, uma vez que $y \in C(y, y^*)$. Se $x_n \in C(y, y^*)$, i.e., $\langle x_n - y, Hz + y^* \rangle \leq 0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to x$, então $\langle x - y, Hz + y^* \rangle \leq 0$; logo, $C(y, y^*)$ é fechado. Portanto, para demonstrar que $Tz \neq \emptyset$ é bastante demonstrar que a família, $\{C(y, y^*)\}, (y, y^*) \in A$, de subconjuntos não vazios e fechados de C, tem a propriedade da interseção finita. Para demonstrar isto vamos por

$$K = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n); \sum_1^n \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, n\}.$$

Então K é um subconjunto convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$. Seja $(y_i, y_i^*) \in A, i = 1, \ldots, n$. Se $x(\lambda): K \to X$ é definida por $x(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ então a função $f: K \times K \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{1}^{n} \mu_i \langle x(\lambda) - y_i, Hz + y_i^* \rangle$$

é bilinear e contínua, donde admite um ponto sela, pelo Teorema Minimax. Assim, existem λ_0 e μ_0 tais que

$$f(\lambda_0, \mu) \leq f(\lambda_0, \mu_0) \leq f(\lambda, \mu_0), \quad \forall\ \lambda, \mu \in K$$

e, portanto,

$$f(\lambda_0, \mu) \leq f(\mu_0, \mu_0) \leq \sup_{\lambda \in K} f(\lambda, \lambda), \quad \forall\ \mu \in K. \tag{1.6}$$

Mas,

$$f(\lambda, \lambda) = \sum_{1}^{n} \lambda_i \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j - y_i, Hz + y_i^* \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \langle y_j - y_i, Hz + y_i^* \rangle$$

e como $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \langle y_j - y_i, Hz \rangle = 0$, uma vez que $\lambda_i \lambda_j \langle y_j - y_i, Hz \rangle = -\lambda_j \lambda_i \langle y_i - y_j, Hz \rangle$, temos

$$f(\lambda, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \langle (y_j - y_i, y_i^* \rangle = - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \langle y_j - y_i, y_j^* \rangle$$

$$= (1/2) \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \langle y_j - y_i, y_i^* - y_j^* \rangle.$$

Daí, $f(\lambda, \lambda) \leq 0$ visto que A é monótono, por hipótese. Por (1.6) tem-se, então, $f(\lambda_0, \mu) \leq 0\ \forall\ \mu \in K$ e, em particular, para $\mu^i \in K$ definido por

$$\mu^i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}), \quad i = 1, \cdots, n,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Temos, para $\mu = \mu^i$,

$$\langle x(\lambda_0) - y_i, Hz + y_i^* \rangle \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

relação que mostra que $x(\lambda_0) \in C(y_i, y_i^*)$, $i = 1, \cdots, n$ e, assim, a família $\{C(y, y^*); (y, y^*) \in A\}$ tem, de fato, a propriedade da interseção finita.

1.10 - Proposição: *Seja E um espaço de Banach de dimensão finita, $A: E \to E^*$ um operador monótono tal que $0 \in D(A) \subset C \subset E$, onde C é um conjunto convexo e fechado, e $H: E \to E^*$, $D(H) = E$, uma aplicação contínua e coerciva, i.e., tal que*

$$\alpha(\|x\|)\|x\| \leq \langle x, Hx \rangle, \ \forall \ x \in E,$$

onde $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $\alpha(\rho) \to \infty$ quando $\rho \to \infty$. Então, para cada $y_0^* \in A(0)$ existe uma constante M, que só depende de y_0^* e da função α, e um $x \in C$ tais que $\|x\| \leq M$ e

$$\langle x - y, Hx + y^* \rangle \leq 0, \ \forall \ (y, y^*) \in A.$$

Demonstração: Designando por A_r e H_r, respectivamente, as restrições de A e H a $D(A) \cap rB$ e $C_r = C \cap rB$, onde B é bola unitária fechada de E e $r > 0$, existe, pela Proposição 1.9 aplicada a A_r e H_r, um $x_r \in C_r$ tal que

$$\langle x_r - y, Hx_r + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall \ (y, y^*) \in A_r.$$

Daí vem

$$\langle x_r, Hx_r \rangle \leq \langle y, Hx_r \rangle - \langle x_r, y^* \rangle + \langle y, y^* \rangle, \ \forall \ (y, y^*) \in A_r,$$

e essa desigualdade é válida, em particular, para $y = 0$ e $y_0^* \in A(0)$. Logo,

$$\langle x_r, Hx_r \rangle \leq -\langle x_r, y_0^* \rangle$$

donde

$$\alpha(\|x_r\|)\|x_r\| \leq \langle x_r, Hx_r \rangle \leq \|x_r\| \, \|y_0^*\| \tag{1.7}$$

e, se $x_r \neq 0$, $\alpha(\|x_r\|) \leq \|y_0^*\|$. Pela definição da função α segue-se, então, que existe M, dependendo apenas de α e de y_0^*, tal que $\|x_r\| \leq M, \quad \forall \ r > 0$.

Seja

$$S_r = \{x \in E; x \in C_r \quad \text{e} \quad \langle x - y, Hx + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A_r\}.$$

Vê-se, imediatamente, que S_r é fechado e, portanto, $S_r \cap MB$ é compacto e não vazio $\forall\ r > 0$. Além disto, de $M \leq r_1 \leq r_2$ vem $S_{r_1} \cap MB \supset S_{r_2} \cap MB$. Portanto,

$$\bigcap_{r \geq M} (S_r \cap MB) \neq \emptyset,$$

donde, se x é um ponto qualquer dessa interseção, então $x \in C$ e

$$\langle x - y, Hx + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A, \quad \text{q.e.d.}\,.$$

2. Operadores máximo monótonos e m-monótonos

2.1 - Definição: Diz-se que o operador monótono, A, é *máximo monótono* se A não admitir extensão monótona própria.

Seja $C \subset X$ e designemos por $\mathcal{M}(C)$ a família dos operadores monótonos de X com domínio contido em C. Ordenemos $\mathcal{M}(C)$ por inclusão.

2.2 - Observação: i) $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}$ e os operadores máximo monótonos são justamente os elementos máximos de $\mathcal{M}$, i.e., $A \in \mathcal{M}$ é máximo monótono se, e só se, de $A \subset B$ e $B \in \mathcal{M}$ vem $B = A$. ii) A família $\mathcal{M}(C)$ é indutiva superiormente como é imediato. Pelo Lema de Zorn segue-se, então, que cada elemento de $\mathcal{M}(C)$ está contido em um elemento máximo de $\mathcal{M}(C)$. Em particular, cada elemento de $\mathcal{M}$ está contido em um elemento máximo de $\mathcal{M}$; logo, por i) cada operador monótono de X está contido em um operador máximo monótono de X.

2.3 - Teorema: *São equivalentes as duas seguintes condições:*

i) *A é máximo de* $\mathcal{M}(C)$*;*

ii) $x \in C$ *e* $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A \Rightarrow (x, x^*) \in A$.

Em particular, A é máximo monótono se, e só se,

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A \Rightarrow (x, x^*) \in A. \tag{2.1}$$

Demonstração: Se A é máximo de $\mathcal{M}(C)$ e (x, x^*) satisfaz a hipótese de ii), então o operador $B = A \cup \{(x, x^*)\} \in \mathcal{M}(C)$ e $A \subset B$. Logo $A = B$, donde $(x, x^*) \in A$ e, assim, a condição ii) é satisfeita. Reciprocamente, vamos supor que ii) seja satisfeita e seja $B \in \mathcal{M}(C)$ uma extensão de A. De $(x, x^*) \in B$ vem, então, $x \in C$ e $\langle x-y, x^*-y^* \rangle \geq 0\ \forall\ (y, y^*) \in B$ e, portanto, $\forall\ (y, y^*) \in A$. Logo $(x, x^*) \in A$, donde A não tem extensão própria em $\mathcal{M}(C)$, isto é, i) é satisfeita.

2.4 - Corolário: a) *São equivalentes as afirmações :*

i) *A é máximo de* $\mathcal{M}(C)$*;*

ii) $\lambda A, \lambda > 0$*, é máximo de* $\mathcal{M}(C)$*;*

iii) *O operador* $\tilde{A}$*, definido na Proposição 1.5 é máximo de* $\mathcal{M}(C - a)$

b) *Nos espaços reflexivos são equivalentes as afirmações:*

iv) *A é máximo monótono;*

v) A^{-1} *é máximo monótono.*

Demonstração: Essas equivalências decorrem imediatamente das definições.

2.5 - Proposição: i) *Se A é máximo de* $\mathcal{M}(C)$*, então Ax é convexo e fechado para todo* $x \in D(A)$*. Em particular, se A é máximo monótono, então Ax é convexo e fechado* $\forall\ x \in D(A)$*.*

ii) *Se A é máximo de* $\mathcal{M}(C)$*, então A é fechado em C, i.e., se* $(x_n) \subset D(A), x_n \to x \in C, x_n^* \in Ax_n$ *e* $x_n^* \to x^*$ *então* $x \in D(A)$ *e* $x^* \in Ax$*. Em particular todo operador* *máximo monótono é fechado.*

Demonstração: i) Seja A máximo de $\mathcal{M}(C)$, $x \in D(A)$ e $x_1^*, x_2^* \in Ax$. Então,

$$\langle x - y, x_1^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle x - y, x_2^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A,$$

pela monotonia de A. Logo, se $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\langle x - y, \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A$$

e, daí, $\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \in Ax$, pelo Teorema 2.3. Portanto Ax é convexo.

Seja $x_n^* \in Ax$, $n = 1, \ldots$ e $x_n^* \to x_0^*$. Pela monotonia de A temos $\langle x - y, x_n^* - y^* \rangle \geq 0$ $\forall\ (y, y^*) \in A$, donde $\langle x - y, x_0^* - y^* \rangle \geq 0$ $\forall\ (y, y^*) \in A$, pela continuidade do produto interno, e daí, $(x, x_0^*) \in A$ pela maximalidade de A. Logo, $x_0^* \in Ax$ e, assim, Ax é fechado.

ii) Das hipóteses vem

$$\langle x_n - y, x_n^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A, \quad n = 1, \ldots .$$

Logo,

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A$$

e, como $x \in C$, $(x, x^*) \in A$ pela maximalidade de A. Portanto, $x \in D(A)$ e $x^* \in Ax$.

2.6 - Definição: Diz-se que o operador monótono $A\colon X \to X^*$ é *m-monótono* se $\operatorname{Im}(F + A) = X^*$, onde F é o operador dualidade.

2.7 - Exemplo: Vamos mostrar que se X é um espaço de Banach reflexivo e liso, e se $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ é uma função convexa, própria e s.c.i., então o operador ∂f é m-monótono.

Seja $x_0^* \in X^*$. Devemos mostrar que existe $x_0 \in X$ tal que $x_0^* \in (F + \partial f)x_0$. Consideremos a função

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\|x\|^2}{2} - \langle x_0^*, x \rangle$$

que é convexa, própria e s.c.i.. Pela Proposição I-3.26 existe um $x_1^* \in X^*$ e um $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) \geq \langle x_1^*, x\rangle - \beta$. Logo,

$$\varphi(x) \geq \langle x_1^*, x\rangle - \beta + \frac{\|x\|^2}{2} - \langle x_0^*, x\rangle = \frac{\|x\|^2}{2} - \langle x_0^* - x_1^*, x\rangle - \beta \geq$$

$$\geq \frac{\|x\|^2}{2} - \|x_0^* - x_1^*\| \cdot \|x\| - \beta \to \infty$$

quando $\|x\| \to \infty$. Pelo Teorema I-3.25 existe $x_0 \in X$ tal que $\varphi(x_0) \leq \varphi(x)$, $\forall\, x \in X$. Mas daí vem

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle x_0^*, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}(\|x_0\|^2 - \|x\|^2).$$

Como X é liso o operador F é unívoco. Podemos, então, escrever

$$\frac{1}{2}\,(\|x_0\|^2 - \|x\|^2) = \frac{1}{2}\,(\|x_0\|^2 + \|x\|^2) - \|x\|^2 \geq \|x_0\| \cdot \|x\| - \|x\|^2 =$$

$$= \|x_0\| \cdot \|F(x)\| - \|x\|^2 \geq \langle F(x), x_0\rangle - \langle F(x), x\rangle = \langle F(x), x_0 - x\rangle.$$

Portanto, $f(x) - f(x_0) \geq \langle x_0^* - F(x), x - x_0\rangle$, donde, fazendo $x = tx_0 + (1-t)y$, tem-se pela convexidade de f,

$$f(y) - f(x_0) \geq \langle x_0^* - F(tx_0 + (1-t)y), y - x_0\rangle.$$

Pela demicontinuidade de F (Corolário I-5.20 e Proposição I-6.7) daí vem, quando $t \to 1$,

$$f(y) - f(x_0) \geq \langle x_0^* - F(x_0), y - x_0\rangle$$

donde $x_0^* - F(x_0) \in \partial f(x_0)$, i.e., $x_0^* \in (F + \partial f)x_0$, q.e.d..

Observações: i) As restrições impostas a X neste exemplo, são desnecessárias. Foram introduzidas apenas para simplicidade da demonstração. O caso geral é tratado por Rockafellar ([5]).

ii) Com as mesmas hipóteses, o operador $\lambda\partial f$, $\lambda > 0$, é m-monótono. É bastante notar que se $\lambda > 0$ e f é convexa e s.c.i., então λf é convexa e s.c.i. e $\lambda\partial f = \partial\lambda f$.

iii) Por i) e o Exemplo I-4.9, o operador dualidade F, é m-monótono.

2.8 - Exemplo: Todo operador monótono, hemicontínuo e definido em todos os pontos de um espaço de Banach, é máximo monótono. (Recorde-se que um operador unívoco $H: X \to X^*$ é dito *hemicontínuo* se $\forall\ x, y \in X, H(x + ty) \rightharpoonup Hx$ quando $t \to 0$).

Seja, com efeito, $(y, y^*) \in X \times X^*$ tal que

$$\langle x - y, Hx - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall\ x \in X.$$

Pondo $x_t = tz + (1 - t)y$, onde z é um ponto qualquer de X e $0 \leq t \leq 1$, e fazendo $x = x_t$ nessa desigualdade temos $\langle z - y, Hx_t - y^* \rangle \geq 0$; como H é hemicontínuo, $\langle z - y, Hy - y^* \rangle \geq 0$. Daí, $y^* = Hy$, pela arbitrariedade de z. Logo H é máximo monótono, pelo Teorema 2.3.

Em particular se H for unívoco, monótono, contínuo e $D(H) = X$, então H é máximo monótono. Portanto:

i) Os operadores lineares limitados e positivos de um espaço de Hilbert são máximo monótonos (o que implica $A = \partial f$ no Exemplo I-4.8);

ii) As funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótonas crescentes, contínuas e definidas em todos os pontos de $\mathbb{R}$ são operadores máximo monótonos de $\mathbb{R}$.

2.9 - Lema: *Seja E um espaço de Banach de dimensão finita e $H: E \to E^*$ um operador monótono e hemicontínuo. Então:*

i) *H é limitado nos conjuntos limitados;*

ii) *H é contínuo.*

Demonstração: i) Vamos supor que H não seja limitado em um conjunto limitado. Da precompacidade dos conjuntos limitados decorre, então, que existe uma seqüência

(x_n) de elementos desse conjunto e um $x_0 \in E$ tais que $x_n \to x_0$ e $\|Hx_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como H é, por hipótese, monótono,

$$\langle x_n - x, Hx_n - Hx \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in E$$

e, portanto,

$$\left\langle x_n - x, \frac{Hx_n - Hx}{\|Hx_n\|} \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in E. \tag{2.2}$$

Como $Hx_n/\|Hx_n\| \in U_E$ e, portanto, $\{Hx_n/\|Hx_n\|\}$ é um conjunto limitado , não é restrito supor que $Hx_n/\|Hx_n\| \to y^* \in E^*$. Temos $\|y^*\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|Hx_n/\|Hx_n\|\|) = 1$. Mas de (2.2) vem, no limite, quando $n \to \infty$,

$$\langle x_0 - x, y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in E$$

e, portanto, $y^* = 0$, o que está em contradição com $\|y^*\| = 1$. Logo H é limitado nos conjuntos limitados.

ii) Seja $x_n \to x_0$. Como $\{x_n\}$ é limitado, $\{Hx_n\}$ é limitado, por i), donde uma subseqüência de Hx_n converge a um certo $y^* \in E^*$. Sem quebra da generalidade podemos supor que $Hx_n \to y^*$. Pela monotonia,

$$\langle x - x_n, Hx - Hx_n \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in E,$$

donde, no limite quando $n \to \infty$

$$\langle x - x_0, Hx - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in E.$$

Pondo $x = tz + (1-t)x_0$ nessa última desigualdade temos, para um elemento arbitrário z de E,

$$\langle tz + (1-t)x_0 - x_0, H(tz + (1-t)x_0) - y^* \geq 0 \quad \forall\, t \in [0,1]$$

e, daí,

$$\langle z - x_0, H(x_0 + t(z - x_0) - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\, t \in [0,1].$$

No limite, quando $t \to 0$ temos, então, pela hemicontinuidade de H,

$$\langle z - x_0, Hx_0 - y^* \rangle \geq 0$$

donde $Hx_0 = y^*$ pela arbitrariedade de z, q.e.d..

2.10 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo, $A\colon X \to X^*$ um operador monótono tal que $0 \in D(A) \subset C$, onde C é um conjunto convexo e fechado de X, e $H\colon X \to X^*$ um operador monótono, hemicontínuo, coercivo, que transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados e tal que $D(H) = X$. Então existe um ponto x_0 em C tal que*

$$\langle x_0 - y, Hx_0 + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall \quad (y, y^*) \in A. \tag{2.3}$$

Demonstração: Seja Λ a família dos subespaços de X de dimensão finita, $j_E\colon E \to X$ a inclusão de $E \in \Lambda$ em X e $j_E^*\colon X^* \to E^*$ a projeção adjunta de j_E. Designemos por A_E o operador $j_E^* A j_E$. Temos $A_E\colon E \to E^*$ e $D(A_E) = D(A) \cap E$. Analogamente, $H_E = j_E^* H j_E\colon E \to E^*$ e $D(H_E) = E$. Observe-se que para todo $x, y \in E$ tem-se

$$\langle x, H_E y \rangle = \langle x, j_E^* H j_E y \rangle = \langle j_E x, H j_E y \rangle = \langle x, Hy \rangle$$

e, analogamente, se $x \in E$, $y \in D(A_E)$ e $y^* \in Ay$, então

$$\langle x, j_E^* y^* \rangle = \langle j_E x, y^* \rangle = \langle x, y^* \rangle.$$

Logo, da monotonia de A decorre a de A_E, da monotonia de H, a de H_E e da coercividade de H, a de H_E com a mesma func ao α. Observe-se ainda que, estando X^* munido da topologia fraca, Hj_E é contínua, pelo Lema 2.9, e j_E^* é seqüêncialmente contínua, pois j_E é um operador compacto. Logo H_E é contínua.

Seja $y_0^* \in A(0)$. Então $j_E^* y_0^* \in A_E(0)$, donde, pela Proposição 1.10, existe $x_E \in C_E = C \cap E$ e uma constante M_E tais que $\|x_E\| \leq M_E$ e

$$\langle x_E - y, H_E x_E + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall \ (y, y^*) \in A_E.$$

Por (1.7) tem-se $\alpha(\|x_E\|) \leq \|j_E^* y_0^*\|$ e como $\|j_E^*\| = \|j_E\| = 1$, $\alpha(\|x_E\|) \leq \|y_0^*\|$. Podemos, pois, supor que M_E é uma constante M que independe de E. Portanto, $\forall\ E \in \Lambda$ existe $x_E \in C_E$ tal que $\|x_E\| \leq M$ e

$$\langle x_E - y, Hx_E + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A_E.$$

Como, por hipótese, H transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados, existe uma constante M' tal que $\|Hx_E\| \leq M'$, $\quad \forall\ E \in \Lambda$. Os conjuntos

$$W_{E_0} = \{(x_E, Hx_E); E \supset E_0\}, E_0 \in \Lambda,$$

são, portanto, subconjuntos do conjunto limitado $(C \cap MB) \times M'B^* \subset X \times X^*$, onde B é a bola unitária fechada de X e B^* a de X^*. Além disto, a família $\{W_{E_0}; E_0 \in \Lambda\}$ tem a propriedade da interseção finita. Logo, existe $(x_0, x_0^*) \in X \times X^*$ tal que (x_0, x_0^*) pertence ao fecho fraco de cada W_{E_0} e como $C \cap MB$ 'e convexo e fechado, logo fracamente fechado, $x_0 \in C$.

Seja $(y, y^*) \in A$, $u \in X$ e $E_0 \in \Lambda$ tais que $y, u \in E_0$. Se $E \supset E_0$ temos, então, $\langle x_E - y, Hx_E + y^* \rangle \leq 0$ e como, por hipótese, H é monótono, $\langle x_E - u, Hu - Hx_E \rangle \leq 0$. Logo,

$$\langle x_E - y, Hx_E + y^* \rangle + \langle x_E - u, Hu - Hx_E \rangle \leq 0 \tag{2.4}$$

para cada $(y, y^*) \in A_E$, cada $u \in X$ e cada $E \supset E_0$. Consideremos a função $g\colon X \times X^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, x^*) = \langle x - y, x^* + y^* \rangle + \langle x - u, Hu - x^* \rangle.$$

Por (2.4), $g(x, x^*) \leq 0\ \forall\ (x, x^*) \in W_{E_0}$, onde E_0 é tal que $y, u \in E_0$. Além disto, de

$$g(x, x^*) = \langle u - y, x^* \rangle + \langle x, Hu + y^* \rangle - \langle y, y^* \rangle - \langle u, Hu \rangle$$

segue-se que g é uma função contínua em $X \times X^*$, quando os fatores est ao munidos da topologia fraca. Logo, $g(x, x^*) \leq 0$ no fecho fraco de W_{E_0} e, em particular, $g(x_0, x_0^*) \leq 0$. Portanto,

$$\langle x_0 - y, x_0^* + y^* \rangle + \langle x_0 - u, Hu - x_0^* \rangle \leq 0\ \forall\ (y, y^*) \in A \quad \text{e} \quad \forall\ u \in X. \tag{2.5}$$

Fazendo-se $u = x_0$ em (2.5) temos

$$\langle x_0 - y, x_0^* + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A. \tag{2.6}$$

Logo, $A' = A \cup \{(x_0, -x_0^*)\}$ é uma extensão monótona de A e como $x_0 \in C, A' \in \mathcal{M}(C)$. Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que A é máximo de $\mathcal{M}(C)$. Nesse caso, $A' = A$, donde $(x_0, -x_0^*) \in A$ e, portanto, $x_0 \in D(A)$. Logo, podemos fazer $y = x_0$ em (2.5) e, assim,

$$\langle x_0 - u, Hu - x_0^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ u \in X.$$

Mas daí vem $x_0^* = Hx_0$, pelo Teorema 2.3, uma vez que H é máximo monótono, pelo Exemplo 2.8. Substituindo x_0^* por Hx_0 em (2.6) temos

$$\langle x_0 - y, Hx_0 + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A$$

e o teorema está demonstrado nesse caso particular. Se A não for máximo de $\mathcal{M}(C)$ existe, por ii) da Observação 2.2 , um operador, $\widetilde{A}$, máximo de $\mathcal{M}(C)$ e tal que $A \subset \widetilde{A}$. Mas, pelo que já foi demonstrado, o teorema é válido para $\widetilde{A}$, isto é, existe $x_0 \in C$ tal que

$$\langle x_0 - y, Hx_0 + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in \widetilde{A}.$$

Logo, com mais forte raz ao,

$$\langle x_0 - y, Hx_0 + y^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A,$$

e, assim, o teorema está demonstrado no caso geral.

2.11 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo, C um subconjunto convexo e fechado de X, $A: X \to X^*$ um operador máximo de $\mathcal{M}(C)$ e tal que $0 \in D(A)$, e $H: X \to X^*$ um operador monótono, hemicontínuo, coercivo, que transforma conjuntos limitados en conjuntos limitados e tal que $D(H) = X$. Então, $\Im(H + A) = X^*$.*

Demonstração: Seja x^* um elemento arbitrário de X^* e $\widetilde{A}: X \to X^*$ o operador definido por $\widetilde{A}x = Ax - x^*$. Então $\widetilde{A}$ é máximo de $\mathcal{M}(C)$, pelo Corolário 2.4. Pelo

Teorema 2.10, existe $x_0 \in C$ tal que

$$\langle x_0 - y, Hx_0 + \tilde{y}^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, \tilde{y}^*) \in \tilde{A}.$$

Mas, $(y, \tilde{y}^*) \in \widetilde{A} \Leftrightarrow (y, y^*) \in A$, onde $y^* = \tilde{y}^* + x^*$. Logo,

$$\langle x_0 - y, Hx_0 + y^* - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A.$$

Segue-se daí, pelo Teorema 2.3, que $(x_0, x^* - Hx_0) \in A$, i.e., $x^* - Hx_0 \in Ax_0$ e, portanto, $x^* \in (H + A)x_0$. Logo, $\operatorname{Im}(H + A) = X^*$, q.e.d..

2.12 - Corolário: *Seja X um espaço de Banach reflexivo e liso e C um subconjunto convexo e fechado de X. Então, todo operador, A, máximo de $\mathcal{M}(C)$ é m-monótono.*

Demonstração: Suponhamos satisfeitas as hipóteses. Então, o operador dualidade é unívoco porque X é liso, é monótono pelas considerações feitas em 1.1, é demicontínuo e, portanto, hemicontínuo pelo Teorema I-6.6, $D(F) = X$ por i) da Proposição I-2.1 e, trivialmente, satisfaz as demais condições impostas ao operador H no Teorema 2.11. Além disto, se x_0 é um ponto qualquer de $D(A)$, o operador $\tilde{F}$ definido por $\tilde{F}(x) = F(x - x_0)$ ainda satisfaz essas mesmas hipóteses e, se A é máximo de $\mathcal{M}(C)$, o operador $\tilde{A}$ definido por $\tilde{A}x = A(x - x_0)$ satisfaz a condição $0 \in D(\tilde{A})$ e, por iii) do Corolário 2.4, é máximo de $\mathcal{M}(C - x_0)$. Pelo Teorema 2.11 tem-se, então, $\Im(\tilde{F} + \tilde{A}) = X^*$ e como $\Im(F + A) = \Im(\tilde{F} + \tilde{A})$ segue-se que A é m-monótono.

2.13 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo e sejam X e X^* lisos. Então, o operador monótono $A: X \to X^*$ é máximo monótono se e só se A é m-monótono.*

Demonstração: Suponhamos satisfeitas as hipóteses. Então, pelo Corolário 2.12, se A é máximo monótono, A é m-monótono.

Reciprocamente, vamos supor que $\Im(F + A) = X^*$ e seja $(x, x^*) \in X \times X^*$ tal que

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (y, y^*) \in A. \tag{2.6}$$

Como $Fx + x^*$ é um elemento de X^*, existe um $x_1 \in X$ tal que $Fx + x^* \in Fx_1 + Ax_1$; portanto, existe um $x_1^* \in Ax_1$ tal que

$$Fx + x^* = Fx_1 + x_1^*. \tag{2.7}$$

Fazendo $(y, y^*) = (x_1, x_1^*)$ em (2.6) e levando (2.7) em consideração temos

$$\langle x - x_1, Fx - Fx_1 \rangle \leq 0.$$

Daí,

$$\|x\|^2 + \|x_1\|^2 - \langle x, Fx_1 \rangle - \langle x_1, Fx \rangle \leq 0 \tag{2.8}$$

e, com mais forte razão,

$$\|x\|^2 + \|x_1\|^2 - 2\|x\|\,\|x_1\| \leq 0. \tag{2.9}$$

De (2.9) vem $\|x_1\| = \|x\|$ donde, por (2.8),

$$2\|x\|^2 \leq \langle x, Fx_1 \rangle + \langle x_1, Fx \rangle \leq 2\|x\|^2.$$

Daí, $\langle x_1, Fx \rangle = \|x\|^2$ e, como $\|x_1\|^2 = \|x\|^2 = \|Fx\|^2 = \langle x, Fx \rangle$, segue-se que $x, x_1 \in F^*(Fx)$, onde $F^*\colon X^* \to X$ é o operador dualidade de X^*; logo, $x_1 = x$ visto que X é, por hipótese, liso. Novamente por (2.7) tem-se $x_1^* = x^*$. Logo, $(x, x^*) = (x_1, x_1^*) \in A$, donde A é máximo monótono.

2.14 - Corolário: *Seja X um espaço de Banach reflexivo e sejam X e X^* lisos. Então para que A seja m-monótono é necessário e suficiente que λA seja m-monótono, $\forall\ \lambda > 0$.*

Demonstração: Conseqüência imediata do Teorema 2.13 e de ii) do Corolário 2.4.

A proposição a seguir refina ii) da Observação 2.2, quando X é reflexivo e X e X^* são lisos.

2.15 - Proposição: *Seja X um espaço de Banach reflexivo, X e X^* lisos, C um subconjunto convexo e fechado de X e A um operador monótono e tal que $D(A) \subset C$.*

Então A admite uma extensão máximo monótona com domínio contido em C. Em particular, todo operador monótono de um espaço de Banach nas condições especificadas admite uma extensão máximo monótona com domínio contido em $\overline{\operatorname{conv} D(A)}$.

Demonstração: Por ii) da Observação 2.2, A admite uma extensão máxima em C, extensão essa que é m-monótona pelo Corolário 2.12 e, portanto, máximo monótona pelo Teorema 2.13.

A segunda asserção é, agora, imediata visto que $\overline{\operatorname{conv} D(A)}$ é um conjunto convexo e fechado que contém $D(A)$.

2.16 - Teorema: *Seja X reflexivo, X e X^* lisos e $A: X \to X^*$ num operador máximo monótono, coercivo e tal que $0 \in D(A)$. Então,* $\operatorname{Im}(A) = X^*$ *(Recorde-se que um operador $A: X \to X^*$ é coercivo se existir uma função $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(\rho) \to \infty$ quando $\rho \to \infty$ e $\alpha(\|x\|)\|x\| \leq \langle x, x^* \rangle \ \forall\ (x, x^*) \in A$).*

Demonstração: Para cada $\lambda > 0$ o operador λF está nas condições do operador H do Teorema 2.11; logo, $\operatorname{Im}(\lambda F + A) = X^*$. Portanto, se $y^* \in X^*$, existe $x_\lambda \in D(A)$ tal que $(\lambda F + A)x_\lambda \ni y^*$, donde existe $x_\lambda^* \in Ax_\lambda$ tal que

$$\lambda F x_\lambda + x_\lambda^* = y^*. \tag{2.10}$$

Como, por hipótese, A é coercivo,

$$\alpha(\|x_\lambda\|)\|x_\lambda\| \leq \langle x_\lambda, x_\lambda^* \rangle + \langle x_\lambda, \lambda F x_\lambda \rangle = \langle x_\lambda, \lambda F x_\lambda + x_\lambda^* \rangle = \langle x_\lambda, y^* \rangle \leq \|x_\lambda\| \|y^*\|,$$

donde, se $x_\lambda \neq 0$, $\alpha(\|x_\lambda\|) \leq \|y^*\|$ e, portanto, o conjunto $\{x_\lambda; \lambda > 0\}$ é limitado. Mas daí decorre que o conjunto $\{Fx_\lambda; \lambda > 0\}$ é limitado; por (2.10) tem-se, então,

$$x_\lambda^* = y^* - \lambda\, F x_\lambda \to y^* \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0 \tag{2.11}$$

na topologia da norma de X^*. Além disto, sendo $\{x_\lambda\}$ um conjunto limitado e X reflexivo, existe uma seqüência (x_{λ_n}), $\lambda_n \to 0$, e um $y \in X$ tais que $x_{\lambda_n} \rightharpoonup y$ quando

$n \to \infty$. Daí, para cada $(x, x^*) \in A$,

$$\langle x - x_{\lambda_n}, x^* - x^*_{\lambda_n} \rangle \geq 0$$

donde, levando 2.11 em conta,

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (x, x^*) \in A.$$

Logo, $(y, y^*) \in A$ pela maximalidade de A, i.e., $y^* \in \mathrm{Im}(A)$.

2.17 - Corolário: *Seja X reflexivo, X liso e $H\colon X \to X^*$ um operador monótono, hemicontínuo, coercivo e tal que $D(H) = X$. Então,* $\mathrm{Im}(H) = X^*$.

Com efeito, H sendo, por hipótese, monótono, hemicontínuo e definido em todos os pontos de X, H é máximo monótono, pelo Exemplo 2.8. Portanto, $\mathrm{Im}(H) = X^*$, pelo Teorema 2.16.

2.18 - Exemplo: Se f é uma função convexa própria e s.c.i., ∂f é um operador m-monótono (Exemplo 2.7, Observação iii)). Quando X é reflexivo e X e X^* são lisos, ∂f é, pelo Teorema 2.13, máximo monótono. Em particular, se $C \subset X$ é convexo e fechado, X é reflexivo e X e X^* são lisos, então ∂I_C é máximo monótono.

2.19 - Exemplo: O operador $\tilde{\beta}$ descrito em 1.1 é monótono. Demonstra-se (Gomes [1], pag.20) que, quando $0 \in \beta(0)$ ou Ω é limitado, $\tilde{\beta}$ é m-monótono. Logo, $\tilde{\beta}$ é máximo monótono, uma vez que os espaços de Hilbert satisfazem as hipóteses do Teorema 2.13.

2.20 - Exemplo: Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular e Δ o laplaciano. O operador A de $L^2(\Omega)$ definido por

$$D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \right\}$$

$$Au = -\Delta u \quad \forall\ u \in D(A)$$

(onde $\partial u/\partial n$ é a derivada de u na direção da normal exterior a $\partial\Omega$) é máximo monótono. É monótono porque

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \langle A(u-v), u-v\rangle = \int_\Omega (-\Delta(u-v))(u-v)dx = \int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 dx \geq 0.$$

É m-monótono porque, pelo que se sabe da teoria das equações diferenciais elíticas, para cada $v \in L^2(\Omega)$ existe um $u \in D(A)$ tal que $u - \Delta u = v$, i.e., $\mathrm{Im}(I + A) = L^2(\Omega)$. Logo, pelo Teorema 2.13, A é máximo monótono.

Como foi visto no Exemplo I-3.5, a função $\varphi : L^2(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ definida por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

é s.c.i. e, como foi visto no Exemplo I-3.17, essa função é convexa e própria. Seu domínio efetivo é $H^1(\Omega)$. De acordo com o Exemplo 2.18, $\partial\varphi$ é, então, um operador máximo monótono de $L^2(\Omega)$. Vamos mostrar que $A = \partial\varphi$.

Seja, de fato, $u \in D(A)$ e $v \in \mathrm{De}(\varphi)$. Tem-se

$$\langle Au, v - u\rangle = \int_\Omega (-\Delta u)(v-u)dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx = \varphi(v) - \varphi(u),$$

donde se segue que $Au \in \partial\varphi(u)$, $\forall\ u \in D(A)$. Logo, $A \subset \partial\varphi$ e, como A é máximo monótono, $A = \partial\varphi$.

2.21 - Exemplo: Se A é máximo monótono e X é reflexivo, então A^{-1} é máximo monótono por b) do Corolário 2.4. Em particular se X é reflexivo, X e X^* são lisos e $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ é convexa, própria e s.c.i., $(\partial f)^{-1}$ é um operador máximo monótono. Vamos mostrar que $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$, onde f^* é função polar de f.

Seja, com efeito, $(x^*, x) \in (\partial f)^{-1}$. Daí vem $(x, x^*) \in \partial f$ ou, o que é o mesmo, $x^* \in \partial f(x)$. Pela Proposição I-4.10 tem-se, então, $f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - f(x)$ e, como

$$f^*(y^*) = \sup_{x\in X}\{\langle y^*, x\rangle - f(x)\} \geq \langle y^*, x\rangle - f(x)$$

segue-se que

$$f^*(y^*) - f^*(x^*) \geq \langle x, y^* - x^*\rangle,$$

o que mostra que $x \in \partial f^*(x^*)$, ou seja $(x^*, x) \in \partial f^*$. Logo $(\partial f)^{-1} \subset \partial f^*$ e, como $(\partial f)^{-1}$ é máximo monótono, $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$.

3. O resolvente e a aproximação de Yosida

3.1 - Proposição: *Seja X um espaço de Banach reflexivo, X e X^* lisos e A um operador máximo monótono de X. Então, para cada $x_0 \in X$ e cada $\lambda > 0$ a equação*

$$F(x - x_0) + \lambda Ax \ni 0 \tag{3.1}$$

tem uma única solução $x = x_\lambda$ e tem-se $x_\lambda \in D(A)$.

Demonstração: Seja $\tilde{A}: X \to X^*$ o operador definido por

$$D(\tilde{A}) = D(A) - x_0,$$

$$\widetilde{A}x = A(x + x_0), \qquad \forall x \in D(A) - x_0.$$

Pela Proposição 1.5, $\tilde{A}$ é um operador monótono e pelo Corolário 2.4 é máximo monótono; logo, m-monótono, pelo Teorema 2.13. Portanto, a equação

$$(F + \lambda\widetilde{A})x \ni 0$$

tem uma solução $\tilde{x}_\lambda \in D(\widetilde{A})$. Pondo $x_\lambda = x_0 + \tilde{x}_\lambda$ temos, então, $x_\lambda \in D(A)$ e

$$F(x_\lambda - x_0) + \lambda\widetilde{A}(x_\lambda - x_0) \ni 0$$

ou seja

$$F(x_\lambda - x_0) + \lambda A x_\lambda \ni 0$$

i.e., (3.1) tem, realmente, uma solução. Tem uma só solução porque, se x'_λ também é solução de (3.1), temos

$$(x_\lambda - x_0, -F(x_\lambda - x_0)) \in \lambda\widetilde{A}, \quad (x'_\lambda - x_0, -F(x'_\lambda - x_0)) \in \lambda\widetilde{A}$$

donde

$$\langle (x_\lambda - x_0) - (x'_\lambda - x_0), -F(x_\lambda - x_0) + F(x'_\lambda - x_0)\rangle \geq 0.$$

Logo

$$0 \geq \|x_\lambda - x_0\|^2 + \|x'_\lambda - x_0\|^2 - \langle x_\lambda - x_0, F(x'_\lambda - x_0)\rangle - \langle x'_\lambda - x_0, F(x_\lambda - x_0)\rangle \geq$$

$$\geq \|x_\lambda - x_0\|^2 + \|x'_\lambda - x_0\|^2 - 2\|x_\lambda - x_0\| \cdot \|x'_\lambda - x_0\| = (\|x_\lambda - x_0\| - \|x'_\lambda - x_0\|)^2 \geq 0$$

e, daí,

$$\langle x_\lambda - x_0, F(x'_\lambda - x_0)\rangle = \|x_\lambda - x_0\|^2 = \|F(x'_\lambda - x_0)\|^2.$$

Mas X e X^* sendo lisos, dessa relação vem $x'_\lambda = x_\lambda$.

3.2 - Definição: Diz-se *resolvente* de $A\colon X \to X^*$, onde X é um espaço de Banach reflexivo e X e X^* são lisos, a aplicação $J_\lambda\colon X \to X$ definida por $J_\lambda x_0 = x_\lambda$, onde x_λ é a única solução da equação (3.1); diz-se *aproximação* de Yosida de A a aplicação $A_\lambda\colon X \to X^*$ definida por $A_\lambda x_0 = (1/\lambda)F(x_0 - x_\lambda)$.

3.3 - Proposição: $\forall\ \lambda > 0$ *e* $\forall\ x \in X, (J_\lambda x, A_\lambda x) \in A.$

Com efeito, $\forall\ x \in X$,

$$F(x_\lambda - x) + \lambda A x_\lambda \ni 0 \Rightarrow (-1/\lambda)F(x_\lambda - x) \in A x_\lambda \Rightarrow$$

$$(1/\lambda)F(x - x_\lambda) \in A x_\lambda \Rightarrow A_\lambda x \in A J_\lambda x \Rightarrow (J_\lambda x, A_\lambda x) \in A.$$

3.4 - Caso Particular: Quando X é um espaço de Hilbert, $F = I$. Nesse caso tem-se, pois,

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad \text{e} \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

3.5 - Lema: *Seja X reflexivo e A um operador máximo monótono de X.*

Se $(u_n, u_n^*) \in A, \quad n = 1, \dots, u_n \rightharpoonup u, u_n^* \rightharpoonup u^*$ e

$$\limsup_{m,n\to\infty} \langle u_n - u_m,\ u_n^* - u_m^* \rangle \leq 0, \tag{3.2}$$

então $(u, u^*) \in A$ e $\langle u_n, u_n^* \rangle \to \langle u, u^* \rangle$.

Demonstração: De (3.2) e da monotonia de A vem

$$\lim_{m,n\to\infty} \langle u_n - u_m, u_n^* - u_m^* \rangle = 0. \tag{3.3}$$

Como (u_n) e (u_n^*) são, por hipótese, seqüências fracamente convergentes, resulta que (u_n) e (u_n^*) são limitadas, donde $(\langle u_n, u_n^* \rangle)$ é limitada pois $|\langle u_n, u_n^* \rangle| \leq \|u_n\| \|u_n^*\|$; logo, uma subseqüência $(\langle u_{n_k}, u_{n_k}^* \rangle)$ converge. Seja $l = \lim\limits_{k\to\infty} \langle u_{n_k}, u_{n_k}^* \rangle$. Por (3.3) tem-se

$$0 = \lim_{i\to\infty} (\lim_{k\to\infty} \langle u_{n_i} - u_{n_k}, u_{n_i}^* - u_{n_k}^* \rangle) =$$

$$\lim_{i\to\infty} (\langle u_{n_i}, u_{n_i}^* \rangle - \langle u_{n_i}, u^* \rangle - \langle u, u_{n_i}^* \rangle + l) = 2l - 2\langle u, u^* \rangle,$$

donde $\langle u, u^* \rangle = l$ e, portanto, $\langle u_n, u_n^* \rangle \to \langle u, u^* \rangle$, pela unicidade de l. Além disto, $\langle v - u_n, v^* - u_n^* \rangle \geq 0 \quad \forall\, (v, v^*) \in A$ e $n \in \mathbb{N}$; logo

$$\langle v - u, v^* - u^* \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle v - u_n, v^* - u_n^* \rangle \geq 0 \quad \forall\ (v, v^*) \in A,$$

donde $(u, u^*) \in A$, pelo Teorema 2.3.

3.6 - Nota: O Lema 3.5 continua válido se (3.2) for substituída por

$$\lim_{n\to\infty} \sup \langle u_n - u, u_n^* - u^* \rangle \leq 0.$$

3.7 - Teorema: *Sejam X reflexivo, X e X^* lisos e $A\colon X \to X^*$ máximo monótono. Então,*

i) *J_λ e A_λ são aplicações limitadas nos conjuntos limitados;*

ii) *A_λ é um operador monótono;*

iii) *A_λ é demicontínuo e J_λ contínuo de X, com a topologia da norma, em X com a topologia fraca;*

iv) $\|A_\lambda x\| \leq |Ax|, \quad \forall\ x \in D(A);$

v) *$\overline{D(A)}$ é convexo e* $\lim_{\lambda\to 0+} J_\lambda x = x, \quad \forall x \in \overline{D(A)}.$

Demonstração: i) Seja $(y, y^*) \in A$. Como $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A$ temos $\langle J_\lambda x - y, A_\lambda x - y^* \rangle \geq 0$. Daí vem

$$\langle J_\lambda x - x + x - y,\ \frac{1}{\lambda} F(x - J_\lambda x) - y^* \rangle \geq 0,$$

donde

$$\|x - J_\lambda x\|^2 - \lambda \|x - J_\lambda x\| \cdot \|y^*\| - \|x - y\| \cdot \|x - J_\lambda x\| - \lambda \|x - y\| \cdot \|y^*\| \leq 0.$$

Logo, $\|x - J_\lambda x\|$ está compreendido entre as raízes do trinômio $\xi^2 - p(x)\xi - q(x) \leq 0$, onde $p(x) = \lambda\|y^*\| + \|x - y\|$ e $q(x) = \lambda\|x - y\| \cdot \|y^*\|$. E como p e q são funções limitadas nos conjuntos limitados, $\|x - J_\lambda x\|$ é limitado nesses conjuntos, o mesmo acontecendo, pois, com $J_\lambda x$. De $A_\lambda x = (1/\lambda) F(x - J_\lambda x)$, e do que se acaba de demonstrar, resulta, imediatamente, que A_λ é uma aplicação limitada nos conjuntos limitados.

ii) Temos, $\forall\ x, y \in X$,

$$\begin{aligned}\langle x - y, A_\lambda x - A_\lambda y \rangle = \langle (x - J_\lambda x) - (y - J_\lambda y), A_\lambda x - A_\lambda y \rangle +\\ + \langle J_\lambda x - J_\lambda y, A_\lambda x - A_\lambda y \rangle \geq 0,\end{aligned}$$

uma vez que a primeira parcela do segundo membro é minorada por $(1/\lambda)(\|x-J_\lambda x\|-\|y-J_\lambda y\|)^2$ e a segunda é positiva porque $(J_\lambda z, A_\lambda z)\in A \quad \forall z\in X$ e A é monótono.

iii) Seja $x_n \to x$. Para simplicidade da escrita ponhamos $y_n = J_\lambda x_n$ e $y_n^* = A_\lambda x_n$. Então $\{x_n\}$ é um conjunto limitado, donde, por i), $\{y_n\}$ e $\{y_n^*\}$ são conjuntos limitados, o mesmo acontecendo com $\{F(y_n - x_n)\}$ uma vez que F conserva a norma. Pela reflexividade de X existem, então, uma seqüência (n_k) de inteiros positivos, $y\in X$ e $y^*, w^*\in X^*$ tais que

$$y_{n_k}\rightharpoonup y,\ \ y^*_{n_k}\rightharpoonup y^* \quad \text{e} \quad F(y_{n_k}-x_{n_k})\rightharpoonup w^*. \tag{3.4}$$

Além disto, pela definição de A_λ,

$$F(y_n - x_n) + \lambda y_n^* = 0. \tag{3.5}$$

Daí vem

$$\langle x_m - x_n, F(y_n - x_n) - F(y_m - x_m)\rangle =$$
$$= \langle (y_n - x_n) - (y_m - x_m), F(y_n - x_n) - F(y_m - x_m)\rangle + \lambda\langle y_n - y_m, y_n^* - y_m^*\rangle.$$

Mas o primeiro membro dessa igualdade tende a zero quando $m, n\to\infty$, uma vez que a seqüência $(F(y_k - x_k))$ é, como já foi dito, limitada, e ambas as parcelas do segundo são não negativas, visto que F e A são operadores monótonos. Logo,

$$\lim_{m,n\to\infty} \langle (y_n - x_n) - (y_m - x_m), F(y_n - x_n) - F(y_m - x_m)\rangle = 0 \tag{3.6}$$

e

$$\lim_{m,n\to\infty} \langle y_n - y_m, y_n^* - y_m^*\rangle = 0. \tag{3.7}$$

De (3.4) e (3.7) vem, pelo Lema 3.5,

$$(y, y^*) \in A. \tag{3.8}$$

Das hipóteses decorre, pelo Exemplo 2.8, que F é máximo monótono. Além disto, pondo $u_{n_k} = y_{n_k} - x_{n_k}$ tem-se, por (3.4), $u_{n_k} \rightharpoonup y - x$, $F(u_{n_k}) \rightharpoonup \omega^*$ e, por (3.6),

$$\lim_{i,k\to\infty} \langle u_{n_k} - u_{n_i}, F(u_{n_k}) - F(u_{n_i})\rangle = 0.$$

Segue-se, pelo Lema 3.5, que $\omega^* = F(y-x)$. Mas, então, por (3.5) e levando (3.4) em consideração, tem-se $F(y-x) + \lambda y^* = 0$. Decorre daí e de (3.8) que $y = J_\lambda x$ e $y^* = A_\lambda x$. Logo, por (3.4), $J_\lambda x_n \rightharpoonup J_\lambda x$ e $A_\lambda x_n \rightharpoonup A_\lambda x$, q.e.d..

iv) Seja $(x, x^*) \in A$. Como $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A$ temos $\langle J_\lambda x - x, A_\lambda x - x^* \rangle \geq 0$, donde

$$\left\langle J_\lambda x - x, \frac{1}{\lambda} F(x - J_\lambda x) \right\rangle - \langle J_\lambda x - x, x^* \rangle \geq 0$$

ou

$$\left\langle x - J_\lambda x, \frac{1}{\lambda} F(x - J_\lambda x) \right\rangle \leq \langle x - J_\lambda x, x^* \rangle$$

ou, ainda,

$$\left\| A_\lambda x \right\| \leq \|x^*\| \qquad \forall\, x^* \in Ax.$$

Logo, $\left\| A_\lambda x \right\| \leq |Ax|$.

v) Seja $(y, y^*) \in A$ e $x \in X$. Temos $\langle J_\lambda x - y, A_\lambda x - y^* \rangle \geq 0$, donde $\langle J_\lambda x - y, A_\lambda x \rangle - \langle J_\lambda x - y, y^* \rangle \geq 0$. Daí vem $\langle J_\lambda x - x + x - y, A_\lambda x \rangle - \langle J_\lambda x - y, y^* \rangle \geq 0$ e, portanto,

$$\|x - J_\lambda x\|^2 - \langle x - y, F(x - J_\lambda x) \rangle + \lambda \langle J_\lambda x - y, y^* \rangle \leq 0 \tag{3.8}$$

Seja (λ_n) tal que $\lambda_n > 0$ e $\lambda_n \to 0$. Por i), tem-se $\|x - J_{\lambda_n} x\| \leq C(\lambda_n ||z^*||, ||x - z||)$ onde $(z, z^*) \in A$. Portanto, o conjunto $\{F(x - J_{\lambda_n} x)\}$, $n = 1, \ldots$, é limitado em X^*. Existe, pois, uma subseqüência (λ'_n) de (λ_n) e um $x^* \in X^*$ tais que $F(x - J_{\lambda'_n} x) \rightharpoonup x^*$. Segue-se, então, de (3.8) que

$$\limsup_{n \to \infty} \left\| x - J_{\lambda'_n} x \right\|^2 - \langle x - y, x^* \rangle \leq 0,$$

para cada $y \in D(A)$ e, portanto, para cada $y \in \overline{\operatorname{conv} D(A)} = C$. Logo, se $x \in C$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda x = x$. Mas $J_\lambda x \in D(A)$, $\forall x \in X$ e, portanto, $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda x \in \overline{D(A)}$, se existir. Em particular, se $x \in C$ temos $x = \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x \in \overline{D(A)}$, o que vem mostrar que $C \subset \overline{D(A)}$, i.e., $\overline{D(A)}$ é convexo e $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = x \ \forall x \in \overline{D(A)}$.

3.8 - Corolário: *A_λ é um operador máximo monótono.*

Demonstração: Decorrência imediata do Exemplo 2.8 e de ii) e iii) do Teorema 3.7.

3.9 - Proposição: *Seja X um espaço de Hilbert e A um operador máximo monótono. Então, J_λ é uma contração e A_λ uma aplicação lipschitziana com constante $2/\lambda$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in X$. Temos $J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1} x$ (Caso Particular 3.4), donde $(I + \lambda A) J_\lambda x = x$ e, daí, $x = J_\lambda x + \lambda A J_\lambda x = J_\lambda x + \lambda A_\lambda x$. Pondo $x_1 = J_\lambda x$ e $y_1 = A_\lambda x$ tem-se, então, $x = x_1 + \lambda y_1$ com $(x_1, y_1) \in A$. Analogamente, $y = x_2 + \lambda y_2$, $(x_2, y_2) \in A$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 \\
&= \langle (x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2), (x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2) \rangle \\
&= \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda^2 \|y_1 - y_2\|^2 + 2\lambda \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle.
\end{aligned}
$$

Mas A sendo monótono, $\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$; logo

$$
\|x - y\| \geq \|x_1 - x_2\| = \|J_\lambda x - J_\lambda y\|
$$

i.e., J_λ é uma contração. Daí vem

$$
\begin{aligned}
\|A_\lambda x - A_\lambda y\| &= \left\| \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)x - \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)y \right\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\left(\|x - y\| + \|J_\lambda x - J_\lambda y\|\right) \leq \frac{2}{\lambda}\|x - y\|
\end{aligned}
$$

i.e., A_λ é lipschitziana com constante $2/\lambda$.

4. Perturbação dos operadores máximo monótonos

4.1 - A soma de dois operadores monótonos é um operador monótono, como foi visto na Proposição 1.4. Porém a soma de dois operadores máximo monótonos não é necessariamente máximo monótona. Para ver isto é bastante considerar os operadores máximo monótonos ∂I_{C_1} e ∂I_{C_2}, onde C_1 e C_2 são dois subconjuntos convexos e fechados de X e tais que $C_1 \cap C_2 = \phi$. A soma desses dois operadores é o operador ϕ, contido propriamente em todo operador monótono não vazio.

A esse respeito vamos inicialmente estudar um resultado obtido por Browder [3].

4.2 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo, X e X^* lisos, $A\colon X \to X^*$ um operador máximo monótono e H um operador hemicontínuo, monótono, que transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados e tal que $D(H) = X$. Então, $H + A$ é máximo monótono.*

Demonstração: Por iii) do Corolário 2.4 não é restritivo supor que $0 \in D(A)$. Das condições impostas a H e das propriedades do operador dualidade decorre, imediatamente, que o operador $F + H$ é monótono e hemicontínuo, transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados e $D(F + H) = X$. Além disto $F + H$ é coercivo. Com efeito, de

$$\langle x, Hx\rangle = \langle x - 0, Hx - H(0)\rangle + \langle x, H(0)\rangle \geq -\|H(0)\| \cdot \|x\|$$

vem

$$\langle x, (F + H)x\rangle = \langle x, Fx\rangle + \langle x, Hx\rangle \geq \|x\|^2 - \|H(0)\| \cdot \|x\| = (\|x\| - \|H(0)\|)\,\|x\|\,.$$

Pondo $\alpha(\|x\|) = \|x\| - \|H(0)\|$ temos $\alpha(\|x\|)\,\|x\| \leq \langle x, (F + H)x\rangle$, com $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\alpha(\rho) \to \infty$ quando $\rho \to \infty$. Logo, pelo Teorema 2.11, $\mathrm{Im}(F + H + A) = X^*$, donde $H + A$ é m-monótono e, portanto, máximo monótono, pelo Teorema 2.13, q.e.d..

Usando o resultado que se acaba de demonstrar, Brezis, Crandall e Pazy [1] estabeleceram um critério geral que passaremos a estudar. Preliminarmente um lema.

4.3 - Lema: *Seja X reflexivo, X e X^* lisos e $A: X \to X^*$ um operador máximo monótono. Se $\lambda_n \to 0$, $x_n \rightharpoonup x$, $A_{\lambda_n} x_n \rightharpoonup y^*$ e*

$$\limsup_{m,n\to\infty} \langle x_n - x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m \rangle \leq 0,$$

então $(x, y^*) \in A$ e

$$\lim_{m,n\to\infty} \langle x_n - x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m \rangle = 0.$$

Demonstração: De $A_{\lambda_n} x_n \rightharpoonup y^*$ segue-se que $\left\| A_{\lambda_n} x_n \right\|$ é limitado quando $n \to \infty$ e como, pela Definição 3.2, $F(x_n - J_{\lambda_n} x_n) = \lambda_n A_{\lambda_n} x_n$ tem-se

$$\left\| x_n - J_{\lambda_n} x_n \right\| = \lambda_n \left\| A_{\lambda_n} x_n \right\| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Mas, então, $J_{\lambda_n} x_n \to x$ e

$$\limsup_{m,n\to\infty} \langle J_{\lambda_n} x_n - J_{\lambda_m} x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m \rangle =$$

$$= \limsup_{m,n\to\infty} \langle J_{\lambda_n} x_n - x_n, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m \rangle + \limsup_{m,n\to\infty} \langle x_m - J_{\lambda_m} x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m \rangle +$$

$$+ \limsup_{m,n\to\infty} \langle x_n - x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m \rangle = \limsup_{m,n\to\infty} \langle x_n - x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m \rangle \leq 0.$$

Segue-se daí, pelo Lema 3.5 com $u_n = J_{\lambda_n} x_n$ e $u_n^* = A_{\lambda_n} x_n$ que $(x, y^*) \in A$ e, como A é monótono e $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A \ \forall x \in X$, que

$$\lim_{m,n\to\infty} \langle J_{\lambda_n} x_n - J_{\lambda_m} x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{m,n\to\infty} \langle x_n - x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m \rangle = 0.$$

4.4 - Das propriedades da aproximação de Yosida (Teorema 3.7) e do Teorema 4.2 decorre que, se X for reflexivo, X e X^* forem lisos e A e B operadores máximo monótonos de X, então $A + B_\lambda$ é máximo monótono e, portanto, m-monótono, pelo Teorema 2.13. Logo a equação

$$Fx + x^* + B_\lambda x = y^*, \quad x^* \in Ax \tag{4.1}$$

tem uma solução para todo $y^* \in X^*$ e os argumentos usados na Proposição 3.1 mostram que é única.

4.5 - Teorema: *Seja X reflexivo, X e X^* lisos, A e B operadores máximo monótonos de X e x_λ a solução de* (4.1). *Então, $y^* \in \mathrm{Im}(F+A+B)$ se, e só se, $\|B_\lambda x_\lambda\|$ é limitado quando $\lambda \to 0$.*

Demonstração: Se $y^* \in \mathrm{Im}(F+A+B)$ então existe $x \in X$ tal que $y^* = Fx + x_1^* + x_2^*$, $(x, x_1^*) \in A$, $(x, x_2^*) \in B$. Daí vem, levando em conta que x_λ é a solução de (4.1) e que F e A são monótonos,

$$\begin{aligned} 0 \le \langle x_\lambda - x, Fx_\lambda - Fx \rangle &= \langle x_\lambda - x, x_1^* - x_\lambda^* \rangle + \langle x_\lambda - x, x_2^* - B_\lambda x_\lambda \rangle \\ &\le \langle x_\lambda - x, x_2^* - B_\lambda x_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

Mas como, por definição, $B_\lambda x_\lambda = (1/\lambda) F(x_\lambda - J_\lambda x_\lambda)$ tem-se $x_\lambda = J_\lambda x_\lambda + \lambda F^{-1}(B_\lambda x_\lambda)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle J_\lambda x_\lambda + \lambda F^{-1}(B_\lambda x_\lambda) - x,\, x_2^* - B_\lambda x_\lambda \rangle \\ &= \langle J_\lambda x_\lambda - x,\, x_2^* - B_\lambda x_\lambda \rangle + \langle \lambda F^{-1}(B_\lambda x_\lambda),\, x_2^* - B_\lambda x_\lambda \rangle \\ &\le \langle \lambda F^{-1}(B_\lambda x_\lambda),\, x_2^* - B_\lambda x_\lambda \rangle \end{aligned}$$

uma vez que B é monótono e $(J_\lambda x_\lambda, B_\lambda x_\lambda) \in B$. Mas daí vem

$$\left\|B_\lambda x_\lambda\right\|^2 \leq \langle F^{-1}(B_\lambda x_\lambda), x_2^*\rangle$$

e, portanto, tendo em vista que X e X^* são lisos, $\left\|B_\lambda x_\lambda\right\| \leq \|x_2^*\|$, donde a necessidade da condição.

Reciprocamente, vamos supor que $\left\|B_\lambda x_\lambda\right\|$ seja limitado quando $\lambda \to 0$ e seja $(x_0, x_0^*) \in A$. Como x_λ é solução de (4.1) tem-se

$$Fx_\lambda + x_\lambda^* + B_\lambda x_\lambda = y^*. \tag{4.2}$$

Daí vem

$$\langle x_\lambda - x_0, Fx_\lambda + x_\lambda^* + B_\lambda x_\lambda - y^*\rangle = 0$$

donde

$$\left\|x_\lambda\right\|^2 - \langle x_0, Fx_\lambda\rangle + \langle x_\lambda - x_0, x_\lambda^*\rangle + \langle x_\lambda - x_0, B_\lambda x_\lambda\rangle - \langle x_\lambda - x_0, y^*\rangle = 0.$$

Mas A sendo monótono, $\langle x_\lambda - x_0, x_\lambda^* - x_0^*\rangle \geq 0$, donde $\langle x_\lambda - x_0, x_\lambda^*\rangle \geq \langle x_\lambda - x_0, x_0^*\rangle$. Logo,

$$\left\|x_\lambda\right\|^2 - \|x_0\| \left\|x_\lambda\right\| - \left\|x_\lambda - x_0\right\| \|x_0^*\| - \left\|x_\lambda - x_0\right\| \left\|B_\lambda x_\lambda\right\| - \left\|x_\lambda - x_0\right\| \|y^*\| \leq 0$$

e, portanto, $\left\|x_\lambda\right\|^2 - P\left\|x_\lambda\right\| - Q \leq 0$, onde P e Q são funções limitadas quando $\lambda \to 0$. Logo $\left\|x_\lambda\right\|$ é limitado quando $\lambda \to 0$ e, portanto, por (4.2), $\left\|x_\lambda^*\right\|$ é limitado quando $\lambda \to 0$. Como o espaço X é, por hipótese, reflexivo existe, então, uma seqüência (λ_n), $x \in X$ e x_1^*, x_2^*, $\omega^* \in X^*$ tais que $\lambda_n \to 0$, $x_{\lambda_n} \rightharpoonup x$, $x_{\lambda_n}^* \rightharpoonup x_1^*$, $B_{\lambda_n} x_{\lambda_n} \rightharpoonup x_2^*$ e $Fx_{\lambda_n} \rightharpoonup \omega^*$. Tem-se por (4.2)

$$Fx_{\lambda_n} + x_{\lambda_n}^* + B_{\lambda_n} x_{\lambda_n} = Fx_{\lambda_m} + x_{\lambda_m}^* + B_{\lambda_m} x_{\lambda_m} = y^*.$$

Logo,

$$\langle x_{\lambda_n} - x_{\lambda_m}, (Fx_{\lambda_n} + x^*_{\lambda_n}) - (Fx_{\lambda_m} + x^*_{\lambda_m})\rangle + \langle x_{\lambda_n} - x_{\lambda_m}, B_{\lambda_n}x_{\lambda_n} - B_{\lambda_m}x_{\lambda_m}\rangle = 0$$

e, como $F + A$ é monótono,

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_{\lambda_n} - x_{\lambda_m}, B_{\lambda_n}x_{\lambda_n} - B_{\lambda_m}x_{\lambda_m}\rangle \leq 0.$$

Daí vem, pelo Lema 4.3, $(x, x^*_2) \in B$ e

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_{\lambda_n} - x_{\lambda_m}, B_{\lambda_n}x_{\lambda_n} - B_{\lambda_m}x_{\lambda_m}\rangle = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_{\lambda_n} - x_{\lambda_m}, (Fx_{\lambda_n} + x^*_{\lambda_n}) - (Fx_{\lambda_m} + x^*_{\lambda_m})\rangle = 0$$

e como F e A são monótonos

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_{\lambda_n} - x_{\lambda_m}, Fx_{\lambda_n} - Fx_{\lambda_m}\rangle = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_{\lambda_n} - x_{\lambda_m}, x^*_{\lambda_n} - x^*_{\lambda_m}\rangle = 0.$$

Pelo Lema 3.5 segue-se, daí, que $(x, \omega^*) \in F$ e $(x, x^*_1) \in A$. Finalmente, de

$$Fx_{\lambda_n} + x^*_{\lambda_n} + B_{\lambda_n}x_{\lambda_n} = y^*$$

vem, no limite quando $n \to \infty$, $Fx + x^*_1 + x^*_2 = y^*$ com $(x, x^*_1) \in A$ e $(x, x^*_2) \in B$, donde $y \in \mathrm{Im}(F + A + B)$, q.e.d..

Com o uso do Teorema 4.5 tem-se uma demonstração da generalização do Teorema 4.2, devida a Rockafellar [1], que segue.

4.6 - Teorema: *Seja X reflexivo e X e X^* lisos. Sejam A e B dois operadores máximo monótonos de X tais que* $(\operatorname{int} D(A)) \cap D(B) \neq \phi$. *Então $A + B$ é máximo monótono.*

Demonstração: Vamos supor que $0 \in (\operatorname{int} D(A)) \cap D(B)$, $0 \in A(0)$ e $0 \in B(0)$ o que, pelo Corolário 2.4, não afeta a generalidade. Seja $y^* \in X^*$ e $\lambda > 0$. Pelas considerações feitas em 4.4, existe $x_\lambda \in X$ tal que

$$Fx_\lambda + x^*_\lambda + B_\lambda x_\lambda = y^*, \quad (x_\lambda, x^*_\lambda) \in A. \tag{4.3}$$

Daí vem

$$\left\|x_\lambda\right\|^2 + \langle x_\lambda, x^*_\lambda\rangle + \langle x_\lambda, B_\lambda x_\lambda\rangle = \langle x_\lambda, y^*\rangle, \quad (x_\lambda, x^*_\lambda) \in A. \tag{4.4}$$

Como $0 \in A(0)$ temos $\langle x_\lambda, x^*_\lambda\rangle \geq 0$ e, como de $0 \in B(0)$ vem $B_\lambda(0) = 0$, temos $\langle x_\lambda, B_\lambda x_\lambda\rangle \geq 0$. Portanto, de (4.4) vem

$$\left\|x_\lambda\right\| \leq \|y^*\|. \tag{4.5}$$

Daí e, novamente, de (4.4),

$$\langle x_\lambda, x^*_\lambda\rangle \leq \langle x_\lambda, y^*\rangle \leq \left\|x_\lambda\right\| \|y^*\| \leq \|y^*\|^2. \tag{4.6}$$

Além disto, como $0 \in \operatorname{int} D(A)$, A é localmente limitado no ponto 0, pelo Teorema 1.7. Logo existe $\rho > 0$ tal que se $\|x\| < \rho$ então $x \in D(A)$ e $\|x^*\| \leq C_1$, $\forall x^* \in Ax$. Mas pela monotonia de A, $\langle x - x_\lambda, x^* - x^*_\lambda\rangle \geq 0$ donde

$$\langle x, x^*_\lambda\rangle \leq \langle x_\lambda, x^*_\lambda\rangle + \langle x, x^*\rangle - \langle x_\lambda, x^*\rangle.$$

Portanto, $\forall\, x$ tal que $\|x\| < \rho$ tem-se, levando (4.5) e (4.6) em conta,

$$\langle x, x^*_\lambda\rangle \leq \|y^*\|^2 + \|x\| \|x^*\| + \|y^*\| . \|x^*\| \leq \|y^*\|^2 + C_1\rho + C_1 \|y^*\|.$$

Pelo Teorema de Banach-Steinhaus resulta, então, que $\left\|x^*_\lambda\right\|$ é limitado, i.e., existe uma constante C_2 tal que $\left\|x^*_\lambda\right\| \leq C_2$, $\forall\, \lambda > 0$. Daí, de (4.3) e de (4.5) vem $\left\|B_\lambda x_\lambda\right\| \leq 2\|y^*\| + C_2 = C =$ constante. Logo, pelo Teorema 4.5, $A+B$ é m-monótono e, portanto, máximo monótono pelo Teorema 2.13.

O lema a seguir, que admitiremos sem demonstração (a demonstração encontra-se em Brezis, Crandall e Pazy [1]), é um refinamento do Teorema de Asplund (Teor.I-5.16).

4.7 - Lema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\|\cdot\|$ sua norma. A cada $a > 1$ corresponde uma norma $\|\cdot\|_a$ de X tal que:*

i) *X e X^* são estritamente convexos quando munidos das normas $\|\cdot\|_a$ e sua dual $\|\cdot\|_a^*$, respectivamente.*

ii) $a^{-1}\|\cdot\|_a \leq \|\cdot\| \leq a\|\cdot\|_a,\ \ a^{-1}\|\cdot\|_a^* \leq \|\cdot\|^* \leq a\|\cdot\|_a^*.$

4.8 - Teorema: *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e A e B dois operadores máximo monótonos de X tais que*

i) *$D(A) \subset D(B)$.*

ii) *$|Bx| \leq k(\|x\|)\,|Ax| + c(\|x\|)$, onde k e c são funções reais não decrescentes e $k(r) < 1\ \ \forall\, r > 0$.*

Então, $A + B$ é máximo monótono.

Demonstração: Vamos supor que $0 \in D(A)$, $0 \in A(0)$ e $0 \in B(0)$ o que, pelo Corolário 2.4, não implica em quebra da generalidade. Pelo Teorema 2.13 e levando o Lema 4.7 em consideração, é bastante demonstrar que existe um $a > 1$ tal que relativamente às normas $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_a^*$, $A+B$ é m-monótono. É bastante, pois, demonstrar que se $y^* \in X^*$, então existe $a > 1$ e $x \in X$ tais que

$$(F_a + A + B)x \ni y^*,$$

onde F_a é o operador dualidade relativo às normas $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_a^*$. Mas, então, pelo Teorema 4.5, é bastante demonstrar que $\left\|B_\lambda^a x_\lambda\right\|_a^*$ é limitado quando $\lambda \to 0$, onde B_λ^a é a aproximação de Yosida derivada de $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_a^*$, e x_λ satisfaz

$$F_a x_\lambda + x_\lambda^* + B_\lambda^a x_\lambda = y^*, \quad (x_\lambda, x_\lambda^*) \in A. \tag{4.7}$$

Para simplificar a escrita escreveremos simplesmente $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_a$ em vez de $\|\cdot\|^*$ e $\|\cdot\|_a^*$. De (4.7) vem, para todo $a > 1$,

$$\langle x_\lambda, F_a x_\lambda\rangle + \langle x_\lambda, x_\lambda^*\rangle + \langle x_\lambda, B_\lambda^a x_\lambda\rangle = \langle x_\lambda, y^*\rangle. \tag{4.8}$$

Mas de $0 \in A(0)$ vem, pela monotonia de $A, \langle x_\lambda, x_\lambda^*\rangle \geq 0$ e de $0 \in B(0)$ vem, por iv) do Teorema 3.7, $B_\lambda^a(0) = 0$, donde $\langle x_\lambda, B_\lambda^a x_\lambda\rangle \geq 0$, pela monotonia de B_λ^a. Por (4.8) tem-se, pois, $\left\|x_\lambda\right\|_a \leq \|y^*\|_a$, donde, por ii) do Lema 4.7,

$$\left\|x_\lambda\right\|_a \leq a\,\|y^*\|\,. \tag{4.9}$$

Seja $r = 4\,\|y^*\|$ e o número a tal que $1 < a < 2$ e $a^2k(r) < 1$. Tendo em vista ii) do Lema 4.7, iv) do Teorema 3.7, (4.7) e (4.9) temos

$$\begin{aligned}
a^{-1}\,|Ax_\lambda| &\leq \left|Ax_\lambda\right|_a \leq \left\|x^*_\lambda\right\|_a \leq \|y^*\|_a + \left\|F_a x_\lambda\right\|_a + \left\|B^a_\lambda x_\lambda\right\|_a \\
&= \|y^*\|_a + \left\|x_\lambda\right\|_a + \left\|B^a_\lambda x_\lambda\right\|_a \leq 2a\,\|y^*\| + \left|Bx_\lambda\right|_a \\
&\leq 2a\,\|y^*\| + a\left|Bx_\lambda\right| \leq 2a\,\|y^*\| + a[k(\left\|x_\lambda\right\|)\,|Ax_\lambda| + c(\left\|x_\lambda\right\|)] \\
&\leq \frac{ar}{2} + ak(r)\left|Ax_\lambda\right| + a\,c(r)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

e, daí,

$$\left|Ax_\lambda\right| \leq a^2(1 - a^2k(r))^{-1}\left(\frac{r}{2} + c(r)\right).$$

Logo, $\left|Ax_\lambda\right|$ é limitado quando $\lambda \to 0$ donde, ainda por (4.10), o mesmo acontece com $\left|Bx_\lambda\right|_a$. Logo, $\left\|B^a_\lambda x_\lambda\right\|_a$ é limitado por iv) do Teorema 3.7, q.e.d. .

5. Operadores ciclicamente monótonos

5.1 - Definição: Diz-se que o operador A de X é *monótono de ordem* n se, para toda seqüência $(x_1, x_1^*), \ldots, (x_n, x_n^*)$ de elementos de A, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x_i - x_{i-1}\rangle \geq 0,$$

onde, por convenção, $x_0 = x_n$. Um operador monótono de ordem $n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ é dito *ciclicamente monótono.*

5.2 - Exemplo: Os operadores monótonos são, justamente, os operadores monótonos de ordem 2 porque se (x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) são pontos de A, as condições

$$\langle x_1 - x_2, x_1^* - x_2^*\rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle x_1^*, x_1 - x_0\rangle + \langle x_2^*, x_2 - x_1\rangle \geq 0,$$

onde $x_0 = x_2$, são equivalentes. Desse modo, todo operador ciclicamente monótono é monótono.

5.3 - Exemplo: O subdiferencial de uma função convexa, f, é ciclicamente monótono porque de $(x_i, x_i^*) \in \partial f,\ i = 1, \ldots, n$, vem

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq \langle x_i^*, x_{i-1} - x_i \rangle$$

que, por adição ordenada, dá

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x_{i-1} - x_i \rangle \leq 0, \quad x_0 = x_n.$$

Se, além de convexa, f é s.c.i., então ∂f é, como se sabe, m-monótono. Logo, ∂f é ciclicamente m-monótono.

5.4 - Teorema: *Um operador A é ciclicamente monótono se e só se existir uma função, f, convexa, própria e* s.c.i. *tal que $A \subset \partial f$.*

Demonstração: Do Exemplo 5.3 decorre imediatamente que se $A \subset \partial f$, onde f é convexa, própria e s.c.i., então A é ciclicamente monótono. Reciprocamente, seja A ciclicamente monótono, $(x_0, x_0^*) \in A$ (se $D(A) = \phi$ o resultado é trivial) e ponhamos

$$f(x) = \sup\{\langle x - x_n, x_n^* \rangle + \langle x_n - x_{n-1}, x_{n-1}^* \rangle + \cdots + \langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle\},$$

onde o supremo é tomado na família de todas as seqüências finitas $(x_1, x_1^*), \ldots, (x_n, x_n^*)$, $(x_i, x_i^*) \in A,\ \ i = 1, \ldots, n$. A função f é convexa e s.c.i., visto que é o invólucro superior de uma família de funções afins contínuas. Além disto, como A é, por hipótese, ciclicamente monótono, tem-se $-\infty < f(x_0) \leq 0$ e como tem-se, para a cadeia cujo único elemento é (x_0, x_0^*),

$$f(x) \geq \langle x - x_0, x_0^* \rangle + \langle x_0 - x_0, x_0^* \rangle$$

e, portanto, $f(x_0) \geq 0$, segue-se que $f(x_0) = 0$. A função f é, pois, própria. Vamos mostrar que $A \subset \partial f$. Seja, para isto, $(x, x^*) \in A$. Pela definição de f tem-se, para toda seqüência finita $\{(x_i, x_i^*)\}$ de elementos de A, $i = 1, \ldots, n$,

$$f(u) \geq \langle u - x, x^* \rangle + \langle x - x_n, x_n^* \rangle + \cdots + \langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle.$$

Daí vem

$$f(u) - \langle u - x, x^* \rangle \geq \langle x - x_n, x_n^* \rangle + \cdots + \langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle$$

donde

$$f(u) - \langle u - x, x^* \rangle \geq \sup\{\langle x - x_n, x_n^* \rangle + \cdots + \langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle\} = f(x).$$

Portanto

$$f(u) - f(x) \geq \langle x^*, u - x \rangle$$

donde $(x, x^*) \in \partial f$, q.e.d..

5.5 - Corolário: *Todo operador ciclicamente máximo monótono é do tipo ∂f, onde $f: X \to (-\infty, +\infty]$ é convexa, própria e s.c.i..*

5.6 - Teorema: *Seja X reflexivo, X e X^* lisos e $f: X \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i.; ponhamos $A = \partial f$ e seja f_λ a função*

$$f_\lambda(x) = \min_{y \in X} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 + f(y) \right\}, \quad \forall x \in X \quad e \quad \lambda > 0. \tag{5.1}$$

Então:

i) $f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{2} \|A_\lambda x\|^2 + f(J_\lambda x), \ \forall x \in X, \ e\ \lambda > 0;$ (5.2)

ii) *f_λ é uma função convexa, diferenciável no sentido de Gateaux e $\partial f_\lambda = A_\lambda = (\partial f)_\lambda$;*

iii) $f_\lambda(x) \le f(x)\ \forall\, x \in X,\ \forall\, \lambda > 0$; f_λ *é, para cada* $x \in X$, *uma função monótona decrescente de* λ *e* $\lim_{\lambda \to 0} f_\lambda(x) = f(x),\ \ \forall\, x \in X$.

Demonstração: i) Pelo Exemplo I-4.9 e iii) da Proposição I-4.11, pondo

$$\varphi(y) = (1/2\lambda)\,\|y-x\|^2 + f(y),$$

tem-se

$$\partial\varphi(y) \supset \frac{1}{\lambda}F(y-x) + \partial f(y).$$

Como $J_\lambda(x)$ é, por definição, a única solução de $0 \in (1/\lambda)F(y-x) + \partial f(y)$, segue-se, por v) da Proposição I-4.11, que $J_\lambda(x)$ é ponto de mínimo de φ; portanto,

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}\,\|J_\lambda x - x\|^2 + f(J_\lambda x) = \frac{\lambda}{2}\,\|A_\lambda x\|^2 + f(J_\lambda x).$$

ii) Como $A_\lambda x \in \partial f(J_\lambda x)$ segue-se que

$$f(J_\lambda y) - f(J_\lambda x) \ge \langle A_\lambda x, J_\lambda y - J_\lambda x\rangle;$$

logo,

$$\begin{aligned}
&f_\lambda(y) - f_\lambda(x) \ge \frac{\lambda}{2}(\|A_\lambda y\|^2 - \|A_\lambda x\|^2) + \langle A_\lambda x, J_\lambda y - J_\lambda x\rangle \\
&= \frac{\lambda}{2}(\|A_\lambda y\|^2 - \|A_\lambda x\|^2) + \langle A_\lambda x, J_\lambda y - y + y - x + x - J_\lambda x\rangle \\
&= \frac{\lambda}{2}(\|A_\lambda y\|^2 - \|A_\lambda x\|^2) - \langle A_\lambda x, y - J_\lambda y\rangle + \langle A_\lambda x, x - J_\lambda x\rangle + \langle A_\lambda x, y - x\rangle \\
&\ge \frac{\lambda}{2}(\|A_\lambda y\|^2 + \|A_\lambda x\|^2) - \lambda\,\|A_\lambda x\|\cdot\|A_\lambda y\| + \langle A_\lambda x, y - x\rangle \\
&= \frac{\lambda}{2}(\|A_\lambda y\| - \|A_\lambda x\|)^2 + \langle A_\lambda x, y - x\rangle. \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f_\lambda(y) - f_\lambda(x) - \langle A_\lambda x, y - x\rangle \ge \frac{\lambda}{2}\,(\|A_\lambda y\| - \|A_\lambda x\|)^2 \ge 0.$$

Por (5.3) temos

$$
\begin{aligned}
f_\lambda(x) - f_\lambda(y) &\le -\frac{\lambda}{2}(\|A_\lambda y\| - \|A_\lambda x\|)^2 - \langle A_\lambda x, y-x\rangle \\
&= -\frac{\lambda}{2}(\|A_\lambda y\| - \|A_\lambda x\|)^2 - \langle A_\lambda x, y-x\rangle + \langle A_\lambda y, x-y\rangle - \langle A_\lambda y, x-y\rangle \\
&= -\frac{\lambda}{2}(\|A_\lambda y\| - \|A_\lambda x\|)^2 + \langle A_\lambda y - A_\lambda x, y-x\rangle + \langle A_\lambda y, x-y\rangle,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
f_\lambda(x) - f_\lambda(y) - \langle A_\lambda y, x-y\rangle &\le -\frac{\lambda}{2}(\|A_\lambda y\| - \|A_\lambda x\|)^2 + \langle A_\lambda y - A_\lambda x, y-x\rangle \\
&\le \langle A_\lambda y - A_\lambda x, y-x\rangle, \quad \forall\, x,y \in X,\ \lambda > 0. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Permutando x com y em (5.4) temos

$$
f_\lambda(y) - f_\lambda(x) - \langle A_\lambda x, y-x\rangle \le \langle A_\lambda y - A_\lambda x, y-x\rangle
$$

e, portanto,

$$
0 \le f_\lambda(y) - f_\lambda(x) - \langle A_\lambda x, y-x\rangle \le \langle A_\lambda y - A_\lambda x, y-x\rangle. \qquad (5.5)
$$

Pondo $y = x + tz, \quad t > 0$, temos

$$
\frac{f_\lambda(x+tz) - f_\lambda(x)}{t} - \langle A_\lambda x, z\rangle \le \langle A_\lambda(x+tz) - A_\lambda x, z\rangle
$$

donde

$$
\lim_{t\to 0} \frac{f_\lambda(x+tz) - f_\lambda(x)}{t} = \langle A_\lambda x, z\rangle
$$

visto que A_λ é, de acordo com iii) do Teorema 3.7, demicontínua. Logo, f_λ é diferenciável à Gateaux.

Além disto, f_λ é convexa. Com efeito, de (5.3) vem

$$
f_\lambda(y) - f_\lambda(x) \ge \langle A_\lambda x, y-x\rangle, \qquad (5.6)
$$

desigualdade que é válida para todo $x, y \in X$. Logo é válida quando nela se substitui y por x e x por $(1-t)x + ty,\ 0 \leq t \leq 1$. Temos, então,

$$f_\lambda(x) - f_\lambda((1-t)x+ty) \geq t\langle A_\lambda((1-t)x+ty), x-y\rangle. \tag{5.7}$$

Substituindo, em (5.6), x por $(1-t)x + ty$ temos

$$f_\lambda(y) - f_\lambda((1-t)x+ty) \geq -(1-t)\langle A_\lambda((1-t)x+ty), x-y\rangle. \tag{5.8}$$

Multiplicando (5.7) por $1-t$ e (5.8) por t e somando membro a membro temos

$$(1-t)f_\lambda(x) + t\, f_\lambda(y) - f_\lambda((1-t)x+ty) \geq 0,$$

donde f_λ é convexa. Agora, sendo f_λ convexa e diferenciável no sentido de Gateaux segue-se, pela Proposição I-4.4, que f_λ é subdiferenciável e sua subdiferencial no ponto $x \in X$ consta apenas de $A_\lambda x$. Portanto, $\partial f_\lambda = A_\lambda = (\partial f)_\lambda$, o que completa a demonstração de ii).

iii) Pela definição de f_λ tem-se, $\forall\, y \in X$,

$$f_\lambda(x) \leq \frac{1}{2\lambda}\,\|y-x\|^2 + f(y)$$

donde, para $y = x$, $f_\lambda(x) \leq f(x)$, o que demonstra a primeira asserção de iii). Ainda por (5.1) tem-se, trivialmente, $f_\lambda(x) \leq f_\mu(x)$, $\forall\, \mu \leq \lambda$, i.e., f_λ é uma função monótona decrescente de λ. Vamos, finalmente, demonstrar que $\lim\limits_{\lambda\to 0} f_\lambda(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X$. Suponhamos que isto não seja verdade, i.e., existe uma constante c tal que

$$f_\lambda(x) < c < f(x) \qquad \forall\, \lambda > 0. \tag{5.9}$$

Então, $\forall\, \lambda > 0$ existe y_λ tal que

$$\frac{1}{2\lambda}\,\|x-y_\lambda\|^2 + f(y_\lambda) < c. \tag{5.10}$$

Como f é convexa própria e s.c.i., f admite uma minorante afim contínua, i.e., existe $x^* \in X^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $\langle x^*, y_\lambda \rangle - \beta \leq f(y_\lambda)$. Mas daí vem,

$$\langle x^*, y_\lambda - x \rangle + \langle x^*, x \rangle - \beta = \langle x^*, y_\lambda - x + x \rangle - \beta = \langle x^*, y_\lambda \rangle - \beta \leq f(y_\lambda)$$

donde

$$-\|x^*\| \cdot \|x - y_\lambda\| - \|x^*\| \cdot \|x\| - \beta \leq f(y_\lambda)$$

ou, pondo $\mu = \max\{\|x^*\|, \|x^*\| \cdot \|x\| + \beta\}$,

$$-\mu \|x - y_\lambda\| - \mu \leq f(y_\lambda). \tag{5.11}$$

De (5.10) e (5.11) tem-se

$$\frac{1}{2\lambda} \|x - y_\lambda\|^2 < c - f(y_\lambda) \leq c + \mu \|x - y_\lambda\| + \mu \tag{5.12}$$

isto é,

$$\|x - y_\lambda\|^2 < 2\lambda\mu \|x - y_\lambda\| + 2\lambda\mu + 2\lambda c$$

o que mostra que y_λ é limitado quando λ varia nos conjuntos limitados. Portanto $f(y_\lambda)$ é limitada inferiormente quando $\lambda \to 0$ e como de (5.12) vem

$$0 \leq \|x - y_\lambda\|^2 \leq 2\lambda(c - f(y_\lambda))$$

segue-se que $y_\lambda \to x$ quando $\lambda \to 0$. Portanto, $f(x) \leq \varliminf_{\lambda \to 0} f(y_\lambda) \leq c$, o que contraria (5.9). Logo,

$$\lim_{\lambda \to 0} f_\lambda(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Quando X é um espaço de Hilbert ii) do teorema anterior pode ser melhorado como mostra o corolário a seguir.

5.7 - Corolário: *Se X é um espaço de Hilbert, então f_λ é diferenciável no sentido de Fréchet.*

De fato, pela Proposição 3.9, A_λ é uma função lipschitziana com constante $2/\lambda$. Por (5.5) temos, então,

$$\left|f_\lambda(y) - f_\lambda(x) - \langle A_\lambda x, y - x\rangle\right| \leq \frac{2}{\lambda}\|x - y\|^2 \quad \forall\, x, y \in X,$$

donde f_λ é diferenciável à Fréchet.

5.8 - Proposição: *Seja X um espaço de Banach reflexivo, X e X^* lisos e $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ convexa pr'opria e s.c.i.. Então, $\overline{D(\partial f)} = \overline{\mathrm{De}(f)}$.*

Demonstração: Pela definição de subdiferencial, $D(\partial f) \subset \mathrm{De}(f)$. Basta, então, demonstrar que $D(\partial f)$ é denso em $\mathrm{De}(f)$. Seja $x \in \mathrm{De}(f)$. Como ∂f é máximo monótono existe, pela Proposição 3.1, um $x_\lambda \in D(\partial f)$ tal que

$$F(x_\lambda - x) + \lambda \partial f(x_\lambda) \ni 0.$$

Daí vem,

$$F(x - x_\lambda) \in \partial(\lambda f)(x_\lambda)$$

donde, pela definição de subdiferencial,

$$\lambda f(x) - \lambda f(x_\lambda) \geq \langle F(x - x_\lambda), x - x_\lambda\rangle$$

e, daí,

$$f(x_\lambda) \leq -\frac{1}{\lambda}\left\|x - x_\lambda\right\|^2 + f(x).$$

Mas, pela Proposição I-3.26, f é minorada por uma função afim contínua; segue-se, então, por essa última desigualdade, que $x_\lambda \to x$ quando $\lambda \to 0$.

Nota: Essa propriedade de $D(\partial f)$ decorre também da demonstração de iii) do Teorema 5.6.

6. Operadores acretivos

De acordo com a Proposição 1.3, a monotonia é, no caso dos espaços de Hilbert, equivalente à condição (1.4). Como (1.4) envolve apenas a norma, ela tem sentido em qualquer espaço normado, o que permite uma outra generalização da noção de operador monótono dos espaços de Hilbert.

6.1 - Definição: Seja X um espaço de Banach. Diz-se que um operador $A: X \to X$ é *acretivo* se, para todo par (x_1, y_1), (x_2, y_2) de pontos de A e todo $\lambda \geq 0$ tem-se

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| . \tag{6.1}$$

Diz-se que A é *dissipativo* se $-A$ é acretivo.

6.2 - Teorema: *Sejam $x, y \in X$. são equivalentes:*

i) $\|x\| \leq \|x + \lambda y\| \quad \forall \lambda > 0.$

ii) $[x, y]_+ \geq 0.$

iii) $\langle y, x \rangle_s \geq 0.$

iv) *Existe $x^* \in F(x)$ tal que $\langle x^*, y \rangle \geq 0.$*

Demonstração: i) $\Leftrightarrow$ ii). De i) vem

$$[x, y]_\lambda = \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} \geq 0 \qquad \forall \lambda > 0,$$

donde $[x, y]_+ = \lim\limits_{\lambda \to 0+} [x, y]_\lambda \geq 0$. De ii) vem

$$\frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = [x, y]_\lambda \geq \inf_{\lambda > 0} [x, y]_\lambda = [x, y]_+ \geq 0 \quad \forall \lambda > 0,$$

e, portanto, $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$, $\forall \lambda > 0$. Além disto, iii) $\Leftrightarrow$ ii) pelo Teorema I-6.4 e iv) $\Leftrightarrow$ ii) pelo Lema I-6.3 e i) da Proposição I-6.1.

6.3 -Corolário: *Seja $A: X \to X$ um operador. são equivalentes:*

i) *A é acretivo;*

ii) $[x_1 - x_2, y_1 - y_2]_+ \geq 0 \quad \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$;

iii) $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_s \geq 0 \quad \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$;

iv) $\forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ *existe* $x^* \in F(x_1 - x_2)$ *tal que*

$$\langle x^*, y_1 - y_2 \rangle \geq 0. \tag{6.2}$$

Demonstração: Conseqüência imediata da Definição 6.1 e do Teorema 6.2 com $x = x_1 - x_2$ e $y = y_1 - y_2$.

6.4 - Notas: a) No caso dos espaços de Hilbert o único elemento da classe $F(x_1 - x_2)$ é o próprio $x_1 - x_2$; nesse caso a condição (6.2) é, pois, a condição de monotonia (1.2). b) Quando se trata dos espaços de Banach complexos a condição (6.2) é substituída pela condição Re $\langle x^*, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$. No caso dos operadores dissipativos dos espaços de Banach complexos, a condição de dissipatividade é, pois, Re $\langle x^*, y_1 - y_2 \rangle \leq 0$.

Vejamos alguns exemplos de operadores acretivos.

6.5 - Exemplo: a) Se $T: X \to X$ é uma contração, então $I - T$ é acretivo.

Sejam, com efeito, $x_i \in D(I - T)$, $y_i = (I - T)x_i$, $\ i = 1, 2$. Então

$$\begin{aligned}
&\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| = \|x_1 - x_2 + \lambda(x_1 - Tx_1 - x_2 + Tx_2)\| \\
&= \|(1 + \lambda)(x_1 - x_2) - \lambda(Tx_1 - Tx_2)\| \geq (1 + \lambda) \|x_1 - x_2\| - \lambda \|Tx_1 - Tx_2\| \\
&\geq (1 + \lambda) \|x_1 - x_2\| - \lambda \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

b) Seja $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um operador monótono e Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Vamos definir $\tilde{\beta}: L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, por

$$D(\tilde{\beta}) = \{u \in L^p(\Omega);\ \exists\, v \in L^p(\Omega) \text{ tal que } v(x) \in \beta(u(x)) \text{ q.s. em } \Omega\},$$

$$\tilde{\beta}(u) = \{v \in L^p(\Omega); v(x) \in \beta(u(x)) \text{ q.s. em } \Omega\}, \qquad \forall\, u \in D(\tilde{\beta}),$$

e mostrar que $\tilde{\beta}$ é acretivo. Observemos, em primeiro lugar, que sendo o dual de $L^p(\Omega)$ um espaço uniformemente convexo, o operador dualidade, F, é unívoco pelas proposições I-5.11 e I-6.7 e, como se vê imediatamente,

$$F(u) = u.\,|u|^{p-2}\,.\,\|u\|_p^{2-p} \qquad \forall\, u \in L^p(\Omega). \tag{6.3}$$

Logo, se $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \tilde{\beta}$,

$$\langle v_1 - v_2, F(u_1 - u_2)\rangle$$

$$= \|u_1 - u_2\|_p^{2-p} \int_\Omega (u_1(x) - u_2(x)) \cdot |u_1(x) - u_2(x)|^{p-2} \cdot (v_1(x) - v_2(x))dx \geq 0$$

visto que $(u_1(x) - u_2(x)).(v_1(x) - v_2(x)) \geq 0$ pois β é monótono.

c) Vamos definir $A\colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, por

$$D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$Au = -\Delta u, \qquad \forall\, u \in D(A),$$

onde Δ é o laplaciano, e mostrar que A é acretivo.

Como A é unívoco e linear temos, $\forall\, u_1, u_2 \in D(A)$,

$$\langle Au_1 - Au_2, F(u_1 - u_2)\rangle = \langle A(u_1 - u_2), F(u_1 - u_2)\rangle = -\langle \Delta u, F(u)\rangle,$$

onde $u = u_1 - u_2$. Levando em conta (6.3) e integrando por partes temos

$$\begin{aligned}\langle \Delta u, F(u)\rangle &= \|u\|_p^{2-p} \int_\Omega u.\,|u|^{p-2}\ \Delta u\, dx \\ &= -(p-1)\,\|u\|_p^{2-p} \int_\Omega |u|^{p-2}\,.\,|\nabla u|^2\, dx \leq 0.\end{aligned}$$

6.6 - Exemplo: a) Seja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, estritamente crescente e tal que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Então o operador $A\colon L^1(0,1) \to L^1(0,1)$, definido por

$$D(A) = \{u \in C([0,1]); u(0) = 0 \text{ e } \varphi(u) \text{ é absolutamente contínua}\}$$

e

$$Au = \varphi(u)' = \frac{d}{dx}\varphi(u(x))$$

é acretivo.

Seja, com efeito, $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana, não decrescente, tal que $|p| \leq 1$ e $p(0) = 0$, e $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$j(s) = \int_0^s p(\tau)d\tau.$$

Teremos, para $u, v \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
&\|u - v + \lambda(Au - Av)\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |u - v + \lambda(\varphi(u) - \varphi(v))'|\, dx \\
&\geq \int_0^1 |u - v + \lambda(\varphi(u) - \varphi(v))'|\, |p(\varphi(u) - \varphi(v))|\, dx \\
&\geq \int_0^1 [u - v + \lambda(\varphi(u) - \varphi(v))']p(\varphi(u) - \varphi(v))dx \\
&= \int_0^1 (u - v)p(\varphi(u) - \varphi(v))dx + \lambda \int_0^1 (\varphi(u) - \varphi(v))'p(\varphi(u) - \varphi(v))dx.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\varphi(u) - \varphi(v))'p(\varphi(u) - \varphi(v))dx &= \int_0^1 (j(\varphi(u) - \varphi(v)))'dx \\
&= j(\varphi(u(1)) - \varphi(v(1))) \geq 0
\end{aligned}$$

visto que $\varphi(0) = 0$ e $j \geq 0$. Logo,

$$\|u - v + \lambda(Au - Av)\|_{L^1(0,1)} \geq \int_0^1 (u - v)p(\varphi(u) - \varphi(v))dx,$$

relação que, em particular, é válida para $p = p_n$ onde, para cada n, $p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$p_n(s) = \begin{cases} ns & \text{se} \quad |s| < 1/n, \\ \\ \text{sign}(s) & \text{se} \quad |s| \geq 1/n, \end{cases}$$

onde $\text{sign}(s) = +1$ se $s > 0$, $\text{sign}(s) = -1$ se $s < 0$ e $\text{sign}(0) = 0$. Mas p_n converge em todo ponto $s \in \mathbb{R}$ a $\text{sign}(s)$. Logo, $p_n(\varphi(u) - \varphi(v))$ converge, em cada ponto de $[0,1]$, a $\text{sign}(\varphi(u) - \varphi(v))$. Além disto, φ sendo estritamente crescente, $\text{sign}(\varphi(u) - \varphi(v)) = \text{sign}(u - v)$. Logo, $p_n(\varphi(u) - \varphi(v))$ converge em cada ponto de $[0,1]$ a $\text{sign}(u-v)$ e como

$$|(u-v)p_n(\varphi(u) - \varphi(v))| \leq |u - v|$$

e, por hipótese, $|u - v|$ é integrável, segue-se pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\|u - v + \lambda(Au - Av)\|_{L^1(0,1)} \geq \int_0^1 (u-v)\,\text{sign}(u-v)dx = \int_0^1 |u - v|\,dx$$

ou seja,

$$\|u - v + \lambda(Au - Av)\|_{L^1(0,1)} \geq \|u - v\|_{L^1(0,1)},$$

i.e., A é acretivo.

b) Seja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, estritamente crescente e tal que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, como no exemplo anterior. Então, o operador $A\colon L^1(0,1) \to L^1(0,1)$ definido por

$$D(A) = \{u \in C([0,1]); u(0) = u(1) = 0, \varphi(u) \text{ e } \varphi(u)' \text{ absolutamente contínuas}\}$$

e

$$Au = -\varphi(u)'' \quad \forall\, u \in D(A)$$

é acretivo.

Com efeito, usando a notação do Exemplo a) temos, como naquele exemplo,

$$\|u - v + \lambda(Au - Av)\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |u - v - \lambda(\varphi(u) - \varphi(v))''|\, dx$$

$$\geq \int_0^1 (u - v)p(\varphi(u) - \varphi(v))dx - \lambda \int_0^1 (\varphi(u) - \varphi(v))'' p(\varphi(u) - \varphi(v))dx.$$

Mas das hipóteses resulta que, pondo $s = \varphi(u) - \varphi(v)$, a função $(j(s))' = s'p(s)$ é absolutamente contínua, donde $\displaystyle\int_0^1 (j(s))''dx = (j(s))'(1) - (j(s))'(0) = 0$. Além disto, das hipóteses resulta, ainda, que $(s')^2 p'(s)$ e $s''p(s)$ são integráveis e como $(j(s))'' = (s')^2 p'(s) + s''p(s)$ segue-se que

$$\int_0^1 (\varphi(u) - \varphi(v))'' p(\varphi(u) - \varphi(v))dx$$

$$= - \int_0^1 [(\varphi(u) - \varphi(v))']^2 p'(\varphi(u) - \varphi(v))dx \leq 0,$$

porque $p' \geq 0$ visto que p é não decrescente. Logo,

$$\|u - v + \lambda(Au - Av)\|_{L^1(0,1)} \geq \int_0^1 (u - v)p(\varphi(u) - \varphi(v))dx \to \|u - v\|_{L^1(0,1)}$$

quando se toma $p = p_n$ e faz n tender ao infinito como no Exemplo a).

c) Seja $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, não decrescente e tal que $\varphi(0) = 0$. Então, o operador $A: C([0,1]) \to C([0,1])$ definido por

$$D(A) = \{u \in C([0,1]);\ u(0) = u(1) = 0 \text{ e } u, u', u'' \text{ são contínuas}\}$$

e

$$Au = \{w \in C([0,1]);\ \varphi(-w) = u''\} \quad \forall\, u \in D(A)$$

é acretivo.

De fato, sejam $u_1, u_2 \in D(A)$, $w_1 \in Au_1$ e $w_2 \in Au_2$. é bastante considerar o caso em que $u_1 \neq u_2$. Supondo, então, que este seja o caso tem-se

$$\|u_1 - u_2\|_{C([0,1])} = \max_{0 \le x \le 1} |u_1(x) - u_2(x)| = |u_1(x_0) - u_2(x_0)| > 0 \tag{6.4}$$

para algum $x_0 \in [0,1]$ e, como $u_1(x) = u_2(x) = 0$ para $x = 0$ e $x = 1$, tem-se $0 < x_0 < 1$. Pela continuidade, o conjunto dos pontos de $[0,1]$ onde $u_1 - u_2$ atinge seu máximo é fechado, donde tem um menor elemento. Seja x_0 esse elemento e, para fixar idéias, $u_1(x_0) > u_2(x_0)$. Deve-se ter, então, $w_1(x_0) \ge w_2(x_0)$. Com efeito, pela continuidade de w_1 e w_2, se $w_1(x_0) < w_2(x_0)$, então $w_1 < w_2$ em algum intervalo $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ com $\delta > 0$ e como φ é não decrescente,

$$(u_1 - u_2)''(x) = \varphi(-w_1(x)) - \varphi(-w_2(x)) \ge 0 \quad \forall\, x \in J.$$

Portanto, $u_1 - u_2$ seria uma função convexa em J e como ela assume seu máximo no ponto x_0, interior a J, seria constante em J, em contradição com a escolha de x_0. Portanto, $w_1(x_0) \ge w_2(x_0)$ e, tendo (6.4) em vista, segue-se que, $\forall\, \lambda > 0$,

$$\|u_1 - u_2 + \lambda(w_1 - w_2)\|_{C([0,1])} = \max_{0 \le x \le 1} |u_1(x) - u_2(x) + \lambda(w_1(x) - w_2(x))|$$

$$\ge |u_1(x_0) - u_2(x_0) + \lambda(w_1(x_0) - w_2(x_0)| \ge |u_1(x_0) - u_2(x_0)| = \|u_1 - u_2\|_{C([0,1])},$$

i.e., a condição (6.1) é satisfeita.

6.7 - Definição: Seja X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O operador $(I + \lambda A)^{-1}$, que será representado por J_λ (ou, quando houver possibilidade de confusão, por J_λ^A) é dito *resolvente* de A; $\forall\, \lambda \neq 0$, o operador $(1/\lambda)(I - (I + \lambda A)^{-1})$, que será representado por A_λ, é dito *aproximação* de *Yosida* de A.

De acordo com essa definição temos imediatamente:

6.8 - Proposição: i) $D(A_\lambda) = D(J_\lambda) = \mathrm{Im}(I + \lambda A) = D_\lambda$, $\mathrm{Im}(J_\lambda) = D(A)$;

ii) $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1} = \{(x+\lambda y, x); (x,y) \in A\}$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $A_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) = \{(x+\lambda y, y); (x,y) \in A\}$, $\forall\, \lambda \neq 0$;

iv) *Se* $x \in J_\lambda z$, *então existe* $y \in X$ *tal que* $(x,y) \in A$ *e* $z = x + \lambda y$;

v) *Se* $\lambda \neq 0$ *e* $y \in A_\lambda z$, *então existe* $x \in X$ *tal que* $(x,y) \in A$ *e* $z = x + \lambda y$.

6.9 - Observação: Os símbolos J_λ e A_λ e as respectivas denominações já foram usados anteriormente para representar operadores semelhantes da teoria dos operadores monótonos. Isto porém não apresenta inconveniente algum porque nos espaços de Hilbert, i.e., nos espaços onde as noções de operador monótono e operador acretivo coincidem, os operadores J_λ e A_λ ora definidos e os definidos anteriormente também coincidem (recorde-se que, nos espaços de Hilbert, $F = I$).

6.10 - Proposição: *Seja* A *acretivo. Se* $\lambda \geq 0$, *então* J_λ *é um operador unívoco; se* $\lambda > 0$, A_λ *é unívoco e* $(J_\lambda z, A_\lambda z) \in A\ \forall\, z \in D_\lambda$.

Demonstração: Se $x_1, x_2 \in J_\lambda z$, então existem $y_i \in Ax_i$, $i = 1, 2$, tais que $z = x_1 + \lambda y_1 = x_2 + \lambda y_2$. Logo, pela acretividade de A

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| = \|z - z\| = 0 \quad \forall\, \lambda \geq 0,$$

donde $x_1 = x_2$. Analogamente, se $\lambda > 0$, $A_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}\,(I - J_\lambda)$ é unívoco. De $z \in D_\lambda$ vem $z = x + \lambda y$, onde $(x,y) \in A$, e como J_λ e A_λ são unívocos se $\lambda > 0$ tem-se $J_\lambda z = x$, $A_\lambda z = y$, donde $(J_\lambda z, A_\lambda z) = (x,y) \in A$.

Podemos agora determinar mais uma condição equivalente à acretividade.

6.11 - Teorema: *O operador* $A\colon X \to X$ *é acretivo se, e só se,* J_λ *é uma contração para todo* $\lambda \geq 0$.

Demonstração: Sejam $z_1, z_2 \in D_\lambda$. Então $z_i = x_i + \lambda y_i$, $(x_i, y_i) \in A$, $i = 1, 2$. Se

$\lambda \geq 0$ e A é acretivo, J_λ é unívoco, pela Proposição 6.10. Logo, $J_\lambda z_i = x_i$, $i = 1, 2$, e

$$\left\| J_\lambda z_1 - J_\lambda z_2 \right\| = \|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| = \|z_1 - z_2\|,$$

i.e., J_λ é uma contração $\forall\, \lambda \geq 0$. Reciprocamente, se J_λ for uma contração para todo $\lambda \geq 0$, então J_λ é unívoco, donde $J_\lambda z_i = x_i$, $i = 1, 2$, e

$$\|x_1 - x_2\| = \left\| J_\lambda z_1 - J_\lambda z_2 \right\| \leq \|z_1 - z_2\| = \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|$$

para todo $\lambda \geq 0$, i.e., A é acretivo.

Vamos designar por $\mathcal{A}(\omega)$, onde $\omega \in \mathbb{R}$, a classe de todos os operadores $A \colon X \to X$ tais que $A + \omega I$ é acretivo. $\mathcal{A}(0)$ é, portanto, a classe dos operadores acretivos.

6.12 - Proposição: *$A \in \mathcal{A}(\omega)$ se e só se $\forall\, (x, y)$, $(u, v) \in A$, existir $\xi^* \in F(x - u)$ tal que*

$$\langle y - v, \xi^* \rangle + \omega \|x - u\|^2 \geq 0.$$

Demonstração: Conseqüência imediata de iv) do Corolário 6.3.

6.13 - Teorema: *Seja ω um real, $\lambda \geq 0$ tal que $\lambda\omega < 1$ e $A \in \mathcal{A}(\omega)$. Então são válidas as seguintes asserções:*

i) *J_λ é um operador unívoco e lipschitziano com constante $(1 - \lambda\omega)^{-1}$, i.e., $\forall\, x, y \in D_\lambda$*

$$\left\| J_\lambda x - J_\lambda y \right\| \leq (1 - \lambda\omega)^{-1} \|x - y\|;$$

ii) $\left\| J_\lambda x - x \right\| \leq \lambda(1 - \lambda\omega)^{-1} |Ax|$, $\forall\, x \in D(A) \cap D_\lambda$;

iii) *Se n é um inteiro positivo, $x \in D(J_\lambda^n)$ e $\lambda |\omega| < 1$, então*

$$\left\| J_\lambda^n x - x \right\| \leq n(1 - \lambda |\omega|)^{-n+1} \left\| J_\lambda x - x \right\|;$$

iv) *Se $x \in D_\lambda$, $\lambda \neq 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$, então*

$$\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda x \in D_\mu \quad e \quad J_\lambda x = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda x \right);$$

v) $A_\lambda \in \mathcal{A}(\omega(1-\lambda\omega)^{-1})$;

vi) $\left\|A_\lambda x - A_\lambda y\right\| \leq \lambda^{-1}(1+(1-\lambda\omega)^{-1})\left\|x-y\right\|, \quad \forall\, x, y \in D_\lambda, \ \lambda > 0$;

vii) *Se* $x \in D_\lambda \cap D_\mu$ *e* $0 < \mu \leq \lambda$, *então*

$$(1-\lambda\omega)\left\|A_\lambda x\right\| \leq (1-\mu\omega)\left\|A_\mu x\right\|;$$

viii) $\lim\limits_{\lambda\to 0} J_\lambda x = x$, $\forall\, x \in \overline{D(A) \cap \left(\bigcap\limits_{\lambda>0} D_\lambda\right)}$.

Demonstração: i) Seja $z \in D_\lambda$ e $x_1, x_2 \in J_\lambda z$. Vamos mostrar que $x_1 = x_2$. De $x_1 \in J_\lambda z$ segue-se, por iv) da Proposição 6.8, que existe $y_1 \in Ax_1$ tal que $z = x_1 + \lambda y_1$. Analogamente, existe $y_2 \in Ax_2$ tal que $z = x_2 + \lambda y_2$. Logo, $\forall\, x^* \in F(x_1 - x_2)$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 = \langle 0, x^*\rangle &= \langle x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2), x^*\rangle \\ &= \langle x_1 - x_2 + \lambda(y_1 + \omega x_1 - \omega x_1 - y_2 - \omega x_2 + \omega x_2), x^*\rangle \\ &= \left\|x_1 - x_2\right\|^2 + \lambda\langle y_1 + \omega x_1 - y_2 - \omega x_2, x^*\rangle - \lambda\omega\left\|x_1 - x_2\right\|^2 \\ &= (1-\lambda\omega)\left\|x_1 - x_2\right\|^2 + \lambda\langle y_1 + \omega x_1 - y_2 - \omega x_2, x^*\rangle. \end{aligned}$$

Mas, para algum $x^* \in F(x_1 - x_2)$, tem-se, pelo Corolário 6.3, $\langle y_1 + \omega x_1 - y_2 - \omega x_2, x^*\rangle \geq 0$ e, como $\lambda\omega < 1$, $\left\|x_1 - x_2\right\| = 0$, i.e., $x_1 = x_2$, o que mostra que J_λ é unívoco. Como $A + \omega I$ é acretivo, seu resolvente, isto é, o operador $(I + t(A+\omega I))^{-1}$ é uma contração para todo $t \geq 0$. Mas, se $1 + \omega t \neq 0$,

$$(I + t(A+\omega I))^{-1} = ((1+\omega t)I + tA)^{-1} = \left(I + \frac{tA}{1+\omega t}\right)^{-1}(1+\omega t)^{-1}.$$

Logo o operador $(I + tA/(1+\omega t))^{-1}$ é uma aplicação lipschitziana com constante $|1+\omega t|$, $\forall\, t \geq 0$, tal que $1 + \omega t \neq 0$. Além disto, por hip'otese, $\lambda\omega < 1$; portanto $(1-\lambda\omega)^{-1} > 0$ e como $\lambda \geq 0$ podemos fazer $t = \lambda(1-\lambda\omega)^{-1}$. Teremos $1 + \omega t > 0$, donde $|1+\omega t| =$

$1+\omega t=(1-\lambda\omega)^{-1}$ e, como $J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}=(I+tA/(1+\omega t))^{-1}$, J_λ é uma aplicação lipschitziana com constante $(1-\lambda\omega)^{-1}$.

ii) Seja $x\in D(A)\cap D_\lambda$. Para cada $y\in Ax$ temos $J_\lambda(x+\lambda y)=x$, donde, por i),

$$\left\|J_\lambda x-x\right\|=\left\|J_\lambda x-J_\lambda(x+\lambda y)\right\|\le(1-\lambda\omega)^{-1}\left\|x-(x+\lambda y)\right\|=\lambda(1-\lambda\omega)^{-1}\left\|y\right\|,$$

donde ii) pela arbitrariedade de y em Ax.

iii) Por i) temos

$$\begin{aligned}\left\|J_\lambda^n x-x\right\|&=\left\|\sum_{i=1}^{n}(J_\lambda^{n-i+1}x-J_\lambda^{n-i}x)\right\|\le\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda\omega)^{-n+i}\left\|J_\lambda x-x\right\|\\&\le n(1-\lambda\left|\omega\right|)^{-n+1}\left\|J_\lambda x-x\right\|.\end{aligned}$$

iv) Seja $x\in D_\lambda$ e $\lambda>0$. Então, $x=x_1+\lambda y_1$ para algum $(x_1,y_1)\in A$. Mas, então, $x_1+\mu y_1\in D_\mu$, donde

$$\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x=\frac{\mu}{\lambda}(x_1+\lambda y_1)+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}x_1=x_1+\mu y_1\in D_\mu$$

e

$$J_\lambda x=x_1=J_\mu(x_1+\mu y_1)=J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\right).$$

v) Sejam $x,y\in\mathcal{D}_\lambda$ e $t>0$. Temos, por i),

$$\begin{aligned}&\left\|x-y+t\left(A_\lambda x+\frac{\omega x}{1-\lambda\omega}-A_\lambda y-\frac{\omega y}{1-\lambda\omega}\right)\right\|=\\&=\left\|x-y+\frac{t}{\lambda}(x-J_\lambda x)+\frac{\omega tx}{1-\lambda\omega}-\frac{t}{\lambda}(y-J_\lambda y)-\frac{\omega ty}{1-\lambda\omega}\right\|=\\&=\left\|\left(1+\frac{t}{\lambda}+\frac{\omega t}{1-\lambda\omega}\right)(x-y)-\frac{t}{\lambda}(J_\lambda x-J_\lambda y)\right\|\ge\\&\ge\left|1+\frac{t}{\lambda}+\frac{\omega t}{1-\lambda\omega}\right|\left\|x-y\right\|-\frac{t}{\lambda(1-\lambda\omega)}\left\|x-y\right\|\ge\\&\ge\left(1+\frac{t}{\lambda}+\frac{\omega t}{1-\lambda\omega}-\frac{t}{\lambda(1-\lambda\omega)}\right)\left\|x-y\right\|=\left\|x-y\right\|.\end{aligned}$$

vi) Se $x, y \in D_\lambda$, então, por i),

$$\begin{aligned}\left\|A_\lambda x - A_\lambda y\right\| &= \frac{1}{\lambda}\left\|x - J_\lambda x - y + J_\lambda y\right\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}(\|x-y\| + \left\|J_\lambda x - J_\lambda y\right\|) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}(\|x-y\| + (1-\lambda\omega)^{-1}\|x-y\|) \\ &= \lambda^{-1}(1+(1-\lambda\omega)^{-1})\|x-y\|.\end{aligned}$$

vii) Se $0 < \mu \leq \lambda$ e $x \in D_\mu \cap D_\lambda$, então, por iv),

$$\begin{aligned}&\left\|A_\lambda x\right\| = \frac{1}{\lambda}\left\|x - J_\lambda x\right\| \leq \frac{1}{\lambda}(\|x - J_\mu x\| + \left\|J_\mu x - J_\lambda x\right\|) \\ &\leq \frac{\mu}{\lambda}\|A_\mu x\| + \frac{1}{\lambda}\left\|J_\mu x - J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\right)\right\| \\ &\leq \frac{\mu}{\lambda}\|A_\mu x\| + \frac{1}{\lambda}(1-\mu\omega)^{-1}(\lambda-\mu)\left\|A_\lambda x\right\|,\end{aligned}$$

donde $(1-\lambda\omega)\left\|A_\lambda x\right\| \leq (1-\mu\omega)\|A_\mu x\|$.

viii) Por ii),

$$\left\|x - J_\lambda x\right\| \leq \lambda(1-\lambda\omega)^{-1}|Ax|, \quad \forall\, x \in D(A) \cap \left(\bigcap_{\lambda>0} D_\lambda\right),$$

donde, nesse caso, $\lim\limits_{\lambda\to 0} J_\lambda x = x$. Seja $x \in \overline{D(A) \cap (\bigcap\limits_{\lambda>0} D_\lambda)}$ e $y \in D(A) \cap (\bigcap_{\lambda>0} D_\lambda)$ tal que $\|x-y\| < \varepsilon/2$, onde $\varepsilon > 0$ é dado. Temos, por i),

$$\begin{aligned}\left\|x - J_\lambda x\right\| &\leq \|x-y\| + \left\|y - J_\lambda y\right\| + \left\|J_\lambda y - J_\lambda x\right\| \\ &\leq [1+(1-\lambda\omega)^{-1}]\|x-y\| + \left\|y - J_\lambda y\right\|.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}0 \leq \limsup_{\lambda\to 0}\left\|x - J_\lambda x\right\| &\leq \lim_{\lambda\to 0}[1+(1-\lambda\omega)^{-1}]\|x-y\| + \lim_{\lambda\to 0}\left\|y - J_\lambda y\right\| \\ &\leq 2\|x-y\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left\|x - J_\lambda x\right\| = 0$, pela arbitrariedade de ε.

6.14 - Exemplo: Seja $T\colon X \to X$ lipschitziana com constante α. Então, para todo $t > 0$, $(I-T)/t \in \mathcal{A}((\alpha-1)/t)$. Em particular, se T é não expansiva, então $I-T$ é um operador acretivo.

Com efeito, se $\lambda \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}
&\left\|x_1 - x_2 + \lambda\Big[\left(\frac{I-T}{t} + \frac{\alpha-1}{t}I\right)x_1 - \left(\frac{I-T}{t} + \frac{\alpha-1}{t}I\right)x_2\Big]\right\| \\
&= \left\|(1+\frac{\lambda\alpha}{t})(x_1-x_2) - \frac{\lambda}{t}(Tx_1 - Tx_2)\right\| \\
&\geq (1+\frac{\lambda\alpha}{t})\left\|x_1-x_2\right\| - \frac{\lambda}{t}\left\|Tx_1 - Tx_2\right\| \\
&\geq (1+\frac{\lambda\alpha}{t})\left\|x_1-x_2\right\| - \frac{\lambda\alpha}{t}\left\|x_1 - x_2\right\| = \left\|x_1-x_2\right\|.
\end{aligned}$$

O caso em que T é não expansiva já foi tratado no Exemplo 6.5-a).

6.15 - Seja $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $\lambda\omega < 1$ e

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\mu>0}\left(\bigcap_{0<\lambda<\mu} D_\lambda\right).$$

Por vii) do Teorema 6.13, $(1-\lambda\omega)\left\|A_\lambda x\right\|$, $x \in \mathcal{D}$, é uma função decrescente em um intervalo $(0,\lambda_0)$. Logo, essa função tem um limite quando $\lambda \to 0+$. Ponhamos

$$|||Ax||| = \lim_{\lambda\to 0}(1-\lambda\omega)\left\|A_\lambda x\right\|, \quad x\in\mathcal{D},\ \lambda>0. \tag{6.5}$$

6.16 - Proposição: *Seja $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $\lambda > 0$ e $\lambda\omega < 1$.*

i) $\left\|A_\lambda x\right\| \leq (1-\lambda\omega)^{-1}|||Ax||| \quad \forall x \in \mathcal{D}\cap D_\lambda$;

ii) *A função $\left\|A_\lambda x\right\|$, $x\in\mathcal{D}$, tem um limite quando $\lambda\to 0$ e*

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\|A_\lambda x\right\| = |||Ax|||;$$

iii) $|||Ax||| \leq |Ax|, \forall\, x \in D(A) \cap \mathcal{D}$.

Demonstração: De $\lambda\omega < 1$, $(1 - \lambda\omega) \left\| A_\lambda x \right\|$ decrescente e (6.5) vem i); de (6.5) e de $\lim\limits_{\lambda \to 0}(1 - \lambda\omega) = 1$ vem ii) e de ii) do Teorema 6.13 vem iii).

Em (6.5) o limite pode ser $+\infty$. Vamos por

$$\widehat{D}(A) = \{x \in \mathcal{D};\ |||Ax||| < +\infty\}. \tag{6.6}$$

6.17 - Proposição: *Seja* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $\lambda\omega < 1$ *e* $D(A) \subset \mathcal{D}$. *Então*

$$D(A) \subset \widehat{D}(A) \subset \overline{D(A)}.$$

Demonstração: $D(A) \subset \widehat{D}(A)$, por iii) da Proposição 6.16. Seja $x \in \mathcal{D}$ e $x \notin \overline{D(A)}$. Como $J_\lambda x \in D(A)$ para todo $\lambda > 0$, temos

$$\left\| x - J_\lambda x \right\| \geq \inf_{y \in D(A)} \|x - y\| = d > 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| A_\lambda x \right\| = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left\| x - J_\lambda x \right\| = +\infty,$$

i.e., $x \notin \widehat{D}(A)$. Logo $\widehat{D}(A) \subset \overline{D(A)}$, q.e.d..

6.18 - Definição: Diz-se que o operador A é *fechado* se de $x_n \in D(A)$, $n = 1, \dots$, $x_n \to x$, $y_n \in Ax_n$, $n = 1, \dots$, e $y_n \to y$ resulta que $x \in D(A)$ e $y \in Ax$.

6.19 - Proposição: *Seja A fechado,* $A \in \mathcal{A}(\omega)$ *e* $\lambda > 0$ *tal que* $\lambda\omega < 1$. *Então:*

i) J_λ *é um operador fechado;*

ii) D_λ *é um conjunto fechado.*

Demonstração: i) Seja (z_n) uma seqüência de elementos de D_λ convergente a z, $x_n = J_\lambda z_n$, $n = 1, \dots$, e (x_n) convergente a x. Como $z_n = x_n + \lambda y_n$, onde $y_n \in Ax_n$, segue-se que (y_n) converge a um certo $y \in X$ e como A é fechado, por hipótese, segue-se que $(x, y) \in A$. Logo, $z = x + \lambda y \in D_\lambda$ e $J_\lambda z = x$ mostrando que J_λ é fechado.

ii) Seja (z_n) uma seqüência de elementos de D_λ convergente a z. Temos $z_n = x_n + \lambda y_n$ e $J_\lambda z_n = x_n$, $n = 1, \ldots$, com $(x_n, y_n) \in A$. Como, por i) do Teorema 6.13, J_λ é lipschitziana com constante $(1 - \lambda\omega)^{-1}$ tem-se

$$\|x_n - x_m\| = \left\|J_\lambda z_n - J_\lambda z_m\right\| \leq (1 - \lambda\omega)^{-1} \|z_n - z_m\|$$

i.e., (x_n) é uma sucessão de Cauchy e, portanto, convergente. Seja $x = \lim x_n$. Então, $y_n = (1/\lambda)(z_n - x_n)$, converge a um certo $y \in X$ e como, por hipótese, A é fechado, segue-se que $(x, y) \in A$. Logo, $z = \lim z_n = \lim(x_n + \lambda y_n) = x + \lambda y$ com $y \in Ax$. Portanto, $z \in D_\lambda$ e, assim, D_λ é fechado.

7. Operadores máximo acretivos e m-acretivos

7.1 - Definição: Seja $A: X \to X$ um operador acretivo e $D(A) \subset C \subset X$. Diz-se que A é *máximo acretivo em* C se A não admitir extensão acretiva própria com domínio contido em C. Diz-se que A é *máximo acretivo* se A for máximo acretivo em X. Diz-se que A é *m-acretivo* se A é acretivo e $\operatorname{Im}(I + A) = X$.

Da Proposição 6.10 resulta que todo operador m-acretivo é máximo acretivo. Com efeito, seja $A: X \to X$ m-acretivo, $A \subset B$ com B acretivo e $(x, y) \in B$. Pondo $z = x + y$ tem-se $z \in X$ e

$$J_1^B z = x. \tag{7.0}$$

De $z \in X$ e A m-acretivo segue-se que existe $x_1 \in D(A)$ tal que $z \in (I + A)x_1$. Portanto $z = x_1 + y_1$ com $(x_1, y_1) \in A$. Daí e de $A \subset B$ vem $(x_1, y_1) \in B$ donde

$$J_1^B z = x_1. \tag{7.1}$$

Mas B sendo acretivo, J_1^B é unívoco pela Proposição 6.10. De (7.0) e (7.1) vem, então, $x = x_1$ e, portanto, $y = y_1$ pois $z = x + y = x_1 + y_1$. Desse modo $(x, y) = (x_1, y_1) \in A$.

Logo, $B = A$ e, assim, A é máximo acretivo. A recíproca que, pelo Teorema 2.13, é válida nos espaços de Hilbert, não tem validade geral. Um exemplo de Calvert [1] mostra que não é válida mesmo que X e X^* sejam uniformemente convexos.

7.2 - Proposição: *Seja A um operador acretivo tal que* $\mathrm{Im}(I + \mu A) = X$ *para algum* $\mu > 0$. *Então,* $\mathrm{Im}(I + \lambda A) = X \ \forall \lambda > 0$.

Demonstração: Sejam $\mathrm{Im}(I + \mu A) = X$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $x \in X$ e ponhamos $k = \lambda/\mu$. Se

$$z = J_\mu \left(\frac{x}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) y \right), \quad y \in X,$$

então $z \in D(A)$, uma vez que $J_\mu \colon X \to D(A)$. Ponhamos $z = By$. Então B é um operador de X e, como J_μ é uma contração (Teorema 6.11), $\forall\, y_1, y_2 \in X$ temos

$$\begin{aligned} \|By_1 - By_2\| &= \left\| J_\mu(\frac{x}{k} + (1 - \frac{1}{k})y_1) - J_\mu(\frac{x}{k} + (1 - \frac{1}{k})y_2) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x}{k} + (1 - \frac{1}{k})y_1 - \frac{x}{k} - (1 - \frac{1}{k})y_2 \right\| \leq \left| 1 - \frac{1}{k} \right| \|y_1 - y_2\| . \end{aligned}$$

Logo, se $k > 1/2$, B é uma contração estrita, donde B tem um ponto fixo y_0. Mas, então, de

$$y_0 = J_\mu \left(\frac{x}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) y_0 \right)$$

vem

$$\frac{x}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) y_0 \in (I + \mu A) y_0,$$

donde $x \in (I + \lambda A)y_0$. Desse modo, $\mathrm{Im}(I + \lambda A) = X$ para todo $\lambda > \mu/2$. Segue-se, daí, que $\mathrm{Im}(I + (\varepsilon + \dfrac{\mu}{2})A) = X$ para cada $\varepsilon > 0$ e o mesmo argumento, aplicado agora a $\mu_\varepsilon = \varepsilon + \dfrac{\mu}{2}$ mostra que $\mathrm{Im}(I + \lambda A) = X$ para cada $\lambda > \mu/4$. Por iteração vê-se que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(I + \lambda A) = X$, $\forall\, \lambda > \mu/2^n$.

7.3 - Corolário: i) *O operador acretivo A é m-acretivo se, e só se,* $\mathrm{Im}(I + \lambda A) = X$, $\forall\, \lambda > 0$.

ii) *Se A é m-acretivo, então $D(A_\lambda) = D(J_\lambda) = D_\lambda = X\ \forall\, \lambda > 0$.*

7.4 - Proposição: *Todo operador m-acretivo é fechado.*

Demonstração: Seja, com efeito, $A\colon X \to X$ um operador m-acretivo, $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $y_n \in Ax_n$ tal que $y_n \to y$. Então, $x_n + y_n \in (I + A)x_n$ donde, $J_1(x_n + y_n) = x_n$, $n = 1, \dots$. Mas A sendo m-acretivo temos $D(J_1) = X$, pelo Corolário 7.3; logo $x + y \in D(J_1)$ e como, pelo Teorema 6.11, J_1 é uma aplicação contínua, $J_1(x + y) = x$. Daí vem $x \in D(A)$ e $x + y \in (I + A)x$, donde $y \in Ax$.

7.5 - Exemplo: a) O operador $\tilde{\beta}$ do Exemplo 6.5-b) é m-acretivo nos dois seguintes casos: i) Ω é limitado; ii) $0 \in \beta(0)$.

Para mostrar que $\tilde{\beta}$ é m-acretivo basta mostrar que $\mathrm{Im}(I + \tilde{\beta}) = L^p(\Omega)$, ou seja, que para cada $v \in L^p(\Omega)$ existe um $u \in D(\tilde{\beta})$ tal que $v \in (I + \tilde{\beta})u$. Mas como β é, por hipótese, acretivo, $(I + \beta)^{-1}$ é um operador unívoco donde, pondo, para cada $x \in \Omega$, $u(x) = (I + \beta)^{-1}v(x)$, basta mostrar que $u \in L^p(\Omega)$ uma vez que daí vem $v(x) \in (I + \beta)u(x)$ ou seja, $v(x) - u(x) \in \beta(u(x))$ com $v - u \in L^p(\Omega)$. Pelo Teorema 6.11, $(I + \beta)^{-1}$ sendo uma contração, u é mensurável donde, pondo $c = (I + \beta)^{-1}(0)$,

$$\begin{aligned}|u(x)| &= |u(x) + c - c| \leq |u(x) - c| + |c| \\ &= \left|(I + \beta)^{-1}v(x) - (I + \beta)^{-1}(0)\right| + |c| \leq |v(x) - (0)| + |c| = |v(x)| + |C|.\end{aligned}$$

Se Ω for limitado, $c \in L^p(\Omega)$. Logo, $u \in L^p(\Omega)$. Se $0 \in \beta(0)$ então $(I + \beta)^{-1}0 = 0$, donde $|u(x)| \leq |v(x)|$. Logo, $u \in L^p(\Omega)$.

b) O operador A, definido no Exemplo 6.5-c), é m-acretivo porque é acretivo e, como se mostra na teoria das equações diferenciais parciais, para cada $v \in L^p(\Omega)$ existe

$u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u - \Delta u = v$, i.e., $\mathrm{Im}(I - \Delta) = L^p(\Omega)$.

Em particular, o operador A de $L^2(\Omega)$ definido por $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $Au = -\Delta u \ \forall u \in D(A)$ é m-acretivo e, portanto, máximo monótono pelo Teorema 2.13.

c) Se $A \in \mathcal{A}(\omega)$ e $\mathrm{Im}(I + \lambda A) = X$ para algum $\lambda > 0$ tal que $\lambda\omega < 1$, então $A + \omega I$ é m-acretivo.

Pela Proposição 7.2 e tendo em vista que, por hipótese, $A + \omega I$ é acretivo, é bastante mostrar que existe um real $\mu > 0$ tal que $\mathrm{Im}(I + \mu(A + \omega I)) = X$. Como $\lambda\omega < 1$ temos $1 - \lambda\omega > 0$. Ponhamos $\mu = \lambda/(1 - \lambda\omega)$ e, portanto, $\lambda = \mu/(1 + \mu\omega)$. Seja $y \in X$. Por hipótese existe $x \in D(A)$ tal que

$$\frac{1}{1 + \mu\omega}\, y \in (I + \lambda A)x$$

ou seja

$$y \in (1 + \mu\omega)x + \mu A x$$

e, portanto,

$$y \in (I + \mu(A + \omega I))x.$$

Logo $\mathrm{Im}(I + \mu(A + \omega I)) = X$.

d) Seja C um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach, X, $T\colon C \to C$ uma aplicação lipschitziana com constante α. Seja $t > 0$ e ponhamos $A = (I - T)/t$. Então $A \in \mathcal{A}((\alpha - 1)/t)$, pelo Exemplo 6.14. Vamos mostrar que J_λ aplica C em C quando

i) $\lambda > 0$, se $\alpha \leq 1$;

ii) $0 < \lambda < t/(\alpha - 1)$, se $\alpha > 1$.

Com efeito, sejam $x \in C$, $\lambda > 0$ e ponhamos

$$G(y) = \frac{t}{t + \lambda}\, x + \frac{\lambda}{t + \lambda}\, T(y).$$

Como C é convexo, $G: C \to C$. Além disto,

$$\|G(y) - G(z)\|$$

$$= \left\| \left(\frac{t}{t+\lambda} x + \frac{\lambda}{t+\lambda} T(y) \right) - \left(\frac{t}{t+\lambda} x + \frac{\lambda}{t+\lambda} T(z) \right) \right\|$$

$$\leq \frac{\lambda}{t+\lambda} \|T(y) - T(z)\| \leq \frac{\lambda\alpha}{t+\lambda} \|y - z\| .$$

Portanto, G é uma contração estrita para todo $\lambda > 0$ se $\alpha \leq 1$ e, uma contração estrita para $0 < \lambda < t/(\alpha - 1)$ se $\alpha > 1$. Em ambos os casos G admite um e um só ponto fixo $y \in C$, i.e.,

$$y = \frac{t}{t+\lambda} x + \frac{\lambda}{t+\lambda} T(y)$$

ou, equivalentemente, $y = J_\lambda x$.

Se $C = X$, de ii) segue-se, pelo exemplo anterior que, se $\alpha > 1$, então $A + \dfrac{\alpha - 1}{t} I$ é m-acretivo.

7.6 - Exemplo: a) O operador descrito no Exemplo 6.6-a) é m-acretivo. Para demonstrar que isto é verdade devemos mostrar que para todo $h \in L^1(0,1)$ existe $u \in D(A)$ tal que $u + Au = u + \varphi(u)' = h$ ou, pondo $\beta = \varphi^{-1}$ e $v = \varphi(u)$, que existe v absolutamente contínua satisfazendo as condições $v(0) = 0$ e $v' + \beta(v) = h$.

Seja, em primeiro lugar, $h \in C([0,1])$. Com auxílio do Teorema de Existência de Peano vê-se que, nesse caso, a equação $v' + \beta(v) = h$ tem uma solução local v em um intervalo $[0, a)$, $0 < a \leq 1$, tal que $v(0) = 0$. E v é única porque se ω for outra teremos $(v - \omega)' + \beta(v) - \beta(\omega) = 0$, donde

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} |v - \omega|^2 + (\beta(v) - \beta(\omega))(v - \omega) = 0$$

ou, como $(\beta(v) - \beta(\omega))(v - \omega) \geq 0$ uma vez que β é monótono,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} |v - \omega|^2 \leq 0.$$

Daí, $|v(x) - \omega(x)|^2 = 0$, $0 \leq x < a$, pois $v(0) = \omega(0) = 0$; portanto, $\omega = v$.

Para estender v a $[0,1]$ observe-se que, exatamente como foi mostrado que A é um operador acretivo em $L^1(0,1)$, mostra-se que A é acretivo em $L^1(0,a)$. Observe-se, ainda, que $0 \in D(A)$ e $A(0) = 0$. Tem-se, pois, pondo $u = \beta(v)$,

$$\int_0^a |u|\,dx = \int_0^a |u - 0|\,dx \leq \int_0^a |u - 0 + Au - A0|\,dx$$

$$= \int_0^a |u + Au|\,dx \leq \int_0^1 |h|\,dx = \|h\|_1$$

e, portanto, se $0 \leq x < a$,

$$|v(x)| \leq \int_0^a |v'|\,ds = \int_0^a |h - \beta(v)|\,ds \leq 2\,\|h\|_1\,.$$

Segue-se que v pode ser estendida ao intervalo $[0,1]$.

Seja agora $h \in L^1(0,1)$ e $(h_n) \subset C([0,1])$ tal que $h_n \to h$ em $L^1(0,1)$. Pelo que já foi demonstrado, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ existe u_n tal que $u_n + Au_n = h_n$ e, como da acretividade de A vem

$$\|u_n - u_m\|_1 \leq \|u_n - u_m + Au_n - Au_m\|_1 = \|h_n - h_m\|_1 \to 0,$$

quando $m, n \to \infty$, segue-se que existe $u \in L^1([0,1])$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(0,1)$. Mas, então, $Au_n = h_n - u_n \to h - u$ em $L^1(0,1)$. Para completar a demonstração é bastante, pois, demonstrar que A é um operador fechado. Seja, para isto, $\{u_n\} \subset D(A)$, $u_n \to u$ e $Au_n \to \omega$ em $L^1(0,1)$. Devemos mostrar que $u \in D(A)$ e $Au = \omega$. Como, por hipótese, $\varphi(u_n)$ é absolutamente contínua temos

$$\left|\varphi(u_n)(x) - \int_0^x \omega(\tau)d\tau\right| \leq \int_0^x |(\varphi(u_n)' - \omega)(\tau)|\,d\tau$$

$$\leq \int_0^1 |(\varphi(u_n)' - \omega)(\tau)|\,d\tau = \|Au_n - \omega\|_1\,, \quad \forall\, x \in [0,1];$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n)(x) = \int_0^x \omega(\tau)d\tau$$

e, pela continuidade de β,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \beta(\varphi(u_n))(x) = \beta\left(\int_0^x \omega(\tau)d\tau\right).$$

Por outro lado, como $u_n \to u$ em $L^1(0,1)$, existe uma seqüência (n_k) tal que

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) = u(x) \quad \text{q.s. em} \quad [0,1].$$

Portanto,

$$u(x) = \beta\left(\int_0^x \omega(\tau)d\tau\right) \quad \text{q.s. em} \quad [0,1]$$

donde redefinindo u de modo que essa igualdade seja verificada em todo ponto de $[0,1]$, resulta que u é contínua, $u(0) = 0$ e

$$\varphi(u)(x) = \int_0^x \omega(\tau)\,d\tau$$

é absolutamente contínua; logo $u \in D(A)$ e $Au = \varphi(u)' = \omega$, q.e.d..

b) O operador A, descrito no Exemplo 6.6-b), é m-acretivo. Para demonstrar essa afirmação é bastante demonstrar que $\forall\, h \in L^1(0,1)$ existe $u \in D(A)$ tal que $u + Au = h$, ou seja, $u - \varphi(u)'' = h$, uma vez que já foi demonstrado que A é acretivo.

Pondo, como no exemplo anterior, $\beta = \varphi^{-1}$ e $v = \varphi(u)$ devemos, então, demonstrar que para todo $h \in L^1(0,1)$ existe v tal que v e v' são absolutamente contínuas, $v(0) = v(1) = 0$ e $\beta(v) - v'' = h$.

Observe-se, inicialmente, que se v satisfaz essas condições, então v é limitada. Com efeito, da acretividade de A e de $A(0) = 0$ vem

$$\|\beta(v)\|_1 = \|u\|_1 = \|u - 0\|_1 \le \|u - 0 + (Au - A0)\|_1 = \|h\|_1\,.$$

Além disto, de $v(0) = v(1) = 0$ segue-se que existe $\xi \in (0,1)$ tal que $v'(\xi) = 0$ e, assim,

$$|v'(x)| \leq \int_\xi^x |v''(\tau)| d\tau \leq \int_0^1 |\beta(v)(\tau) - h(\tau)| d\tau \leq 2 \|h\|_1 .$$

Portanto

$$|v(x)| \leq \int_0^x |v'(\tau)| d\tau \leq 2 \|h\|_1 \quad \forall\, x \in [0,1],$$

i.e. $\|v\|_\infty \leq 2 \|h\|_1$. Isto posto, seja $\tilde{\beta}$ definida por

$$\tilde{\beta}(s) = \begin{cases} \beta(2\|h\|_1) & \text{se} \quad s \geq 2\|h\|_1 \\ \beta(s) & \text{se} \quad |s| \leq 2\|h\|_1 \\ \beta(-2\|h\|_1) & \text{se} \quad s \leq -2\|h\|_1 . \end{cases}$$

Teremos $\tilde{\beta}(v) = \beta(v)\ \forall\, v$ tal que $\|v\|_\infty \leq 2 \|h\|_1$, donde v é solução de $\beta(v) - v'' = h$ se, e só se, v é solução de $\tilde{\beta}(v) - v'' = h$. Ponhamos

$$T(v)(x) = \int_0^1 g(x,y)(\tilde{\beta}(v)(y) - h(y)) dy, \quad v \in L^1(0,1),$$

onde

$$g(x,y) = \begin{cases} y(x-1) & \text{se} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ x(y-1) & \text{se} \quad 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Imediatamente se tem $T(v)(0) = T(v)(1) = 0$, Tv e $(Tv)'$ são absolutamente contínuas, $(T(v))'' = \tilde{\beta}(v) - h,\ \forall\, v \in L^1(0,1)$. Assim, para demonstrar a asserção feita é bastante demonstrar que o operador $T\colon S \to S$, $S \subset C([0,1])$ tem um ponto fixo. Seja $K = \max\{\beta(2\|h\|_1), |\beta(-2\|h\|_1)|\}$; então $\left|\tilde{\beta}(s)\right| \leq K \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} |T(v)(x)| &\leq \int_0^1 |g(x,y)| \left|\tilde{\beta}(v)(y) - h(y)\right| dy \\ &\leq \int_0^1 \left|\tilde{\beta}(v)(y) - h(y)\right| dy \leq K + \|h\|_1 . \end{aligned}$$

Logo, $\|T(v)\|_{C([0,1])} \leq K + \|h\|_1$. Analogamente, $\|(T(v))'\|_{C([0,1])} \leq K + \|h\|_1$. Portanto, T aplica $L^1(0,1)$ em $S = \{\omega, \omega \in C([0,1]), \omega(0) = \omega(1) = 0, \ ||\omega||_\infty \leq K + \|h\|_1, ||\omega'||_\infty \leq K + \|h\|_1\}$, onde $\|\omega\|_\infty = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |\omega(x)| = ||w||_{C([0,1])}$. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, S é relativamente compacto em $C([0,1])$. Vamos mostrar que T é contínua em $C([0,1])$. Seja $(v_n) \subset C([0,1])$, $v_n \to v$ em $C([0,1])$. Então $\tilde{\beta}(v_n)(y) \to \tilde{\beta}(v)(y)$ e

$$T(v_n)(x) - T(v)(x) = \int_0^1 g(x,y)(\tilde{\beta}(v_n)(y) - \tilde{\beta}(v)(y))\,dy$$

donde

$$|T(v_n)(x) - T(v)x| \leq \int_0^1 |\tilde{\beta}(v_n)(y) - \tilde{\beta}(v)(y)|dy \to 0.$$

Assim $||T(v_n) - T(v)||_\infty \to 0$.

Logo $T(v_n)$ converge a Tv em $C([0,1])$. Segue-se, pelo Teorema de Schauder, que T tem um ponto fixo.

c) O operador acretivo, A, definido no Exemplo 6.6-c), é m-acretivo. Para demonstrar essa afirmação, i.e., que para todo $h \in C([0,1])$ existe $u \in D(A)$ tal que $h \in (I+A)u$, ou, o que é o mesmo, $u'' = \varphi(u-h)$, suponhamos inicialmente, que φ é limitada, $|\varphi(s)| \leq K \ \forall\, s \in \mathbb{R}$ e consideremos o operador $T\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ definido por

$$T(u)(x) = \int_0^1 g(x,y)\varphi(u(y) - h(y))dy, \quad u \in C([0,1]),$$

onde g é a função de Green, definida no exemplo precedente. Do mesmo modo que anteriormente, vê-se que $T(u)'' = \varphi(u-h)$ e, daí, que todo ponto fixo de T é uma solução da equação $u'' = \varphi(u-h)$. Vamos, então, demonstrar que T tem um ponto fixo. Temos

$$|T(u)(x)| \leq \int_0^1 |\varphi(u(t) - h(t))|\,dt \leq K$$

donde $\|T(u)\|_\infty \leq K$. Analogamente, $\|(T(u))'\|_\infty \leq K$ e, portanto, T aplica $C([0,1])$ no conjunto

$$\{\omega; \omega \in C([0,1]), \|\omega\|_\infty \leq K, \|\omega'\|_\infty \leq K\}$$

que é um subconjunto relativamente compacto de $C([0,1])$. Além disto, T é contínuo. Seja, com efeito, $u_n \to u$ em $C([0,1])$. Como φ é contínua e limitada, φ é uniformemente contínua. Logo,

$$|T(u_n)(x) - T(u)(x)| \leq \int_0^1 |\varphi(u_n(y) - h(y)) - \varphi(u(y) - h(y))|\, dy \to 0$$

donde $\|T(u_n) - T(u)\|_\infty \to 0$, i.e., $Tu_n \to Tu$ em $C([0,1])$. Logo, T é, de fato, contínua e, assim, tem um ponto fixo, pelo Teorema de Schauder. Como $Tu = u \Rightarrow u \in \mathcal{D}(A)$.

Observe-se, agora, que as soluções do problema em estudo são limitadas, quer φ seja limitada quer não. De fato, se v é uma qualquer delas temos

$$\|v\|_\infty = \|v - 0\|_\infty \leq \|v - 0 + (h - v) - 0\|_\infty = \|h\|_\infty .$$

Seja, então, φ não limitada. Pondo

$$\tilde{\varphi}(s) = \begin{cases} \varphi(2\|h\|_\infty) & \text{se} \quad s \geq 2\|h\|_\infty \\ \varphi(s) & \text{se} \quad |s| \leq 2\|h\|_\infty \\ \varphi(-2\|h\|_\infty) & \text{se} \quad s \leq -2\|h\|_\infty \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}$ é limitada e satisfaz as condições impostas a φ. Logo, se u é uma solução de $u'' = \tilde{\varphi}(u - h)$, solução que existe pelo que ficou estabelecido anteriormente, então $\|u\|_\infty \leq \|h\|_\infty$, donde $\tilde{\varphi}(u - h) = \varphi(u - h)$ e, desse modo, u é solução de $u'' = \varphi(u - h)$. Portanto, em todos os casos, $h \in \operatorname{Im}(I + A)$.

Condições equivalentes à maximalidade dos operadores acretivos são dadas pelo teorema a seguir.

7.7 - Teorema: *Seja A acretivo. São equivalentes:*

i) *A é máximo acretivo em $C \supset D(A)$;*

ii) *Se $x \in C$, $y \in X$, e $\forall\,(u,v) \in A$, $\|x-u+\lambda(y-v)\| \geq \|x-u\|$ $\forall \lambda > 0$, então $(x,y) \in A$;*

iii) *Se $x \in C$, $y \in X$ e para cada $(u,v) \in A$ existe $\xi^* \in F(x-u)$ tal que $\langle y-v, \xi^* \rangle \geq 0$, então $(x,y) \in A$.*

Demonstração: Análoga à do Teorema 2.3.

Os operadores acretivos, máximo acretivos e m-acretivos têm uma propriedade análoga à dos operadores monótonos dada pela Proposição 1.5:

7.8 - Proposição: *Se A é acretivo, máximo acretivo ou m-acretivo, então o operador obtido de A por translações de $D(A)$ e $\mathrm{Im}(A)$ é, respectivamente, acretivo, máximo acretivo ou m-acretivo.*

A demonstração não oferece dificuldade.

7.9 - Proposição: *Seja X liso, $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $D(A) \subset C \subset X$ e $A + \omega I$ máximo em C. Então, Ax é convexo e fechado $\forall\, x \in D(A)$.*

Demonstração: Seja $x \in D(A)$ e $y_i \in Ax$, $i = 1, 2$. Como, por hipótese, $A \in \mathcal{A}(\omega)$, para cada $(u,v) \in A$ tem-se

$$\langle y_i + \omega x - v - \omega u, F(x-u) \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Mas daí vem, para cada $(u,v) \in A$ e $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} \langle t y_1 + (1-t) y_2 + \omega x - v - \omega u, F(x-u) \rangle &= t \langle y_1 + \omega x - v - \omega u, F(x-u) \rangle \\ + (1-t) \langle y_2 + \omega x - v - \omega u, F(x-u) \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

donde, pelo Teorema 7.7, $t y_1 + (1-t) y_2 \in Ax$, i.e., Ax é convexo.

Seja $y_n \in Ax$, $n = 1, \ldots$ e $y_n \to y$. Então, para cada $(u,v) \in A$,

$$\langle y_n + \omega x - v - \omega u, F(x-u) \rangle \geq 0, \quad n = 1, \ldots,$$

visto que $A \in \mathcal{A}(\omega)$. Mas daí vem

$$\langle y + \omega x - v - \omega u, F(x - u)\rangle \geq 0 \quad \forall\,(u, v) \in A.$$

Pelo Teorema 7.7, $y \in Ax$, o que mostra que Ax é fechado.

7.10 - Definição: Diz-se que um operador $A\colon X \to X$, onde X é um espaço de Banach, é *demifechado* se as condições $(x_n, y_n) \in A$, $n = 1, \ldots, x_n \to x$ e $y_n \rightharpoonup y$ implicam $(x, y) \in A$.

7.11 - Proposição: Seja X um espaço de Banach, cuja norma é diferenciável à Fréchet, $A \in \mathcal{A}(\omega)$ e $A + \omega I$ máximo em $\overline{D(A)}$. Então A é demifechado.

Demonstração: Como, por hipótese, a norma de X é diferenciável à Fréchet, o operador dualidade é unívoco e contínuo, pelo Teorema I-6.6 e Lema I-6.12. Sejam $(x_n, y_n) \in A$, $n = 1, \ldots, x_n \to x$ e $y_n \rightharpoonup y$. Tem-se, então, $\forall\,(u, v) \in A$,

$$\begin{aligned}
&|\langle y_n + \omega x_n - v - \omega u, F(x_n - u)\rangle - \langle y + \omega x - v - \omega u, F(x - u)\rangle| \\
&\quad \leq |\langle y_n - y, F(x - u)\rangle| + |\langle y_n - v, F(x_n - u) - F(x - u)\rangle| \\
&\quad + |\omega\langle x_n - u, F(x_n - u) - F(x - u)\rangle| + |\omega\langle x_n - x, F(x - u)\rangle| \\
&\quad \leq |\langle y_n - y, F(x - u)\rangle| + (\|y_n - v\| + \|\omega(x_n - u)\|)\, \|F(x_n - u) - F(x - u)\| \\
&\quad + |\omega\langle x_n - x, F(x - u)\rangle| \to 0
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Logo,

$$\langle y + \omega x - v - \omega u, F(x - u)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n + \omega x_n - v - \omega u, F(x_n - u)\rangle \geq 0$$

para todo $(u, v) \in A$. Como $x_n \to x$ e $x_n \in D(A)$, $n = 1, \ldots$ segue-se que $x \in \overline{D(A)}$. Logo, $(x, y) \in A$ pelo Teorema 7.7.

7.12 - Proposição: *Todo operador $A \in \mathcal{A}(\omega)$, tal que $A + \omega I$ é máximo em $\overline{D(A)}$, é* *um subconjunto fechado de* $X \times X$.

Demonstração: Sejam $(x_n, y_n) \in A$, $x_n \to x$ e $y_n \to y$ quando $n \to \infty$. Como $A \in \mathcal{A}(\omega)$,

$$\|x_n - u\| \leq \|x_n - u + \lambda(y_n + \omega x_n - v - \omega u)\| \quad \forall\, (u,v) \in A,$$

donde no limite quando $n \to \infty$,

$$\|x - u\| \leq \|x - u + \lambda(y + \omega x - v - \omega u)\| \quad \forall\, (u,v) \in A.$$

Como $x_n \in D(A)$, $n = 1, \ldots$, e $x_n \to x$ tem-se $x \in \overline{D(A)}$ e como, por hip'otese, $A + \omega I$ é máximo acretivo em $\overline{D(A)}$ tem-se $(x,y) \in A$, pelo Teorema 7.7, q.e.d..

7.13 - Proposição: *Seja* X *um espaço de Banach e* $A \in \mathcal{A}(\omega)$. *Se* $\lambda_0 \omega < 1$ *então, para cada* $x \in \bigcap\limits_{0<\lambda\leq\lambda_0} D_\lambda = D$, $\|J_\lambda x\|$ *é limitado em* $0 < \lambda \leq \lambda_0$.

Demonstração: Seja $x \in D$ e $0 < \lambda, \mu \leq \lambda_0$. Então, $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$ e $A_\mu x \in AJ_\mu x$, donde, para algum $\xi^* \in F(J_\lambda x - J_\mu x)$ tem-se

$$\langle A_\lambda x + \omega J_\lambda x - A_\mu x - \omega J_\mu x, \xi^* \rangle \geq 0$$

pois, por hipótese, $A \in \mathcal{A}(\omega)$. Logo,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lambda\langle A_\lambda x - A_\mu x, \xi^*\rangle + \lambda\omega\,\|\xi^*\|^2 \\
&= \langle \lambda A_\lambda x - \mu A_\mu x + \mu A_\mu x - \lambda A_\mu x, \xi^*\rangle + \lambda\omega\,\|\xi^*\|^2 \\
&= \langle \lambda A_\lambda x - \mu A_\mu x, \xi^*\rangle + (\mu - \lambda)\langle A_\mu x, \xi^*\rangle + \lambda\omega\,\|\xi^*\|^2 \\
&\leq -\langle \mu A_\mu x - \lambda A_\lambda x, \xi^*\rangle + |\mu - \lambda|\,\|A_\mu x\| \cdot \|\xi^*\| + \lambda\omega\,\|\xi^*\|^2.
\end{aligned}$$

Mas

$$F(J_\lambda x - J_\mu x) = F(x - \lambda A_\lambda x - x + \mu A_\mu x) = F(\mu A_\mu(x) - \lambda A_\lambda x).$$

Logo,

$$(1-\lambda\omega)\left\|J_\lambda x - J_\mu x\right\| \leq |\mu-\lambda|\, \|A_\mu x\|$$

e, portanto, de $0 < \lambda \leq \mu = \lambda_0$ vem

$$\left\|J_\lambda x - J_{\lambda_0} x\right\| \leq \lambda_0 \left\|A_{\lambda_0} x\right\|, \quad \text{se} \quad \omega \leq 0$$

e

$$\left\|J_\lambda x - J_{\lambda_0} x\right\| \leq \lambda_0(1-\lambda_0\omega)^{-1} \left\|A_{\lambda_0} x\right\|, \quad \text{se} \quad \omega > 0,$$

q.e.d..

7.14 - Proposição: *Seja X^* uniformemente convexo, $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $A+\omega I$ máximo em $\overline{D(A)}$ e $D(A) \subset \operatorname{Im}(I+\lambda A)$, $0 < \lambda < \lambda_0$. Então,*

$$\lim_{\lambda\to 0} \left\|A_\lambda x\right\| = |Ax| \qquad \forall\, x \in D(A).$$

Demonstração: Temos, por hipótese, $D(A) \subset D_\lambda$, $0 < \lambda < \lambda_0$, donde pela Proposição 6.16, $\left\|A_\lambda x\right\|$ tem um limite quando $\lambda \to 0$ e

$$\lim_{\lambda\to 0} \left\|A_\lambda x\right\| = |||Ax||| \leq |Ax|\,, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Por outro lado, de acordo com o Teorema de Milman, X^* é reflexivo e, portanto, X é reflexivo. Existe, então, uma seqüência (λ_n), $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$, e um $y \in X$ tais que $A_{\lambda_n} x \rightharpoonup y$ quando $n \to \infty$. Segue-se daí que

$$\|y\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_{\lambda_n} x\| = |||Ax|||$$

pois a norma é seqüencialmente s.c.i. em relação à topologia fraca de X. Mas, $A_{\lambda_n} x \in AJ_{\lambda_n} x$ e, por viii) do Teorema 6.13, $J_{\lambda_n} x \to x\ \forall\, x \in D(A)$. Além disto, pelo Teorema

I-6.15 e a Proposição 7.11, A é demifechado. Logo, $y \in Ax$ e, portanto, $|Ax| \leq \|y\| \leq |||Ax|||$, donde

$$\lim \|A_\lambda x\| = |||Ax||| = |Ax| \quad \forall\, x \in D(A),$$

q.e.d..

7.15 - Lema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo e estritamente convexo, D um subconjunto convexo de X e $P_n\colon D \to X$, $n = 1, \dots$, uma aplicação lipschitziana cuja constante $l_n \to 1$, quando $n \to \infty$. Se $x, y \in D$, $P_n x \rightharpoonup x$ e $P_n y \rightharpoonup y$, então $P_n(tx + (1-t)y) \rightharpoonup tx + (1-t)y$ quando $n \to \infty$, $0 \leq t \leq 1$.*

Demonstração: Ponhamos $z = tx + (1-t)y$, $0 \leq t \leq 1$. Temos $z \in D$. De $P_n x \rightharpoonup x$ segue-se que o conjunto $\{P_n x\}$, $n = 1, \dots$, é limitado donde, por

$$\begin{aligned}\|P_n z - x\| &\leq \|P_n z - P_n x\| + \|P_n x - x\| \leq l_n \|z - x\| + \|P_n x - x\| \\ &= l_n(1-t)\|y - x\| + \|P_n x - x\|,\end{aligned}$$

o conjunto $\{P_n z\}$, $n = 1, \dots$, é limitado. Pela reflexividade de X segue-se, então, que existe uma seqüência $\{n_k\}$, $n_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, e um $\omega \in X$ tais que $P_{n_k} z \rightharpoonup \omega$ quando $k \to \infty$. Mas então,

$$\|\omega - x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|P_{n_k} z - P_{n_k} x\| \leq \liminf_{k\to\infty} l_{n_k} \|z - x\| = \|z - x\| = (1-t)\|y - x\|.$$

$$\|\omega - y\| \leq \liminf_{k\to\infty} \left\|P_{n_k} z - P_{n_k} y\right\| \leq \liminf_{k\to\infty} l_{n_k} \|z - y\| = \|z - y\| = t\|y - x\|$$

e, daí,

$$\|y - x\| = \|y - \omega + \omega - x\| \leq \|y - \omega\| + \|\omega - x\| \leq \|y - x\|$$

i.e.,

$$\|(y - \omega) + (\omega - x)\| = \|y - \omega\| + \|\omega - x\| = \|y - x\|. \tag{7.2}$$

Portanto,

$$\|\omega - x\| = (1-t)\|y - x\| \quad \text{e} \quad \|\omega - y\| = t\|y - x\|. \tag{7.3}$$

Mas X sendo estritamente convexo, de (7.2) resulta, pelo Teorema I-5.10, que, ou $\omega - x = 0$ donde por (7.3), $t = 1$ e, portanto, $\omega = x = z$, ou $y - \omega = \lambda(\omega - x)$. Daí, ainda por (7.3), $\lambda = t/(1-t)$ e, portanto, $\omega = z$. Pela unicidade do limite tem-se, então, $P_n z \rightharpoonup z$.

7.16 - Proposição: *Seja X um espaço de Banach reflexivo, estritamente convexo e que satisfaz a condição* I-(5.2) *da Proposição* I-5.8. *Então, se $A + \omega I$ é m-acretivo, $\overline{D(A)}$ é convexo.*

Demonstração: Sejam x e y pontos arbitrários de $D(A)$. É bastante demonstrar que $(x+y)/2 \in \overline{D(A)}$. Se $\lambda_n \to 0$, então $J_{\lambda_n} x \to x$ e $J_{\lambda_n} y \to y$, por viii) do Teorema 6.13, donde $J_{\lambda_n}((x+y)/2) \rightharpoonup (x+y)/2$, pelo Lema 7.15. Além disto, se $\lambda_n \omega < 1$, $n = 1, \dots$, então, por i) do Teorema 6.13,

$$\limsup_{\lambda_n \to 0} \left\| J_{\lambda_n} \left(\frac{x+y}{2} \right) - J_{\lambda_n} x \right\| \leq \lim_{\lambda_n \to 0} (1 - \lambda_n \omega)^{-1} \left\| \frac{y-x}{2} \right\| = \left\| \frac{y-x}{2} \right\| .$$

Logo,

$$J_{\lambda_n} \left(\frac{x+y}{2} \right) - J_{\lambda_n} x \to \frac{y-x}{2}$$

pela hipótese I-(5.2). Portanto, $J_{\lambda_n}((x+y)/2) \to (x+y)/2$, donde $J_\lambda((x+y)/2) \to (x+y)/2$, pela unicidade do limite. Finalmente, como $\mathrm{Im}(J_\lambda) = D(A)$ tem-se $(x+y)/2 \in \overline{D(A)}$.

Seja X um espaço normado e $C \subset D \subset X$. Diz-se que $P\colon D \to C$ é uma *retração* de D em C se P é contínua e $P(x) = x \;\forall\, x \in C$. Quando existe uma retração de D em C diz-se que C é uma *retração* de D. A retração $P\colon D \to C$ e a retração C são ditos *não expansivos* se $\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|$; são ditos *irradiantes* se de $P(x) = z$ vem $P(z + \lambda(x - z)) = z \;\forall\, \lambda > 0$ tal que $z + \lambda(x - z) \in D$.

7.17 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo e estritamente convexo e $A\colon X \to X$ tal que $A + \omega I$ é m-acretivo. Então, $\overline{\mathrm{conv}\, D(A)}$ é uma retração não expansiva* *de X onde* $\operatorname{conv} D(A)$ *é o conjunto das combinações convexas dos elementos de* $D(A)$*.*

Demonstração: Seja $C = \{x \in X; J_\lambda x \rightharpoonup x \text{ quando } \lambda \to 0\}$. Pelo Lema 7.15, com $D = X, C$ é um conjunto convexo. Além disto, seja $(x_n) \subset C$, $x_n \to x$ e $\omega^* \in X^*$. Escolhendo $\lambda_0 > 0$ de modo que $\lambda_0 \omega < 1$ então $(1 - \lambda\omega)^{-1}$ é limitada e menor que um certo M, para $0 < \lambda < \lambda_0$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe um n_0 tal que $\|x - x_n\| < \varepsilon/2(M+1)\,\|\omega^*\|\ \forall\, n > n_0$ e, para cada n, um λ_n, $0 < \lambda_n < \lambda_0$, tal que $|\langle J_\lambda x_n - x_n, \omega^* \rangle| < \varepsilon/2\ \forall\, \lambda$ que satisfaz a condição $0 < \lambda < \lambda_n$. Portanto, se $n > n_0$ e $0 < \lambda < \lambda_n$, então

$$
\begin{aligned}
|\langle J_\lambda x - x, \omega^* \rangle| &\le |\langle J_\lambda x - J_\lambda x_n, \omega^* \rangle| + |\langle J_\lambda x_n - x_n, \omega^* \rangle| + |\langle x_n - x, \omega^* \rangle| \\
&\le \|J_\lambda x - J_\lambda x_n\| \cdot \|\omega^*\| + \left|\langle J_\lambda x_n - x_n, \omega^* \rangle\right| + \|x_n - x\| \cdot \|\omega^*\| \\
&\le (1 + (1 - \lambda\omega)^{-1})\, \|x - x_n\|\, \|\omega^*\| + |\langle J_\lambda x_n - x_n, \omega^* \rangle| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

i.e., $J_\lambda x \rightharpoonup x$ e, assim, C é fechado.

Como por viii) do Teorema 6.13, $D(A) \subset C$ e C é convexo e fechado tem-se $\overline{\operatorname{conv} D(A)} \subset C$. Por outro lado, de $J_\lambda x \in D(A)\ \forall\, x \in X$ resulta, pela definição de C, que C está contido no fecho fraco de $D(A)$. Mas $D(A) \subset \overline{\operatorname{conv} D(A)}$ e $\overline{\operatorname{conv} D(A)}$ é fracamente fechado. Logo, $C \subset \overline{\operatorname{conv} D(A)}$ e, portanto, $C = \overline{\operatorname{conv} D(A)}$.

Para cada $x \in X$ existe, pela Proposição 7.13, um $\lambda_0 > 0$ e uma constante $M(x)$ tais que $\|J_\lambda x\| \le M(x)$ para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Seja

$$C_x = \{y \in C; \|y\| \le M(x)\}.$$

Cada C_x é fracamente compacto donde $\displaystyle\prod_{x \in X} C_x = Q$ é compacto na topologia produto correspondente. Para cada λ, $0 < \lambda \le \lambda_0$, J_λ é um ponto de Q. Seja $\lambda_n \to 0$ e P o limite de J_{λ_n} em Q. Então, $Px \in C\ \forall\, x \in X$ visto que C_x é fracamente fechado. Portanto, $P\colon X \to C$ e

$$\|Px - Py\| \le \liminf_{n \to \infty} \|J_{\lambda_n} x - J_{\lambda_n} y\| \le \lim_{n \to \infty} (1 - \lambda_n \omega)^{-1}\, \|x - y\| = \|x - y\|\,,$$

i.e., P é uma retração não expansiva e, assim, $\overline{\operatorname{conv} D(A)}$ é uma retração não expansiva de X.

7.18 - Nota: Os operadores acretivos dos espaços de Banach nem sempre têm uma extensão m-acretiva em $\overline{\operatorname{conv} D(A)}$, como ocorre com os operadores acretivos dos espaços de Hilbert (Proposição 2.15). Seja, por exemplo, C um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach, X, que não seja uma retração não expansiva de X. (Se a dimensão de X é maior ou igual a 3 e X não é um espaço de Hilbert, certamente existe um C nessas condições; com efeito, demonstra-se (Reich [1] pag. 381) que todo subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach, X, de dimensão maior ou igual a 3, é uma retração não expansiva de X se, e só se, X é um espaço de Hilbert). Então, pelo Teorema 7.17, o operador acretivo $A\colon X \to X$, definido por $A = \{(x, 0); x \in C\}$, não tem extensão m-acretiva em $\overline{\operatorname{conv} D(A)} = C$.

7.19 - Lema: *Seja C um subconjunto convexo, fechado e não vazio de um espaço de Banach liso. Então, $x \in C^o$ se, e só se,*

$$x \in C \quad \text{e} \quad \|x\|^2 \leq \langle y, F(x) \rangle, \quad \forall\, y \in C. \tag{7.4}$$

Demonstração: Se x satisfaz (7.4), então $\|x\|^2 \leq \|y\|\,\|x\|$ e daí, $\|x\| \leq \|y\|\ \forall\, y \in C$; logo $x \in C^o$. Reciprocamente, de $x \in C^o$ vem, $\forall\, y \in C$ e $t \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
&\|(1-t)x + ty\|^2 = \langle (1-t)x + ty, F((1-t)x + ty) \rangle \\
&= \langle x, F((1-t)x + ty) \rangle + t\langle y - x, F((1-t)x + ty) \rangle \\
&\leq \|x\|\,\|(1-t)x + ty\| + t\langle y - x, F((1-t)x + ty) \rangle \\
&\leq \|(1-t)x + ty\|^2 + t\langle y - x, F((1-t)x + ty) \rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$t\langle y - x, F((1-t)x + ty) \rangle \geq 0$$

donde, dividindo por t, fazendo t tender a zero e levando em conta o Teorema I-6.6, tem-se (7.4).

7.20 - Lema: *Seja D um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach liso e $P\colon D \to C$ uma retração de D em C. São equivalentes as condições:*

i) $\langle x - Px, F(Px - y)\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in D$ *e* $\forall\, y \in C$.

ii) P *é não expansiva e irradiante.*

Demonstração: Seja i) verdadeira. Então

$$\langle x - Px, F(Px - Py)\rangle \geq 0,\ \langle y - Py, F(Py - Px)\rangle \geq 0,\ \forall\, x, y \in D.$$

Portanto,

$$\langle x - Px + Py - y, F(Px - Py)\rangle \geq 0$$

e, daí,

$$\|Px - Py\|^2 \leq \langle x - y, F(Px - Py)\rangle \leq \|x - y\| \cdot \|Px - Py\| \ \ \forall\, x, y \in D.$$

Logo, P é não expansiva. Seja λ tal que $Px + \lambda(x - Px) \in D$. Pondo $\omega = Px + \lambda(x - Px)$ tem-se

$$\langle x - Px, F(Px - P\omega)\rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle \omega - P\omega, F(P\omega - Px)\rangle \geq 0.$$

Logo, tendo em vista que $\omega - Px = \lambda(x - Px)$, segue-se que

$$\langle \omega - Px + P\omega - \omega, F(Px - P\omega)\rangle \geq 0,$$

ou seja

$$-\|Px - P\omega\|^2 \geq 0$$

e, daí, $P\omega = Px$. Logo P é irradiante e, assim, i) $\Rightarrow$ ii). Reciprocamente, suponhamos ii) verdadeira e sejam $x \in D$, $y \in C$ e $K = D \cap \{Px + \lambda(x - Px); \lambda \geq 0\}$. Então, K é um conjunto convexo e fechado, $Py = y$ e se $\omega \in K$, $P\omega = Px$. Logo, para todo $\omega \in K$,

$$\|Px - y\| = \|P\omega - Py\| \leq \|\omega - y\|,$$

i.e., $Px - y \in (K - y)^0$ e pelo Lema 7.19 aplicado a $K - y$,

$$\|Px - y\|^2 \leq \langle \omega - y, F(Px - y) \rangle.$$

Daí

$$\langle Px - y,\, F(Px - y) \rangle \leq \langle \omega - y,\, F(Px - y) \rangle$$

e portanto

$$\langle \omega - Px, F(Px - y) \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in D \quad \forall\, y \in C.$$

Em particular, para $\omega = x$, tem-se $\langle x - Px,\, F(Px - y) \rangle \geq 0$, que é a condição i).

7.21 - Corolário: *Existe no m'aximo uma retração não expansiva e irradiante de um espaço de Banach liso, X, em um subconjunto C de X, não vazio.*

Demonstração: Com efeito, se P e Q forem duas retrações não expansivas e irradiantes de X sobre C então, pelo Lema 7.20 tem-se

$$\langle x - Px, F(Px - Qx) \rangle \geq 0, \quad \langle x - Qx, F(Qx - Px) \rangle \geq 0,$$

donde $\langle Qx - Px, F(Px - Qx) \rangle \geq 0$ e, daí, $Qx = Px$.

O operador dualidade, F, de um espaço de Banach liso é dito *fracamente seqüencialmente contínuo* se a condição $x_n \rightharpoonup x$ implica $F(x_n) \overset{*}{\rightharpoonup} F(x)$. É o caso, por exemplo, dos operadores dualidade dos espaços de Hilbert.

7.22 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo, estritamente convexo e liso e suponhamos que o operador dualidade F seja fracamente seqüencialmente contínuo. Se $A\colon X \to X$ é tal que $A + \omega I$ é m-acretivo, então a retração não expansiva $P\colon X \to \overline{\operatorname{conv} D(A)}$, definida no Teorema 7.17, é irradiante e $P = \lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda$ em $Q = \prod\limits_{x \in X} C_x$.*

Demonstração: Pelo que foi demonstrado no Teorema 7.17, existe uma seqüência $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n < \lambda_0$, $\lambda_0 \omega < 1$, $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e tal que, quando $n \to \infty$, $J_{\lambda_n} x$

tende fraco a Px, $\forall\, x \in X$. Pela acretividade de $A + \omega I$ temos

$$\Big\langle A_{\lambda_n} x + \omega J_{\lambda_n} x - A_{\lambda_n} y - \omega J_{\lambda_n} y, F(J_{\lambda_n} x - J_{\lambda_n} y)\Big\rangle \geq 0, \quad \forall\, x, y \in X.$$

Daí vem

$$(1 - \lambda_n \omega)\, \|J_{\lambda_n} x - J_{\lambda_n} y\|^2 \leq \langle x - y, F(J_{\lambda_n} x - J_{\lambda_n} y)\rangle \quad \forall\, x, y \in X.$$

Portanto, se $x \in X$ e $y \in \overline{\operatorname{conv} D(A)}$ tem-se $J_{\lambda_n} x - J_{\lambda_n} y \rightharpoonup Px - y$ donde

$$\|Px - y\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|J_{\lambda_n} x - J_{\lambda_n} y\|^2$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} (1 - \lambda_n \omega)^{-1} \langle x - y, F(J_{\lambda_n} x - J_{\lambda_n} y)\rangle = \langle x - y, F(Px - y)\rangle.$$

Daí,

$$||Px - y||^2 = \langle Px - y, F(Px - y)\rangle \leq \langle x - y, F(Px - y)\rangle$$

e, portanto,

$$\langle x - Px, F(Px - y)\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in X \text{ e } y \in \overline{\operatorname{conv} D(A)}.$$

Pelo Lema 7.20, P é irradiante donde, pelo Corolário 7.21, $P = \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda$ em $Q = \prod_{x\in X} C_x$, q.e.d. .

Um operador $P_C\colon X \to C$ é dito *projeção* de X sobre C se

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\| \qquad \forall\, y \in C.$$

É bem sabido que se C for um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert, então existe uma e uma só projeção de X sobre C e que P_C é a projeção de X sobre C se, e só se,

$$\langle x - P_C x, P_C x - y\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in C. \tag{7.5}$$

7.23 - Corolário: *Seja X um espaço de Hilbert e $A\colon X \to X$ um operador tal que $A + \omega I$ é m-acretivo. Então:*

i) $\overline{D(A)}$ *é um conjunto convexo;*

ii) *A retração não expansiva e irradiante* $P\colon X \to \overline{\operatorname{conv} D(A)}$ *definida no Teorema* 7.17 *é a projeção* $P_{\overline{D(A)}}$ *de* X *sobre* $\overline{D(A)}$*;*

iii) $J_\lambda x \to P_{\overline{D(A)}}x, \qquad \forall\, x \in X$*, quando* $\lambda \to 0$.

Demonstração: i) $\overline{D(A)}$ é convexo pela Proposição 7.16. ii) Como, no caso dos espaços de Hilbert, $F = I$ temos, pelo Teorema 7.22 e o Lema 7.20,

$$\langle x - Px, Px - y\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in \overline{D(A)}$$

donde, por (7.5), P é a projeção $P_{\overline{D(A)}}$. iii) Seja $u \in D(A)$ e $v \in Au$. Temos, pela acretividade

$$\langle A_\lambda x + \omega J_\lambda x - v - \omega u, J_\lambda x - u\rangle \geq 0$$

donde

$$\|J_\lambda x\|^2 \leq \langle x - \lambda v, J_\lambda x - u\rangle + \langle J_\lambda x, u\rangle + \lambda\omega\, \|J_\lambda x - u\|^2 .$$

Logo,

$$\limsup_{\lambda\to 0} \left\|J_\lambda x\right\|^2 \leq \langle x, P_{\overline{D(A)}}x - u\rangle + \langle P_{\overline{D(A)}}x, u\rangle,$$

$\forall\, u \in D(A)$ e, portanto, para todo $u \in \overline{D(A)}$; fazendo $u = P_{\overline{D(A)}}x$ temos

$$\limsup_{\lambda\to 0} \|J_\lambda x\|^2 \leq \left\|P_{\overline{D(A)}}x\right\|^2$$

e, como $J_\lambda x \rightharpoonup P_{\overline{D(A)}}x$, segue-se que $J_\lambda x \to P_{\overline{D(A)}}x$.

Para que um operador acretivo $A\colon X \to X$, onde X é reflexivo e estritamente convexo, tenha uma extensão m-acretiva com domínio contido em $\overline{\operatorname{conv} D(A)}$ é necessário que $\overline{\operatorname{conv} D(A)}$ seja uma retração não expansiva de X, como decorre do Teorema 7.17.

Essa condição não é, porém, suficiente. Condições suficientes são encontradas em Reich [1] pag. 384.

8. Secções

Ao operador $A: X \to X$ associemos o operador $A^0: X \to X$ definido por $A^0x = (Ax)^0$, i.e.,

$$A^0x = \{y;\ y \in Ax,\ \|y\| = |Ax|\}.$$

O operador A^0 é dito *secção mínima* de A.

8.1 - Teorema: *Seja X reflexivo, estritamente convexo e liso e $A \in \mathcal{A}(\omega)$ um operador demifechado e tal que*

$$D(A) \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A), \quad 0 < \lambda < \lambda_0. \tag{8.1}$$

Então A^0 é um operador unívoco, $D(A^o) = D(A)$ e $A^0x = y$ onde $y = \lim_{\lambda \to 0}$ fraco $A_\lambda x$.

Demonstração: Seja B o operador definido por $D(B) = D(A)$ e $Bx = \overline{\operatorname{conv} Ax}$, onde $\operatorname{conv} Ax$ é o conjunto das combinações convexas dos elementos de Ax. Das condições impostas a X decorre que Bx tem um único elemento de norma mínima, B^0x (Teorema I-5.14). Vamos mostrar que $B^0x \in Ax$ e, portanto, que B^0x é o único elemento de norma mínima de Ax.

Se $y \in Ax$ e $v \in Au$, então

$$\langle y + \omega x - v - \omega u, F(x-u)\rangle \geq 0 \tag{8.2}$$

uma vez que $A \in \mathcal{A}(\omega)$. Portanto, se $y_i \in Ax$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, então

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i + \omega x - v - \omega u, F(x-u) \right\rangle \geq 0,$$

i.e., (8.2) é válida para todo $y \in \operatorname{conv} Ax$. Logo é válida para todo $y \in \overline{\operatorname{conv} Ax} = Bx$. Analogamente, (8.2) é válida para todo $v \in \overline{\operatorname{conv} Au} = Bu$; segue-se que $B \in \mathcal{A}(\omega)$. Como de (8.1) vem $D(A) \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A) \subset \operatorname{Im}(I + \lambda B)$, $0 < \lambda < \lambda_0$, segue-se, por ii) do Teorema 6.13, que para cada $x \in D(A)$, $\left\|A_\lambda x\right\| \leq (1 - \lambda\omega)^{-1} |Ax|$, $0 < \lambda < \lambda_0$, $\lambda\omega < 1$; logo, pela reflexividade de X, existe uma seqüência (λ_n), $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$, e $y \in X$ tais que $A_{\lambda_n} x \rightharpoonup y$ quando $n \to \infty$. Mas $J^A_{\lambda_n} x \to x$ quando $n \to \infty$, pelo Teorema 6.13, $(J^A_{\lambda_n} x, A_{\lambda_n} x) \in A$, pela Proposição 6.10 e A é demifechado, por hipótese. Logo, $y \in Ax$. Além disto, pela definição de B, tem-se $J^B_\lambda x = J^A_\lambda x$, $0 < \lambda < \lambda_0$, donde $B_\lambda x = A_\lambda x$. Portanto, para $0 < \lambda < \lambda_0$ e $\lambda\omega < 1$ tem-se

$$\|y\| \leq \lim_{n \to \infty} \left\|A_{\lambda_n} x\right\| = \lim_{n \to \infty} \left\|B_{\lambda_n} x\right\| \leq \lim_{n \to \infty} (1 - \lambda_n \omega)^{-1} |Bx| = |Bx|,$$

pela semicontinuidade da norma em relação à topologia fraca e pelo Teorema 6.13. Logo $y = B^0 x$ visto que $y \in Ax \subset Bx$, q.e.d..

8.2 - Teorema: *Sejam X e X^* uniformemente convexos e $A \in \mathcal{A}(\omega)$ um operador fechado e tal que*

$$D(A) \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A), \quad 0 < \lambda < \lambda_0. \tag{8.3}$$

Então existe uma extensão demifechada, $\widetilde{A}$, de A tal que:

i) $\widetilde{A} \in \mathcal{A}(\omega)$ *e* $D(\widetilde{A}) \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A) \subset \operatorname{Im}(I + \lambda \widetilde{A})$, $0 < \lambda < \lambda_0$, $\lambda\omega < 1$.

ii) $D(\widetilde{A}) = D(\widetilde{A}^0) = D(A^0) = D(A)$ *e* $\widetilde{A}^0 x = A^0 x \ \forall\, x \in D(A)$.

Demonstração: É imediato que, ordenada por inclusão, a família dos operadores de $\mathcal{A}(\omega)$ com domínio contido em $\overline{D(A)}$ é indutiva superiormente. Pelo Lema de Zorn, A está, pois, contido em um elemento máximo, dessa família, i.e., existe uma extensão $\widetilde{A}$ de A tal que $D(\widetilde{A}) \subset \overline{D(A)}$, $\widetilde{A} \in \mathcal{A}(\omega)$ e $\widetilde{A} + \omega I$ é máxima em $\overline{D(A)}$. Pela Proposição 7.11 $\widetilde{A}$ é demifechado. Além disto A sendo, por hipótese, fechado e $\lambda > 0$, $\lambda\omega < 1$, o conjunto $\operatorname{Im}(I + \lambda A)$ é fechado pela Proposição 6.19. Logo, de (8.3) vem $\overline{D(A)} \subset \Im(I + \lambda A)$,

$0 < \lambda < \lambda_0$, $\lambda\omega < 1$ e, como $D(\tilde{A}) \subset \overline{D(A)}$,

$$D(\widetilde{A}) \subset \mathrm{Im}(I + \lambda A) \subset \mathrm{Im}(I + \lambda\widetilde{A}), \quad 0 < \lambda < \lambda_0, \ \lambda\omega < 1.$$

ii) Seja $x \in D(\widetilde{A})$. Por i) temos $x \in \mathrm{Im}(I + \lambda\widetilde{A})$, $0 < \lambda < \lambda_0$, $\lambda\omega < 1$ donde, por ii) do Teorema 6.13, $\{\|\widetilde{A}_\lambda x\|\}$, $0 < \lambda < \lambda_0$, $\lambda\omega < 1$, é um conjunto limitado. Como, pelo Teorema de Milman, X é reflexivo, segue-se que existe uma seqüência (λ_n), $\lambda_n \to 0$, e $y \in X$ tais que $\widetilde{A}_{\lambda_n} x \rightharpoonup y$. Mas de $x \in D(\widetilde{A})$ vem $J_{\lambda_n}^{\widetilde{A}} x \to x$ quando $n \to \infty$. Logo, como $\widetilde{A}$ é demifechado, $(x, y) \in \widetilde{A}$, i.e., $y \in \widetilde{A}x$. Além disto, da semicontinuidade da norma na topologia fraca, do Teorema 6.13 e do Teorema 8.1 vem

$$\|y\| \leq \liminf_{n\to\infty} \left\|\widetilde{A}_{\lambda_n} x\right\| \leq \liminf_{n\to\infty} (1 - \lambda_n\omega)^{-1} \left|\widetilde{A}x\right| = \left|\widetilde{A}x\right| = \left\|\widetilde{A}^0 x\right\|.$$

Logo, $y = \widetilde{A}^0 x$ e, portanto, $\|y\| = \lim \left\|\tilde{A}_{\lambda_n} x\right\|$. Pela Proposição I-5.8 segue-se que $\widetilde{A}_{\lambda_n} x \to y$. Tendo agora em vista que $J_\lambda^{\widetilde{A}} x = J_\lambda^A x$ e, conseqüentemente $\widetilde{A}_\lambda x = A_\lambda x$, pois, pelo que ficou demonstrado em i), $x \in \mathrm{Im}(I + \lambda A)$, e que A é fechado por hipótese, segue-se que $(x, y) \in A$. Logo, $x \in D(A)$ e $\widetilde{A}^0 x = y \in Ax$. Portanto, $D(\widetilde{A}) = D(\widetilde{A}^0) = D(A^0) = D(A)$ e $\widetilde{A}^0 x = A^0 x$, $\forall\, x \in D(A)$.

8.3 - Lema: *Seja X^* um espaço uniformemente convexo e $A \in \mathcal{A}(\omega)$ tal que $A + \omega I$ é máximo em C, $D(A) \subset C \subset X$. Então $F(A^0 x)$ tem um único elemento $\forall\, x \in D(A)$.*

Demonstração: Pela Proposição 7.9, Ax é convexo e fechado $\forall\, x \in D(A)$. Logo, $A^0 x \neq \phi$, $\forall\, x \in D(A)$, pelo Teorema I-5.14. Sejam $y_1, y_2 \in A^0 x$. Tem-se $\|y_1\| = \|y_2\|$; além disto, como X é liso, $F(y_1)$ e $F(y_2)$ são conjuntos de um só elemento. Pelo Lema 7.19,

$$\|y_1\|^2 \leq \langle y_2, F(y_1)\rangle \leq \|y_1\| \, \|y_2\| = \|y_1\|^2.$$

Logo,

$$\langle y_2, F(y_1)\rangle = \|y_2\|^2 = \|y_1\|^2 = \|F(y_1)\|^2$$

donde $F(y_1) \in F(y_2)$ e, portanto, $F(y_1) = F(y_2)$, q.e.d..

8.4 - Proposição: *Seja X^* um espaço uniformemente convexo, $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $A + \omega I$ máximo em $\overline{D(A)}$ e $D(A) \subset \mathrm{Im}(I + \lambda A)$, $0 < \lambda < \lambda_0$. Então:*

i) $\lim_{\lambda \to 0} F(A_\lambda x) = F(A^o x), \quad \forall\, x \in D(A)$;

ii) *Se X também é uniformemente convexo, então* $\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda x = A^0 x$.

Demonstração: Como $A \in \mathcal{A}(\omega)$ e $A_\lambda x \in AJ_\lambda x,\ \ \lambda > 0$, tem-se $\forall\, x \in D(A)$

$$\langle y + \omega x - A_\lambda x - \omega J_\lambda x, F(x - J_\lambda x)\rangle \geq 0 \qquad \forall\, y \in Ax$$

e, daí,

$$(1 - \lambda\omega) \left\|A_\lambda x\right\|^2 \leq \langle y, F(A_\lambda x)\rangle \qquad \forall\, y \in Ax. \tag{8.4}$$

Por ii) do Teorema 6.13, se $\lambda\omega < 1$ e $0 < \lambda < \lambda_0$, então $A_\lambda x$ é limitado $\forall\, x \in D(A)$. Portanto, $\forall\, x \in D(A)$, $F(A_\lambda x)$ é limitado se $\lambda\omega < 1$ e $0 < \lambda < \lambda_0$. Como, além disto, X^* é reflexivo, existe uma seqüência (λ_n), $\lambda_n \to 0$, $\lambda_n\omega < 1$, $n = 1, \dots$, e $u^* \in X^*$ tais que $F(A_{\lambda_n} x) \rightharpoonup u^*$. Daí, de (8.4) e da Proposição 7.14 vem

$$|Ax|^2 \leq \langle y, u^*\rangle \qquad \forall\, y \in Ax. \tag{8.5}$$

Como essa propriedade é válida, em particular, para $y \in A^0 x$ temos $\|u^*\| \geq |Ax|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u^*\| &\leq \liminf_{n\to\infty} \|F(A_{\lambda_n} x)\| = \liminf_{n\to\infty} \|A_{\lambda_n} x\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (1 - \lambda_n\omega)^{-1} |Ax| = |Ax|. \end{aligned}$$

Logo $\|u^*\| = |Ax|$. Mas então, para $y \in A^0 x$ tem-se, novamente por (8.5),

$$|Ax|^2 \leq \langle y, u^*\rangle \leq |Ax|^2,$$

i.e.,

$$\langle y, u^* \rangle = |Ax|^2 = \|y\|^2 \qquad \forall\, y \in A^0 x,$$

o que mostra que $u^* \in F(A^0 x)$. Mas $F(A^0 x)$ tem um único elemento, pelo Lema 8.3; logo $u^* = F(A^0 x)$. Pela Proposição I-5.8 tem-se, então,

$$\lim_{n\to\infty} F(A_{\lambda_n} x) = F(A^0 x)$$

e, daí,

$$\lim_{\lambda\to 0} F(A_\lambda x) = F(A^0 x),$$

pela unicidade do limite, o que demonstra i).

ii) Pelo Teorema I-6.15, F^{-1} é uma função contínua e, pelo Teorema I-5.14, $A^0 x$ tem um só elemento. Logo, por i) temos $\lim\limits_{\lambda\to 0} A_\lambda x = A^0 x$, $\forall\, x \in D(A)$, q.e.d..

8.5 - Definição: Seja $A + \omega I$ m-acretivo. Diz-se que o operador unívoco $A' \subset A$ é uma *secção principal* de A se $D(A') = D(A)$ e de $(x, y) \in \overline{D(A)} \times X$, $\xi^* \in F(x - u)$ e

$$\langle y + \omega x - v - \omega u, \xi^* \rangle \geq 0 \quad \forall\, (u, v) \in A'$$

vem $(x, y) \in A$, i.e., as extensões de A' com domínio contido em $\overline{D(A)}$ e pertencentes a $\mathcal{A}(\omega)$ estão contidas em A.

Em Brezis [4], Gomes [1] e Pazy [2] está demonstrado que se X é um espaço de Hilbert e A é m-acretivo, então a secção mínima A^0 é uma secção principal. A este respeito voltaremos oportunamente para demonstrar um resultado mais geral (Capítulo III - Teorema 3.18). Por ora será demonstrado apenas o resultado auxiliar a seguir.

8.6 - Teorema: *Seja X^* uniformemente convexo, $A + \omega I$ m-acretivo e $A' \subset A$ um operador tal que $D(A') = D(A)$ e $\forall\, u \in D(A)$ existe $v \in A'u$ que satisfaz a condição*

$$\|v\| \leq \theta(|Au|), \tag{8.6}$$

onde $\theta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *é limitada nos intervalos limitados. Se* $x \in D(A)$ *e* $y \in X$ *são tais que*

$$\langle y + \omega x - v - \omega u, F(x-u)\rangle \geq 0 \qquad \forall\,(u,v) \in A',$$

então, $(x,y) \in A$.

Demonstração: Satisfeitas as hipóteses, o operador $\widetilde{A} + \omega I$, onde $\widetilde{A} = A - y$, é m-acretivo e, pondo $\widetilde{\theta}(|\widetilde{A}u|) = \theta(|Au|) + \|y\|$, $\widetilde{A}' = A' - y$, $\widetilde{\theta}$ é limitado nos intervalos limitados e, por (8.6), $\forall\, u \in D(\widetilde{A}) = D(A)$ existe $v - y \in \widetilde{A}'u$ tal que $\|v - y\| \leq \|v\| + \|y\| \leq \theta(|Au|) + \|y\| = \widetilde{\theta}(|\widetilde{A}u|)$, i.e., $\widetilde{A}$ satisfaz condições análogas às impostas a A. Além disto, $(x,y) \in A$ se, e só se, $(x,0) \in \widetilde{A}$. Sem quebra da generalidade podemos, pois, supor que $y = 0$. Supondo, então, $y = 0$ tem-se, por hipótese,

$$\langle \omega x - v - \omega u, F(x-u)\rangle \geq 0 \qquad \forall\,(u,v) \in A'$$

donde, para $u = J_\lambda x, \lambda > 0$,

$$\langle \omega x - v - \omega J_\lambda x, F(x - J_\lambda x)\rangle \geq 0, \quad \forall\, v \in A' J_\lambda x.$$

Daí,

$$\langle v, F(A_\lambda x)\rangle \leq \lambda\omega \left\|A_\lambda x\right\|^2, \quad \forall\, v \in A' J_\lambda x. \tag{8.7}$$

Como $A_\lambda x \in A J_\lambda x$ tem-se, $\forall\,\lambda$ tal que $\lambda\omega < 1$,

$$0 \leq |AJ_\lambda x| \leq \left\|A_\lambda x\right\| \leq (1 - \lambda\omega)^{-1}\,|Ax|\,.$$

Segue-se daí que, se v_λ é um elemento de $A' J_\lambda x$, $0 < \lambda < \lambda_0$, $\lambda\omega < 1$, que satisfaz (8.6), então o conjunto $\{\left\|v_\lambda\right\|\}$ é limitado. Logo existe uma seqüência (λ_n), $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$, e $z \in X$ tais que $v_{\lambda_n} \rightharpoonup z$, uma vez que das hipóteses resulta que X é reflexivo. Tendo em vista i) da Proposição 8.4 segue-se daí e de (8.7) que $\langle z, F(A^0 x)\rangle \leq 0$. Além disto, pela Proposição 7.11, A é demifechado e por viii) do Teorema 6.13, $J_{\lambda_n} x \to x$.

Logo, $z \in Ax$. Mas Ax é convexo e fechado pela Proposição 7.9, donde $A^0x \neq \phi$ pelo Teorema I-5.14. Logo, $A^0x = \{0\}$ pelo Lema 7.19, donde $(x, 0) \in A$, q.e.d..

8.7 - Corolário: *Seja X^* uniformemente convexo, $D(A) = D(B)$, $A+\omega I$ e $B+\omega I$ m-acretivos e $A^0x \cap B^0x \neq \phi \; \forall\, x \in D(A)$. Então $A = B$. Em particular, se $A^0 = B^0$, então $A = B$.*

Demonstração: Para cada $x \in D(A) = D(B)$ seja S o operador definido por $Sx = A^0x \cap B^0x$. Então $S \subset A$, $S \subset B$ e se $y \in Sx$

$$\|y\| = |Ax|\,, \quad \|y\| = |Bx| \qquad \forall\, x \in D(A) = D(B),$$

isto é, a condição (8.6) é satisfeita. Além disto, de $(x, y) \in A$ e $(u, v) \in S$ vem

$$\langle y + \omega x - v - \omega u, F(x-u)\rangle \geq 0 \quad \forall\, u \in D(A) = D(B);$$

logo $(x, y) \in B$, pelo Teorema 8.6. Portanto, $A \subset B$ e, analogamente, $B \subset A$.

9. Perturbação dos operadores acretivos

A soma de dois operadores acretivos de um espaço de Banach liso é um operador acretivo e, de um modo geral, se $A \in \mathcal{A}(\omega_1)$ e $B \in \mathcal{A}(\omega_2)$, então $A + B \in \mathcal{A}(\omega_1 + \omega_2)$, como decorre imediatamente de iv) do Corolário 6.3. Entretanto, se $A+\omega_1 I$ e $B+\omega_2 I$ são m-acretivos, $A+B+(\omega_1+\omega_2)I$ não é necessariamente m-acretivo. Serão estabelecidas, a seguir, algumas condições suficientes para que a soma de um operador m-acretivo $A + \omega I$ com um operador m-acretivo B seja um operador m-acretivo.

9.1 - Lema: *Seja X um espaço de Banach liso, $A + \omega I$ um operador m-acretivo de X e B um operador unívoco, lipschitziano, acretivo e definido em todos os pontos de X. Então $A + B + \omega I$ é m-acretivo.*

Demonstração: Pela Proposição 7.2 temos que demonstrar que $\mathrm{Im}(I+\lambda(A+B+\omega I)) = X$ para algum $\lambda > 0$, i.e. que $\forall\, y \in X$ existe $x \in D(A)$ tal que $y \in (I+\lambda(A+B+\omega I))x$

ou, o que é o mesmo, $y - \lambda Bx \in (I + \lambda(A + \omega I))x$ ou, ainda, $x = J_\lambda^{A+\omega I}(y - \lambda Bx)$. Portanto o que se tem a demonstrar é que dado $y \in X$ a aplicação

$$x \to J_\lambda^{A+\omega I}(y - \lambda Bx), \tag{9.1}$$

que, pela m-acretividade de $A + \omega I$, transforma X em $D(A)$, tem um ponto fixo para algum $\lambda > 0$. Seja, então, $\lambda = \dfrac{1}{2L}$, onde L é a constante de Lipschitz de B. Tem-se pelo Teorema 6.11,

$$\begin{aligned} &\left\| J_\lambda^{A+\omega I}(y - \lambda Bx_1) - J_\lambda^{A+\omega I}(y - \lambda Bx_2) \right\| \leq \\ &\leq \lambda \left\| Bx_1 - Bx_2 \right\| \leq \lambda L \left\| x_1 - x_2 \right\| = \frac{1}{2} \left\| x_1 - x_2 \right\|. \end{aligned}$$

Logo, para $\lambda = \dfrac{1}{2L}$, (9.1) tem um ponto fixo.

9.2 - Proposição: *Seja X liso e $A + \omega I$ e B operadores m-acretivos de X. Então, para cada $y \in X$ e cada $\lambda > 0$ existem $x_\lambda \in D(A)$ e $u_\lambda \in Ax_\lambda$ tais que*

$$y = (1 + \omega)x_\lambda + u_\lambda + B_\lambda x_\lambda. \tag{9.2}$$

Se além disto, $D(A) \cap D(B) \neq \phi$, então x_λ é limitado quando $\lambda \to 0$.

Demonstração: O operador B_λ é unívoco, lipschitziano e acretivo pelo Teorema 6.13 e definido em todo ponto de X pelo Corolário 7.3. Logo, $A + B_\lambda + \omega I$ é m-acretivo pelo Lema 9.1. Portanto, $\mathrm{Im}(I + (A + B_\lambda + \omega I)) = X$ ou seja $\mathrm{Im}((1 + \omega)I + A + B_\lambda) = X$ donde, se $y \in X$, existe $x_\lambda \in D(A)$ e $u_\lambda \in Ax_\lambda$ tais que $y = (1 + \omega)x_\lambda + u_\lambda + B_\lambda x_\lambda$, o que demonstra a primeira das asserções feitas. Seja $x_0 \in D(A) \cap D(B)$, $y_\lambda \in (1+\omega)x_0 + Ax_0 + B_\lambda x_0$ e $y \in X$. Pelo que se acaba de demonstrar, $y \in (1 + \omega)x_\lambda + Ax_\lambda + B_\lambda x_\lambda$ para algum $x_\lambda \in D(A)$. Tem-se, então,

$$y_\lambda - x_0 \in (A + B_\lambda + \omega I)x_0 \quad \text{e} \quad y - x_\lambda \in (A + B_\lambda + \omega I)x_\lambda$$

donde, pela acretividade de $A + B_\lambda + \omega I$,

$$\langle (y - x_\lambda) - (y_\lambda - x_0), F(x_\lambda - x_0)\rangle \geq 0.$$

Daí vem

$$\left\| x_\lambda - x_0 \right\|^2 \leq \langle y - y_\lambda, F(x_\lambda - x_0)\rangle \leq \left\| y - y_\lambda \right\| \left\| x_\lambda - x_0 \right\|,$$

i.e., $\left\| x_\lambda - x_0 \right\| \leq \left\| y - y_\lambda \right\|$. Mas y_λ é limitado quando $\lambda \to 0$ pois, por ii) do Teorema 6.13, $\left\| B_\lambda x_0 \right\| \leq (1 - \lambda\omega)^{-1} \; |Bx_0|$, $\forall\, \lambda > 0$, $\lambda\omega < 1$. Logo, x_λ é limitado quando $\lambda \to 0$, q.e.d..

9.3 - Teorema: *Seja X^* uniformemente convexo, $A + \omega I$ e B operadores m-acretivos de X tais que $D(A) \cap D(B) \neq \phi$, $y \in X$ e suponhamos que x_λ satisfaça (9.2) e $B_\lambda x_\lambda$ seja limitado quando $\lambda \to 0$. Então a equação $y \in (1+\omega)x + Ax + Bx$ tem uma única solução x e $x_\lambda \to x$ quando $\lambda \to 0$.*

Demonstração: Sejam $\lambda, \mu > 0$. Então, pela Proposição 9.2,

$$y = (1+\omega)x_\lambda + u_\lambda + B_\lambda x_\lambda, \quad u_\lambda \in Ax_\lambda \tag{9.3}$$

$$y = (1+\omega)x_\mu + u_\mu + B_\mu x_\mu, \quad u_\mu \in Ax_\mu.$$

Daí vem $x_\lambda - x_\mu + B_\lambda x_\lambda - B_\mu x_\mu + u_\lambda + \omega x_\lambda - u_\mu - \omega x_\mu = 0$ e portanto,

$$\begin{aligned} &\left\| x_\lambda - x_\mu \right\|^2 + \langle B_\lambda x_\lambda - B_\mu x_\mu, F(x_\lambda - x_\mu)\rangle \\ &\qquad + \langle u_\lambda + \omega x_\lambda - u_\mu - \omega x_\mu,\, F(x_\lambda - x_\mu)\rangle = 0 \end{aligned}$$

donde, pela acretividade de $A + \omega I$,

$$\left\| x_\lambda - x_\mu \right\|^2 + \langle B_\lambda x_\lambda - B_\mu x_\mu,\, F(x_\lambda - x_\mu)\rangle \leq 0$$

e, pela de B,

$$\left\| x_\lambda - x_\mu \right\|^2 + \langle B_\lambda x_\lambda - B_\mu x_\mu,\, F(x_\lambda - x_\mu) - F(J_\lambda^B x_\lambda - J_\mu^B x_\mu)\rangle \leq 0$$

ou seja

$$\left\|x_\lambda - x_\mu\right\|^2 \leq \langle B_\mu x_\mu - B_\lambda x_\lambda,\, F(x_\lambda - x_\mu) - F(J_\lambda^B x_\lambda - J_\mu^B x_\mu)\rangle.$$

Daí vem, supondo $\|B_\nu x_\nu\| < C$ para todo ν tal que $0 < \nu < \nu_0$,

$$\left\|x_\lambda - x_\mu\right\|^2 \leq 2C \left\|F(x_\lambda - x_\mu) - F((x_\lambda - x_\mu) + (J_\lambda^B x_\lambda - x_\lambda) + (x_\mu - J_\mu^B x_\mu))\right\|$$

e como

$$\left\|(J_\lambda^B x_\lambda - x_\lambda) + (x_\mu - J_\mu^B x_\mu)\right\| = \left\|\mu B_\mu x_\mu - \lambda B_\lambda x_\lambda\right\| \leq (\lambda + \mu)C$$

segue-se, pela continuidade uniforme de F, (Teorema I-6.15) que x_λ satisfaz o Critério de Cauchy para a existência do limite no ponto 0. Seja $x = \lim x_\lambda$. Quando $\lambda \to 0$ x_λ é limitado pela Proposição 9.2 e $B_\lambda x_\lambda$, por hipótese. Segue-se por (9.3) que u_λ é limitado quando $\lambda \to 0$. Existe, então, uma sucessão (λ_n) e um $u \in X$ tais que $\lambda_n \to 0$ e $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u$ quando $n \to \infty$ e como, para cada λ_n, $(x_{\lambda_n}, u_{\lambda_n}) \in A$, tem-se $(x, u) \in A$ visto que A é demifechado pela Proposição 7.11. Novamente por (9.3), existe $v \in X$ tal que $B_{\lambda_n} x_{\lambda_n} \rightharpoonup v$ e $v = y - (1 + \omega)x - u$. Vamos mostrar que $x \in D(B)$ e $v \in Bx$. Tem-se, com efeito,

$$\begin{aligned}\left\|J_\lambda^B x_\lambda - x\right\| &= \left\|J_\lambda^B x_\lambda - x_\lambda + x_\lambda - x\right\| \leq \left\|J_\lambda^B x_\lambda - x_\lambda\right\| + \left\|x_\lambda - x\right\| \\ &= \lambda \left\|B_\lambda x_\lambda\right\| + \left\|x_\lambda - x\right\|,\end{aligned}$$

donde $J_\lambda^B x_\lambda \to x$ quando $\lambda \to 0$. Mas $(J_{\lambda_n}^B x_{\lambda_n}, B_{\lambda_n} x_{\lambda_n}) \in B\ \forall n \in \mathbb{N}$, donde $(x, v) \in B$, pela Proposição 7.11. Portanto, $y = (1 + \omega)x + u + v$, $u \in Ax$ e $v \in Bx$. A unicidade resulta imediatamente da acretividade de $A + B + \omega I$.

9.4 - Teorema: *Sejam X^* uniformemente convexo e $A + \omega I$ e B dois operadores m-acretivos de X tais que:*

i) $D(A) \subset D(B)$

ii) *Para cada* $r > 0$ *existem constantes* $k(r)$ *e* $C(r), k(r) < 1$, *tais que*

$$|Bx| \leq k(r)\,|Ax| + C(r) \quad \text{se} \quad x \in D(A) \text{ e } \|x\| \leq r. \tag{9.4}$$

Então $A + B + \omega I$ *é* m*-acretivo.*

Demonstração: Para todo $y \in X$ e todo $\lambda > 0$ existe, pela Proposição 9.2, $x_\lambda \in D(A)$ tal que

$$y = (1+\omega)x_\lambda + u_\lambda + B_\lambda x_\lambda, \qquad u_\lambda \in Ax_\lambda,$$

e $\|x_\lambda\| \leq r$ para λ suficientemente pequeno. Logo, por (9.4),

$$\begin{aligned} |Ax_\lambda| &\leq \|u_\lambda\| \leq \|y\| + \|(1+\omega)x_\lambda\| + \|B_\lambda x_\lambda\| \\ &\leq \|y\| + \|(1+\omega)x_\lambda\| + |Bx_\lambda| \\ &\leq \|y\| + \|(1+\omega)x_\lambda\| + k(r)\,|Ax_\lambda| + C(r), \end{aligned}$$

para λ suficientemente pequeno donde

$$|Ax_\lambda| \leq \frac{1}{1-k(r)}\left(\|y\| + \|(1+\omega)x_\lambda\| + C(r)\right)$$

e, portanto, $|Ax_\lambda|$ é limitado quando $\lambda \to 0$. Daí e de $\|B_\lambda x_\lambda\| \leq |Bx_\lambda|$ segue-se, novamente por (9.4), que $B_\lambda x_\lambda$ é limitado quando $\lambda \to 0$ e, assim, $A + B + \omega I$ é m-acretivo pelo Teorema 9.3.

9.5 - Teorema: *Seja* X^* *uniformemente convexo e* $A + \omega I$ *e* B *dois operadores* m*-acretivos de* X *tais que:*

i) $D(A) \cap D(B) \neq \phi$

ii) $\langle u + \omega x, F(B_\lambda x)\rangle \geq -\psi(\|x\|) - b\,\|B_\lambda x\|^2$, $\forall\, u \in Ax$, *onde* $0 \leq b < 1$ *e* ψ *é uma função não decrescente e não negativa em* $[0,\infty)$*. Então,* $A + B + \omega I$ *é* m*-acretivo.*

Demonstração: Pela Proposição 9.2, $\forall\, y \in X$ e $\forall\, \lambda > 0$ existe $x_\lambda \in D(A)$, x_λ limitado quando $\lambda \to 0$, tal que

$$y = (1+\omega)x_\lambda + u_\lambda + B_\lambda x_\lambda, \quad (x_\lambda, u_\lambda) \in A.$$

Daí e de ii) vem

$$\begin{aligned}\langle y - x_\lambda, F(B_\lambda x_\lambda)\rangle &= \langle u_\lambda + \omega x_\lambda + B_\lambda x_\lambda, F(B_\lambda x_\lambda)\rangle \\ &\geq -\psi(\|x_\lambda\|) - b\,\|B_\lambda x_\lambda\|^2 + \|B_\lambda x_\lambda\|^2,\end{aligned}$$

donde $\|B_\lambda x_\lambda\|$ satisfaz a desigualdade do segundo grau

$$(1-b)\,\|B_\lambda x_\lambda\|^2 - \|y - x_\lambda\|\,\|B_\lambda x_\lambda\| - \psi(\|x_\lambda\|) \leq 0.$$

Logo,

$$(1-b)\,\|B_\lambda x_\lambda\| \leq \|y - x_\lambda\| + [(1-b)\psi(\|x_\lambda\|)]^{\frac{1}{2}}$$

e, como x_λ é limitado quando $\lambda \to 0$, $B_\lambda x_\lambda$ é limitado quando $\lambda \to 0$. Segue-se, pelo Teorema 9.3, que $A + B + \omega I$ é m-acretivo, q.e.d..

9.6 - Corolário: *Nas mesmas condições do Teorema* 9.5*, se* $\langle u + \omega x, F(B_\lambda x)\rangle \geq 0$ $\forall\, u \in Ax$*, então* $A + B + \omega I$ *é m-acretivo.*

Demonstração: Caso particular do Teorema 9.5 com $b = 0$ e $\psi = 0$ em $[0, +\infty)$.

9.7 - Teorema: *Seja* X^* *uniformemente convexo. Se* $A + \omega I$ *e* B *são operadores m-acretivos,* B *é linear e são satisfeitas as condições*

i) $D(B) \subset D(A)$

ii) $\langle u + \omega x, F(Bx)\rangle \geq -\psi(\|x\|) - b\,\|Bx\|^2$ $\forall\, u \in Ax$*, onde* $0 \leq b < 1$ *e* ψ *é uma função não decrescente e não negativa em* $[0, +\infty)$*, então* $A + B + \omega I$ *é m-acretivo.*

Demonstração: Seja $x \in D(A), u \in Ax$ e $v \in AJ_\lambda^B x$. Então

$$\begin{aligned}&\lambda\langle u + \omega x, F(B_\lambda x)\rangle = \langle u + \omega x, F(\lambda B_\lambda x)\rangle = \langle u + \omega x, F(x - J_\lambda^B x)\rangle \\ &= \langle u + \omega x - v - \omega J_\lambda^B x, F(x - J_\lambda^B x)\rangle + \langle v + \omega J_\lambda^B x, F(x - J_\lambda^B x)\rangle \\ &\geq \langle v + \omega J_\lambda^B x, F(\lambda B_\lambda x)\rangle = \lambda\langle v + \omega J_\lambda^B x, F(B J_\lambda^B x)\rangle\end{aligned}$$

pela acretividade de $A + \omega I$. Usando a hipótese ii) temos

$$\langle u + \omega x, F(B_\lambda x)\rangle \geq -\psi(\left\|J_\lambda^B x\right\|) - b\left\|BJ_\lambda^B x\right\|^2 \geq -\psi(\|x\|) - b\left\|B_\lambda x\right\|^2$$

visto que B sendo, por hipótese, acretivo e linear tem-se $\left\|J_\lambda^B x\right\| \leq \|x\|,\ B_\lambda x = BJ_\lambda^B x\,.$ Pelo Teorema 9.5 segue-se que $A + B + \omega I$ é m-acretivo.

9.8 - Exemplo: Seja $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e tem fronteira regular, $\tilde{\beta}$ e $A = -\Delta u$ os operadores m-acretivos descritos nos Exemplos 7.5 a) e b), respectivamente. Então o operador $A + \tilde{\beta}$ é m-acretivo. Para ver isto é bastante observar que se $u \in L^p(\Omega)$ então

$$F(u)(x) = u(x)\,|u(x)|^{p-2}\,\|u\|_p^{2-p}$$

e, portanto, se $(u, v) \in A$,

$$\begin{aligned}\left\langle v, F(\tilde{\beta}_\lambda u)\right\rangle &= \left\|\beta_\lambda u\right\|_p^{2-p}\int_\Omega -\Delta u(x)\left(\beta_\lambda(u(x))\left|\beta_\lambda(u(x))\right|^{p-2}\right)dx\\ &= (p-1)\left\|\beta_\lambda u\right\|_p^{2-p}\int_\Omega \left|\beta_\lambda(u(x))\right|^{p-2}|\nabla u(x)|^2\,\beta_\lambda'(u(x))dx \geq 0\end{aligned}$$

pois a derivada β_λ' de β_λ é não negativa uma vez que, pelo Teorema 6.13, β_λ é acretivo. Pelo Corolário 9.6, $A + \tilde{\beta}$ é, então, m-acretivo.

CAPÍTULO III

SEMIGRUPOS NÃO LINEARES E EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO

1. Semigrupo não linear

1.1 - Definição: Seja X um espaço de Banach e C um subconjunto de X. Diz-se que uma função S de $[0, \infty)$ na família das aplicações de C em C é um semigrupo sobre C se:

i) $S(0) = I$

ii) $S(t + s) = S(t)S(s), \quad t, s \geq 0.$

Diz-se que o semigrupo S é *contínuo* se

iii) $\lim_{t \to 0+} S(t)x = x, \quad \forall x \in C,$

e que S é do tipo $\omega, \omega \in \mathbb{R}$, se

iv) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq e^{\omega t} \|x - y\|.$

Quando $\omega \leq 0$ diz-se que S é um *semigrupo de contrações*. Escreve-se $S \in Q_\omega(C)$ para exprimir que S é um semigrupo contínuo do tipo ω, sobre C.

2. Fórmula Exponencial

2.1 - Teorema: *Se $A \in \mathcal{A}(\omega)$ e $\overline{D(A)} \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A)$ para $0 < \lambda < \lambda_0$, então o limite*

$$S(t)x = \lim_{n \to \infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x \tag{2.1}$$

existe para todo $x \in \overline{D(A)}$ e $t > 0$ e a convergência é uniforme em todo intervalo $[0, T]$, $0 < T < \infty$. Além disto, $S \in Q_\omega(\overline{D(A)})$ e para cada $x \in D(A)$, $S(t)x$ é lipschitziana *nos intervalos limitados.*

A demonstração deste teorema funda-se nos dois lemas a seguir.

2.2 - Lema: *Seja* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $0 < \mu \leq \lambda$, $\lambda\omega < 1$ *e* $x \in D(J_\lambda^m) \cap D(J_\mu^n)$ *onde* m *e* n *são inteiros positivos e* $m \leq n$. *Então,*

$$\left\| J_\mu^n x - J_\lambda^m x \right\| \leq (1-\mu\omega)^{-n} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n}{j} \left\| J_\lambda^{m-j} x - x \right\|$$

$$+ \sum_{j=m}^{n} (1-\mu\omega)^{-j} \alpha^m \beta^{j-m} \binom{j-1}{m-1} \left\| J_\mu^{n-j} x - x \right\|, \tag{2.2}$$

onde $\alpha = \mu/\lambda$ *e* $\beta = (\lambda - \mu)/\lambda$.

Demonstração: Sejam j e k inteiros tais que $0 \leq j \leq n$ e $0 \leq k \leq m$. Ponhamos

$$a_{k,j} = \left\| J_\mu^j x - J_\lambda^k x \right\|.$$

Temos, pelo Teorema II-6.13, para $j > 0$ e $k > 0$

$$\begin{aligned} a_{k,j} &= \left\| J_\mu^j x - J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} J_\lambda^{k-1} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda^k x \right) \right\| \\ &\leq (1-\mu\omega)^{-1} \left\| J_\mu^{j-1} x - \left(\frac{\mu}{\lambda} J_\lambda^{k-1} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda^k x \right) \right\| \\ &\leq (1-\mu\omega)^{-1} \left\{ \frac{\mu}{\lambda} \left\| J_\mu^{j-1} x - J_\lambda^{k-1} x \right\| + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} \left\| J_\mu^{j-1} x - J_\lambda^k x \right\| \right\} \\ &= \alpha_1 a_{k-1,j-1} + \beta_1 a_{k,j-1}, \end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = (1-\mu\omega)^{-1}\, \mu/\lambda$ e $\beta_1 = (1-\mu\omega)^{-1}(\lambda-\mu)/\lambda$.

Usando a fórmula

$$a_{k,j} \leq \alpha_1 a_{k-1,j-1} + \beta_1 a_{k,j-1} \tag{2.3}$$

vamos demonstrar (2.2) por indução. Indiquemos por $P_{m,n}$ a asserção (2.2). Então $P_{1,1}$ é válida, por (2.3). Supondo $P_{1,n-1}$ verdadeira, temos

$$
\begin{aligned}
a_{1,n} &\leq \alpha_1 a_{0,n-1} + \beta_1 a_{1,n-1} \leq \alpha_1 a_{0,n-1} \\
&+ \beta_1 \left[\beta_1^{n-1} \binom{n-1}{0} a_{1,0} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_1 \beta_1^{j-1} \binom{j-1}{0} a_{0,n-1-j} \right] \\
&= \beta_1^n a_{1,0} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_1 \beta_1^j a_{0,n-1-j} = \beta_1^n a_{1,0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_1 \beta_1^{k-1} a_{0,n-k} \,.
\end{aligned}
$$

Como $P_{m,n}$ é $a_{mn} \leq \sum\limits_{j=0}^{m-1} \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \binom{n}{j} a_{m-j,0} + \sum\limits_{j=m}^{n} \alpha_1^m \beta_1^{j-m} \binom{j-1}{m-1} a_{0,n-j}$ então $P_{1,n}$ é verdadeira. Vamos, então, supor $P_{m-1,n}$ verdadeira para todo n tal que $n \geq m-1$. Por aplicação repetida de (2.3) teremos

$$
\begin{aligned}
a_{m,m} &\leq \alpha_1 a_{m-1,m-1} + \beta_1 a_{m,m-1} \\
&\leq \alpha_1 (\alpha_1 a_{m-2,m-2} + \beta_1 a_{m-1,m-2}) \\
&+ \beta_1 (\alpha_1 a_{m-1,m-2} + \beta_1 a_{m,m-2}) \\
&= \alpha_1^2 a_{m-2,m-2} + 2\alpha_1 \beta_1 a_{m-1,m-2} + \beta_1^2 a_{m,m-2} \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_1^j \beta_1^{m-j} \binom{m}{j} a_{m-j,0},
\end{aligned}
$$

i.e., $P_{m,m}$ é verdadeira. A seguir, seja $P_{m,n-1}$ verdadeira para algum $n > m$. Teremos, por (2.3) e por

$$
\binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1} = \binom{p}{q},
$$

$$
\begin{aligned}
& a_{m,n} \leq \alpha_1 a_{m-1,n-1} + \beta_1 a_{m,n-1} \\
& \leq \alpha_1 \left[\sum_{j=0}^{m-2} \alpha_1^j \beta_1^{n-j-1} \binom{n-1}{j} a_{m-j-1,0} + \sum_{j=m-1}^{n-1} \alpha_1^{m-1} \beta_1^{j-m+1} \binom{j-1}{m-2} a_{0,n-j-1} \right] \\
& + \beta_1 \left[\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_1^j \beta_1^{n-j-1} \binom{n-1}{j} a_{m-j,0} + \sum_{j=m}^{n-1} \alpha_1^m \beta_1^{j-m} \binom{j-1}{m-1} a_{0,n-j-1} \right] \\
& = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_1^i \beta_1^{n-i} \binom{n}{i} a_{m-i,0} + \sum_{i=m}^{n} \alpha_1^m \beta_1^{i-m} \binom{i-1}{m-1} a_{0,n-i},
\end{aligned}
$$

i.e., $P_{m,n}$ é verdadeira para todo $n \geq m$, o que completa a demonstração.

2.3 - Lema: *Sejam m e n inteiros positivos tais que $m \leq n$ e α, β números reais positivos tais que $\alpha + \beta = 1$. Então,*

i) $\sum\limits_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} (m-j) \leq \sqrt{(n\alpha - m)^2 + n\alpha\beta}$

ii) $\sum\limits_{j=m}^{n} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} (n-j) \leq \sqrt{\frac{m\beta}{\alpha^2} + (\frac{m\beta}{\alpha} + m - n)^2}.$

Demonstração: i) Temos, pela Desigualdade de Schwartz,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} (m-j) \leq \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} \, |m-j| \\
& \leq \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} (m-j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Mas, por cálculo direto, verifica-se que

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} = (\alpha+\beta)^n$$

$$\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} = \alpha n(\alpha+\beta)^{n-1}$$

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} = \alpha^2 n(n-1)(\alpha+\beta)^{n-2} + \alpha n(\alpha+\beta)^{n-1}$$

relações essas que, juntamente com (2.4) e $\alpha + \beta = 1$, demonstram i).

ii) Temos,

$$\sum_{j=m}^{n} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} (n-j) \leq \sum_{j=m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} \, |n-j|$$

$$\leq \left(\sum_{j=m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} (n-j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Pondo

$$F_m(\beta) = \sum_{j=m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1} \beta^{j-m}, \quad 0 < \beta < 1$$

temos

$$F_1(\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{j-1}{0} \beta^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta}$$

e, por indução,

$$F_m(\beta) = (1-\beta)^{-m}. \tag{2.6}$$

Derivando em relação a β temos

$$F'_m(\beta) = \sum_{j=m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1} (j-m) \beta^{j-m-1} = m(1-\beta)^{-m-1} \tag{2.7}$$

$$F''_m(\beta) = \sum_{j=m}^{\infty} \binom{j-1}{m-1} (j-m)(j-m-1)\beta^{j-m-2} = m(m+1)(1-\beta)^{-m-2}. \tag{2.8}$$

Das relações (2.5)-(2.8) resulta ii).

Demonstração do Teorema 2.1: Seja $x \in D(A)$ e $0 < \mu \leq \lambda < \lambda_0$, $m \leq n$ e $\lambda |\omega| < 1$. Por hipótese, temos $x \in D(J_\lambda^m) \cap D(J_\mu^n)$. Por ii) e iii) do Teorema II-6.13 e o Lema 2.2 temos, tendo em vista que $1 - \lambda |\omega| < 1$,

$$\begin{aligned} \left\| J_\mu^n x - J_\lambda^m x \right\| &\leq (1-\mu|\omega|)^{-n}(1-\lambda|\omega|)^{-m}\lambda \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n}{j} (m-j) |Ax| \\ &+ (1-\mu|\omega|)^{-n} \mu \sum_{j=m}^{n} \alpha^m \beta^{j-m} \binom{j-1}{m-1} (n-j) |Ax|, \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $\alpha = \mu/\lambda$ e $\beta = (\lambda - \mu)/\lambda$. Como a função $f(t) = (1-t)^n e^{2nt}$ tem derivada não negativa para $0 \leq t \leq 1/2$ e como $f(0) = 1$, segue-se que $(1-t)^{-n} \leq e^{2nt}$. De (2.9) resulta, então, para $\lambda |\omega| \leq 1/2$, levando o Lema 2.3 em consideração,

$$\begin{aligned} \left\| J_\mu^n x - J_\lambda^m x \right\| &\leq e^{2|\omega|(n\mu + m\lambda)} \lambda [(n\alpha - m)^2 + n\alpha\beta]^{\frac{1}{2}} |Ax| \\ &+ e^{2|\omega| n\mu} \mu \left[\frac{m\beta}{\alpha^2} + \left(\frac{m\beta}{\alpha} + m - n^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} |Ax|. \end{aligned}$$

Mas

$$\lambda [(n\alpha - m)^2 + n\alpha\beta]^{\frac{1}{2}} = [(n\mu - m\lambda)^2 + n\mu(\lambda - \mu)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mu \left[\frac{m\beta}{\alpha^2} + \left(\frac{m\beta}{\alpha} + m - n^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = [m\lambda(\lambda - \mu) + (m\lambda - n\mu)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| J_\mu^n\, x - J_\lambda^m\, x \right\| &\leq e^{2|\omega|(n\mu + m\lambda)} [(n\mu - m\lambda)^2 + n\mu(\lambda - \mu)]^{\frac{1}{2}} |Ax| \\ &+ e^{2|\omega| n\mu} [m\lambda(\lambda - \mu) + (m\lambda - n\mu)^2]^{\frac{1}{2}} |Ax|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Daí vem, fazendo $\mu = t/n$, $\lambda = t/m$ e levando em conta que $e^{2|\omega|t} \geq 1$, para $t > 0$,

$$\left\| J_{t/n}^n x - J_{t/m}^m x \right\| \leq 2t\, e^{4|\omega|t} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} |Ax| \,. \tag{2.11}$$

Desse modo, $\lim\limits_{n\to\infty} J_{t/n}^n x$ existe e a convergência é uniforme em todo intervalo limitado, $[0, T]$, $0 < T < \infty$.

Como a constante de Lipschitz de $J_{t/n}^n$ é menor ou igual a $(1 - \omega t/n)^{-n}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\omega t}{n} \right)^{-n} = e^{\omega t},$$

segue-se que $S(t)x = \lim\limits_{n\to\infty} J_{t/n}^n x$ existe para todo $x \in \overline{D(A)}$ e $S(t)$ é lipschitziana com constante menor ou igual a $e^{\omega t}$. Imediatamente se tem, $S(t)(\overline{D(A)}) \subset \overline{D(A)}$. Seja $x \in D(A)$ e $0 \leq t < \tau$; tomando o limite em (2.10) com $m = n$, $\mu = t/n$ e $\lambda = \tau/n$ tem-se

$$\|S(\tau)x - S(t)x\| \leq [e^{2|\omega|(t+\tau)} + e^{2|\omega|t}]\, |Ax|\, |\tau - t| \tag{2.12}$$

o que mostra que $S(t)x$ é lipschitziana em t nos intervalos limitados. Segue-se daí que $S(t)x$, $x \in \overline{D(A)}$, é fortemente contínua em t.

Resta demonstrar que S satisfaz a condição ii) da Definição 1.1, já que a condição i) é trivial. Temos

$$\begin{aligned} S(mt)x &= \lim_{n\to\infty} J_{mt/n}^n\, x = \lim_{k\to\infty} J_{mt/mk}^{mk}\, x = \lim_{k\to\infty} (J_{t/k}^k\, x)^m \\ &= S(t)^m\, x, \qquad \forall x \in \overline{D(A)} \quad \text{e} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sejam, agora, l, k, r e s inteiros positivos. Então

$$\begin{aligned} S\left(\frac{l}{k} + \frac{r}{s} \right) &= S\left(\frac{ls + kr}{ks} \right) = \left(S\left(\frac{1}{ks} \right) \right)^{ls+kr} \\ &= \left(S\left(\frac{1}{ks} \right) \right)^{ls} \left(S\left(\frac{1}{ks} \right) \right)^{kr} = S\left(\frac{l}{k} \right) \cdot S\left(\frac{r}{s} \right), \end{aligned}$$

i.e., $S(t+\tau) = S(t)S(\tau)$, para t e τ racionais, donde, para t e τ reais, pela continuidade de S.

2.5 - Corolário: *Seja* (ε_n) *uma seqüência de reais positivos tal que* $\varepsilon_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$, $[t/\varepsilon_n]$ *a parte inteira de* t/ε_n *e* A *um operador que satisfaz as hipóteses do Teorema* 2.1. *Então, se* $x \in \overline{D(A)}$,

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty}(I + \varepsilon_n A)^{-[t/\varepsilon_n]}x = \lim_{n\to\infty}(I + \varepsilon_n A)^{-[t/\varepsilon_n]-1}x,$$

uniformemente nos intervalos limitados.

Demonstração: Para $x \in D(A)$ a primeira dessas igualdades é uma conseqüência imediata de (2.10), de $t - [t/\varepsilon_n]\varepsilon_n \leq \varepsilon_n$ e de

$$\left\|J_{\varepsilon_n}^{k_n} x - S(t)x\right\| \leq \left\|J_{\varepsilon_n}^{k_n} x - J_{t/k_n}^{k_n} x\right\| + \left\|J_{t/k_n}^{k_n} x - S(t)x\right\|,$$

onde $k_n = [t/\varepsilon_n]$. Para $x \in \overline{D(A)}$ segue daí pelos argumentos usuais. A segunda tem demonstração análoga.

2.6 - Nota: De um modo mais geral, se (ε_n) é uma seqüência de reais não negativos e tal que $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$, (k_n) uma seqüência de inteiros não negativos tal que $k_n\varepsilon_n \to t$ quando $n \to \infty$ e A é um operador satisfazendo as condições do Teorema 2.1, então,

$$S(t)x = \lim(I + \varepsilon_n A)^{-k_n}\, x \quad \forall x \in D(A).$$

2.7 - Proposição: *Se* $x \in D(A)$ *e* $0 \leq \tau \leq t$ *tem-se, supondo satisfeitas as hipóteses do Teorema* 2.1,

$$\|S(t)x - S(\tau)x\| \leq e^{\omega^+(t-\tau)}e^{\omega\tau}(t-\tau)\,|Ax|\,, \tag{2.13}$$

onde $\omega^+ = \max\{\omega, 0\}$.

Demonstração: Como $S \in Q_\omega(\overline{D(A)})$ temos

$$\|S(t)x - S(\tau)x\| = \|S(\tau)S(t-\tau)x - S(\tau)x\| \leq e^{\omega\tau}\,\|S(t-\tau)x - x\|\,. \tag{2.14}$$

a) Se $\omega \leq 0$ temos, pelo Teorema II-6.13, para n suficientemente grande e $s \geq 0$,

$$\left\| J_{s/n}^n \, x - x \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \Big(1 - \frac{s}{n} w\Big)^{-i} \, \frac{s}{n} \, |Ax| \leq s \, |Ax| \, .$$

Daí vem, no limite quando $n \to \infty$, pelo Teorema 2.1,

$$\|S(s)x - x\| \leq s \, |Ax|$$

donde, por (2.14), segue-se (2.13) uma vez que, neste caso, $\omega^+ = 0$.

b) Se $\omega > 0$ temos, ainda pelo Teorema II-6.13, para n suficientemente grande e $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left\| J_{s/n}^n \, x - x \right\| &\leq \sum_{i=1}^{n} \Big(1 - \frac{s}{n} \omega\Big)^{-i+1} \, \left\| J_{s/n} \, x - x \right\| \\ &= \frac{1 - (1 - \frac{s}{n}\omega)^{-n}}{1 - (1 - \frac{s}{n}\omega)^{-1}} \cdot \frac{\frac{s}{n}}{1 - \frac{s}{n}\omega} \, |Ax| = \frac{(1 - \frac{s}{n}\omega)^{-n} - 1}{\omega} \, |Ax| \end{aligned}$$

donde, pelo Teorema 2.1, no limite quando $n \to \infty$,

$$\|S(s)x - x\| \leq \frac{e^{\omega s} - 1}{\omega} \, |Ax| \, .$$

Mas para $\omega > 0$, $e^{\omega s} - 1 \leq \omega s \, e^{\omega s}$, donde

$$\|S(s)x - x\| \leq s \, e^{\omega s} \, |Ax| \, .$$

Daí e de (2.14) segue-se (2.13) tendo em vista que, neste caso, $\omega^+ = \omega$, q.e.d..

Note-se que a estimativa (2.13) melhora consideravelmente a (2.12).

2.8 - Definição: O semigrupo associado a $A \in \mathcal{A}(\omega)$ pelo Teorema 2.1 será dito *semigrupo gerado* por $-A$ e $-A$ o *gerador exponencial* de S.

3. Problema de Cauchy Abstrato

Seja X um espaço de Banach, $A\colon X \to X$ um operador e consideremos o seguinte Problema de Cauchy Abstrato

$$\frac{du}{dt} + Au \ni 0 \tag{3.1}$$

$$u(0) = x. \tag{3.2}$$

3.1 - Definição: Uma função $u\colon [0,\infty) \to X$ diz-se *solução forte* de (3.1) se

i) u é contínua em $[0,\infty)$ e lipschitziana em cada subconjunto compacto de $(0,\infty)$;

ii) u é diferenciável em quase todo ponto de $(0,\infty)$;

iii) $u(t) \in D(A)$ para quase todo $t \in (0,\infty)$;

iv) $-\dfrac{du}{dt}(t) \in Au(t)$ para quase todo $t \in (0,\infty)$.

Observe-se que, se u for solução forte de (3.1), então por i) e iii), $u(t) \in \overline{D(A)}$, $\forall t \in [0,T]$. Em particular, se u satisfaz (3.2), então $x \in \overline{D(A)}$.

3.2 - Lema: *Seja u uma função definida em um intervalo e com valores em um espaço de Banach X. Suponhamos que u tenha uma derivada fraca, $u'(t)$ no ponto t (isto é, que exista a derivada $d\langle u(t), x^*\rangle/dt$ no ponto t e $d\langle u(t), x^*\rangle/dt = \langle u'(t), x^*\rangle$ para cada $x^* \in X^*$) e que a função $\|u(t)\|$ seja diferenciável no ponto t. Então,*

$$\|u(t)\| \frac{d}{dt} \|u(t)\| = \langle u'(t), u^*\rangle \quad \forall u^* \in F(u(t)).$$

Demonstração: Temos $\forall\, u^* \in F(u(t))$

$$\langle u(t+h), u^*\rangle - \langle u(t), u^*\rangle \leq \|u(t+h)\| \, \|u(t)\| - \|u(t)\|^2 =$$
$$= (\|u(t+h)\| - \|u(t)\|) \, \|u(t)\| .$$

Logo, se $h > 0$ temos, dividindo por h e passando ao limite quando $h \to 0$,

$$\langle u'(t), u^*\rangle \leq \|u(t)\| \frac{d}{dt} \|u(t)\|$$

e, se $h < 0$,

$$\langle u'(t), u^*\rangle \geq \|u(t)\| \frac{d}{dt} \|u(t)\| .$$

3.3 - Proposição: *Seja* $A: X \to X$, $A \in \mathcal{A}(\omega)$ *e* u *e* v *soluções fortes de (3.1) com* $u(0) = x$ *e* $v(0) = y$. *Então*

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{\omega t} \|x - y\| \qquad \forall t \in [0, \infty). \tag{3.3}$$

Demonstração: Temos $-du/dt \in Au$ q.s. em $(0, \infty)$, $-dv/dt \in Av$ q.s. em $(0, \infty)$ donde, pela acretividade de $A + \omega I$, existe $u^* \in F(u(t) - v(t))$ tal que

$$\left\langle -\frac{du}{dt}(t) + \omega u(t) + \frac{dv}{dt}(t) - \omega v(t), u^* \right\rangle \geq 0 \quad \text{q.s. em} \quad (0, \infty).$$

Daí, vem

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t) - \frac{dv}{dt}(t), u^* \right\rangle \leq \omega \|u(t) - v(t)\|^2 \quad \text{q.s. em} \quad (0, \infty)$$

donde, tendo em vista o Lema 3.2,

$$\frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\| \leq \omega \|u(t) - v(t)\| \quad \text{q.s. em} \quad (0, \infty).$$

E como por hipótese, u e v são lipschitzianas, $\|u(t) - v(t)\|$ é absolutamente contínua. Multiplicando por $e^{-\omega t}$ e integrando de 0 a t temos (3.3).

3.4 - Corolário: *Seja* $A \in \mathcal{A}(\omega)$. *Então,* (3.1) *tem no máximo uma solução forte que satisfaz* (3.2).

Demonstração: Conseqüência imediata da Proposição 3.3.

3.5 - Lema: *Seja* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, *u uma solução forte de* (3.1) *e* $h > 0$. *Então a função*

$$\varphi(t) = e^{-\omega t} \|u(t + h) - u(t)\|$$

é monótona decrescente.

Demonstração: Pondo $v(t) = u(t+h)$ resulta que $v(t)$ é a solução forte de (3.1) com valor inicial $v(0) = u(h)$. Logo, como na Proposição 3.3,

$$\frac{d}{dt} \|v(t) - u(t)\| \leq \omega \|v(t) - u(t)\|, \quad \text{q.s. em} \quad [0, \infty).$$

Daí,

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\omega t} \|v(t) - u(t)\|\right) \leq 0, \quad \text{q.s. em} \quad [0, \infty)$$

e, como a função $\varphi(t) = e^{-\omega t} \|u(t+h) - u(t)\| = e^{-\omega t} \|v(t) - u(t)\|$ é absolutamente contínua, φ é monótona decrescente.

3.6 - Teorema: *Seja* $A \in \mathcal{A}(\omega)$ *e* u *solução forte de* (3.1). *Então:*

i) $\|u(t) - u(s)\| \leq e^{\omega^+(t-s)}(t-s)\,|Au(s)|$ *para quase todo* $t \in (0, \infty)$ *e todo* s *tal que* $u(s) \in D(A)$, $0 \leq s \leq t$;

ii) $\left\| \dfrac{du}{dt}(t) \right\| = |Au(t)| \quad$ *q.s. em* $\quad (0, \infty)$;

iii) *A função* $e^{-\omega t}\,|Au(t)|$ *é monótona decrescente.*

Demonstração: Seja Ω o conjunto dos pontos t de $(0, \infty)$ tais que $u(t) \in D(A)$, u é diferenciável no ponto t e $du(t)/dt + Au(t) \ni 0$. Segue-se das hipóteses que $(0, \infty) \backslash \Omega$ tem medida nula.

i) Fixemos s tal que $u(s) \in D(A)$, $0 \leq s \leq t$ e seja $y \in Au(s)$. Pela acretividade de $A + \omega I$ existe um $u^* \in F(u(t) - u(s))$ tal que

$$\left\langle -\frac{du}{dt}(t) + \omega u(t) - y - \omega u(s), u^* \right\rangle \geq 0.$$

Daí, vem

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t), u^* \right\rangle \leq -\langle y, u^* \rangle + \omega \|u(t) - u(s)\|^2 \leq \|y\| \cdot \|u(t) - u(s)\|$$
$$+ \omega \|u(t) - u(s)\|^2$$

e, tendo em vista o Lema 3.2 e que $u(s)$ não depende de t,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-u(s)\| \le \|y\| + \omega\|u(t)-u(s)\| \le \|y\| + \omega^+\|u(t)-u(s)\|. \tag{3.4}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\omega^+(t-s)}\|u(t)-u(s)\|\right) \le e^{-\omega^+(t-s)}\|y\|.$$

Se $\omega^+ > 0$ temos, integrando de s a t

$$e^{-\omega^+(t-s)}\|u(t)-u(s)\| \le \frac{1-e^{-\omega^+(t-s)}}{\omega^+}\|y\|,$$

donde

$$\begin{aligned}\|u(t)-u(s)\| &\le \frac{e^{\omega^+(t-s)}-1}{\omega^+}\|y\| \le \frac{\omega^+(t-s)e^{\omega^+(t-s)}}{\omega^+}\|y\| \\ &= (t-s)e^{\omega^+(t-s)}\|y\|\end{aligned}$$

e, como essa desigualdade é válida para todo $y \in Au(s)$, i) é válida para $\omega^+ > 0$. Se $\omega^+ = 0$ temos, por (3.4),

$$\|u(t)-u(s)\| \le (t-s)\|y\| \qquad \forall y \in Au(s).$$

Logo

$$\|u(t)-u(s)\| \le (t-s)|Au(s)| = e^{\omega^+(t-s)}(t-s)|Au(s)|,$$

e, assim, i) também é válida se $\omega^+ = 0$.

ii) Para $s,t \in \Omega$, $0 \le t \le s$ temos, por i),

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \lim_{s\to t}\frac{\|u(s)-u(t)\|}{s-t} \le \lim_{s\to t} e^{\omega^+(s-t)}|Au(t)| = |Au(t)|$$

e, como $\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| \ge |Au(t)|$, visto que $-\frac{du}{dt}(t) \in Au(t)$, segue-se a igualdade em ii).

iii) Pelo Lema 3.5, vem, para $h > 0$ e $0 \leq s \leq t$,

$$e^{-\omega t} \|u(t+h) - u(t)\| \leq e^{-\omega s} \|u(s+h) - u(s)\|$$

donde, supondo que $s, t \in \Omega$ tem-se, dividindo ambos os membros por h e passando ao limite quando $h \to 0$,

$$e^{-\omega t} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq e^{-\omega s} \left\| \frac{du}{dt}(s) \right\|.$$

Levando ii) em consideração tem-se iii).

3.7 - Corolário: *Seja X reflexivo, estritamente convexo e liso e $A + \omega I$ acretivo e máximo em $C, D(A) \subset C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A)$. Se u é uma solução forte de (3.1), então $A^0 u(t)$ tem um único elemento e*

$$\frac{du}{dt}(t) + A^o u(t) = 0 \quad q.s. \ em \quad (0, \infty).$$

Demonstração: Para todo t tal que $u(t) \in D(A)$, $Au(t)$ é convexo e fechado pela Proposição II-7.9, donde $(Au(t))^0$ tem um único elemento, pelo Teorema I-5.14. Além disto,

$$-\frac{du}{dt}(t) \in Au(t) \quad \text{q.s. em} \quad (0, \infty).$$

Logo, levando em conta ii) do Teorema 3.6 e notando que, por definição, $A^0 u(t) = (Au(t))^0$, tem-se o resultado que se queria demonstrar.

3.8 - Definição: Seja π a partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ de $[0, T]$. O esquema

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Ax_i \ni 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.5}$$

será dito *discretização* da equação (3.1). Se $\max\limits_{1 \leq i \leq N} \{t_i - t_{i-1}\} \leq \varepsilon$, (3.5) será dita ε-discretização de (3.1) em $[0, T]$.

Se a seqüência $x_0, x_1, \ldots, x_N$ satisfaz (3.5), a função u_π, definida por $u_\pi(0) = x_0$ e $u_\pi(t) = x_i$ se $t \in (t_{i-1}, t_i]$, é dita *solução* de (3.5) em $[0,T]$ com *valor inicial* x_0. Se (3.5) for uma ε-discretização, u_π será dita *solução ε-aproximada* de (3.1) com valor inicial x_0; se u_π for uma solução ε-aproximada de (3.1) em $[0,T]$ com valor inicial x_0 e $\|x - x_0\| \le \varepsilon$, u_π será dita *solução ε-aproximada do problema* (3.1)-(3.2) em $[0,T]$.

3.9 - Proposição: *Seja A um operador nas condições do Teorema* 2.1. *Então, para cada partição de $[0,T], 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ tal que $t_i - t_{i-1} < \lambda_0$ e cada $x_0 \in \overline{D(A)}$, a discretização* (3.5) *admite uma única solução com valor inicial x_0.*

Demonstração: Para $i = 1$ a discretização (3.5) com valor inicial x_0 é equivalente a

$$\frac{x_1 - x_0}{t_1} + Ax_1 \ni 0$$

e, portanto, a $(I + t_1 A)x_1 \ni x_0$. Mas, por hipótese, $A \in \mathcal{A}(\omega)$ e $x_0 \in \operatorname{Im}(I + t_1 A)$, $0 < t_1 < \lambda_0$. Logo, existe um único $x_1 \in D(A)$ tal que $x_0 \in (I + t_1 A)x_1$ e tem-se $x_1 = (I + t_1 A)^{-1} x_0$. Por recorrência, vê-se que, para cada $i = 2, \ldots, N$ existe um só $x_i \in D(A)$ que satisfaz (3.5) ou, equivalentemente,

$$x_i = (I + (t_i - t_{i-1})A)^{-1} x_{i-1} \qquad 0 < t_i - t_{i-1} < \lambda_0 \tag{3.6}$$

ou, ainda,

$$x_i = (I + (t_i - t_{i-1})A)^{-1}(I + (t_{i-1} - t_{i-2})A)^{-1} \ldots (I + t_1 A)^{-1} x_0. \tag{3.7}$$

A seqüência $x_0, x_1, \ldots, x_N$ define a única solução de (3.5) com valor inicial x_0.

3.10 - Proposição: *Seja A um operador que satisfaz as condições do Teorema* 2.1, *$x_0 \in \overline{D(A)}$ e u_{ε_N} a solução da ε_N-discretização* (3.5), *onde $t_i - t_{i-1} = T/N = \varepsilon_N$, $i = 1, \ldots, N$, com valor inicial x_0. Então,*

$$\lim_{N \to \infty} u_{\varepsilon_N}(t) = S(t)x_0, \tag{3.8}$$

uniformemente em $[0, T]$, *onde* S *é o semigrupo gerado por* $-A$.

Demonstração: Tem-se, por (3.7),

$$u_{\varepsilon_N}(t) = (I + \varepsilon_N A)^{-[t/\varepsilon_N]-1} x_0 \qquad \forall t \in [0, T],$$

onde $[t/\varepsilon_N]$ é a parte inteira de t/ε_N. Logo, pelo Corolário 2.5,

$$\lim_{N\to\infty} u_{\varepsilon_N}(t) = S(t)x_0,$$

uniformemente em $[0, T]$.

Pode-se demonstrar o resultado mais geral a seguir.

3.11 - Teorema: *Seja* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $x_0 \in \overline{D(A)}$ *e suponha-se que para cada* $\varepsilon > 0$ *exista uma solução* ε*-aproximada,* u_ε, *de* (3.1)-(3.2). *Então* u_ε *converge uniformemente para uma função contínua.*

Não usaremos este teorema e omitiremos sua demonstração. (A demonstração encontra-se em Pazy [3] e Crandall e Evans [1]).

3.12 - Teorema: *Seja* A *um operador que satisfaz as condições do Teorema* 2.1, $x \in \overline{D(A)}$ *e* u *uma solução forte de* (3.1) *com* $u(0) = x$. *Então,* $u(t) = S(t)x$, $t \in [0, \infty)$, *onde* S *é o semigrupo gerado por* $-A$.

Demonstração: Vamos supor, em primeiro lugar, que $x \in D(A)$. Seja $T > 0$ e N tal que $(T/N)\omega < 1, \varepsilon = T/N$ e ponhamos $u(t) = x$, se $t < 0$, e

$$g_\varepsilon(t) = \frac{u(t) - u(t-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{du}{dt}(t).$$

Como $-\dfrac{du}{dt}(t) \in Au(t)$ q.s. em $(0, T)$ segue-se daí que $u(t) = (I+\varepsilon A)^{-1}(u(t-\varepsilon)+\varepsilon g_\varepsilon(t))$ q.s. em $(0, T)$. Por outro lado, pondo $u_\varepsilon(t) = x$ para $t \leq 0$ temos por (3.6)

$$u_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon A)^{-1} u_\varepsilon(t - \varepsilon), \qquad t \geq 0.$$

Logo, por i) do Teorema II-6.13 e tendo em vista que $(1-\varepsilon\omega)^{-1} \leq (1-\varepsilon\,|\omega|)^{-1}$ temos

$$\|u_\varepsilon(t) - u(t)\| = \|J_\varepsilon u_\varepsilon(t-\varepsilon) - J_\varepsilon(u(t-\varepsilon) + \varepsilon g_\varepsilon(t))\|$$

$$\leq (1-\varepsilon\,|\omega|)^{-1}[\|u_\varepsilon(t-\varepsilon) - u(t-\varepsilon)\| + \varepsilon\,\|g_\varepsilon(t)\|] \quad \text{q.s. em} \quad (0,T).$$

Portanto,

$$\int_0^T \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|\,dt \leq (1-\varepsilon\,|\omega|)^{-1}\int_0^T \|u_\varepsilon(t-\varepsilon) - u(t-\varepsilon)\|\,dt$$
$$+\,\varepsilon(1-\varepsilon\,|\omega|)^{-1}\int_0^T \|g_\varepsilon(t)\|\,dt,$$

donde,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{T-\varepsilon}^T \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|\,dt \leq \frac{(1-\varepsilon\,|\omega|)^{-1} - 1}{\varepsilon}\int_0^{T-\varepsilon} \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|\,dt$$
$$+\,(1+\varepsilon\,|\omega|)^{-1}\int_0^T \|g_\varepsilon(t)\|\,dt. \tag{3.9}$$

Mas, de acordo com as hipóteses, se $T > 0$ tem-se, pelo Teorema 3.6

$$\|u(t) - u(t-\varepsilon)\| \leq e^{\omega^+\varepsilon}\varepsilon|Au(t-\varepsilon)| \leq e^{\omega^+\varepsilon}\varepsilon\, e^{\omega(t-\varepsilon)}|Ax| \leq e^{\omega^+T}\varepsilon|Ax|$$

q.s. em (ε, T), $0 < \varepsilon < T$, e

$$\|u(t) - u(t-\varepsilon)\| = \|u(t) - x\| = \|u(t) - u(0)\| \leq e^{\omega^+t}t\,|Ax| \leq e^{\omega^+T}\varepsilon\,|Ax| \quad \text{q.s. em} \quad (0,\varepsilon)$$

i.e., $\|u(t) - u(t-\varepsilon)\| \leq e^{\omega^+T}\varepsilon\,|Ax|$ q.s. em $(0,T)$. Além disto, ainda pelo Teorema 3.6,

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = |Au(t)| \leq e^{\omega t}\,|Ax| \leq e^{\omega^+T}\,|Ax| \quad \text{q.s. em}(0,T).$$

Logo, $\|g_\varepsilon(t)\| \leq 2e^{\omega^+T}\,|Ax|$ e, portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \|g_\varepsilon(t)\|\,dt = 0.$$

Logo, de (3.9) vem, por (3.8), no limite quando $\varepsilon \to 0$,

$$\|S(T)x - u(T)\| \leq |\omega| \int_0^T \|S(t)x - u(t)\| \, dt$$

donde, pelo Lema de Gronwall (Lema I-8.21), $u(t) = S(t)x$, $\forall t \geq 0$.

Seja agora, $x \in \overline{D(A)}$ e (ε_n) uma seqüência tal que $\varepsilon_n \to 0$ e $u(\varepsilon_n) \in D(A)$, $n = 1, \ldots$. Então, a função $v_n(t) = u(t + \varepsilon_n)$ é solução da equação $\dfrac{dv_n}{dt} + Av_n(t) \ni 0$ com $v_n(0) = u(\varepsilon_n)$. Mas pelo que já foi demonstrado, $S(t)u(\varepsilon_n) = v_n(t)$; logo, no limite quando $n \to \infty$, $S(t)x = u(t)$.

A recíproca do Teorema 3.12 envolve o lema que segue.

3.13 - Lema: *Seja* $A \in \mathcal{A}(\omega)$ *tal que* $\operatorname{Im}(I + \lambda A) \supset \overline{D(A)}$ *para* $0 < \lambda < \lambda_0$ *e* S *o semigrupo gerado por* $-A$. *Se* $x \in \overline{D(A)}$ *e* $(x_0, y_0) \in A$, *então*

$$\sup_{\zeta^* \in F(x - x_0)} \limsup_{t \to 0} \left\langle \frac{S(t)x - x}{t} + \omega(x_0 - x), \zeta^* \right\rangle \leq \langle y_0, x_0 - x \rangle_s .$$

Demonstração: Vamos designar por $[t/\lambda]$ a parte inteira de t/λ, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Por ii) e iii) do Teorema II-6.13 temos, para λ suficientemente pequeno

$$\begin{aligned}\left\| J_\lambda^{[t/\lambda]} x_0 - x_0 \right\| &\leq [t/\lambda](1 - \lambda |\omega|)^{-[t/\lambda]+1} \|J_\lambda x_0 - x_0\| \\ &\leq t(1 - \lambda |\omega|)^{-[t/\lambda]} |Ax_0| .\end{aligned}$$

Por hipótese, $x \in D_\lambda$, $0 < \lambda < \lambda_0$. Por i) do Teorema II-6.13 tem-se, então, para λ suficientemente pequeno,

$$\left\| J_\lambda^{[t/\lambda]} x - x_0 \right\| \leq \left\| J_\lambda^{[t/\lambda]} x - J_\lambda^{[t/\lambda]} x_0 \right\| + \left\| J_\lambda^{[t/\lambda]} x_0 - x_0 \right\|$$

$$\leq (1 - \lambda\omega)^{-[t/\lambda]} \|x - x_0\| + t(1 - \lambda |\omega|)^{-[t/\lambda]} |Ax_0| , \quad \lambda > 0, t \geq 0. \tag{3.10}$$

Ponhamos, para $\lambda > 0$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$y_{\lambda,k} = \lambda^{-1}(J_\lambda^{k-1}\, x - J_\lambda^k x).$$

Teremos,

$$y_{\lambda,k} = \lambda^{-1}(I - J_\lambda)J_\lambda^{k-1}x = A_\lambda J_\lambda^{k-1}x \in AJ_\lambda^k x.$$

Como $A + \omega I$ é acretivo, existe $\eta^* \in F(x_0 - J_\lambda^k x)$ tal que

$$\langle y_{\lambda,k} - y_0, \eta^* \rangle \leq \omega \left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\|^2. \tag{3.11}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\langle y_{\lambda,k}, \eta^* \rangle &= \lambda^{-1}\langle J_\lambda^{k-1}x - J_\lambda^k x, \eta^* \rangle = \lambda^{-1}\langle (x_0 - J_\lambda^k x) - (x_0 - J_\lambda^{k-1}x), \eta^* \rangle \\ &\geq \lambda^{-1}(\left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\|^2 - \left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\| \cdot \left\| x_0 - J_\lambda^{k-1}x \right\|) \\ &\geq (2\lambda)^{-1}(\left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\|^2 - \left\| x_0 - J_\lambda^{k-1}x \right\|^2).\end{aligned}$$

Portanto, por (3.11),

$$\begin{aligned}&\left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\|^2 - \left\| x_0 - J_\lambda^{k-1}x \right\|^2 \leq 2\lambda\langle y_{\lambda,k}, \eta^* \rangle \\ &= 2\lambda\langle y_{\lambda,k} - y_0, \eta^* \rangle + 2\lambda\langle y_0, \eta^* \rangle \leq 2\lambda\langle y_0, \eta^* \rangle + 2\lambda\omega \left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\|^2 \\ &\leq 2\lambda\langle y_0, x_0 - J_\lambda^k x \rangle_s + 2\lambda\omega \left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\|^2.\end{aligned}$$

Mas, para $k\lambda \leq \tau < (k+1)\lambda$ tem-se $J_\lambda^{[\tau/\lambda]}\, x = J_\lambda^k x$. Logo,

$$\begin{aligned}\left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\|^2 - \left\| x_0 - J_\lambda^{k-1}x \right\|^2 &\leq 2\int_{\lambda k}^{\lambda(k+1)} \left\langle y_0, x_0 - J_\lambda^{[\tau/\lambda]}x \right\rangle_s d\tau \\ &+ 2\lambda\omega \left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\|^2.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Seja $t \geq \lambda$. Somando (3.12) de $k = 1$ a $k = [t/\lambda]$ teremos

$$\begin{aligned}\left\| x_0 - J_\lambda^{[t/\lambda]}x \right\|^2 - \left\| x - x_0 \right\|^2 &\leq 2\int_{\lambda}^{([t/\lambda]+1)\lambda} \left\langle y_0, x_0 - J_\lambda^{[\tau/\lambda]}x \right\rangle_s d\tau \\ &+ 2\lambda\omega \sum_{k=1}^{[t/\lambda]} \left\| x_0 - J_\lambda^k x \right\|^2.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Por iv) do Teorema I-6.5 e o Corolário 2.5 temos

$$\limsup_{\lambda\to 0+}\left\langle y_0, x_0 - J_\lambda^{[\tau/\lambda]}x\right\rangle_s \leq \langle y_0, x_0 - S(\tau)x\rangle_s.$$

Mas, por v) do Teorema I-6.5,

$$|\langle y_0, x_0 - S(\tau)x\rangle_s| \leq \|y_0\|\cdot\|x_0 - S(\tau)x\|$$

e, por (3.10),

$$\|x_0 - S(\tau)x\| \leq e^{\omega\tau}\,\|x - x_0\| + \tau\, e^{|\omega|\tau}\,|Ax_0|\,.$$

Portanto, se $\tau > 0$ temos, para λ suficientemente pequeno,

$$\left|\left\langle y_0, x_0 - J_\lambda^{[\tau/\lambda]}x\right\rangle_s\right| \leq f(\tau),$$

onde $f(\tau)$ é uma função integrável. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada temos, tomando o limite superior, quando $\lambda \to 0$, de ambos os membros de (3.13),

$$\|x_0 - S(t)x\|^2 - \|x - x_0\|^2 \leq 2\int_0^t \langle y_0, x_0 - S(\tau)x\rangle_s d\tau + I,$$

onde

$$I = \limsup_{\lambda\to 0} 2\lambda\omega \sum_{k=1}^{[t/\lambda]} \left\|x_0 - J_\lambda^k x\right\|^2.$$

Fazendo $\lambda = t/n$ temos $[t/\lambda] = t/\lambda = n$. Logo, por (3.10),

$$2\lambda\omega\sum_{k=1}^{n}\left\|x_0 - J_\lambda^k x\right\|^2 \leq 2\lambda\omega\sum_{k=1}^{n}[(1-\lambda\omega)^{-k}\,\|x - x_0\| + \lambda k(1-\lambda\,|\omega|)^{-k}\,|Ax_0|\,]^2$$

$$= 2\omega\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(1-\frac{t}{n}\omega\right)^{-k}\|x - x_0\| + \frac{tk}{n}\left(1-\frac{t}{n}\,|\omega|\right)^{-k}|Ax_0|\right]^2. \tag{3.14}$$

Observe-se, agora, que pondo

$$\varphi_n(\tau) = \left[\left(1 - \frac{t}{n}\omega\right)^{-[\tau n/t]} \|x - x_0\| + \tau \left(1 - \frac{t}{n}|\omega|\right)^{-[\tau n/t]} |Ax_0| \right]^2$$

tem-se, quando $n \to \infty$,

$$\varphi_n(\tau) \to [e^{\omega\tau} \|x - x_0\| + \tau e^{|\omega|\tau} |Ax_0|]^2, \qquad 0 < \tau < t,$$

uniformemente em $[0, t]$ e que a expressão pela qual 2ω é multiplicada no membro da direita de (3.14) é justamente a soma de Riemann de φ_n relativamente à decomposição de $(0, t)$ em n partes iguais. Logo,

$$I \leq 2\omega \int_0^t (e^{\omega\tau} \|x - x_0\| + \tau\, e^{|\omega|\tau} |Ax_0|)^2 d\tau.$$

Seja $\zeta^* \in F(x - x_0)$. Teremos

$$\begin{aligned} 2\langle S(t)x - x, \zeta^* \rangle &= 2\langle S(t)x - x_0, \zeta^* \rangle + 2\langle x_0 - x, \zeta^* \rangle \\ &\leq 2 \|x_0 - S(t)x\| \cdot \|x - x_0\| - 2\|x - x_0\|^2 \\ &\leq \|x_0 - S(t)x\|^2 - \|x - x_0\|^2 \\ &\leq 2\int_0^t \langle y_0, x_0 - S(\tau)x \rangle_s d\tau + I. \end{aligned}$$

Mas $\langle y_0, x_0 - S(\tau)x \rangle_s$ é semicontínua superiormente e $x_0 - S(\tau)x$ converge fortemente a $x_0 - x$ quando $\tau \to 0$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\langle y_0, x_0 - S(\tau)x \rangle_s \leq \langle y_0, x_0 - x \rangle_s + \varepsilon,$$

para $0 \leq \tau < \delta$ e, portanto, se $0 < t < \delta$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{S(t)x - x}{t}, \zeta^* \right\rangle &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \langle y_0, x_0 - S(\tau)x \rangle_s d\tau + \frac{I}{2t} \\ &\leq \langle y_0, x_0 - x \rangle_s + \frac{I}{2t} + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Como

$$\lim_{t\to 0} \frac{I}{2t} \leq \omega \left\| x - x_0 \right\|^2 = \omega\langle x - x_0, \zeta^* \rangle$$

temos, tomando o limite superior de ambos os membros de (3.15),

$$\limsup_{t\to 0} \left\langle \frac{S(t)x - x}{t}, \zeta^* \right\rangle \leq \langle y_0, x_0 - x\rangle_s + \omega\langle x - x_0, \zeta^* \rangle,$$

donde a desigualdade a demonstrar.

3.14 - Teorema: *Seja* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $\overline{D(A)} \subset \mathrm{Im}(I + \lambda A)$, $0 < \lambda < \lambda_0$, *A um operador fechado,* $S \in Q_\omega(\overline{D(A)})$ *o semigrupo gerado por* $-A$, $z \in \overline{D(A)}$ *e* $S(t)z$ *diferenciável q.s. em* $(0, \infty)$. *Então,* $S(t)z$ *é uma solução forte de* (3.1).

Demonstração: Seja $z \in \overline{D(A)}$ e $t_0 > 0$ tal que $\dfrac{d}{dt} S(t)z$ existe no ponto $t = t_0$. Podemos, então, escrever

$$S(t_0)z - S(t_0 - h)z = h\, \frac{d}{dt}\, S(t_0)z + \alpha(h), \qquad 0 < h < t_0, \tag{3.16}$$

onde $\left\|\alpha(h)\right\| / h \to 0$ quando $h \to 0$. Como $S(t_0 - h)z \in \overline{D(A)}$, segue-se das hipóteses que se $h < \lambda_0$, então existe um $(x_h, y_h) \in A$ tal que $S(t_0 - h)z = x_h + hy_h$. Logo, de (3.16) vem

$$S(t_0)z - x_h = h \left(\frac{d}{dt} S(t_0)z + y_h \right) + \alpha(h). \tag{3.17}$$

Fazendo $(x_0, y_0) = (x_h, y_h)$ e $x = S(t_0)z$ no Lema 3.13 e tendo em vista que $F(x_h - S(t_0)z)$ é um conjunto compacto na topologia fraca-$*$ de X^*, segue-se que existe um $\eta^* \in F(x_h - S(t_0)z)$ tal que

$$\left\langle \frac{d}{dt}\, S(t_0)z + \omega(x_h - S(t_0)z, \zeta^* \right\rangle \leq \langle y_h, \eta^* \rangle, \quad \forall \zeta^* \in F(S(t_0)z - x_h).$$

Em particular, para $\zeta^* = -\eta^*$ temos, levando (3.17) em consideração,

$$\langle S(t_0)z - x_h + h\omega(x_h - S(t_0)z) - \alpha(h), \eta^* \rangle \geq 0.$$

Logo,

$$(1 - h\omega)\langle x_h - S(t_0)z, \eta^* \rangle + \langle \alpha(h), \eta^* \rangle \leq 0$$

donde

$$(1 - h\omega) \|x_h - S(t_0)z\|^2 \leq \|\alpha(h)\| \cdot \|x_h - S(t_0)z\| .$$

Segue-se que

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(t_0)z - x_h}{h} = 0.$$

Portanto $\lim\limits_{h\to 0} x_h = S(t_0)z$ e, tendo em vista (3.17),

$$\lim_{h\to 0} y_h = -\frac{d}{dt}S(t_0)z.$$

Mas $(x_h, y_h) \in A$ e A é fechado. Logo,

$$(S(t_0)z, -\frac{d}{dt}S(t_0)z) \in A$$

que é o que se queria demonstrar.

Nota: No teorema que se acaba de demonstrar é bastante supor que $D(A) \subset \operatorname{Im}(I+\lambda A)$. Com efeito, A é fechado por hipótese, donde $\operatorname{Im}(I + \lambda A)$ é um conjunto fechado pela Proposição II-6.19. Portanto de $D(A) \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A)$, $0 < \lambda < \lambda_0$ vem $\overline{D(A)} \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A)$.

3.15 - Corolário: *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se A satisfaz as hipóteses do Teorema 3.14 e S é o semigrupo gerado por $-A$, então $S(t)x$ é a solução forte de*

(3.1)-(3.2), $\forall\, x \in D(A)$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.1, $S(t)x$ é, para todo $x \in D(A)$, uma função lipschitziana, portanto diferenciável q.s., visto que o espaço é reflexivo (Teorema I-8.14). Pelo Teorema 3.14 $S(t)x$ é, então, solução forte de (3.1)-(3.2).

3.16 - Nota: Se A satisfaz as hipóteses do Teorema 3.14, os Teoremas 3.12 e 3.14 mostram que o problema (3.1)-(3.2) tem uma solução forte se e só se a função $S(t)x$ é diferenciável q.s. e, no caso da diferenciabilidade, a solução forte é $S(t)x$. Este fato, aliado ao que ficou estabelecido na Proposição 3.10, sugere considerar $S(t)x$ como solução do problema (3.1)-(3.2) mesmo que $S(t)x$ não seja diferenciável e, portanto, não satisfaça as condições ii) e iv) da Definição 3.1. Assim, quando A estiver nas condições do Teorema 2.1, a função $S(t)x$ será dita *solução generalizada* de (3.1)-(3.2).

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema a seguir

3.17 - Teorema: *Seja X^* uniformemente convexo, $A + \omega I$ e $B + \omega I$ m-acretivos e S_A e S_B os semigrupos gerados por $-A$ e $-B$ em $\overline{D(A)}$ e $\overline{D(B)}$, respectivamente. Se $S_A(t) = S_B(t)$ $\forall t \geq 0$, então $A = B$.*

Demonstração: Vamos inicialmente demonstrar que $D(A) = D(B)$. Seja $x \in D(A)$. Por hipótese, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)}$ donde pondo $S(t) = S_A(t) = S_B(t)$ tem-se pelo Lema 3.13

$$\limsup_{t\to 0} \left\langle \frac{S(t)x - x}{t} + \omega(x_0 - x), F(x - x_0) \right\rangle \leq \langle y_0, F(x_0 - x)\rangle, \quad \forall (x_0, y_0) \in B.$$

Como, pelo Corolário 3.15, $S(t)x$ é a solução forte de (3.1), (3.2) segue-se, por i) do Teorema 3.6 com $s = 0$, que

$$\left\| \frac{S(t)x - x}{t} \right\| \leq e^{\omega^+ T} |Ax|, \qquad 0 < t < T.$$

Sem quebra da generalidade pode-se, pois, supor que $(S(t)x - x)/t \rightharpoonup y$ quando $t \to 0$.

Tem-se, então,

$$\langle y + \omega(x_0 - x), F(x - x_0)\rangle \leq \langle y_0, F(x_0 - x)\rangle, \quad \forall (x_0, y_0) \in B,$$

donde

$$\langle -y + \omega x - y_0 - \omega x_0, F(x - x_0)\rangle \geq 0, \qquad \forall (x_0, y_0) \in B.$$

Pela maximalidade de $B + \omega I$ segue-se que $(x, -y) \in B$, donde $x \in D(B)$. Logo $D(A) \subset D(B)$. Analogamente, $D(B) \subset D(A)$.

Vamos por $D = D(A) = D(B)$. Se $x \in D$, $u(t) = S(t)x$ é a solução forte de (3.1)-(3.2), pelo Corolário 3.15. Logo, pondo $\varphi(t) = -dS(t)x/dt$, tem-se $\varphi(t) \in AS(t)x$ e $\varphi(t) \in BS(t)x$ q.s. em $(0, \infty)$ donde, por ii) do Teorema 3.6, $\varphi(t) \in A^o S(t)x \cap B^o S(t)x$ q.s. em $(0, \infty)$. Além disto,

$$\|\varphi(t)\| = |AS(t)x| \leq e^{\omega^+ T}\,|Ax| \quad \text{e} \quad \|\varphi(t)\| = |BS(t)x| \leq e^{\omega^+ T}\,|Bx| \quad \text{q.s. em} \quad (0, \infty),$$

por ii) e iii) do Teorema 3.6. Como X é reflexivo existe uma seqüência (t_n) tal que $t_n \to 0$ e $\varphi(t_n) \rightharpoonup y$ quando $n \to \infty$. Pela continuidade forte, $S(t_n)x \to x$ e como $\varphi(t_n) \in AS(t_n)x \cap BS(t_n)x$ segue-se que $y \in Ax \cap Bx$ pois A e B são demifechados pela Proposição II-7.11. Mas, pelo Exemplo I-3.3a), $\|y\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|\varphi(t_n)\| \leq |Ax|$. Logo, $y \in A^0 x \cap B^0 x$, donde $A = B$ pelo Corolário II-8.7.

Os resultados já obtidos permitem demonstrar um teorema relativo às secções principais estudadas no §8 do Capítulo II.

3.18 - Teorema: *Seja X^* uniformemente convexo. Se $A + \omega I$ é um operador m-acretivo, então A^0 é uma secção principal de A.*

Demonstração: Seja $x_0 \in \overline{D(A)}$ e $y_0 \in X$ tais que

$$\langle y_0 + \omega x_0 - v - \omega u, F(x_0 - u)\rangle \geq 0, \quad \forall (u, v) \in A^0 \tag{3.18}$$

e S o semigrupo gerado por $-A$ sobre $\overline{D(A)}$. Como X é reflexivo, $S(t)x$ é, pelo Corolário 3.15, solução de (3.1)-(3.2), para todo $x \in D(A)$. Logo,

$$-\frac{d}{dt}S(t)x \in A^0 S(t)x \quad \text{q.s. em} \quad (0,\infty),$$

por ii) do Teorema 3.6. De (3.18) vem, então,

$$\left\langle y_0 + \omega x_0 + \frac{d}{dt}S(t)x - \omega S(t)x, F(x_0 - S(t)x) \right\rangle \geq 0 \quad \text{q.s. em} \quad (0,\infty).$$

Daí,

$$-\left\langle \frac{d}{dt}S(t)x, F(x_0 - S(t)x) \right\rangle \leq \omega \langle x_0 - S(t)x, F(x_0 - S(t)x)\rangle$$

$$+ \langle y_0, F(x_0 - S(t)x)\rangle \leq \omega \left\|S(t)x - x_0\right\|^2 + \|y_0\| \, \|S(t)x - x_0\| \quad \text{q.s. em} \quad (0,\infty)$$

donde, pelo Lema 3.2,

$$\frac{d}{dt}\left\|S(t)x - x_0\right\| \leq \omega^+ \left\|S(t)x - x_0\right\| + \|y_0\|, \quad \text{q.s. em} \quad (0,\infty).$$

Integrando de 0 a t temos $\|S(t)x - x_0\| \leq \|x - x_0\| + t\,\|y_0\|$ se $\omega^+ = 0$ e

$$e^{-\omega^+ t}\left\|S(t)x - x_0\right\| \leq \|x - x_0\| + \int_0^t e^{-\omega^+ \tau}\,\|y_0\|\,d\tau \leq \|x - x_0\| + \frac{1 - e^{-\omega^+ t}}{\omega^+}\,\|y_0\|$$

donde $\|S(t)x - x_0\| \leq e^{\omega^+ t}\,\|x - x_0\| + t\,e^{\omega^+ t}\,\|y_0\|$, se $\omega^+ > 0$, desigualdades que são válidas para todo $x \in D(A)$. Como $x_0 \in \overline{D(A)}$ daí vem, em ambos os casos

$$\left\|S(t)x_0 - x_0\right\| \leq t\,e^{\omega^+ t}\,\|y_0\|,$$

i.e., $\|(S(t)x_0 - x_0)/t\|$ é limitado em todo intervalo limitado. Logo, existe uma seqüência (t_n), $t_n \to 0$ quando $n \to \infty$, e um $z \in X$ tais que

$$\frac{S(t_n)x_0 - x_0}{t_n} \rightharpoonup z \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Pelo Lema 3.13 tem-se, então,

$$\langle z + \omega(u - x_0), F(x_0 - u)\rangle \leq \langle v, F(u - x_0)\rangle, \quad \forall (u, v) \in A,$$

ou seja

$$\langle -z + \omega x_0 - v - \omega u,\ F(x_0 - u)\rangle \geq 0, \quad \forall (u, v) \in A.$$

Daí, pela maximalidade de $A + \omega I$, $(x_0, -z) \in A$ e, portanto, $x_0 \in D(A)$. De (3.18) segue-se, então, pelo Teorema II-8.6 que $(x_0, y_0) \in A$. Logo A^0 é uma secção principal de A.

3.19 - Teorema: *Sejam X e X^* uniformemente convexos, $A \in \mathcal{A}(\omega)$ e A fechado e tal que*

$$D(A) \subset \mathrm{Im}(I + \lambda A), \qquad 0 < \lambda \leq \lambda_0.$$

Então, $\forall x \in D(A)$:

i) *O conjunto Ax tem um único elemento, A^0x, de norma mínima.*

ii) *Se S é o semigrupo gerado por $-A$, $S(t)x$ é a única solução forte de* (3.1), (3.2).

iii) *A função $\varphi(t) = e^{-\omega t}\left\|A^0S(t)x\right\|$ é monótona decrescente.*

iv) *$A^0S(t)x$ é contínua à direita em todo $t \geq 0$.*

v) *$S(t)x$ é diferenciável à direita em todo $t \geq 0$ e*

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x + A^0S(t)x = 0 \qquad \forall t \geq 0.$$

vi) *A função $S(t)x$ é continuamente diferenciável exceto em um conjunto, no máximo, numerável e*

$$-\frac{d}{dt}\,S(t)x = A^oS(t)x$$

nos pontos onde é diferenciável.

Demonstração: Seja $\widetilde{A}$ demifechado, a extensão de A garantida pelo Teorema II-8,2. Então $\widetilde{A}^0x = A^0_x$ e i) é válida ; ii) decorre do Corlário 3.15 tendo em vista o Teorema de Milman; iii) é conseqüência imediata de iii) do Teorema 3.6. Vamos demonstrar iv). Seja, para isto, $t \geq 0$, (t_n) uma seqüência tal que $t_n \geq t$, $n = 1, \ldots, t_n \to t$ quando $n \to \infty$ e $S(t_n)x \in D(A)$, $n = 1, \ldots$. Por iii) temos

$$e^{-\omega t_n} \|A^o S(t_n)x\| \leq \|A^o x\|, \quad n = 1, \ldots.$$

Devido à reflexividade de X existe, então, uma subseqüência (t_{n_k}) de (t_n) e um $y \in X$ tais que $A^o S(t_{n_k})x \rightharpoonup y$ quando $k \to \infty$. Como $S(t)x$ é uma função contínua e $\widetilde{A}$ é demifechado segue-se, daí, que $S(t)x \in D(\widetilde{A}) = D(A)$ e $y \in \widetilde{A}S(t)x$. Mas a norma sendo semicontínua inferiormente na topologia fraca de X tem-se

$$\begin{aligned} e^{-\omega t} \|y\| &\leq \liminf_{k \to \infty} e^{-\omega t_{n_k}} \left\| \widetilde{A}^0 S(t_{n_k})x \right\| \leq \limsup_{k \to \infty} e^{-\omega t_{n_k}} \|A^o S(t_{n_k})x\| \\ &\leq e^{-\omega t} \|A^o S(t)x\| = e^{-\omega t} ||\widetilde{A}^0 S(t)x||. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Portanto, $y = A^0 S(t)x$ e, assim, $A^0 S(t_{n_k})x \rightharpoonup A^0 S(t)x$. Logo, $A^0 S(t_{n_k})x \to A^0 S(t)x$, pela Proposição I-5.8. Como $A^0 S(t)x$ independe de (t_{n_k}), $A^0 S(t_n)x \to A^0 S(t)x$, o que demonstra iv).

Como, pelo Corolário 3.15, $S(t)x$ é solução de (3.1)-(3.2)

$$-\frac{d}{dt} S(t)x \in AS(t)x \quad \text{q.s. em} \quad (0, \infty),$$

donde, por ii) do Teorema 3.6,

$$-\frac{d}{dt} S(t)x = A^0 S(t)x \quad \text{q.s. em} \quad (0, \infty).$$

Para todo $t \geq 0$ e $\forall h > 0$ temos, então, pelo Teorema I-8.14,

$$S(t+h)x - S(t)x = -\int_t^{t+h} A^0 S(\tau) x d\tau,$$

donde,

$$\left\| \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} + A^0 S(t)x \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\| A^0 S(t)x - A^0 S(\tau)x \right\| d\tau.$$

Tendo em vista que, por iv), $A^0 S(\tau)x \to A^0 S(t)x$ quando $\tau \to t$ pela direita, segue-se que no limite quando $h \to 0$

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x + A^0 S(t)x = 0 \qquad \forall t \geq 0,$$

o que demonstra v).

Por iv) a função $A^0 S(t)x$ é definida em todo $t \geq 0$. Mas então o conjunto das descontinuidades de $e^{-\omega t} \left\| A^0 S(t)x \right\|$ é, no máximo, numerável visto que por iii) essa função é monótona decrescente. O mesmo acontece, então, com a função $A^o S(t)x$ porque todo ponto de continuidade de $\left\| A^0 S(t)x \right\|$ é também ponto de continuidade de $A^0 S(t)x$, o que se demonstra com os mesmos argumentos usados para demonstrar iv), apenas substituindo a monotonia da função $e^{-\omega t} \left\| A^0 S(t)x \right\|$, em (3.19), pela continuidade da função $\left\| A^0 S(t)x \right\|$. Além disto, como foi dito acima,

$$-\frac{d}{dt} S(t)x = A^0 S(t)x \quad \text{q.s. em} \quad (0, \infty),$$

donde, integrando de 0 a t,

$$-S(t)x = -x + \int_0^t A^0 S(\tau)x \, d\tau.$$

Logo, $S(t)x$ é diferenciável em todo ponto de continuidade de $A^0 S(t)x$, i.e., exceto em um conjunto de pontos de $(0, \infty)$ no máximo numerável e

$$-\frac{d}{dt} S(t)x = A^0 S(t)x$$

nos pontos de diferenciabilidade.

Pelo que será demonstrado a seguir vê-se que quando

$$\operatorname{Im}(I + \lambda A) \supset \overline{\operatorname{conv} D(A)} = C, \quad 0 < \lambda \leq \lambda_0 \tag{3.20}$$

a solução forte de (3.1)-(3.2), quando existe, pode ser obtida como limite da solução do problema aproximado

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \\ \qquad u_\lambda(0) = x, \end{cases} \tag{3.21}$$

onde A_λ é a aproximação de Yosida de A.

3.20 - Teorema: *Se, além das hipóteses do Teorema* 2.1, *o operador* A *satisfaz a condição* (3.20) *então,* $\forall \lambda > 0$ *tal que* $\lambda |\omega| < 1/2$, $\forall x \in C$ *e para todo* $T > 0$, *existe uma única função* $u_\lambda \colon [0,T] \to C$, *absolutamente contínua em* $(0,T)$, *derivável q.s. em* $(0,T)$, $\dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0$ *q.s. em* $(0,T)$ *e* $u_\lambda(0) = x$. *Além disto,*

$$\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda(t) = S(t)x, \quad \forall x \in \overline{D(A)} \quad e \quad \forall t \geq 0, \tag{3.22}$$

uniformemente em $[0,T]$, *onde* S *é o semigrupo gerado por* $-A$.

Demonstração: Satisfeitas as hipóteses, a restrição de J_λ ao conjunto convexo e fechado, C, é uma aplicação lipschitziana de C em C com constante $\alpha = (1 - \lambda |\omega|)^{-1} \geq 1$. Pelo Corolário I-9.3 existe, então, uma única função u_λ que satisfaz as condições enunciadas.

Ponhamos $S_\lambda(t)x = u_\lambda(t)$. Por i) do Corolário I-9.4 temos

$$\|S_\lambda(t)x - S_\lambda(t)y\| \leq e^{\frac{(\alpha-1)t}{\lambda}} \|x - y\| = e^{\frac{|\omega| t}{1-\lambda|\omega|}} \|x - y\|$$

e como $\|S(t)x - S(t)y\| \leq e^{\omega t} \|x - y\|$ segue-se que é bastante demonstrar (3.22) para $x \in D(A)$. Seja, então, $x \in D(A)$, $t \in [0,T]$ e $n = [t/\lambda]$. Teremos

$$\begin{aligned} &\|u_\lambda(t) - S(t)x\| = \|S_\lambda(t)x - S(t)x\| \leq \|S_\lambda(t)x - S_\lambda(n\lambda)x\| \\ &+ \|S_\lambda(n\lambda)x - J_\lambda^n x\| + \|J_\lambda^n x - S(n\lambda)x\| + \|S(n\lambda)x - S(t)x\|. \end{aligned} \tag{3.23}$$

a) Levando em conta ii) do Corolário I-9.4 tem-se

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)x - S_\lambda(n\lambda)x\| = \|u_\lambda(t) - u_\lambda(n\lambda)\| &\leq \left\| \int_{n\lambda}^t \frac{du_\lambda}{dt}(s)ds \right\| \\ &\leq e^{(\alpha-1)\frac{t}{\lambda}} \int_{n\lambda}^t \||A_\lambda x|\|\, ds \leq e^{\frac{|\omega|t}{1-\lambda|\omega|}} (t - n\lambda) \|A_\lambda x\| \\ &\leq e^{\frac{|\omega|t}{1-\lambda|\omega|}} \lambda(1 - \lambda|\omega|)^{-1} |Ax|. \end{aligned}$$

b) Tendo em vista que $S_\lambda(t)x = u_\lambda(t)$ tem-se, pelo Teorema I-9.5,

$$\begin{aligned} &\|S_\lambda(n\lambda)x - J_\lambda^n x\| \leq \alpha^n\, e^{(\alpha-1)n}[(\alpha n - n)^2 + \alpha n]^{\frac{1}{2}} \|x - J_\lambda x\| \\ &\leq (1 - \lambda|\omega|)^{-n} e^{\frac{n\lambda|\omega|}{1-\lambda|\omega|}} [(n\lambda)^2(\alpha-1)^2 + \alpha\lambda(n\lambda)]^{\frac{1}{2}} (1 - \lambda|\omega|)^{-1} |Ax| \leq \\ &\leq (1 - \lambda|\omega|)^{-\frac{t}{\lambda}}\, e^{\frac{t|\omega|}{1-\lambda\omega}} \left[t^2 \frac{\omega}{1-\lambda\omega} + \frac{t}{1-\lambda\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\lambda}}{1-\lambda\omega} |Ax|. \end{aligned}$$

c) Como $\lambda|\omega| < 1/2$ tem-se, por (2.11),

$$\begin{aligned} &\|J_\lambda^n x - S(n\lambda)x\| = \lim_{m\to\infty} \left\| J_\lambda^n x - J_{\frac{n\lambda}{m}}^m x \right\| \\ &\leq \lim_{m\to\infty} 2n\lambda e^{4|\omega|n\lambda} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} |Ax| \leq 2\sqrt{n}\lambda e^{4|\omega|t} |Ax| < 2\sqrt{t}\sqrt{\lambda} e^{4|\omega|t} |Ax|. \end{aligned}$$

d) Pela Proposição 2.7 tem-se

$$\|S(n\lambda)x - S(t)x\| \leq e^{\omega^+(t-n\lambda)} e^{\omega n\lambda} (t - n\lambda) |Ax| \leq e^{\omega^+ t} \lambda |Ax|.$$

Por a), c) e d), respectivamente, a primeira, a terceira e a quarta parcelas de (3.23) convergem a zero, uniformemente em $[0,T]$ quando λ tende a zero; por b), o mesmo acontece com a segunda uma vez que, quando $\lambda \to 0$,

$$(1-\lambda\,|\omega|)^{-\frac{t}{\lambda}} \to e^{|\omega|t}, e^{\frac{t|\omega|}{1-\lambda|\omega|}} \to e^{|\omega|t}, \left[\frac{t^2\omega+t}{1-\lambda\omega}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\lambda}}{1-\lambda\omega} \to 0$$

o que completa a demonstração.

Se S é o semigrupo gerado por $-A$, $S(t)$, $t \geq 0$, é em geral uma aplicação de $\overline{D(A)}$ em $\overline{D(A)}$. Mas em espaços particulares, como se vê por iv) do Teorema 3.19, tem-se $S(t)\colon D(A) \to D(A)$, $t \geq 0$. Vamos agora ver que para certos operadores dos espaços de Hilbert tem-se $S(t)\colon \overline{D(A)} \to D(A)$, $t > 0$.

3.21 - Teorema: *Seja X um espaço de Hilbert, $\varphi\colon X \to (-\infty,+\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i., $A = \partial\varphi$ e S o semigrupo gerado por $-A$. Então, se $t > 0$, $S(t)x \in D(A)\,\forall x \in \overline{D(A)}$. Além disto, são válidas as seguintes estimativas:*

i) $\|A^o S(t)x\| \leq \frac{1}{t}\,\|S(t)x - x\|, \forall x \in \overline{D(A)}$ *e* $\forall t > 0$*;*

ii) $\|A^o S(t)x\| \leq \|A^o v\| + \frac{1}{t}\,\|v - x\|, \forall x \in \overline{D(A)}$*,* $\forall v \in D(A)$ *e* $t > 0$*.*

Demonstração: De acordo com o Exemplo II-2.18, $A = \partial\varphi$ é um operador máximo monótono, ou seja, m-acretivo. Pela Proposição II-7.16, $\overline{D(A)}$ é convexo. Desse modo, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0, \quad \lambda > 0 \\[2ex] \qquad u_\lambda(0) = x \end{cases} \tag{3.24}$$

tem, pelo Teorema 3.20, uma solução forte, u_λ, para todo $x \in \overline{D(A)}$. Pelo Teorema

II-5.6, A_λ é o subdiferencial da função φ_λ alí definida. Portanto, $\forall v \in X$

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u_\lambda(t)) &\geq \langle \partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)), v - u_\lambda(t)\rangle \\ &= \langle A_\lambda u_\lambda(t), v - u_\lambda(t)\rangle = \Big\langle -\frac{du_\lambda}{dt}(t), v - u_\lambda(t)\Big\rangle \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v - u_\lambda(t)\right\|^2,\end{aligned}$$

donde, integrando de 0 a T,

$$\frac{1}{2}\left\|v - u_\lambda(T)\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|v - x\right\|^2 \leq T\varphi_\lambda(v) - \int_0^T \varphi_\lambda(u_\lambda(t))dt. \tag{3.25}$$

De (3.24) vem

$$t\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 + t\Big\langle A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\rangle = 0. \tag{3.26}$$

Pelo Corolário II-5.7, φ_λ é diferenciável no sentido de Fréchet. Portanto a derivada de Fréchet de φ_λ é A_λ, donde

$$\frac{d}{dt}\varphi_\lambda(u_\lambda)(t) = \Big\langle A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big\rangle,$$

por uma generalização da regra de derivação das funções compostas. Logo, por (3.26),

$$t\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 + t\,\frac{d}{dt}\,\varphi_\lambda(u_\lambda) = 0$$

donde, tendo em vista (3.25)

$$\begin{aligned}\int_0^T t\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 dt &= -\int_0^T t\frac{d}{dt}\varphi_\lambda(u_\lambda)(t)dt = -T\varphi_\lambda(u_\lambda(T)) + \int_0^T \varphi_\lambda(u_\lambda(t))dt \\ &\leq -T\varphi_\lambda(u_\lambda(T)) + T\varphi_\lambda(v) - \frac{1}{2}\left\|v - u_\lambda(T)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|v - x\right\|^2.\end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema 3.6, $\left\|\dfrac{du_\lambda}{dt}\right\|$ é monótona decrescente, donde

$$\frac{T^2}{2}\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\|^2 \leq T\varphi_\lambda(v) - T\varphi_\lambda(u_\lambda(T)) - \frac{1}{2}\left\|v - u_\lambda(T)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|v - x\right\|^2. \tag{3.27}$$

Fazendo $v = u_\lambda(T)$ vem, daí,

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\| \leq \frac{1}{T}\left\|u_\lambda(T) - x\right\|$$

e, pela arbitrariedade de T,

$$\left\|A_\lambda u_\lambda(t)\right\| \leq \frac{1}{t}\left\|u_\lambda(t) - x\right\|, \quad t > 0. \tag{3.28}$$

Como, ainda pelo Teorema 3.20, $u_\lambda(t) \to S(t)x\, \forall x \in \overline{D(A)}$, segue-se daí que, para cada $t > 0$, $\|A_\lambda u_\lambda(t)\|$ é limitado. Portanto, para cada $t > 0$, existe uma seqüência (λ_n) e um $y(t) \in X$ tais que $\lambda_n \to 0$ e $A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t) \rightharpoonup y(t)$. Além disto, $J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t) \to S(t)x$ visto que $\|u_{\lambda_n}(t) - J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t)\| = \lambda_n \|A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t)\|$. Pela Proposição II-7.11, A é demifechado. Como $(J_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t), A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t)) \in A$, tomando limite quando $n \to \infty$, vem $(S(t)x, y(t)) \in A$ ou seja $S(t)x \in D(A)$.

Resta demonstrar i) e ii). De $(S(t)x, y(t)) \in A$ vem, $y(t) \in AS(t)x$ donde, por (3.28) e tendo em vista que a norma é s.c.i. na topologia fraca e que $AS(t)x$ tem um único elemento de norma mínima segue-se que

$$\begin{aligned}\left\|A^0 S(t)x\right\| &\leq \|y(t)\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_{\lambda_n} u_{\lambda_n}(t)\| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\left\|u_{\lambda_n}(t) - x\right\| \\ &= \frac{1}{t}\left\|S(t)x - x\right\| \quad \forall x \in \overline{D(A)}, \quad \forall t > 0,\end{aligned}$$

que é a estimativa i). Temos, $\forall v \in D(A)$,

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u_\lambda(T)) &\leq |\langle A_\lambda v, u_\lambda(T) - v\rangle| \leq \|A_\lambda v\|\,\|u_\lambda(T) - v\| \\ &\leq \left\|A^0 v\right\|\,\|u_\lambda(T) - v\|.\end{aligned}$$

Portanto, por (3.27)

$$\frac{T^2}{2}\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\|^2 \leq T\left\|A^0v\right\|\left\|u_\lambda(T)-v\right\| + \frac{1}{2}\left\|v-x\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|v-u_\lambda(T)\right\|^2$$

e como $T\left\|A^0v\right\|\left\|u_\lambda(T)-v\right\| \leq \frac{1}{2}T^2\left\|A^0v\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|v-u_\lambda(T)\right\|^2$ tem-se

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right\|^2 \leq \left\|A^0v\right\|^2 + \frac{1}{T^2}\left\|v-x\right\|^2 \leq (\left\|A^0v\right\| + \frac{1}{T}\left\|v-x\right\|)^2$$

donde, pela arbitrariedade de T,

$$\left\|A_\lambda u_\lambda(t)\right\| \leq \left\|A^0v\right\| + \frac{1}{t}\left\|v-x\right\| \quad t>0, \quad v\in D(A).$$

Daí vem, com os argumentos usados para estabelecer i),

$$\left\|A^0S(t)x\right\| \leq \left\|A^0v\right\| + \frac{1}{t}\left\|v-x\right\| \quad \forall x\in\overline{D(A)},\ \forall v\in D(A) \text{ e } t>0.$$

3.22 - Corolário: *Nas condições do Teorema* 3.21 *temos* $\forall x\in\overline{D(A)}$*:*

i) $S(t)x$ *é solução forte de* (3.1)-(3.2)*;*

ii) $A^0S(t)x$ *é contínua à direita em todo* $t\geq 0$*;*

iii) $S(t)x$ *é diferenciável à direita em todo* $t>0$ *e*

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x + A^0S(t)x = 0 \qquad \forall t>0.$$

Demonstração: Conseqüência imediata dos Teoremas 3.19 e 3.21.

Uma outra classe de operadores para os quais $S(t)\colon\overline{D(A)}\to D(A)$ é aquela em que o interior de $D(A)$ é não vazio como mostra o teorema a seguir.

3.23 - Teorema: *Seja* X *um espaço de Hilbert,* A *um operador* m*-acretivo de* X *tal que* $\operatorname{int} D(A)\neq\phi$ *e* S *o semigrupo gerado por* $-A$*. Então,* $S(t)x\in D(A)\,\forall x\in\overline{D(A)}$ *e* $\forall t>0$*. Além disto,* $\forall v\in\operatorname{int} D(A)$ *existe* $\rho>0$ *e* $M\geq 0$ *tais que*

$$\left\|A^0S(t)x\right\| \leq \frac{1}{2\rho t}(\left\|x-v\right\| + tM)^2 + M \quad \forall x\in\overline{D(A)}, \forall t>0. \tag{3.29}$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.20 o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda & = 0 \\ \\ u_\lambda(0) & = x \end{cases}$$

tem uma solução forte, u_λ, para todo $x \in \overline{D(A)}$, e $u_\lambda(t)$ tende a $S(t)x$, uniformemente em $[0, T]$, quando $\lambda \to 0$. Seja $v \in \operatorname{int} D(A)$. Pelo Teorema II-1.7, A é localmente limitado no ponto v, i.e., existem $\rho > 0$ e $M \geq 0$ tais que $\|y\| \leq M \, \forall y \in A(v + \rho z)$, $\|z\| \leq 1$. Como $(J_\lambda u_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t)) \in A$ temos, então, pela acretividade de A,

$$\langle A_\lambda u_\lambda(t) - y, J_\lambda u_\lambda(t) - v - \rho z \rangle \geq 0$$

$t \geq 0, y \in A(v + \rho z) \; \forall z$ tal que $\|z\| \leq 1$. Daí vem

$$\rho \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \langle A_\lambda u_\lambda(t), J_\lambda u_\lambda(t) - v \rangle + M \|J_\lambda u_\lambda(t) - v\| + M\rho$$

trivialmente se $A_\lambda u_\lambda(t) = 0$ e fazendo $z = A_\lambda u_\lambda(t) / \|A_\lambda u_\lambda(t)\|$ se $A_\lambda u_\lambda(t) \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \rho \|A_\lambda u_\lambda(t)\| &\leq -\left\langle \frac{du_\lambda}{dt}(t), u_\lambda(t) - \lambda A_\lambda u_\lambda(t) - v \right\rangle + M \|u_\lambda(t) - \lambda A_\lambda u_\lambda(t) - v\| + M\rho \\ &\leq -\left\langle \frac{du_\lambda}{dt}(t), u_\lambda(t) - v \right\rangle + M \|u_\lambda(t) - v\| + M\lambda \|A_\lambda u_\lambda(t)\| + M\rho \end{aligned}$$

donde

$$(\rho - M\lambda) \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda(t) - v\|^2 + M \|u_\lambda(t) - v\| + M\rho$$

ou, supondo $\rho - M\lambda > 0$, integrando de 0 a T e levando em conta que, pelo Teorema 3.6, $\|A_\lambda u_\lambda(t)\|$ é monótona decrescente,

$$\begin{aligned} (\rho - M\lambda) T \|A_\lambda u_\lambda(T)\| &\leq (\rho - M\lambda) \int_0^T \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \, dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|x - v\|^2 + M \int_0^T \|u_\lambda(t) - v\| \, dt + M\rho T. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $u_\lambda(t)$ converge a $S(t)x$ uniformemente em $[0,T]$ segue-se daí, pelos argumentos já usados para demonstrar i) do Teorema 3.21, que $S(t)x \in D(A)$ e

$$\rho T \left\| A^o S(T)x \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| x - v \right\|^2 + M \int_0^T \left\| S(t)x - v \right\| dt + M\rho T. \tag{3.30}$$

Além disto tem-se, levando em conta a Proposição 2.7 e que S é um semigrupo do tipo 0,

$$\|S(t)x - v\| \leq \|S(t)x - S(t)v\| + \|S(t)v - v\| \leq \|x - v\| + t|Av| \leq \|x - v\| + tM.$$

Logo, por (3.30), $\forall x \in \overline{D(A)}$, $\forall t > 0$ e $\forall v \in \operatorname{int} D(A)$,

$$\rho t \left\| A^0 S(t)x \right\| \leq \frac{1}{2}(\|x - v\| + tM)^2 + M\rho t,$$

que é a estimativa (3.29).

3.24 - Corolário: *Nas condições do Teorema* 3.23 *são válidas, para todo* $x \in \overline{D(A)}$, *as conclusões do Corolário* 3.22.

3.25 - Exemplos: a) Seja X um espaço de Hilbert e $f \colon X \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e s.c.i.. Então ∂f é, pelo Exemplo II-2.7, um operador m-acretivo. Pela Proposição II-5.8, $\overline{D(\partial f)} = \overline{\mathrm{De}(f)}$. Logo, pelo Corolário 3.22, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial f(u) \ni 0 \\ \qquad u(0) = x \end{cases} \tag{3.31}$$

tem, $\forall x \in \overline{\mathrm{De}(f)}$, uma solução forte, $S(t)x$, onde S é o semigrupo gerado por $-\partial f$ sobre $\overline{\mathrm{De}(f)}$. Um caso particular deste problema é aquele em que $f(x) = \|x\|$. Se $X = \mathbb{R}$, por exemplo, ∂f é o operador A definido por $D(A) = \mathbb{R}$ e

$$Ax = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ [-1, 1] & \text{se} \quad x = 0 \\ +1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

O problema (3.31) tem pois, para $\partial f = A$, uma solução forte $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tem-se um outro caso particular de (3.31) fazendo $X = L^2(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e com fronteira regular, e f a função φ dada por $\varphi(u) = (1/2)\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$ (Exemplo II-2.20); tem-se $\mathrm{De}(\varphi) = H^1(\Omega)$ e, portanto, o problema (3.31) com $f = \varphi$ e $x = u_0$ tem uma solução forte $S(t)u_0$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$, onde S é o semigrupo gerado por $-\partial\varphi$ sobre $L^2(\Omega)$. Observe-se ainda que, de acordo com o Exemplo II-2.20, $\partial\varphi$ é o operador A de $L^2(\Omega)$ definido por $D(A) = \{u \in H^2(\Omega); \partial u/\partial n = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$ e $Au = -\Delta u$, onde Δ é o laplaciano.

b) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e tem fronteira regular, o operador A de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, definido por $D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $Au = -\Delta u \,\forall u \in D(A)$, é m-acretivo como se viu no Exemplo II-7.5, b). Como A é fechado e $L^p(\Omega)$ é reflexivo, se S é o semigrupo gerado por $-A$, a função $S(t)u_0$ é, pelo Corolário 3.15, solução forte do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au & = 0 \\ \\ u(0) & = u_0 \end{cases}$$

$\forall u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

c) O operador $\tilde{\beta}$ foi definido no Exemplo II-6.5, b). Pelo Exemplo II-7.5, a), $\tilde{\beta}$ é m-acretivo se Ω for limitado ou se $0 \in \beta(0)$. Como $\tilde{\beta}$ é fechado e $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$, se S é o semigrupo gerado por $-\tilde{\beta}$, então a função $S(t)u_0\,,\ u_0 \in D(\tilde{\beta})$ é, pelo Corolário 3.15, em ambos os casos solução forte do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \tilde{\beta}u & \ni 0 \\ \\ u(0) & = u_0 \end{cases}$$

d) O operador $A + \tilde{\beta}$ de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, estudado no Exemplo II-9.8, é

m-acretivo. Como é fechado e $L^p(\Omega)$ é reflexivo o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + (A+\tilde{\beta})u & \ni 0 \\ \\ u(0) & = u_0 \end{cases}$$

tem, pelo Corolário 3.15, $\forall u_0 \in D(A+\tilde{\beta})$, uma solução forte $S(t)u_0$, onde S é o semigrupo gerado por $-(A+\tilde{\beta})$.

e) Sejam C um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach reflexivo, $T: C \to C$ uma aplicação lipschitziana com constante α e $t > 0$. Pelo Exemplo II-7.5, d), $(I-T)/t \in \mathcal{A}((\alpha-1)/t)$ e existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $0 < \lambda < \lambda_0$ tem-se $D((I-T)/t) = C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda((I-T)/t))$. Como $(I-T)/t$ é um operador fechado segue-se, pelo Corolário 3.15, que para $A = (I-T)/t$ e $x \in C$, a função $S(t)x$ é uma solução forte do problema (3.1)-(3.2), onde S é o semigrupo gerado por $(T-I)/t$.

f) O operador A de $L^1(0,1)$, estudado no Exemplo II-7.6, a), aparece quando se reduz o sistema

$$\begin{cases} u_t + (\varphi(u))_x = 0, & t > 0, \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & \qquad\quad 0 < x < 1 \\ \\ u(t,0) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

à forma (3.1)-(3.2). Como ele é m-acretivo, a função $S(t)u_0$, onde S é o semigrupo gerado por $-A$, é solução generalizada para todo $u_0 \in \overline{D(A)}$. Um estudo deste problema no $\mathbb{R}^n$ é encontrado em Kružkov [1] e em Crandall [4].

g) Como no exemplo precedente, o operador A de $L^1(0,1)$, estudado no Exemplo II-7.6, b), aparece quando se reduz o sistema

$$\begin{cases} u_t - (\varphi(u))_{xx} = 0 & t > 0, \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & \qquad\quad 0 < x < 1 \\ \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0, \end{cases} \tag{3.32}$$

à forma (3.1)-(3.2). Como esse operador A é m-acretivo, se S é o semigrupo gerado por $-A$, a função $S(t)u_0$ é uma solução generalizada para todo $u_0 \in \overline{D(A)}$. Quando $\varphi(x) = |x|^{\gamma-1}\, x$, $\gamma > 0$, (3.32) é a conhecida *equação do meio poroso.*

h) Finalmente, o operador A de $C([0,1])$, estudado no Exemplo II-7.6, c) aparece quando se reduz o sistema

$$\begin{cases} \varphi(u_t) - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 < x < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

à forma (3.1)-(3.2). Como A é m-acretivo, se S é o semigrupo gerado por $-A$, $S(t)u_0$ é uma solução generalizada para cada $u_0 \in \overline{D(A)}$.

4. Equações não homogêneas

Vamos estudar agora o problema de Cauchy

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f \tag{4.1}$$

$$u(0) = x, \tag{4.2}$$

num espaço de Banach X, onde $A \in \mathcal{A}(\omega)$ e $f \in L^1(0,T;X)$, $0 < T < \infty$.

4.1 - Definição: Diz-se que $u\colon [0,T] \to X$ é uma *solução forte* de (4.1) se:

i) u é contínua em $[0,T]$ e lipschitziana em todo compacto de $(0,T)$;

ii) u é fortemente diferenciável em quase todo $t \in (0,T)$;

iii) $u(t) \in D(A)$ para quase todo $t \in (0,T)$;

iv) $\dfrac{du}{dt}(t) \in -Au(t) + f(t)$ para quase todo $t \in (0,T)$.

Inicialmente generalizaremos alguns dos resultados demonstrados para as equações homogêneas. O teorema a seguir generaliza i) e ii) do Teorema 3.6.

4.2 - Teorema: *Seja* $A \in \mathcal{A}(\omega)$ *e* u *solução forte de* (4.1). *Então:*

i) $\|u(t) - u(s)\| \leq (t-s)e^{\omega^+(t-s)} \, |Au(s) - f(s)| + e^{\omega^+(t-s)} \int_s^t e^{-\omega^+(\tau-s)} \, \|f(\tau) - f(s)\| \, d\tau$, *em quase todo* $t \in (0,T)$ *e todo* s *tal que* $u(s) \in D(A)$, $0 \leq s \leq t$;

ii) $\left\| \dfrac{du}{dt}(t) \right\| = |Au(t) - f(t)|$ *q.s. em* $(0,T)$.

Demonstração: Seja Ω o conjunto dos $t \in [0,T]$ tais que $u(t) \in D(A)$, u é diferenciável no ponto t e $du(t)/dt + Au(t) \ni f(t)$. Para $t \in \Omega$, s fixado e tal que $u(s) \in D(A)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ e $y \in Au(s) - f(s)$ existe, pela acretividade de $A + \omega I$, um $u^* \in F(u(t) - u(s))$ tal que

$$\left\langle -\frac{du}{dt}(t) + f(t) + \omega u(t) - y - f(s) - \omega u(s), u^* \right\rangle \geq 0.$$

Daí e tendo em vista o Lema 3.2 vem

$$\frac{d}{dt} \|u(t) - u(s)\| \leq \omega^+ \|u(t) - u(s)\| + \|y\| + \|f(t) - f(s)\|$$

donde, pelos argumentos já invocados na demonstração de i) do Teorema 3.6, segue-se i).

De $t \in \Omega$ vem, por i),

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq |Au(t) - f(t)|$$

e como

$$-\frac{du}{dt}(t) \in Au(t) - f(t)$$

tem-se ii).

4.3 - Proposição: *Sejam* $A \in \mathcal{A}(\omega)$, u *solução forte de* (4.1) *e* v *solução forte de*

$$\frac{dv}{dt} + Av \ni g, \tag{4.3}$$

onde $g \in L^1(0,T;X)$. *Então,*

$$\begin{aligned} e^{-2\omega t} \|u(t) - v(t)\|^2 &- e^{-2\omega s} \|u(s) - v(s)\|^2 \\ &\leq 2 \int_s^t e^{-2\omega \tau} \langle f(\tau) - g(\tau), u(\tau) - v(\tau) \rangle_s d\tau, \end{aligned} \tag{4.4}$$

para todo s *e* t *tais que* $0 \leq s \leq t \leq T$.

Demonstração: Sejam u e v soluções fortes de (4.1) e (4.3), respectivamente. Pela acretividade de $A + \omega I$ temos

$$\left\langle f(t) - \frac{du}{dt}(t) + \omega u(t) - g(t) + \frac{dv}{dt}(t) - \omega v(t), \xi^* \right\rangle \geq 0,$$

para algum $\xi^* \in F(u(t) - v(t))$. Daí vem

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u - v)(t), \xi^* \right\rangle \leq \omega \|u(t) - v(t)\|^2 + \langle f(t) - g(t), \xi^* \rangle$$

e, levando em conta o Lema 3.2,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|^2 &\leq \omega \|u(t) - v(t)\|^2 + \langle f(t) - g(t), \xi^* \rangle \\ &\leq \omega \|u(t) - v(t)\|^2 + \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t) \rangle_s. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-2\omega t} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|^2 &\leq \omega\, e^{-2\omega t} \|u(t) - v(t)\|^2 \\ &+ e^{-2\omega t} \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t) \rangle_s \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}e^{-2\omega t}\|u(t)-v(t)\|^2 \leq e^{-2\omega t}\langle f(t)-g(t), u(t)-v(t)\rangle_s.$$

Integrando de s a t, $0 \leq s \leq t \leq T$, tem-se (4.4), q.e.d..

4.4 - Corolário: *Se u é uma solução forte de* (4.1), *então*

$$e^{-2\omega t}\|u(t)-x\|^2 - e^{-2\omega s}\|u(s)-x\|^2 \leq 2\int_s^t e^{-2\omega\tau}\langle f(\tau)-y, u(\tau)-x\rangle_s d\tau, \tag{4.5}$$

para todo $(x,y) \in A$ e $0 \leq s \leq t \leq T$.

Demonstração: Com efeito, (4.5) é um caso particular de (4.4) uma vez que $v(t) \equiv x$ é uma solução forte de (4.3) com $g(t) \equiv y$.

4.5 - Corolário: *Sejam u e v soluções fortes de (4.1) e (4.3), respectivamente. Então, $\forall (x,y) \in A$ e $\forall s,t$ tais que $0 \leq s \leq t \leq T$,*

$$e^{-\omega t}\|u(t)-v(t)\| - e^{-\omega s}\|u(s)-v(s)\| \leq \int_s^t e^{-\omega\tau}\|f(\tau)-g(\tau)\|\,d\tau \tag{4.6}$$

$$e^{-\omega t}\|u(t)-x\| - e^{-\omega s}\|u(s)-x\| \leq \int_s^t e^{-\omega\tau}\|f(\tau)-y\|\,d\tau. \tag{4.7}$$

Demonstração: As relações (4.6) e (4.7) decorrem, respectivamente, da Proposição 4.3 e do Corolário 4.4 levando em conta v) do Teorema I-6.5 e o Lema I-8.21.

Nota: A desigualdade (4.6) generaliza a Proposição 3.3.

4.6 - Corolário: *A equação* (4.1) *tem, no máximo, uma solução forte que satisfaz* (4.2).

Demonstração: Com efeito, se u e v forem soluções fortes de (4.1) que satisfazem

(4.2), u e v satisfazem (4.6) com $g = f$ e $s = 0$. Logo $u(t) = v(t)\, \forall t \in [0, T]$.

4.7 - Teorema: *Seja X reflexivo, $f \in W^{1,1}(0, T; X)$, $A \in \mathcal{A}(\omega)$ e u solução forte de (4.1). Então,*

$$|Au(t) - f(t)| \leq e^{\omega(t-s)}\, |Au(s) - f(s)| + \int_s^t e^{\omega(t-\tau)} \left\| \frac{df}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau, \tag{4.8}$$

para quase todo $s, t \in [0, T], 0 \leq s \leq t$.

Demonstração: Seja $v(t) = u(t+h)$, $h > 0$. Então v é uma solução forte de (4.3) com $g(t) = f(t+h)$. Por (4.6) temos, para $0 \leq s \leq t \leq T - h$, $s, t \in \Omega$, onde Ω foi definido na demonstração do Teorema 4.2,

$$e^{-\omega t} \|u(t+h) - u(t)\| \leq e^{-\omega s} \|u(s+h) - u(s)\| + \int_s^t e^{-\omega\tau} \|f(\tau + h) - f(\tau)\|\, d\tau,$$

donde, dividindo por $|h|$, passando ao limite quando $h \to 0$ e tendo em vista o Corolário I-8.15 e o Teorema I-8.20 segue-se que

$$e^{-\omega t} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq e^{-\omega s} \left\| \frac{du}{ds}(s) \right\| + \int_s^t e^{-\omega\tau} \left\| \frac{df}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau.$$

Daí, usando ii) do Teorema 4.2, tem-se (4.8). Vê-se que (4.8) generaliza iii) do Teorema 3.6.

Passemos agora à generalização do Teorema 3.19.

4.8 - Teorema: *Sejam X e X^* uniformemente convexos. Se $A: X \to X$ é um operador fechado tal que $A \in \mathcal{A}(\omega)$,*

$$D(A) \subset C \subset \mathrm{Im}(I + \lambda A), \quad \forall \lambda > 0,$$

onde C é um cone convexo e fechado e $f \in W^{1,1}(0, T; X)$ é tal que $f(t) \in C\ \forall t \in [0, T]$, então, $\forall x \in D(A)$:

i) *O conjunto* $Ax - f(t)$ *tem, para cada* $t \in [0,T]$*, um único elemento de norma mínima* $(Ax - f(t))^o$*;*

ii) *A função* φ *definida por* $\varphi(t) = (Au(t) - f(t))^o$*, onde* u *é solução forte do problema* (4.1)-(4.2)*, é contínua à direita em todo* $t \in [0,T]$*;*

iii) u *é diferenciável à direita e*

$$-\frac{d^+u}{dt}(t) = (Au(t) - f(t))^0, \quad \forall t \in [0,T).$$

Demonstração: A demonstração é análoga à do Teorema 3.19. Seja $\widetilde{A}$ a extensão garantida pelo Teorema II-8.2. $\widetilde{A}$ é demifechado, $D(\widetilde{A}) \subset \overline{D(A)} \subset C \subset \mathrm{Im}(I + \lambda A) \subset \mathrm{Im}(I + \lambda\widetilde{A})$. De $f(t) \in C$ e $\lambda \geq 0$ vem $\lambda f(t) \in C$, donde $C + \lambda f(t) \subset C \subset \mathrm{Im}(I + \lambda\widetilde{A})$ e, portanto,

$$D(\widetilde{A} - f(t)) = D(\widetilde{A}) \subset C \subset \mathrm{Im}(I + \lambda\widetilde{A}) - \lambda f(t) = \mathrm{Im}(I + \lambda(\widetilde{A} - f(t)),$$

isto é, $\widetilde{A} - f(t)$ satisfaz as condições do Teorema II-8.2. Logo i) é verdadeira.

Seja $t \in [0,T)$ e $(t_n) \subset \Omega, t_n \geq t, n = 1, \ldots,$ e $t_n \to t$ quando $n \to \infty$. Então, pelo Teorema 4.7,

$$\left\|(Au(t_n) - f(t_n))^0\right\| \leq e^{\omega t_n}\left\|(Ax - f(0))^0\right\| + \int_0^{t_n} e^{\omega(t_n - \tau)}\left\|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right\| d\tau \leq C^{te},$$

donde existe uma subseqüência (t_{n_k}) e um $y \in X$ tais que $(Au(t_{n_k}) - f(t_{n_k}))^o \rightharpoonup y$, quando $k \to \infty$. Mas, $u(t_{n_k}) \to u(t)$ porque u sendo solução forte u é contínua, e $f(t_{n_k}) \to f(t)$ porque $f \in W^{1,1}(0,T;X)$ donde f é contínua. Como $\widetilde{A}$ é demifechado segue-se, daí, que $u(t) \in D(A)$ e $y \in \widetilde{A}u(t) - f(t)$. Além disto, pelo Teorema 4.7,

$$\begin{aligned}\|y\| &\leq \liminf_{k\to\infty}\left\|(Au(t_{n_k}) - f(t_{n_k}))^0\right\| \leq \limsup_{k\to\infty}\left\|(Au(t_{n_k}) - f(t_{n_k}))^0\right\| \\ &\leq \lim_{k\to\infty}\left(e^{\omega(t_{n_k} - t)}\left\|(Au(t) - f(t))^0\right\| + \int_t^{t_{n_k}} e^{\omega(t_{n_k} - \tau)}\left\|\frac{df}{d\tau}\right\| d\tau\right) \\ &= \left\|(Au(t) - f(t))^0\right\| = ||\widetilde{A}u(t) - f(t))^0||.\end{aligned}$$

Logo, $y = (\widetilde{A}u(t) - f(t))^0 = (Au(t) - f(t))^0$, donde $(Au(t_{n_k}) - f(t_{n_k}))^0 \rightharpoonup (Au(t) - f(t))^0$ e, portanto, $(Au(t_n) - f(t_n))^0 \to (Au(t) - f(t))^0$, pela Proposição I-5.8 e o fato que $(Au(t) - f(t))^0$ não depende de (t_{n_k}), o que demonstra ii).

Por ii) do Teorema 4.2 temos

$$-\frac{du}{dt}(t) = (Au(t) - f(t))^0 \quad \text{q.s. em} \quad (0, T),$$

donde, pelos argumentos já usados na demonstração do Teorema 3.19,

$$-\frac{d^+u}{dt}(t) = (Au(t) - f(t))^0 \qquad \forall\, t \in [0, T),$$

isto é, iii) é válida.

Quando X^* é uniformemente convexo, pode-se demonstrar a existência de uma solução forte de (4.1) usando os resultados do §9 do Capítulo I como se vê pelo teorema a seguir.

4.9 - Teorema: *Seja X^* uniformemente convexo, C um cone convexo e fechado de X, $A: X \to X$ tal que*

$$D(A) \subset C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A), \quad 0 < \lambda < \lambda_0,$$

$A \in \mathcal{A}(\omega)$, $A + \omega I$ máximo em C, $\lambda_0 \omega < 1$, se $\omega > 0$. Se $f \in W^{1,1}(0, T; X)$, $f(t) \in C$ para quase todo $t \in (0, T)$ e $x \in D(A)$, então (4.1) tem uma solução forte que satisfaz (4.2).

Demonstração: Pelo Corolário I-9.2 existe uma função, $u_\lambda: [0, T] \to C$, absolutamente contínua em $[0, T]$, derivável q.s. em $(0, T)$ e tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = f \\ \\ u_\lambda(0) = x \end{cases} \tag{4.9}$$

q.s. em $(0,T)$.

Pelo Lema 3.2 tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2 = -\langle A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t), F(u_\lambda(t)-u_\mu(t))\rangle.$$

Além disto, de $A_\lambda u_\lambda(t)\in AJ_\lambda u_\lambda(t)$ $\forall t\in[0,T]$ e $A\in\mathcal{A}(\omega)$ vem

$$\langle A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t), F(J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t))\rangle + \omega\|J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t)\|^2 \geq 0$$

e como

$$\begin{aligned}\|J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t)\|^2 &= \|J_\lambda u_\lambda(t)+u_\lambda(t)-u_\lambda(t)+u_\mu(t)-u_\mu(t)-J_\mu u_\mu(t)\|^2\\ &\leq 2\|\lambda A_\lambda u_\lambda(t)-\mu A_\mu u_\mu(t)\|^2+2\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2\end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2 &\leq |\langle A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t), F(J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t))-F(u_\lambda(t)-u_\mu(t))\rangle|\\ &+2\omega\|\lambda A_\lambda u_\lambda(t)-\mu A_\mu u_\mu(t)\|^2+2\omega\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2\\ &\leq \|A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t)\|\,\|F(J_\lambda u_\lambda(t)-J_\mu u_\mu(t))-F(u_\lambda(t)-u_\mu(t))\|\\ &+2\omega\|\lambda A_\lambda u_\lambda(t)-\mu A_\mu u_\mu(t)\|^2+2\omega\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2.\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t,

$$\begin{aligned}&\|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2\\ &\leq 2\int_0^t e^{4\omega(t-\tau)}(\|A_\lambda u_\lambda(\tau)-A_\mu u_\mu(\tau)\|\,\|F(J_\lambda u_\lambda(\tau)-J_\mu u_\mu(\tau))-F(u_\lambda(\tau)-u_\mu(\tau))\|\\ &+2\omega\|\lambda A_\lambda u_\lambda(\tau)-\mu A_\mu u_\mu(\tau)\|^2)d\tau. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Além disto, A_λ é lipschtziana e u_λ e f são absolutamente contínuas em $[0,T]$; logo, $-A_\lambda u_\lambda+f$ é diferenciável quase sempre em $(0,T)$ e, portanto, por (4.9), $\dfrac{du_\lambda}{dt}$ é diferenciável quase sempre em $(0,T)$. De (4.9) vem, por diferenciação,

$$\frac{d^2u_\lambda}{dt^2}+\frac{d}{dt}A_\lambda u_\lambda = \frac{df}{dt} \quad \text{q.s. em} \quad (0,T).$$

Multiplicando por $F\left(\dfrac{du_\lambda}{dt}\right)$ tem-se

$$\left\langle \frac{d^2u_\lambda}{dt^2}, F\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right)\right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt}A_\lambda u_\lambda, F\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{df}{dt}, F\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right)\right\rangle. \tag{4.11}$$

Mas, pelo Teorema II-6.13, se $\lambda\omega < 1$ então $A_\lambda \in \mathcal{A}(\omega(1-\lambda\omega)^{-1})$ donde, pondo $\omega(1-\lambda\omega)^{-1} = \omega_\lambda$ tem-se

$$\langle A_\lambda u_\lambda(t+h) - A_\lambda u_\lambda(t), F(u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t))\rangle + \omega_\lambda \|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)\|^2 \geq 0$$

donde, se $h \neq 0$

$$\left\langle \frac{A_\lambda u_\lambda(t+h) - A_\lambda u_\lambda(t)}{h}, F\left(\frac{u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)}{h}\right)\right\rangle \geq -\omega_\lambda \left\|\frac{u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)}{h}\right\|^2$$

ou seja

$$\left\langle \frac{d}{dt}A_\lambda u_\lambda(t), F\left(\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right)\right\rangle \geq -\omega_\lambda \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\|^2 \text{ q.s. em } \quad (0,T).$$

Segue-se daí, por (4.11), e tendo em vista o Lema 3.2 que

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| - \omega_\lambda \left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| \leq \left\|\frac{df}{dt}(t)\right\| \quad \text{q.s. em} \quad (0,T).$$

Integrando de 0 a t tem-se

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| - e^{\omega_\lambda t}\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(0)\right\| \leq \int_0^t e^{\omega_\lambda(t-\tau)}\left\|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right\| d\tau$$

ou, ainda por (4.9),

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| \leq e^{\omega_\lambda t}\|-A_\lambda x + f(0)\| + \int_0^t e^{\omega_\lambda(t-\tau)}\left\|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right\| d\tau$$

e como, por ii) do Teorema II-6.13, $\|A_\lambda x\| \le (1-\lambda\omega)^{-1}|Ax|$ tem-se

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| \le e^{\omega_\lambda t}((1-\lambda\omega)^{-1}|Ax| + \|f(0)\|) + \int_0^t e^{\omega_\lambda(t-\tau)}\left\|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right\| d\tau. \tag{4.13}$$

Além disto, por (4.9), $\|A_\lambda u_\lambda(t)\| \le \left\|\dfrac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| + \|f(t)\|$ q.s. em $(0,T)$. Logo, por (4.13), $A_\lambda u_\lambda$ é uniformemente limitado em $[0,T]$ e, portanto, $\lambda\|A_\lambda u_\lambda(t)\| \to 0$ quando $\lambda \to 0$, uniformemente em $[0,T]$. Tendo agora em vista que, pelo Teorema I-6.15, F é uniformemente contínua nos conjuntos limitados, segue-se por (4.10) que, quando $\lambda \to 0$, u_λ converge a uma função u, uniformemente em $[0,T]$. Resta mostrar que u satisfaz (4.1) e (4.2). De $u_\lambda(0) = x$ vem $u(0) = x$, i.e., u satisfaz (4.2). Vamos mostrar que satisfaz (4.1). Seja, para isto, $(x_0, y_0) \in A$ e $x_\lambda = x_0 + \lambda y_0$. Daí vem $y_0 = A_\lambda x_\lambda$ e, como $A_\lambda \in \mathcal{A}(\omega_\lambda)$, segue-se que

$$\left\langle -\frac{du_\lambda}{dt} + f + \omega_\lambda u_\lambda - y_0 - \omega_\lambda x_\lambda, F(u_\lambda - x_\lambda)\right\rangle \ge 0,$$

ou seja

$$\begin{aligned}\langle -\frac{d}{dt}(u_\lambda - x_\lambda), F(u_\lambda - x_\lambda)\rangle &= \langle -\frac{d}{dt}u_\lambda, F(u_\lambda - x_\lambda)\rangle \\ &\ge \langle y_0 - f - \omega_\lambda(u_\lambda - x_\lambda), F(u_\lambda - x_\lambda)\rangle.\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2 tem-se, então,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - x_\lambda\|^2 \ge \langle y_0 - f(t) - \omega_\lambda(u_\lambda(t) - x_\lambda), F(u_\lambda(t) - x_\lambda)\rangle$$

donde, integrando de t a $t+h$, $0 \le t+h \le T$,

$$\begin{aligned}&-\|u_\lambda(t+h) - x_\lambda\|^2 + \|u_\lambda(t) - x_\lambda\|^2 \\ &\qquad \ge 2\int_t^{t+h} \langle y_0 - f(\tau) - \omega_\lambda(u_\lambda(\tau) - x_\lambda), F(u_\lambda(\tau) - x_\lambda)\rangle d\tau\end{aligned}$$

e no limite quando $\lambda \to 0$

$$- \|u(t+h) - x_0\|^2 + \|u(t) - x_0\|^2$$
$$\geq 2 \int_t^{t+h} \langle y_0 - f(\tau) - \omega(u(\tau) - x_0), F(u(\tau) - x_0) \rangle d\tau.$$

Daí vem, para $h > 0$, pelo Exemplo I-4.9,

$$-\left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, F(u(t) - x_0) \right\rangle \geq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \langle y_0 - f(\tau) - \omega(u(\tau) - x_0), F(u(\tau) - x_0) \rangle d\tau$$

donde, se u for diferenciável no ponto t,

$$\left\langle -\frac{du}{dt}(t), F(u(t) - x_0) \right\rangle \geq \langle y_0 - f(t) - \omega(u(t) - x_0), F(u(t) - x_0) \rangle,$$

i.e.,

$$\left\langle -\frac{du}{dt}(t) + f(t) + \omega u(t) - y_0 - \omega x_0, F(u(t) - x_0) \right\rangle \geq 0.$$

Mas, $u(t) \in C$ pelo Corolário I-9.2 e (x_0, y_0) é, por hipótese, um ponto arbitrário de A; logo, pela maximalidade de $A + \omega I$ tem-se $u(t) \in D(A)$ e $-\dfrac{du}{dt}(t) + f(t) \in Au(t)$, ou seja

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t), \qquad \text{q.e.d.}.$$

Para demonstrar a existência de uma solução forte de (4.1) em hipóteses menos restritivas que as do teorema anterior serão, a seguir, introduzidos alguns conceitos e demonstrados alguns resultados preliminares.

4.10 - Definição: Diz-se que $u\colon [0,T] \to X$ é *solução fraca* de (4.1) se existe uma seqüência (f_n), $f_n \in W^{1,1}(0,T;X)$, $n = 1, \ldots, f_n \to f$ em $L^1(0,T;X)$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a equação

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$$

tem uma solução forte u_n e $u_n \to u$ em $C([0,T];X)$.

4.11 - Proposição: *As quatro estimativas* (4.4)-(4.7) *são válidas se u e v são soluções fracas de* (4.1) e (4.3)*, respectivamente.*

Demonstração: A estimativa (4.4) mantém-se por passagem ao limite uma vez que a convergência de uma seqüência em $C([0,T];X)$ implica a convergência pontual dessa seqüência, e é válido o lema a seguir. As outras três decorrem de (4.4) exatamente como no caso das soluções fortes.

4.12 - Lema: *O problema* (4.1)-(4.2) *tem no máximo uma solução fraca.*

Demonstração: Análoga à do Corolário 4.6.

A fórmula (4.5), que é apenas uma condição necessária para que u seja uma solução forte, sugere a definição a seguir.

4.13 - Definição: Uma função $u\colon [0,T] \to X$ é dita *solução integral* de (4.1) se $u \in C([0,T];X)$ e u satisfaz (4.5).

É imediato que as soluções fortes são soluções integrais.

Ao contrário das soluções fracas, não é válido para as soluções integrais o teorema da unicidade. Por exemplo, sejam $D(A) = \{0\}$, $A0 = 0$, $f(t) = 0$ $\forall t \in [0,T]$ e $x \in X$. Então, toda função contínua, u, tal que $u(0) = x$ e $\|u(t)\| \leq \|u(s)\|$, $0 \leq s \leq t \leq T$, é uma solução integral de (4.1) que satisfaz (4.2).

4.14 - Definição: Uma função $u\colon [0,T] \to X$ é dita *solução generalizada* de (4.1) se:

i) $u \in C([0,T];X)$;

ii) u satisfaz (4.4) $\forall g \in L^1(0,T;X)$ e para toda solução integral, v, de (4.3).

Diz-se que u é *solução generalizada* do problema (4.1), (4.2) se u for solução generalizada de (4.1) e $u(0) = x$.

4.15 - Proposição: *As soluções generalizadas são soluções integrais.*

Demonstração: Se $(x, y) \in A$, então $v(t) = x$ é uma solução integral de $dv/dt + Av \ni y$ pois é solução forte dessa equação; logo, se u é uma solução generalizada de (4.1), u satisfaz (4.4) com $v(t) = x$ e $g(t) = y$, donde satisfaz (4.5), i.e., u é solução integral de (4.1).

4.16 - Proposição: *Se u é solução generalizada de* (4.1)*, então:*

i) *u satisfaz (4.6) $\forall g \in L^1(0, T; X)$ e toda solução integral, v, de* (4.3)*;*

ii) *u satisfaz* (4.5) *e* (4.7) *$\forall (x, y) \in A$.*

Demonstração: Decorrência imediata das definições e da Proposição 4.15.

4.17 - Proposição: *O problema* (4.1)-(4.2) *tem no máximo uma solução generalizada.*

Demonstração: Conseqüência imediata de (4.4) com $g = f$ e $v(0) = u(0) = x$.

4.18 - Proposição: *As soluções fortes sõ soluções generalizadas.*

Demonstração: Seja u solução forte de (4.1) e v solução integral de

$$\frac{dv}{dt} + Av \ni g, \qquad g \in L^1(0, T; X).$$

Então, pela Definição de solução forte,

$$\left(u(\sigma), f(\sigma) - \frac{du}{d\sigma}(\sigma) \right) \in A,$$

para quase todo $\sigma \in (0, T)$. Logo, como v é solução integral temos, por (4.5),

$$\begin{aligned} & e^{-2\omega t} \left\| u(\sigma) - v(t) \right\|^2 - e^{-2\omega s} \left\| u(\sigma) - v(s) \right\|^2 \\ \leq {} & 2 \int_s^t e^{-2\omega\tau} \left\langle f(\sigma) - \frac{du}{d\sigma}(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau) \right\rangle_s d\tau, \end{aligned} \tag{4.14}$$

para quase todo $\sigma \in (0,T), 0 \leq s \leq t \leq T$. Mas,

$$\left\langle f(\sigma) - \frac{du}{d\sigma}(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau) \right\rangle_s$$

$$\leq \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau)\rangle_s - \left\langle \frac{du}{d\sigma}(\sigma), u(\sigma) - v(\tau) \right\rangle_i$$

$$= \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau)\rangle_s - \frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}\, \|u(\sigma) - v(\tau)\|^2 . \tag{4.15}$$

Integrando (4.14) de α a β, $0 \leq \alpha \leq \beta \leq T$ e tendo (4.15) em vista, temos

$$\int_\alpha^\beta e^{-2\omega t} \|u(\sigma) - v(t)\|^2 \, d\sigma - \int_\alpha^\beta e^{-2\omega s} \|u(\sigma) - v(s)\|^2 \, d\sigma$$

$$\leq 2 \int_\alpha^\beta d\sigma \int_s^t e^{-2\omega\tau} \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau)\rangle_s d\tau$$

$$- \int_\alpha^\beta d\sigma \int_s^t e^{-2\omega\tau} \frac{d}{d\sigma} \|u(\sigma) - v(\tau)\|^2 \, d\tau$$

$$= 2 \int_\alpha^\beta d\sigma \int_s^t e^{-2\omega\tau} \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau)\rangle_s d\tau$$

$$- \int_s^t d\tau \int_\alpha^\beta e^{-2\omega\tau} \frac{d}{d\sigma} \|u(\sigma) - v(\tau)\|^2 \, d\sigma.$$

Logo,

$$\int_\alpha^\beta e^{-2\omega t} \|u(\sigma) - v(t)\|^2 \, d\sigma - \int_\alpha^\beta e^{-2\omega s} \|u(\sigma) - v(s)\|^2 \, d\sigma$$

$$+ \int_s^t e^{-2\omega\tau} \|u(\beta) - v(\tau)\|^2 \, d\tau - \int_s^t e^{-2\omega\tau} \|u(\alpha) - v(\tau)\|^2 \, d\tau$$

$$\leq 2 \int_\alpha^\beta d\sigma \int_s^t e^{-2\omega\tau} \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau)\rangle_s d\tau \tag{4.16}$$

para $0 \leq s \leq t \leq T$ e $0 \leq \alpha \leq \beta \leq T$.

O lema a seguir completa a demonstração.

4.19 - Lema: *Sejam* (u, f) *e* (v, g) *pontos de* $C([0,T], X) \times L^1(0,T;X)$ *que verificam a desigualdade* (4.16). *Então,* (u, f) *e* (v, g) *verificam a desigualdade* (4.4).

Demonstração: Ponhamos

$$\varphi(p,q) = e^{-2\omega q} \left\| u(p) - v(q) \right\|^2 \ \text{ e } \psi(p,q) = 2e^{-2\omega q} \langle f(p) - g(q), u(p) - v(q) \rangle_s,$$

$(p,q) \in [0,T] \times [0,T]$. Pela desigualdade (4.16) temos,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta [\varphi(\sigma,t) - \varphi(\sigma,s)] d\sigma + \int_s^t [\varphi(\beta,\tau) - \varphi(\alpha,\tau)] d\tau \\ \leq \int_\alpha^\beta d\sigma \int_s^t \psi(\sigma,\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$0 \leq s \leq t \leq T,\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq T$. Vamos supor que φ seja continuamente diferenciável e ψ seja contínua em cada variável. Para $t = s$ a (4.4) é trivial. Supondo, então, $s < t$ dividindo por $t - s$ e passando ao limite quando $t \to s$ temos

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\sigma, s) d\sigma + \varphi(\beta, s) - \varphi(\alpha, s) \leq \int_\alpha^\beta \psi(\sigma, s) d\sigma$$

donde, dividindo por $\beta - \alpha > 0$ e passando ao limite quando $\beta \to \alpha$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\alpha, s) + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\alpha, s) \leq \psi(\alpha, s),$$

ou seja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\sigma, \tau) + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \leq \psi(\sigma, \tau).$$

Fazendo $\sigma = \tau$ e usando a regra de derivação de função composta tem-se

$$\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau, \tau) \leq \psi(\tau, \tau)$$

e, daí, por integração de s a t,

$$\varphi(t,t) - \varphi(s,s) \le \int_s^t \psi(\tau,\tau)d\tau \tag{4.18}$$

que é a desigualdade (4.4). Vamos supor que φ não seja diferenciável ou que ψ não seja contínua em cada uma de suas variáveis. Seja $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\rho \ge 0$, $\operatorname{supp}\rho \subset [-1,1]$, $\displaystyle\int \rho = 1$ e ponhamos, para $\varepsilon > 0$,

$$\varphi_\varepsilon(\sigma,t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho(\xi)\rho(\eta)\varphi(\sigma - \varepsilon\xi,\, t - \varepsilon\eta)d\xi d\eta$$

$$\psi_\varepsilon(\sigma,t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho(\xi)\rho(\eta)\psi(\sigma - \varepsilon\xi,\, t - \varepsilon\eta)d\xi d\eta.$$

Então φ_ε e ψ_ε são continuamente diferenciáveis para $(\sigma,t) \in [\varepsilon, T-\varepsilon] \times [\varepsilon, T-\varepsilon]$ e sem dificuldade vê-se que (4.17) permanece válida se substituirmos φ por φ_ε e ψ por ψ_ε. Segue-se que (4.18) é válida para φ_ε e ψ_ε, $\varepsilon \le s, t \le T - \varepsilon$, i.e.,

$$\varphi_\varepsilon(t,t) - \varphi_\varepsilon(s,s) \le \int_s^t \psi_\varepsilon(\tau,\tau)d\tau. \tag{4.19}$$

Resta mostrar que passando (4.19) ao limite quando $\varepsilon \to 0$ tem-se (4.18). Isto é verdade porque, em primeiro lugar, sendo u contínua, $\varphi_\varepsilon(\tau,\tau)$ tende a $\varphi(\tau,\tau)$ quando $\varepsilon \to 0$, uniformemente sobre todo subconjunto compacto de $(0,T)$; além disto, como por iii) do Teorema I-6.5,

$$\begin{aligned}
&\psi(\sigma - \varepsilon\xi,\, t - \varepsilon\eta) = 2e^{-2\omega(t-\varepsilon\eta)}\langle f(\sigma-\varepsilon\xi) - g(t-\varepsilon\eta), u(\sigma-\varepsilon\xi) - v(t-\varepsilon\eta)\rangle_s \\
&\le 2e^{-2\omega(t-\varepsilon\eta)}[(\|f(\sigma-\varepsilon\xi) - f(\sigma)\| + \|g(t-\varepsilon\eta) - g(t)\|)\,\|u(\sigma-\varepsilon\xi) - v(t-\varepsilon\eta)\| \\
&+ \langle f(\sigma) - g(t), u(\sigma-\varepsilon\xi) - v(t-\varepsilon\eta\rangle_s]
\end{aligned}$$

e como $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_s$ é s.c.s., u e v são contínuas e por i) do Teorema I-8.9

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_s^t \|f(\sigma-\varepsilon\xi) - f(\sigma)\| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_s^t \|g(t-\varepsilon\eta) - g(t)\| = 0,$$

visto que $f, g \in L^1(0,T;X)$, segue-se que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_s^t \psi_\varepsilon(\tau,\tau)d\tau \le \int_s^t \psi(\tau,\tau)d\tau.$$

Argumento já usado na demonstração da Proposição 4.11 mostra que é válido o corolário a seguir.

4.20 - Corolário: *As soluções fracas são soluções generalizadas.*

4.21 - Definição: Diz-se *discretização* da equação (4.1) todo esquema

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Ax_i \ni y_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{4.20}$$

onde a partição $\pi = \{0 = t_0 < \cdots < t_N = T\}$ e os elementos $y_1, \dots, y_N$ de X são dados. Se $\varepsilon > 0$, $\max\limits_{1\le i\le N}\{t_i - t_{i-1}\} \le \varepsilon$ e

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - y_i\|\, dt \le \varepsilon,$$

diz-se que (4.20) é uma ε-*discretização* de (4.1). Se a seqüência $x_0, x_1, \dots, x_N$ de pontos de X satisfaz (4.20), a função u_π definida por $u_\pi(0) = x_0$ e $u_\pi(t) = x_i$ para $t \in (t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, N$, é dita *solução* de (4.20) com valor inicial x_0. Se (4.20) for uma ε-discretização, u_π será dita *solução* ε-*aproximada* de (4.1) com valor inicial x_0. Se u_π for uma solução ε-aproximada de (4.1) com valor inicial x_0 e $\|x - x_0\| < \varepsilon$, u_π será dita *solução* ε-*aproximada do problema* (4.1)-(4.2).

O teorema a seguir generaliza o Teorema 3.11.

4.22 - Teorema: *Se $f \in L^1(0,T;X)$, $x \in \overline{D(A)}$ e para cada $\varepsilon > 0$ o problema* (4.1)-(4.2) *tem uma solução ε-aproximada, u_ε, então existe $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ uniformemente em* $[0,T]$ *e $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ é uma função contínua em* $[0,T]$.

Este resultado não será usado e sua demonstração não será reproduzida aqui. (A demonstração encontra-se em Pazy [3] e em Crandall-Evans [1]). Vamos, no entanto, demonstrar o teorema a seguir:

4.23 - Teorema: *Seja u uma função contínua e tal que $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, uniformemente em $[0,T]$, onde, para cada n, u_n é solução ε_n-aproximada do problema* (4.1)-(4.2), *com* $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. *Então u é uma solução generalizada de* (4.1)-(4.2).

Demonstração: Para cada $n = 1, \ldots$ existe, por hipótese, uma partição $\pi_n = \{0 = t_0^n < \cdots < t_{N(n)}^n = T\}$, uma seqüência $x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{N(n)}^n$ e uma seqüência $y_1^n, \ldots, y_{N(n)}^n$ que satisfazem

$$\frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{t_i^n - t_{i-1}^n} + Ax_i^n \ni y_i^n, \qquad i = 1, \ldots, N(n) \tag{4.21}$$

e tais que a função f_n definida por $f_n(t) = y_i^n$ para $t \in (t_{i-1}^n, t_i^n)$, $i = 1, \ldots, N(n)$, converge a f em $L^1(0,T;X)$ e a função u_n definida por $u_n(0) = x_0^n$ e $u_n(t) = x_i^n$, $t \in (t_{i-1}^n, t_i^n]$, $i = 1, \ldots, N(n)$, converge uniformemente a u em $[0,T]$. Ponhamos $t_i^n - t_{i-1}^n = \lambda_i^n$ e seja v uma solução integral de (4.3). Como, por (4.21),

$$\left(x_i^n, y_i^n - \frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{\lambda_i^n}\right) \in A, \qquad i = 1, \ldots, N(n),$$

temos, para $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} &e^{-2\omega t} \|x_i^n - v(t)\|^2 - e^{-2\omega s} \|x_i^n - v(s)\|^2 \\ &\leq 2 \int_s^t e^{-2\omega\tau} \left\langle y_i^n - \frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{\lambda_i^n} - g(\tau),\, x_i^n - v(\tau) \right\rangle_s d\tau. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Mas,

$$\begin{aligned} &\left\langle y_i^n - \frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{\lambda_i^n} - g(\tau),\, x_i^n - v(\tau) \right\rangle_s \\ &\leq \langle y_i^n - g(\tau),\, x_i^n - v(\tau) \rangle_s + \left\langle -\frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{\lambda_i^n},\, x_i^n - v(\tau) \right\rangle_s \end{aligned} \tag{4.23}$$

e

$$\left\langle -\frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{\lambda_i^n}, x_i^n - v(\tau)\right\rangle_s = \left\langle -\frac{x_i^n - v(\tau)}{\lambda_i^n} + \frac{x_{i-1}^n - v(\tau)}{\lambda_i^n}, x_i^n - v(\tau)\right\rangle_s$$

$$= -\frac{1}{\lambda_i^n}\left\|x_i^n - v(\tau)\right\|^2 + \frac{1}{\lambda_i^n}\langle x_{i-1}^n - v(\tau),\, x_i^n - v(\tau)\rangle_s$$

$$\leq -\frac{1}{\lambda_i^n}\left\|x_i^n - v(\tau)\right\|^2 + \frac{1}{\lambda_i^n}\left\|x_{i-1}^n - v(\tau)\right\|\left\|x_i^n - v(\tau)\right\|$$

$$\leq -\frac{1}{2\lambda_i^n}\left\|x_i^n - v(\tau)\right\|^2 + \frac{1}{2\lambda_i^n}\left\|x_{i-1}^n - v(\tau)\right\|^2. \tag{4.24}$$

Por (4.22)-(4.24) temos

$$e^{-2\omega t}\left\|x_i^n - v(t)\right\|^2 - e^{-2\omega s}\left\|x_i^n - v(s)\right\|^2 \leq 2\int_s^t e^{-2\omega\tau}\langle y_i^n - g(\tau), x_i^n - v(\tau)\rangle_s d\tau$$

$$+\int_s^t \frac{e^{-2\omega\tau}}{\lambda_i^n}\left(\left\|x_{i-1}^n - v(\tau)\right\|^2 - \left\|x_i^n - v(\tau)\right\|^2\right)d\tau.$$

Integrando ambos os membros dessa desigualdade de t_{i-1}^n a t_i^n e tendo em vista as definições de u_n e f_n temos

$$\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}(e^{-2\omega t}\left\|u_n(\sigma) - v(t)\right\|^2 - e^{-2\omega s}\left\|u_n(\sigma) - v(s)\right\|^2)d\sigma$$

$$+\int_s^t e^{-2\omega\tau}(\left\|x_i^n - v(\tau)\right\|^2 - \left\|x_{i-1}^n - v(\tau)\right\|^2)d\tau$$

$$\leq 2\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} d\sigma\int_s^t e^{-2\omega\tau}\langle f_n(\sigma) - g(\tau), u_n(\sigma) - v(\tau)\rangle_s d\tau.$$

Seja agora, $0 \leq \alpha \leq \beta \leq T$ e i_n e j_n tais que

$$t_{i_n-1}^n = \alpha_n \leq \alpha < t_{i_n}^n \quad \text{e} \quad t_{j_n-1}^n < \beta \leq t_{j_n}^n = \beta_n.$$

Somando de $i = i_n$ a $i = j_n$ temos

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} (e^{-2\omega t} \|u_n(\sigma) - v(t)\|^2 - e^{-2\omega s} \|u_n(\sigma) - v(s)\|^2) d\sigma$$

$$+ \int_s^t e^{-2\omega\tau} (\left\|x_{j_n}^n - v(\tau)\right\|^2 - \left\|x_{i_n-1}^n - v(\tau)\right\|^2) d\tau$$

$$\leq 2 \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\sigma \int_s^t e^{-2\omega\tau} \langle f_n(\sigma) - g(\tau), u_n(\sigma) - v(\tau)\rangle_s d\tau$$

donde, no limite quando $n \to \infty$, tendo em vista que, por hipótese, $u_n \to u$ uniformemente em $[0, T], u$ é contínua, $f_n \to f$ em $L^1(0, T; X)$, $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ e $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_s$ é s.c.s. temos

$$\int_{\alpha}^{\beta} (e^{-2\omega t} \|u(\sigma) - v(t)\|^2 - e^{-2\omega s} \|u(\sigma) - v(s)\|^2) d\sigma$$

$$+ \int_s^t e^{-2\omega\tau} (\|u(\beta) - v(\tau)\|^2 - \|u(\alpha) - v(\tau)\|^2) d\tau$$

$$\leq 2 \int_{\alpha}^{\beta} d\sigma \int_s^t e^{-2\omega\tau} \langle f(\sigma) - g(\tau), u(\sigma) - v(\tau)\rangle_s d\tau.$$

Daí vem (4.4) pelo Lema 4.19, o que completa a demonstração.

4.24 - Corolário: *Se A satisfaz as condições do Teorema 2.1, $x \in \overline{D(A)}$ e S é o semigrupo gerado por $-A$, então $S(t)x$ é solução generalizada do problema* (4.1)-(4.2) *com $f = 0$.*

Demonstração: Conseqüência imediata da Proposição 3.10 e do Teorema 4.23.

4.25 - Nota: a) Do Corolário 4.24 e da Proposição 4.17 decorre que $S(t)x$ é a única função contínua que satisfaz (4.4) com $f = 0\,\forall g \in L^1(0, T; X)$ e para toda solução integral v de (4.3).

b) Pelo Corolário 4.24 a Definição 4.14 é coerente com a terminologia estabelecida na Nota 3.16.

4.26 - Teorema: *Seja C um cone convexo e fechado de um espaço de Banach X, $A\colon X \to X$ um operador tal que $A \in \mathcal{A}(\omega)$ e*

$$D(A) \subset C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A), \quad 0 < \lambda < \lambda_0.$$

Seja $f \in L^1(0, T; X)$ tal que $f(t) \in C$ q.s. em $[0, T]$ e $x \in \overline{D(A)}$. Então (4.1)-(4.2) *tem uma solução generalizada, u, e $u(t) \in \overline{D(A)}\, \forall t \in [0, T], T > 0$.*

Demonstração: a) Vamos supor que $f(t) = y_0 \,\forall t \in [0, T]$, onde $y_0 \in C$ e ponhamos $A_0 = A - y_0$. Então $D(A_0) = D(A)$ e $A_0 \in \mathcal{A}(\omega)$. Além disto, de $y \in C$ vem $y + \lambda y_0 \in C$ visto que C é um cone convexo. Portanto $y + \lambda y_0 \in \operatorname{Im}(I + \lambda A)$, donde existe $z \in D(A)$ tal que $y + \lambda y_0 \in z + \lambda Az$, ou seja $y \in (I + \lambda(A - y_0))z = (I + \lambda A_0)z$. Logo, $C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A_0)$ e, portanto, $\overline{D(A_0)} \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A_0)$, $0 < \lambda < \lambda_0$. Se S_0 é o semigrupo gerado por $-A_0$, segue-se, pelo Corolário 4.24, que a função $u(t) = S_0(t)x$ é solução generalizada de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_0 u & \ni 0 \\[2ex] u(0) & = x \end{cases}$$

ou seja, de (4.1)-(4.2) com $f = y_0$. Além disto, $u(t) = S_0(t)x \in \overline{D(A)}$ $\forall t \in [0, T]$, pelo Teorema 2.1.

b) Seja, agora, f uma função degrau e $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = T$ uma partição de $[0, T]$ tal que f é constante e igual a y_i no intervalo (a_{i-1}, a_i), $i = 1, \ldots, N$, e designemos por S_i o semigrupo gerado por $-(A - y_i) = -A_i$, $i = 1, \ldots, N$. Vamos definir $u\colon [0, T] \to X$ por recorrência pondo

$$u(0) = x,\ u(t) = S_i(t - a_{i-1})u(a_{i-1}), \quad \forall t \in [a_{i-1}, a_i].$$

Então, u é contínua em $[0,T]$ e como $u_i(\tau) = S_i(\tau)u(a_{i-1})$ é a solução generalizada do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_i}{dt} + A_i u_i & \ni 0 \\ \\ u_i(0) & = u(a_{i-1}), \end{cases}$$

u satisfaz (4.4) em cada $[a_{i-1}, a_i]$, donde em $[0,T]$, para toda $g \in L^1(0,T;X)$ e toda solução integral v de (4.3). Logo u é solução generalizada do problema (4.1)-(4.2) para a particular função f considerada. É imediato que $u(t) \in \overline{D(A)}\, \forall t \in [0,T]$.

c) Seja, finalmente, $f \in L^1(0,T;X)$, (f_n) uma seqüência de funções degrau tal que $f_n \to f$ em $L^1(0,T;X)$ e designemos por u_n a solução generalizada de

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n \\ \\ \qquad u_n(0) = x, \end{cases} \tag{4.23}$$

$n = 1, \ldots$ cuja existência foi demonstrada em b). Como, pela Proposição 4.15, as soluções generalizadas são soluções integrais temos, por (4.6) com $s = 0$ e tendo em vista a Proposição 4.16,

$$\begin{aligned} e^{-\omega t}\, \|u_n(t) - u_m(t)\| &\leq \int_0^t e^{-\omega\tau}\, \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\|\, d\tau \\ &\leq e^{|\omega| T} \int_0^T \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\|\, d\tau. \end{aligned}$$

Segue-se daí que u_n converge uniformemente em $[0,T]$ a uma função contínua, u, que é uma solução generalizada de (4.1)-(4.2) porque u_n é solução generalizada de (4.25) e (4.4) mantém-se por passagem ao limite, como foi observado na demonstração da Proposição 4.11. Além disto, como $\forall t \in [0,T]$, $u_n(t) \in \overline{D(A)}$, $n = 1, \ldots,$ então $u(t) \in \overline{D(A)}\, \forall t \in [0,T]$.

4.27 - Lema: *Se u é uma solução generalizada de* (4.1)-(4.2) *e $x \in D(A)$, então*

$\forall h, t \geq 0,\ t+h \leq T$ tem-se

$$e^{-\omega t}\left\|u(t+h)-u(t)\right\| \leq e^{\omega h}\int_0^h e^{-\omega\tau}\left|f(\tau)-Ax\right|d\tau$$
$$+\int_0^t e^{-\omega\tau}\left\|f(\tau+h)-f(\tau)\right\|d\tau. \tag{4.26}$$

Demonstração: Fazendo $s=0$ e $t=h$ em (4.7) temos

$$e^{-\omega h}\left\|u(h)-x\right\| \leq \int_0^h e^{-\omega\tau}\left\|f(\tau)-y\right\|d\tau, \quad \forall y \in Ax,$$

e, daí, usando o Teorema da Convergência Dominada,

$$e^{-\omega h}\left\|u(h)-x\right\| \leq \int_0^h e^{-\omega\tau}\left|f(\tau)-Ax\right|d\tau. \tag{4.27}$$

Analogamente, pondo $v(\tau)=u(\tau+h)$, $g(\tau)=f(\tau+h)$ e $s=0$ em (4.6) tem-se

$$e^{-\omega t}\left\|u(t+h)-u(t)\right\| \leq \left\|u(h)-x\right\| + \int_0^t e^{-\omega\tau}\left\|f(\tau+h)-f(\tau)\right\|d\tau. \tag{4.28}$$

De (4.27) e (4.28) vem (4.26).

4.28 - Teorema: *Supondo X reflexivo, $f \in W^{1,1}(0,T;X)$, A fechado e satisfeitas as condições do Teorema* 4.26, *então a equação* (4.1) *tem uma solução forte que satisfaz* (4.2) *com $x \in D(A)$ e para a qual*

$$e^{-\omega t}\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| \leq \left|f(0)-Ax\right| + \int_0^t e^{-\omega\tau}\left\|\frac{df}{d\tau}(\tau)\right\|d\tau, \text{ q.s. em } [0,T]. \tag{4.29}$$

Demonstração: Satisfeitas as hipóteses, a equação (4.1) tem, pelo Teorema 4.26, uma solução generalizada, u, que satisfaz (4.2) e tal que $u(t) \in \overline{D(A)}$ para todo $t \in (0,T)$.

Vamos mostrar que u é uma solução forte que satisfaz (4.29). Como, por hipótese, $f \in W^{1,1}(0,T;X)$, f é uma função absolutamente contínua (Teorema I-8.20) e, portanto, de variação limitada. Segue-se pelo Teorema I-8.13 que $\int_0^t e^{-\omega\tau} \|f(\tau+h) - f(\tau)\| \, d\tau \leq Ch$, onde C é uma constante, $\forall h, t > 0$ e $t+h \leq T$. Analogamente, $\int_0^h e^{-\omega\tau} |f(\tau) - Ax| \, d\tau \leq Mh$. Logo, por (4.26), u é lipschitziana, donde diferenciável q.s. pelo Teorema I-8.14. Dividindo, então, ambos os membros de (4.26) por h, passando ao limite quando $h \to 0$, tendo em vista o Corolário I-8.15, temos a estimativa (4.29).

Seja $t_0 \in [0,T]$ um ponto onde du/dt existe e tal que $f(t_0) \in C$. De (4.5) com $s = t_0$ tem-se

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) \leq 2 \int_{t_0}^t e^{-2\omega\tau} \, \langle f(\tau) - y, u(\tau) - x \rangle_s \, d\tau,$$

onde $\varphi(t) = e^{-2\omega t} \, ||u(t) - x||^2, \;\; (x,y) \in D(A)$.
Dividindo ambos os membros da desigualdade acima por $t - t_0$, obtém-se

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \leq \frac{2}{t - t_0} \int_{t_0}^t e^{-2\omega\tau} \, \langle f(\tau) - y, u(\tau) - x \rangle_s \, d\tau.$$

Sendo f, u contínuas e a função $\langle ..., ... \rangle_s$ semicontínua superiormente, dado $\varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0$ tal que se $t \in [t_0, \delta]$, $\langle f(\tau) - y, u(\tau) - x \rangle_s \leq \langle f(t_0) - y, u(t_0) - x \rangle_s + \varepsilon$.
Assim:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \leq \left(\langle f(t_0) - y, u(t_0) - x \rangle_s + \varepsilon \right) \frac{2}{t - t_0} \int_{t_0}^t e^{-2\omega\tau} \, d\tau, \;\; \forall \, t \in [0, \delta].$$

Tomando limite quando $t \to t_0$, encontra-se

$$\frac{d\varphi}{dt}(t_0) \leq 2 \, e^{-2\omega t_0} \left(\langle f(t_0) - y, u(t_0) - x \rangle_s + \varepsilon \right), \quad \forall \, \varepsilon > 0.$$

Logo $\dfrac{d\varphi}{dt}(t_0) \leq 2\, e^{-2\omega t_0} \langle f(t_0) - y, u(t_0) - x \rangle_s$. Mas $\dfrac{d\varphi}{dt}(t_0) = -2\omega\, e^{-2\omega t_0}\, ||u(t_0) - x||^2 +$ $2\, e^{-2\omega t} \langle u'(t_0), \xi^* \rangle\ \forall\, \xi^* \in F(u(t_0) - x)$, já que $\dfrac{d}{dt}\, ||u(t) - x||\, ||u(t) - x|| = \langle u'(t), \xi^* \rangle\ \forall\, \xi^* \in$ $F(u(t) - x)$. Daí, tem-se

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t_0), \xi^* \right\rangle \leq \langle f(t_0) - y, u(t_0) - x \rangle_s + \omega ||u(t_0) - x||^2$$

$$\forall\, \xi^* \in F(u(t_0) - x) \in (x, y) \in A. \tag{4.30}$$

E, como $F(u(t_0) - x)$ é compacto na topologia fraca-$*$ de X^*, existe $\xi_0^* \in F(u(t_0) - x)$ tal que

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t_0), \xi^* \right\rangle \leq \langle f(t_0) - y, \xi_0^* \rangle + \omega ||u(t_0) - x||^2$$

$\forall\, \xi^* \in F(u(t_0) - x)$ e, em particular, para $\xi^* = \xi_0^*$, i.e.,

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t_0) - f(t_0) + y, \xi_0^* \right\rangle \leq \omega^+ ||u(t_0) - x||^2. \tag{4.31}$$

Além disto,

$$u(t_0 - h) - u(t_0) = -h\, \frac{du}{dt}(t_0) + \alpha(h), \tag{4.32}$$

onde $\|\alpha(h)\| / h \to 0$ quando $h \to 0$. Como $u(t_0 - h) \in \overline{D(A)}$ para todo $h \in (0, t_0)$, $f(t_0) \in C$ e C é um cone, existe para todo $h \in (0, t_0)$, um $(x_h, y_h) \in A$ tal que

$$u(t_0 - h) + hf(t_0) = x_h + hy_h. \tag{4.33}$$

De (4.31), (4.32) e (4.33), fazendo $(x, y) = (x_h, y_h)$ vem $\langle u(t_0) - x_h + \alpha(h), \xi_{0_h}^* \rangle \leq$ $\omega^+ ||u(t_0) - x_h||^2$ e daí

$$\frac{\|u(t_0) - x_h\|}{h} \leq \frac{\|\alpha(h)\|}{h} + \omega^+ ||u(t_0) - x_h|| \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0, \ \text{pois}$$

$$||x_h - u(t_0)|| \leq ||J_h(u(t_0 - h) + hf(t_0)) - J_h\, u(t_0) + J_h\, u(t_0) - u(t_0)|| \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - h\omega}\, ||u(t_0 - h) - u(t_0)|| + ||J_h\, u(t_0) - u(t_0)|| \to 0 \text{ quando } h \to 0,$$

pois $J_h(u(t_0) \to u(t_0)$, já que $u(t_0) \in \overline{D(A)} \subset D_h \;\forall\, h < \lambda_0$.
Portanto,

$$\begin{aligned} y_h = \frac{u(t_0 - h) - x_h}{h} + f(t_0) &= \frac{u(t_0 - h) - u(t_0)}{h} \\ &+ \frac{u(t_0) - x_h}{h} + f(t_0) \to -\frac{du}{dt}(t_0) + f(t_0) \end{aligned}$$

quando $h \to 0$ e, como $x_h \to u(t_0)$, segue-se que

$$(u(t_0), -\frac{du}{dt}(t_0) + f(t_0)) \in A,$$

pois A é fechado, por hipótese. Logo,

$$\frac{du}{dt}(t_0) + Au(t_0) \ni f(t_0)$$

q.e.d. .

4.29 - Corolário: *Nas condições do Teorema* 4.28, (4.1)-(4.2) *tem uma solução fraca para cada* $f \in L^1(0,T;X)$ *e cada* $x \in \overline{D(A)}$.

Demonstração: Seja (f_n) uma sucessão de funções de $W^{1,1}$ tal que $f_n \to f$ em $L^1(0,T;X)$ e (x_n) uma sucessão de elementos de $D(A)$ tal que $x_n \to x$. Pelo Teorema 4.28 o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) & \ni f_n(t) \\ \\ u_n(0) & = x_n \end{cases}$$

tem, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma solução forte u_n e, por (4.6) com $s = 0$,

$$e^{-\omega t} \|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|x_n - x_m\| + \int_0^t e^{-\omega\tau} \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\| \, d\tau.$$

Logo a sucessão (u_n) converge em $C([0,T];X)$ a uma função u, solução fraca de (4.1)-(4.2) com $f \in L^1(0,T;X)$ e $x \in \overline{D(A)}$.

5. Caso não autônomo

5.1 - O problema de evolução

$$\frac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) \ni f(t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{5.1}$$

$$u(0) = x_0, \tag{5.2}$$

onde, para cada $t \in [0,T]$, $A(t)\colon X \to X$ é um operador que depende de t e $f \in L^1(0,T;X)$, foi estudado principalmente por Kato [1], [2] e [3], Crandall e Pazy [1], Crandall-Evans [1] e Evans [1]. Vamos nos limitar a uma ligeira notícia desse problema.

Como no caso em que A não depende de t introduzem-se as seguintes hipóteses:

(A.1) - $A(t) \in \mathcal{A}(\omega)$ q.s. em $[0,T]$;

(A.2) - Existe um cone convexo e fechado, C, em X tal que

$$D(A(t)) \subset C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A(t)), \quad 0 < \lambda < \lambda_0, \; \lambda_0\omega < 1, \tag{5.3}$$

para quase todo t em $[0,T]$.

Pondo $J_\lambda(t) = (I + \lambda A(t))^{-1}$ e $A_\lambda(t) = \lambda^{-1}(I - J_\lambda(t))$, $J_\lambda(t)$ e $A_\lambda(t)$ dependem de t. Restringe-se essa dependência por uma das duas seguintes condições:

(C.1) - Existe uma função integrável $h\colon [0,T] \to X$ e uma função contínua e não decrescente $L\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tais que

$$\|A_\lambda(t)x - A_\lambda(s)x\| \leq \|h(t) - h(s)\| \, L(\|x\|) \tag{5.4}$$

para todo $0 < \lambda < \lambda_0$, todo $x \in C$ e quase todo s e t tais que $0 \leq s, t \leq T$.

(C.2) - Existe uma função mensurável, essencialmente de variação limitada, $h\colon [0,T] \to X$ e uma função contínua e não decrescente, $L\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, tais que

$$\|A_\lambda(t)x - A_\lambda(s)x\| \leq \|h(t) - h(s)\|\, L(\|x\|)(1 + \|A_\lambda(t)x\|), \tag{5.5}$$

para todo $0 < \lambda < \lambda_0, \forall\, x \in C$ e quase todo s e t tais que $0 \leq s, t \leq T$ (h é *essencialmente de variação limitada* se h é igual q.s. a uma função de variação limitada).

5.2 - Proposição: *Se $A(t)$ satisfaz* (A.1), (A.2) *e* (C.1) *ou* (C.2), *então $\hat{D}(A(t))$ é constante q.s. em* $[0,T]$.

Demonstração: Satisfeitas as hipóteses, existe um conjunto N, de medida nula, tal que $\forall\, t \in [0,T]\backslash N$, $A(t) \in \mathcal{A}(\omega)$, $h(t)$ é definida e (5.3) e (5.5) (ou (5.4)) são válidas. Seja $t \in [0,T]\backslash N$ e $x \in \widehat{D}(A(t))$. Então, como de (5.5) vem

$$\|A_\lambda(s)x\| \leq \|A_\lambda(t)x\| + \|h(t) - h(s)\|\, L(\|x\|)(1 + \|A_\lambda(t)x\|),$$

temos no limite, quando $\lambda \to 0$,

$$|||A(s)x||| \leq |||A(t)x||| + \|h(t) - h(s)\|\, L(\|x\|)(1 + |||A(t)x|||),$$

$\forall\, s \in [0,T]\backslash N$. Mas o segundo membro dessa desigualdade é finito; logo $x \in \widehat{D}(A(s))$ e, assim, $\widehat{D}(A(t)) \subset \widehat{D}(A(s))$. Permutando entre si as posições de s e t em (C.2) temos a inclusão oposta.

5.3 - Corolário: *Supondo válidas* (A.1), (A.2) *e* (C.1) *ou* (C.2), $\overline{D(A(t))}$ *é constante q.s. em* $[0,T]$.

De fato, pela Proposição II-6.17 temos $D(A(t)) \subset \widehat{D}(A(t)) \subset \overline{D(A(t))}$ e, como pela Proposição 5.2, $\widehat{D}(A(t))$ é constante q.s. em $[0,T]$, $\overline{D(A(t))}$ é constante q.s. em

$[0, T]$, q.e.d..

5.4 - Notação: Vamos por, na hipótese da validade (A.1), (A.2) e (C.1) ou (C.2),

$$\widehat{D}(A(t)) = \widehat{D}, \quad \overline{D(A(t))} = \overline{D}, \qquad t \in [0, T] \backslash N.$$

5.5 - Proposição: *Sejam:* i) (A.1) *e* (A.2) *satisfeitas;*

ii) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = S \leq T$ *uma partição de* $[0, S]$ *tal que* $t_i \in [0, S] \setminus N$ *e* $0 < t_i - t_{i-1} = \lambda_i < \lambda_0$, $i = 1, \ldots, m$*;*

iii) $(f_i), i = 1, \ldots, m$*, uma seqüência de elementos de* C*;*

iv) $x \in C$*.*

Então, existe uma e uma só seqüência $x_0, x_1, \ldots, x_m \in C$ *tal que*

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + A(t_i)x_i \ni f_i, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{5.6}$$

$$x_0 = x. \tag{5.7}$$

Demonstração: Análoga à da Proposição 3.9.

Vamos chamar de *solução* do problema discreto (5.6)-(5.7) a função u definida por $u(t) = x_i$ para $t \in (t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, m$ e $u(0) = x$.

5.6 - Teorema: *Seja* $\overline{T} > 0$*,* A *um operador que satisfaz* (A.1), (A.2) *e* (C.1) *em* $[0, \overline{T}]$*,* $f \in L^1(0, \overline{T}; X)$ *e* $x \in \overline{D}$*. Então, para todo* T *tal que* $0 < T < \overline{T}$ *e para cada* $n = 1, \ldots$ *existe uma partição* $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{m(n)}^n = T(n)$*,* $T \leq T(n) \leq \overline{T}$*,* $t_1^n, \ldots, t_{m(n)}^n \in [0, \overline{T}] \setminus N$*, tal que a seqüência* (f_n)*, onde* f_n *é a função escada igual a* $f(t_i^n)$ *no intervalo* $(t_{i-1}, t_i]$*,* $i = 1, \ldots, m(n)$*, converge a* f *em* $L^1(0, T; X)$ *e a seqüência* (u_n)*, onde* u_n *é a solução do problema discreto*

$$\frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{t_i^n - t_{i-1}^n} + A(t_i^n)x_i^n \ni f(t_i^n), \quad i = 1, \ldots, m(n),$$

$$x_0^n = x,$$

converge uniformemente em $[0,T]$ *para uma função contínua,* u*, que satisfaz a condição* $u(0) = x$*. Análogas conclusões se* A *satisfaz* (A.1), (A.2), (C.2)*,* $x \in \widehat{D}$ *e* f *é essencialmente de variação limitada.*

Este teorema generaliza o Teorema 4.22. Sua demonstração, bem como a dos que serão enunciados a seguir, encontra-se em Evans [1].

5.7 - Nota: Se $f = 0$ o Teorema 5.6 ainda é válido quando se substitui a condição (A.2) pela condição mais fraca a seguir.
(A$'$.2) - $\overline{D(A(t))} = \overline{D}$ independe de t e

$$\overline{D(A(t))} \subset \mathrm{Im}(I + \lambda A(t)),\ 0 < \lambda < \lambda_0,\ \text{q,s, em } [0,T].$$

Nesse caso exige-se, em (C.1) e (C.2), que $x \in \overline{D}$.

5.8 - Teorema: *Se* $g \in L^1(0,\overline{T};X)$*,* $y^n, y \in \overline{D}, y^n \to y$ *e, para cada* $n = 1, \ldots$ *a partição* $0 = s_0^n < s_1^n < \cdots < s_{l(n)}^n = S(n)$ *é tal que a sucessão* $\{v_n\}$ *das soluções dos problemas discretos*

$$\frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{s_j^n - s_{j-1}^n} + A(s_j^n)y_j^n \ni g(s_j^n), \quad j = 1, \ldots, l(n)$$

$$y_0^n = y^n$$

converge uniformemente em $[0,T]$ *para uma função* v *então* u *e* v *satisfazem a desigualdade* (4.4)*.*

Como conseqüência imediata do Teorema 5.8 temos:

5.9 -Corolário: *A função* u *depende apenas de* A*,* f *e* x*.*

Adotando para (5.1) a Definição de solução forte dada para (4.1) temos:

5.10 - Teorema: *Se A satisfaz* (A.1), (A.2) *e* (C.1) *(ou* (C.2)*), $x \in \overline{D}\,(x \in \widehat{D})$ e u é uma solução forte de* (5.1) *que satisfaz* (5.2)*, então u coincide com a função limite definida no Teorema* 5.6.

6. O gerador infinitesimal

Seja S um semigrupo sobre C e

$$A_h = \frac{I - S(h)}{h}, \quad h > 0.$$

Então, $A_h\colon X \to X$ e $D(A_h) = C$. Ponhamos

$$D_S = \{x \in C; \liminf_{h \to 0} \|A_h x\| < \infty\}.$$

6.1 - Proposição: *Seja $S \in Q_\omega(C)$ e $x \in D_S$. Então $S(t)x$ é uma função lipschitziana em todo intervalo compacto $[0,T]$, $0 < T < \infty$.*

Demonstração: Se $x \in D_S$ então existem um $L \geq 0$ e uma seqüência (h_n), $h_n \to 0$, tais que $\|A_{h_n} x\| \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ponhamos $k_n = [h/h_n]$ (= parte inteira de h/h_n). Se $t \in [0,T]$ temos

$$\begin{aligned}
&\|S(t+h)x - S(t)x\| = \|S(t)S(h)x - S(t)x\| \leq e^{\omega t}\,\|S(h)x - x\| \\
&= e^{\omega t}\,\|S(h - k_n h_n + k_n h_n)x - S(k_n h_n)x + S(k_n h_n)x - x\| \\
&\leq e^{\omega t}(\|S(k_n h_n)S(h - k_n h_n)x - S(k_n h_n)x\| + \|S(k_n h_n)x - x\|) \\
&\leq e^{\omega t}(e^{\omega k_n h_n}\,\|S(h - k_n h_n)x - x\| + \|S(k_n h_n)x - x\|).
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\|S(k_nh_n)x - x\| &= \left\|\sum_{j=1}^{k_n}(S(jh_n)x - S((j-1)h_n)x\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{k_n}[S((j-1)h_n)S(h_n)x - S((j-1)h_n)x]\right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n}\|S((j-1)h_n)S(h_n)x - S((j-1)h_n)x\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n} e^{\omega(j-1)h_n}\|S(h_n)x - x\| \leq k_n e^{\omega^+ h}h_n L.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \leq e^{\omega^+(t+h)}\|S(h-k_nh_n)x - x\| + e^{\omega^+(t+h)}Lh$$

e, portanto,

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \leq e^{\omega^+ T}Lh, \quad t+h \leq T,$$

por iii) da Definição 1.1, uma vez que $k_nh_n \to h$.

6.2 - Definição: Diz-se *gerador infinitesimal forte* do semigrupo S sobre C o operador A_0 definido por

$$D(A_0) = \{x \in C; \lim_{h\to 0} A_hx \quad \text{existe}\}$$

$$A_0x = \lim_{h\to 0+} A_hx, \quad \forall x \in D(A_0)$$

e, *gerador infinitesimal fraco*, o operador A' definido por essas mesmas condições com o limite entendido no sentido da topologia fraca de X.

6.3 - Proposição: *Seja S um semigrupo sobre C. Tem-se:*

i) *$D(A_0) \subset D(A') \subset D_S$ e $A_0 x = A'x \, \forall x \in D(A_0)$;*

ii) *Se $S(t)x$ for diferenciável à direita num ponto t, então $S(t)x \in D(A_0)$ e*

$$-\frac{d^+}{dt} S(t)x = A_0 S(t)x.$$

Demonstração: i) A existência do limite forte de $A_h x$, quando $h \to 0+$, implica a do fraco e a do fraco implica que $A_h x$ é limitada quando $h \to 0$, donde a primeira das afirmações feitas em i). Além disso o limite fraco coincide com o forte, donde a segunda.

ii) Tem-se $\forall t, h > 0$

$$\frac{S(t)x - S(t+h)x}{h} = \frac{I - S(h)}{h} S(t)x.$$

Se $S(t)x$ é diferenciável à direita no ponto t, o primeiro membro dessa igualdade tem um limite quando $h \to 0+$, donde o segundo também tem um limite quando $h \to 0+$. Logo, $S(t)x \in D(A_0)$ e, no limite quando $h \to 0+$

$$-\frac{d^+}{dt} S(t)x = A_0 S(t)x.$$

6.4 - Proposição: *Se $S \in Q_\omega(C)$ então $A' \in \mathcal{A}(\omega)$.*

Demonstração: De $x, y \in D(A')$ e $z^* \in F(x-y)$ vem

$$\langle (A' + \omega I)x - (A' + \omega I)y, z^* \rangle = \lim_{h \to 0+} \left\langle \frac{x - S(h)x}{h} + \omega x - \frac{y - S(h)y}{h} - \omega y, z^* \right\rangle$$

$$= \lim_{h \to 0+} [\frac{1}{h} \|x - y\|^2 + \omega \|x - y\|^2 - \frac{1}{h} \langle S(h)x - S(h)y, z^* \rangle]$$

$$\geq \lim_{h \to 0+} [\frac{1}{h} \|x - y\|^2 + \omega \|x - y\|^2 - \frac{1}{h} e^{\omega h} \|x - y\|^2]$$

$$= \lim_{h \to 0+} (\frac{1 - e^{\omega h}}{h}) \|x - y\|^2 + \omega \|x - y\|^2 = 0.$$

6.5 - Corolário: *Se* $S \in Q_\omega(C)$ *então* $A_0 \in \mathcal{A}(\omega)$.

6.6 - Proposição: *Se* X *é reflexivo e* $S \in Q_\omega(C)$, *então*

$$\overline{D(A_0)} = \overline{D(A')} = \overline{D}_S.$$

Demonstração: Seja $x \in D_S$. Pela Proposição 6.1, $S(t)x$ é uma função lipschitziana em todo intervalo $[0, T]$, $0 < T < \infty$, e como X é reflexivo, $S(t)x$ é diferenciável quase sempre em $[0, \infty)$ (Teorema I-8.14). Por ii) da Proposição 6.3 segue-se daí que

$$-\frac{d}{dt}\,(S(t)x = A_0 S(t)x \quad \text{q.s. em} \quad [0, \infty).$$

Portanto, $S(t)x \in D(A_0)$ q.s. em $[0, \infty)$, donde, pela continuidade forte de S, $x \in \overline{D(A_0)}$. Daí e de i) da Proposição 6.3 seguem-se as igualdades a demonstrar.

Este resultado pode ser melhorado quando, além da reflexividade, impõem-se a X outras restrições como será mostrado a seguir.

6.7 - Proposição: *Se* X *é reflexivo e estritamente convexo e* $S \in Q_\omega(C)$, *então* $D(A') = D_S$. *Se, além de reflexivo e estritamente convexo,* X *tem a propriedade* I-(5.2) *(Proposição* I-5.8*) e* $S \in Q_\omega(C)$, *então* $D(A_0) = D_S$.

Demonstração: Seja $x_0 \in D_S$, V o conjunto dos pontos limite fraco de $A_h x_0$ quando $h \to 0+$ e A o operador definido por

$$D(A) = D(A_0) \cup \{x_0\}, \qquad A = A_0 \cup (x_0, \overline{\operatorname{conv} V}).$$

Seja $v \in V$. Então existe (h_n), $h_n \to 0$, tal que $A_{h_n} x_0 \rightharpoonup v$ e, por argumentação análoga à feita na Proposição 6.4, tem-se, $\forall x \in D(A_0)$ e $\forall z^* \in F(x - x_0)$,

$$\langle A_0 x + \omega x - v - \omega x_0, z^* \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle A_{h_n} x + \omega x - A_{h_n} x_0 - \omega x_0, z^* \rangle \geq 0.$$

Imediatamente se vê que essa mesma desigualdade é válida para $v \in \operatorname{conv} V$ e, portanto, para $v \in \overline{\operatorname{conv} V}$. Logo, $A \in \mathcal{A}(\omega)$. Além disto, como X é reflexivo e, pela Proposição 6.1, $S(t)x_0$ é lipschitziana, segue-se (como na Proposição 6.6) que $S(t)x_0$ é diferenciável q.s. em $[0, \infty)$ e, por ii) da Proposição 6.3, que $-dS(t)x_0/dt = A_0 S(t)x_0$ q.s. em $[0, \infty)$. Logo $-dS(t)x_0/dt \in AS(t)x_0$ q.s. em $[0, \infty)$. Por i) do Teorema 3.6, com $u(t) = S(t)x_0$, $s = 0$, $t = h$, temos, então

$$\|A_h x_0\| \leq e^{\omega^+ h} |Ax_0| \tag{6.1}$$

donde, pelo Exemplo I-3.3,

$$\|v\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_{h_n} x_0\| \leq |Ax_0| \, .$$

Mas $v \in Ax_0$. Logo, $\|v\| = |Ax_0|$. Como $Ax_0 = \overline{\operatorname{conv} V}$, portanto um conjunto convexo e fechado, Ax_0 tem, pelo Teorema I-5.14, um único elemento de norma $|Ax_0|$. Mas então $Ax_0 = \{v\}$, pois v é um elemento arbitrário de V, e, assim, $A_h x_0 \rightharpoonup v$, donde $x_0 \in D(A')$ e, portanto, $D(A') = D_S$, que é a primeira das asserções feitas. De (6.1) segue-se que

$$\limsup_{h\to 0} \|A_h x_0\| \leq |Ax_0| = \|v\| \, .$$

Daí, de $A_h x_0 \rightharpoonup v$ e da propriedade I-(5.2) vem $A_h x_0 \to v$, o que significa que $x_0 \in D(A_0)$. Assim, $D_S = D(A_0)$ que é a segunda das asserções feitas.

6.8 - Proposição: Seja $S \in Q_\omega(C)$. São válidas as propriedades:

i) Existe um operador A tal que $A+\omega I$ é uma extensão máximo acretiva de $A_0+\omega I$;

ii) Se X é reflexivo, X e X^* são estritamente convexos e $A + \omega I$ é uma extensão máximo acretiva de $A_0 + \omega I$, então $A_0 x = A^o x \; \forall x \in D(A_0)$, onde A^0 é a secção mínima de A (Cap. II, §8).

Demonstração: i) Ordenada por inclusão, a família dos operadores acretivos é indutiva superiormente. Pelo Lema de Zorn todo operador acretivo está, portanto, contido em um operador máximo acretivo. Em particular, $A_0 + \omega I$ está contido num operador máximo acretivo $\widetilde{A}$. Pondo $A = \widetilde{A} - \omega I$ o operador A é tal que $A + \omega I$ é uma extensão máximo acretiva de $A_0 + \omega I$.

ii) Vamos supor satisfeitas as hipóteses de ii) e seja $x \in D(A_0)$. Argumentos análogos aos apresentados na Proposição 6.7 mostram que, com aplicação do Teorema 3.6 temos

$$\|A_h x\| \leq e^{\omega^+ h} |Ax| .$$

No limite, quando $h \to 0$ temos, então,

$$\|A_0 x\| \leq |Ax|$$

e, como $A_0 x \in Ax$, tem-se $\|A_0 x\| \geq |Ax|$, donde $\|A_0 x\| = |Ax|$. Mas $A + \omega I$ sendo, por hipótese, máximo acretivo, Ax é convexo e fechado (Proposição II-7.9) e como X é reflexivo e estritamente convexo, $A^0 x$ é, pelo Teorema I-5.14, o único elemento de Ax cuja norma é $|Ax|$. Logo, $A_0 x = A^0 x \ \forall x \in D(A_0)$.

6.9 - Teorema: *Sejam X e X^* uniformemente convexos, $S \in Q_\omega(C)$ e $x \in D(A_0)$. Então:*

i) $S(t)x \in D(A_0) \quad \forall t \geq 0$*;*

ii) $S(t)x$ *é derivável à direita em todo* $t \geq 0$ *e*

$$-\frac{d^+}{dt} S(t)x = A_0 S(t)x;$$

iii) $A_0 S(t)x$ *é contínua à direita em todo* $t \geq 0$*;*

iv) $\dfrac{d}{dt} S(t)x$ *existe e é contínua exceto, no máximo, em um conjunto numerável de pontos de* $[0, \infty)$.

Demonstração: i) Seja $x \in D(A_0)$. Pela Proposição 6.3, $x \in D_S$, donde $\liminf\limits_{h \to 0+} \|A_h x\|$

$= L < \infty$. Logo,

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to 0+} \|A_h S(t)x\| &= \liminf_{h\to 0+} \left\| \frac{I - S(h)}{h} S(t)x \right\| \\
&= \liminf_{h\to 0+} \left\| \frac{S(t)x - S(t+h)x}{h} \right\| \leq \liminf_{h\to 0+} e^{\omega t} \left\| \frac{x - S(h)x}{h} \right\| \\
&= \liminf_{h\to 0+} e^{\omega t} \|A_h x\| \leq e^{\omega t} L.
\end{aligned}$$

Portanto, $S(t)x \in D_S = D(A_0)\, \forall t \geq 0$, pela Proposição 6.7.

ii) Por i), $S(t)x \in D(A_0)\, \forall t \geq 0$, donde existe o limite de $A_h S(t)x$, quando $h \to 0+, \forall\, t \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
A_0 S(t)x &= \lim_{h\to 0+} A_h S(t)x = \lim_{h\to 0+} \frac{I - S(h)}{h} S(t)x \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{S(t)x - S(t+h)x}{h} = -\frac{d^+}{dt} S(t)x, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

iii) Seja $0 \leq s \leq t$. Teremos, para $x \in D(A_0)$,

$$\begin{aligned}
\|A_h S(t)x\| &= (1/h)\, \|S(t)x - S(t+h)x\| \\
&= (1/h)\, \|S(t-s)S(s)x - S(t-s)S(s+h)x\| \\
&\leq \frac{e^{\omega(t-s)}}{h} \|S(s)x - S(s+h)x\| \leq e^{\omega(t-s)} \|A_h S(s)x\|
\end{aligned}$$

e, daí,

$$e^{-\omega t} \|A_h S(t)x\| \leq e^{-\omega s} \|A_h S(s)x\|.$$

Por passagem ao limite quando $h \to 0$ segue-se, dessa desigualdade, que

$$e^{-\omega t} \|A_0 S(t)x\| \leq e^{-\omega s} \|A_0 S(s)x\|$$

i.e., a função $t \to e^{-\omega t} \|A_0 S(t)x\|$ é monótona decrescente.

Seja A tal que $A+\omega I$ é uma extensão máximo acretiva de $A_0+\omega I$ (Proposição 6.8) e (t_n) uma seqüência decrescente de reais positivos tal que $t_n \to t$. Teremos

$$\limsup_{n\to\infty} e^{-\omega t_n} \|A_0 S(t_n)x\| \leq e^{-\omega t} \|A_0 S(t)x\| .$$

Daí,

$$\limsup_{n\to\infty} \|A_0 S(t_n)x\| \leq \|A_0 S(t)x\| , \tag{6.2}$$

i.e., o conjunto $\{A_0 S(t_n)x\}$ é limitado. Como, pelo Teorema de Milman, X é reflexivo, existem uma subseqüência (t_{n_k}) de (t_n) e um $y \in X$ tais que $A_0 S(t_{n_k}) \rightharpoonup y$. Temos, então,

$$S(t_{n_k})x \to S(t)x,\ A_0 S(t_{n_k})x \rightharpoonup y \quad \text{e} \quad (S(t_{n_k})x, A_0 S(t_{n_k})x) \in A$$

e como, pela Proposição II-7.11, A é demifechado segue-se que $(S(t)x, y) \in A$, i.e., $y \in AS(t)x$. Mas, por ii) do Teorema I-5.14, $A^0 S(t)x$ tem um só elemento; logo $\|y\| \geq \left\|A^0 S(t)x\right\|$. Por outro lado, a norma sendo s.c.i. na topologia fraca de X tem-se, levando em conta (6.2) e ii) da Proposição 6.8,

$$\begin{aligned} \|y\| = \liminf_{k\to\infty} \|A_0 S(t_{n_k})x\| &\leq \limsup_{k\to\infty} \|A_0 S(t_{n_k})x\| \\ &\leq \|A_0 S(t)x\| = \left\|A^0 S(t)x\right\| . \end{aligned}$$

Logo, $\|y\| = \left\|A^0 S(t)x\right\|$ e, portanto, $y = A^0 S(t)x = A_0 S(t)x$. Assim, $A_0 S(t_{n_k})x \rightharpoonup A_0 S(t)x$ e

$$\limsup_{k\to\infty} \|A_0 S(t_{n_k})x\| \leq \|A_0 S(t)x\| .$$

Pela Proposição I-5.8 segue-se, daí, que $A_0 S(t_{n_k})x \to A_0 S(t)x$ e, portanto,

$$\lim_{h\to 0+} A_0 S(t+h)x = A_0 S(t)x,$$

visto que o limite $A_0 S(t)x$ não depende de (t_n). Logo a função $t \to A_0 S(t)x$, é contínua à direita em todo $t \geq 0$.

iv) Pelo que foi visto na demonstração de iii) a função $t \to e^{-\omega t} \|A_0 S(t)x\|$ é monótona decrescente; portanto, o conjunto de suas descontinuidades é, no máximo numerável. Com os mesmos argumentos já usados na demonstração de iii) vê-se que todo ponto de continuidade de $t \to \|A_0 S(t)x\|$ é, também, ponto de continuidade de $t \to A_0 S(t)x$. Logo, o conjunto das descontinuidades de $t \to A_0 S(t)x$ é, no máximo, numerável. Além disto, de $x \in D(A_0) = D_S$ resulta que $t \to S(t)x$ é diferenciável quase sempre em $[0, \infty)$, como já foi observado na demonstração da Proposição 6.6. Logo,

$$-\frac{dS(t)x}{dt} = A_0 S(t)x \quad \text{q.s em} \quad [0, \infty),$$

pela Proposição 6.3. Integrando de t a $t+h$ temos

$$-S(t+h)x + S(t)x = \int_t^{t+h} A_0 S(\tau)x \, d\tau,$$

donde se segue que $dS(t)x/dt$ existe e é contínua, exceto em um conjunto de pontos de $[0, \infty)$, no máximo numerável, q.e.d..

6.10 - Teorema: *Sejam X e X^* uniformemente convexos, $A \in \mathcal{A}(\omega)$, A fechado e tal que*

$$D(A) \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A), \quad 0 < \lambda < \lambda_0,$$

S o semigrupo gerado por $-A$ sobre $\overline{D(A)}$ e A_0 o gerador infinitesimal de S. Então:

i) $D(A^0) = D(A_0) = D(A)$;

ii) $A_0 x = A^0 x \qquad \forall x \in D(A)$.

Demonstração: A igualdade $D(A^0) = D(A)$ foi demonstrada no Teorema II-8.1. Além disto, de $x \in D(A)$ vem

$$\|S(t)x - x\| \leq e^{\omega^+ t} t \, |Ax| \, ,$$

pela Proposição 2.7; logo $x \in D(A_0)$ pela Proposição 6.7. Desse modo $D(A) \subset D(A_0)$.

Reciprocamente, de $x \in D(A_0)$ segue-se, pelo Teorema 6.9, que $S(t)x$ é derivável q.s. em $[0,\infty)$ e $-dS(t)x/dt = A_0S(t)x$. Além disto, $x \in \overline{D(A)}$, uma vez que $D(A_0) \subset \overline{D(A)}$, donde $S(t)x$ é solução de (3.1)-(3.2), pelo Teorema 3.14. Daí, de ii) do Teorema 3.6 e das hipóteses sobre X, vem $-dS(t)x/dt = A^0S(t)x$. Logo,

$$A_0S(t)x = A^0S(t)x, \quad \text{q.s. em} \quad [0,\infty). \tag{6.3}$$

Mas, por iii) do Teorema 6.9, $A_0S(t)x$ é uma função contínua à direita em todo $t \geq 0$. Logo, de (6.3) resulta que $A^0S(t)x$ tem um limite quando $t \to 0+$. Além disto, A é fechado, por hipótese, e $S(t)x \to x$ quando $t \to 0+$. Logo, $x \in D(A)$ o que completa a demonstração de i). Pelo Teorema 3.19, para todo $x \in D(A)$, $A^oS(t)x$ é contínua à direita no ponto $t = 0$. Mas de $x \in D(A)$ vem, por i), $x \in D(A_0)$ donde, pelo Teorema 6.9, $A_0S(t)x$ também é contínua à direita no ponto $t = 0$. Logo, de (6.3) vem $A_0x = A^0x, \forall x \in D(A)$, o que demonstra ii).

7. Aproximação e geração

Serão apresentadas agora generalizações dos bem conhecidos resultados de Trotter, Chernoff e Hille-Yosida sobre os semigrupos lineares. Inicialmente a do de Trotter e a do de Chernoff.

7.1 - Teorema: *Sejam $A_r \in \mathcal{A}(\omega_r)$ e $A \in \mathcal{A}(\omega)$ tais que $\overline{D(A_r)} \subset \mathrm{Im}(I+\lambda A_r)$ e $\overline{D(A)} \subset \mathrm{Im}(I+\lambda A)$ para $0<\lambda<\lambda_0$. Sejam S_r e S os semigrupos gerados por $-A_r$ e $-A$ sobre $\overline{D(A_r)}$ e $\overline{D(A)}$, respectivamente. Se*

i) $0 \leq |\omega_r|, |\omega| \leq \alpha < \infty$,

ii) $\lim\limits_{r\to 0} J_{\lambda,r}x = J_\lambda x$ *para cada* $x \in \overline{D}$ *e* $0<\lambda<\lambda_0$, *onde* $J_{\lambda,r} = (I+\lambda A_r)^{-1}$, $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$ *e* $D = \bigcap\limits_{r>0} \overline{D(A_r)} \cap D(A)$,

então

iii) $\lim_{r\to 0} S_r(t)x = S(t)x$ *para cada* $x \in \overline{D}$ *e o limite é uniforme nos intervalos compactos.*

Demonstração: Como $A_{\lambda,r} = \lambda^{-1}(I - J_{\lambda,r})$, a hipótese ii) é equivalente a $A_{\lambda,r}x \to A_\lambda x$ quando $r \to 0\ \forall x \in \overline{D}$. Portanto, tendo em conta i) e iii) da Proposição II-6.16, se $x \in D$ e $0 \leq \lambda\alpha < 1/2$, existe r_0 dependendo de x e de λ tal que

$$\|A_{\lambda,r}x\| \leq \|A_\lambda x\| + 1 \leq 2\,|Ax| + 1, \quad 0 < r < r_0. \tag{7.1}$$

Temos

$$\begin{aligned}\|S_r(t)x - S(t)x\| &\leq \|S_r(t)x - S_r(t)J_{\lambda,r}x\| + \|S_r(t)J_{\lambda,r}x - S(t)x\| \\ &\leq \|S_r(t)J_{\lambda,r}x - S(t)x\| + e^{\omega_r t}\,\|J_{\lambda,r}x - x\|\end{aligned} \tag{7.2}$$

e

$$\begin{aligned}\|S_r(t)J_{\lambda,r}x - S(t)x\| \leq{}& \left\|S_r(t)J_{\lambda,r}x - J^n_{t/n,r}J_{\lambda,r}x\right\| + \left\|J^n_{t/n,r}J_{\lambda,r}x - J^n_{t/n,r}x\right\| \\ &+ \left\|J^n_{t/n,r}x - J^n_{t/n}x\right\| + \left\|J^n_{t/n}x - S(t)x\right\|.\end{aligned} \tag{7.3}$$

Por (7.1) e (2.11) no limite quando $n \to \infty$ tem-se

$$\begin{aligned}&\left\|S_r(t)J_{\lambda,r}x - J^n_{t/n,r}J_{\lambda,r}x\right\| \leq 2tn^{-\frac{1}{2}}e^{4|\omega_r|t}\,|A_rJ_{\lambda,r}x| \\ &\leq 2tn^{-\frac{1}{2}}e^{4\alpha t}\,\|A_{\lambda,r}x\| \leq 2tn^{-\frac{1}{2}}e^{4\alpha t}(2\,|Ax| + 1)\end{aligned} \tag{7.4}$$

e

$$\left\|J^n_{t/n}x - S(t)x\right\| \leq 2t\,n^{-\frac{1}{2}}e^{4\alpha t}\,|Ax|\,. \tag{7.5}$$

Por i) do Teorema II-6.13 temos, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned}\left\|J^n_{t/n,r}J_{\lambda,r}x - J^n_{t/n,r}x\right\| &\leq (1 - \frac{t}{n}\omega_r)^{-n}\,\|J_{\lambda,r}x - x\| \\ &\leq (e^{\alpha t} + 1)\,\|J_{\lambda,r}x - x\|\end{aligned} \tag{7.6}$$

e

$$\|J_{\lambda,r}x - x\| = \lambda \|A_{\lambda,r}x\| \le \lambda(2\,|Ax| + 1). \tag{7.7}$$

Logo, por (7.2)-(7.7) tem-se, para $0 \le t \le T$,

$$\begin{aligned}\|S_r(t)x - S(t)x\| &\le 2T\,n^{-\frac{1}{2}}e^{4\alpha T}(3\,|Ax| + 1)\\ &\quad + \lambda(e^{\alpha T} + 1)(2\,|Ax| + 1) + \left\|J^n_{t/n,r}x - J^n_{t/n}x\right\|.\end{aligned} \tag{7.8}$$

Dado $\varepsilon > 0$ seja $\lambda, 0 < \lambda\alpha < 1/2$, tal que

$$\lambda(e^{\alpha T} + 1)(2\,|Ax| + 1) < \frac{\varepsilon}{3},$$

n tal que

$$2T\,n^{-\frac{1}{2}}e^{4\alpha T}(3\,|Ax| + 1) < \frac{\varepsilon}{3}$$

e, por ii), $r_0 > 0$ tal que

$$\left\|J^n_{t/n,r}x - J^n_{t/n}x\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo r tal que $0 < r < r_0$. Então, por (7.8), $\|S_r(t)x - S(t)x\| \le \varepsilon\ \forall\, r$ tal que $0 < r < r_0$, isto é, $S_r(t)x \to S(t)x$ em $[0,T]$, $\forall\, x \in D$. Além disto tem-se, para todo $\tau \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\|S(t)x - S_r(t)x\| &\le \|S(t)x - S(\tau)x\| + \|S(\tau)x - S_r(\tau)x\| + \|S_r(\tau)x - S_r(\tau)J_{\lambda,r}x\|\\ &\quad + \|S_r(\tau)J_{\lambda,r}x - S_r(t)J_{\lambda,r}x\| + \|S_r(t)J_{\lambda,r}x - S_r(t)x\|\end{aligned}$$

e como, por (2.12) e (7.1),

$$\|S(t)x - S(\tau)x\| \le 2\,e^{4\alpha T}\,|Ax|\,|t-\tau|\,,$$

$$\begin{aligned}\|S_r(\tau)J_{\lambda,r}x - S_r(t)J_{\lambda,r}x\| &\le 2\,e^{4\alpha T}\,|A_rJ_{\lambda,r}x|\,|t-\tau| = 2\,e^{4\alpha T}\,|A_{\lambda,r}x|\,|t-\tau|\\ &\le 2\,e^{4\alpha T}\,\|A_{\lambda,r}x\|\,|t-\tau| \le 2\,e^{4\alpha T}(2\,|Ax| + 1)\,|t-\tau|\,,\end{aligned}$$

$$\|S_r(\tau)x - S_r(\tau)J_{\lambda,r}x\| \le e^{\alpha T}\,\|x - J_{\lambda,r}x\| \le \lambda\, e^{\alpha T}(2\,|Ax| + 1)$$

e

$$\|S_r(t)J_{\lambda,r}x - S_r(t)x\| \le \lambda\, e^{\alpha T}(2\,|Ax| + 1)$$

segue-se que

$$\begin{aligned}\|S(t)x - S_r(t)x\| &\le \|S(\tau)x - S_r(\tau)x\| + 2\,e^{4\alpha T}(3\,|Ax| + 1)\,|t-\tau| \\ &+ 2\lambda\, e^{\alpha T}(2\,|Ax|+1) \le \|S(\tau)x - S_r(\tau)x\| + C_1\,|t-\tau| + C_2\lambda, \end{aligned} \tag{7.9}$$

onde $C_1 = 2\,e^{4\alpha T}(3\,|Ax|+1)$ e $C_2 = 2\,e^{\alpha T}(2\,|Ax|+1)$. Dado agora $\varepsilon > 0$, sejam $t_1, \ldots, t_N$ tais que $0 < t_1 < \cdots < t_N = T$, $t_j - t_{j-1} < \varepsilon/3C_1$, $j = 1, \ldots, N$, e r_j tal que $\|S(t_j) - S_r(t_j)\| < \varepsilon/3$ para $0 < r < r_j$. Ponhamos $r_0 = \min\{r_1, \ldots, r_N\}$ e $\lambda < \varepsilon/3C_2$. Se $t \in [0,T]$ tem-se, para algum j, $t \in [t_{j-1}, t_j]$ donde, fazendo $\tau = t_j$ em (7.9), $\|S(t)x - S_r(t)x\| < \varepsilon$ se $0 < r < r_0$ e $x \in D$. Logo a convergência de $S_r(t)x$ a $S(t)x$ é uniforme em $[0,T]$ $\forall\, x \in D$. Levando em conta que $\|S(t)x - S(t)y\| \le e^{\alpha T}\,\|x-y\|$ e $\|S_r(t)x - S_r(t)y\| \le e^{\alpha T}\,\|x-y\|$ segue-se que a convergência é uniforme em $[0,T]$ para todo $x \in \overline{D}$, o que completa a demonstração.

7.2 - Teorema: *Seja C um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach reflexivo, $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $\omega \ge 0$, tal que $\overline{D(A)} = C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A)$, S o semigrupo gerado por $-A$ sobre C e $\{H(r)\}$, $r > 0$, uma família de aplicações de C em C tal que*

i) $\|H(r)x - H(r)y\| \le M(r)\,\|x-y\| \quad \forall\, x, y \in C,$

onde $M(r) = 1 + \omega r + o(r)$ quando $r \to 0$, $M(r) \ge 1$.

ii) $J_{\lambda,r}x = \left(I + \lambda \frac{I - H(r)}{r}\right)^{-1} x \to J_\lambda x\ \forall\, x \in C,\ 0 < \lambda < \lambda_0.$

Então

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} H\left(\frac{t}{n}\right)^n x = S(t)x \quad \forall\, x \in \overline{D(A)},$

uniformemente nos intervalos compactos.

Demonstração: Pondo $A_r = (I - H(r))/r$, $r > 0$, temos $D(A_r) = \overline{D(A_r)} = C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A_r)$ e $A_r \in \mathcal{A}(\frac{M(r)-1}{r})$ pelo Exemplo II-7.5, d). Seja S_r o semigrupo gerado por $-A_r$. De ii) e do Teorema 7.1 resulta que $S_r(t)x \to S(t)x \; \forall\, x \in \overline{D(A)}$ e o limite é uniforme nos intervalos compactos. Como S_r é do tipo $(M(r)-1)/r$ tem-se

$$\begin{aligned}
&\|S_r(nr)x - H(r)^n x\| = \|S_r(r)^n x - H(r)^n x\| \le \|S_r(r)^n x - S_r(r)^n J_{\lambda,r}x\| \\
&+ \|S_r(r)^n J_{\lambda,r}x - H(r)^n J_{\lambda,r}x\| + \|H(r)^n J_{\lambda,r}x - H(r)^n x\| \\
&\le K_1(r,n)\,\|x - J_{\lambda,r}x\| + \|S_r(r)^n J_{\lambda,r}x - H(r)^n J_{\lambda,r}x\|\,,
\end{aligned} \tag{7.10}$$

onde $K_1(r,n) = e^{n(M(r)-1)} + M(r)^n$. Seja $\widetilde{S}$ o semigrupo gerado por $H(r) - I$ sobre C. Tem-se

$$\widetilde{S}_r(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}(I - H(r))\right)^{-n} x = \lim\left(I + \frac{tr}{n}\cdot\frac{I - H(r)}{r}\right)^{-n} x = S_r(tr)x$$

donde, tendo em vista o Corolário 3.15, segue-se pelo Teorema I-9.5 que

$$\begin{aligned}
&\|S_r(nr)J_{\lambda,r}x - H(r)^n J_{\lambda,r}x\| = \left\|\widetilde{S}_r(n)J_{\lambda,r}x - H(r)^n J_{\lambda,r}x\right\| \\
&\le K_2(r,n)\,\|A_r J_{\lambda,r}x\| = K_2(r,n)\,\|A_{\lambda,r}x\| = \lambda^{-1}K_2(n,r)\,\|x - J_{\lambda,r}x\|
\end{aligned}$$

onde

$$K_2(r,n) = r\,M(r)^n\, e^{n(M(r)-1)}\left[(n - n\,M(r))^2 + n\,M(r)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo em (7.10) tem-se

$$\|S_r(nr)x - H(r)^n x\| \le (K_1(r,n) + \lambda^{-1}K_2(r,n))\,\|x - J_{\lambda,r}x\|\,. \tag{7.11}$$

Se $x \in D(A)$, $0 < \lambda\omega < 1/2$ e se faz $r = t/n$ em (7.11) tem-se

$$\begin{aligned}
&\left\|S_{t/n}(t)x - H(t/n)^n x\right\| \le (K_1(t/n,n) + \lambda^{-1}K_2(t/n,n))\left\|x - J_{\lambda,t/n}x\right\| \\
&\le (K_1(t/n,n) + \lambda^{-1}K_2(t/n,n))(2\lambda\,|Ax| + \left\|J_\lambda x - J_{\lambda,t/n}x\right\|) \\
&\le 2\lambda\,K_1(t/n,n)\,|Ax| + 2K_2(t/n,n)\,|Ax| \\
&+ (K_1(t/n,n) + \lambda^{-1}K_2(t/n,n))\left\|J_\lambda x - J_{\lambda,t/n}x\right\|.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} M(t/n) = 1$, $\lim_{n\to\infty} M(t/n)^n = e^{\omega t}$ e $\lim_{n\to\infty} n(M(t/n)-1) = \omega t$, $K_1(t/n,n)$ e $K_2(t/n,n)$ são uniformemente limitados nos intervalos compactos. Portanto, $K_1(t/n,n) \leq C_1$ e $K_2(t/n,n) \leq C_2\, n^{-\frac{1}{2}}$ para $t \in [0,T]$, $T > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\|S(t)x - H(t/n)^n x\| &\leq \left\|S(t)x - S_{t/n}(t)x\right\| + \left\|S_{t/n}(t)x - H(t/n)^n x\right\| \\ &\leq \left\|S(t)x - S_{t/n}(t)x\right\| + 2\lambda\, C_1\, |Ax| + 2C_2\, n^{-\frac{1}{2}}\, |Ax| \\ &+ (C_1 + C_2\, \lambda^{-1}\, n^{-\frac{1}{2}})\left\|J_\lambda x - J_{\lambda,t/n}x\right\|. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, fixando λ de modo que $2\lambda C_1 |Ax| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e tomando n suficientemente grande para que a soma do primeiro com o terceiro termos do segundo membro de (7.12) seja menor que $\varepsilon/2$ (o que é possível pois $J_{\lambda,t/n}x \to J_\lambda x$ e $S_{t/n}(t)x \to S(t)x$ pelo que já foi demonstrado) tem-se $\|S(t)x - H(t/n)^n x\| < \varepsilon$, i.e., $\lim_{n\to\infty} H(t/n)^n x = S(t)x\ \forall\, x \in D(A)$, uniformemente nos intervalos compactos. Como, além disto, $||S(t)x - S(t)y|| \leq e^{\omega t}\, \|x - y\|$ e $\|H(t/n)^n x - H(t/n)^n y\| \leq M(t/n)^n\, \|x-y\|$ e $M(t/n)^n$ é limitado, segue-se que o resultado é válido $\forall x \in \overline{D(A)}$.

Vamos passar agora ao problema da geração de semigrupos. O que se pretende é mostrar que se X é um espaço de Banach reflexivo cuja norma é uniformemente diferenciável à Gateaux, C um subconjunto convexo e fechado de X e $S \in S_\omega(C)$ então existe um operador $A \in \mathcal{A}(\omega)$ tal que $-A$ gera S sobre C. Chega-se a esse resultado após a série de resultados preliminares estudados a seguir.

7.3 - Lema: *Seja X um espaço de Banach e (a_n), $n = 1, \ldots$ uma seqüência limitada de elementos de X. Então, para alguma subseqüência (a_{n_k}) de (a_n) existe o limite*

$$\lim_{k\to\infty} \|a_{n_k} - x\|$$

para todo $x \in X$.

Demonstração: Seja $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|$ e $Q = \prod_{x\in X} [0, M + \|x\|]$. Munido da topologia produto, Q é um espaço compacto pelo Teorema de Tychonoff. Seja p_n o ponto de Q

definido por $\Pi_x(p_n) = \|a_n - x\|$, onde Π_x é a projeção de Q sobre $[0, M + \|x\|]$. Como Q é compacto, uma subseqüência (p_{n_k}) de (p_n) converge. Se $p = \lim\limits_{k\to\infty} p_{n_k}$ então

$$\lim_{k\to\infty} \Pi_x(p_{n_k}) = \Pi_x(\lim_{k\to\infty} p_{n_k}) = \Pi_x(p)$$

visto que Π_x é contínua. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} \|a_{n_k} - x\| = \Pi_x(p) \qquad \forall\, x \in X,$$

q.e.d..

7.4 - Lema: *Se X é um espaço de Banach, a função $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^+$ definida por $\varphi(x) = \Pi_x(p)$ é contínua, convexa e coerciva, i.e., $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = \infty$.*

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |\Pi_x(p) - \Pi_{x_0}(p)| &= \left| \lim_{k\to\infty} \|a_{n_k} - x\| - \lim_{k\to\infty} \|a_{n_k} - x_0\| \right| \\ &\leq \|x - x_0\|\,, \end{aligned}$$

o que mostra que φ é contínua. De $x, y \in X$ e $t \in [0,1]$ vem

$$\begin{aligned} \varphi(tx + (1-t)y) &= \lim_{k\to\infty} \|a_{n_k} - tx - (1-t)y\| \\ &= \lim_{k\to\infty} \|ta_{n_k} + (1-t)a_{n_k} - tx - (1-t)y\| \\ &\leq \lim_{k\to\infty} (t\,\|a_{n_k} - x\| + (1-t)\,\|a_{n_k} - y\|) \\ &= t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \end{aligned}$$

i.e., φ é convexa. Finalmente, φ é coerciva porque

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \|a_{n_k} - x\| \geq \limsup_{k\to\infty} |\|a_{n_k}\| - \|x\|| \to \infty,$$

quando $\|x\| \to \infty$.

7.5 - Lema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo, C um subconjunto convexo e fechado de X, $m = \inf\{\varphi(z); z \in C\}$ e $C_0 = \{\xi \in C; \varphi(\xi) = m\}$. Então,*

i) *C_0 é um subconjunto convexo, fechado e não vazio de C;*

ii) *Se, além de reflexivo, X é um espaço com a norma uniformemente diferenciável à Gateaux e (x_n), $n = 1, \dots$, é uma seqüência limitada e tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|$ existe $\forall\, x \in X$, então*

$$\limsup_{n\to\infty} \langle z - \xi, F(x_n - \xi)\rangle \leq 0, \quad \forall\, \xi \in C_0, \forall\, z \in C. \tag{7.13}$$

Demonstração: Os conjuntos de nível $N(\lambda, \varphi)$ são fechados pela Proposição I-3.8 e convexos, pela Proposição I-3.19. Logo, $C_0 = \bigcap\limits_{\lambda \geq m} N(\lambda, \varphi) \cap C$ é convexo e fechado e, pela Proposição I-3.25 φ atinge seu mínimo, isto é, $C_0 \neq \phi$, o que demonstra i). Pelo Teorema I-6.6, F é uma função unívoca e pelo Exemplo I-4.9, $F(x) = \partial(\|x\|^2/2)$. Tem-se, então, para todo $\xi \in C_0$, todo $z \in C$ e $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|x_n - \xi\|^2 - \frac{1}{2}\|x_n - \xi - \alpha(z-\xi)\|^2 &\geq \alpha\langle z - \xi, F(x_n - \xi - \alpha(z - \xi))\rangle \\ &= \alpha\langle z - \xi, F(x_n - \xi - \alpha(z-\xi)) - F(x_n - \xi) + F(x_n - \xi)\rangle \\ &= \alpha\langle z - \xi, F(x_n - \xi)\rangle + \alpha\langle z - \xi, F(x_n - \xi - \alpha(z - \xi)) - F(x_n - \xi)\rangle.\end{aligned}$$

Pelo Teorema I-6.10, F é uniformemente contínua nos conjuntos limitados relativamente à topologia da norma de X e à topologia fraca–* de X^*. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe α_0, $0 < \alpha_0 \leq 1$, tal que para $0 < \alpha < \alpha_0$ tem-se

$$|\langle z - \xi, F(x_n - \xi - \alpha(z - \xi)) - F(x_n - \xi)\rangle| < \varepsilon \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para $0 < \alpha < \alpha_0$ e $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}\|x_n - \xi\|^2 - \frac{1}{2}\|x_n - \xi - \alpha(z - \xi)\| \geq \alpha\langle z - \xi, F(x_n - \xi)\rangle - \alpha\varepsilon.$$

Daí vem, no limite quando $n \to \infty$, tendo em vista que $\xi \in C_0$,

$$0 \geq \frac{1}{2}\,\varphi(\xi)^2 - \frac{1}{2}\,\varphi(\xi + \alpha(z-\xi))^2 \geq \alpha \limsup_{n\to\infty} \langle z-\xi, F(x_n-\xi)\rangle - \alpha\varepsilon,$$

donde $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle z-\xi, F(x_n-\xi)\rangle \leq 0$, q.e.d..

7.6 - Lema: *Seja X um espaço de Banach, C um subconjunto convexo e fechado de X e S um semigrupo do tipo $\omega \in \mathbb{R}$ sobre C. Então, se $\lambda > 0$ e $\lambda\omega < 1$, existe $t_0 > 0$ tal que para $0 < t < t_0$, o resolvente da aplicação $(I - S(t))/t$, i.e., o operador*

$$J_{\lambda,t} = \left(I + \lambda \frac{I - S(t)}{t}\right)^{-1}, \tag{7.14}$$

aplica C em C e $\forall\, x \in C$

$$S(t)J_{\lambda,t}x = J_{\lambda,t}x + \frac{t}{\lambda}(J_{\lambda,t}x - x). \tag{7.15}$$

Demonstração: Foi visto no Exemplo II-7.5, d) que $J_{\lambda,t}$ aplica C em C se $\lambda e^{\omega t}/(t + \lambda) < 1$. Mas essa desigualdade decorre da desigualdade $(e^{\omega t} - 1 - \omega t)/t < (1 - \lambda\omega)/\lambda$ que é verdadeira para t suficientemente pequeno uma vez que $\lambda\omega < 1$. Logo existe $t_0 > 0$ tal que $J_{\lambda,t}$ aplica C em C se $0 < t < t_0$. A fórmula (7.15) é uma decorrência imediata de (7.14).

7.7 - Proposição: *Seja X um espaço de Banach reflexivo com a norma uniformemente diferenciável à Gateaux, C um subconjunto convexo e fechado de X e S um semigrupo do tipo ω sobre C. Então, se $\lambda > 0$ e $\lambda\omega < 1$, o limite de $J_{\lambda,t}x$, quando $t \to 0$, existe e pertence a C, para todo $x \in C$.*

A Proposição 7.7 é conseqüência da série de lemas a seguir. Em todos eles serão mantidas as hipóteses da Proposição 7.7.

7.8 - Lema: *Pondo*

$$\alpha(T, x) = \sup_{0 \leq t \leq T} \|S(t)x - x\|, \qquad T \geq 0,$$

tem-se

$$\lim_{T\to 0} \alpha(T,x) = 0 \qquad \forall\, x \in C.$$

Demonstração: Conseqüência imediata da continuidade forte de S.

7.9 - Lema: *Tem-se, para todo $T > 0$ e todo $x \in C$,*

$$\limsup_{t\to 0} \|J_{\lambda,t}x - x\| \leq \left(2 + \frac{\lambda}{T}\right) \alpha(T,x) \quad \textit{se} \quad \omega = 0 \tag{7.16}$$

$$\limsup_{t\to 0} \|J_{\lambda,t}x - x\| \leq \left(2 + \frac{\lambda\omega e^{-\omega T}}{1-e^{\omega T}}\right) \frac{\alpha(T,x)}{1-\lambda\omega} \quad \textit{se} \quad \omega \neq 0. \tag{7.17}$$

Demonstração: Pondo, para simplificar a escrita, $y_t = J_{\lambda,t}x$, $0 < t < t_0$, tem-se por (7.15) e $S \in Q_\omega(C)$,

$$e^{\omega t}\, \|y_t - S(kt)x\| \geq \|S(t)y_t - S((k+1)t)x\|$$

$$= \left\| \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right) y_t - S((k+1)t)x - \frac{t}{\lambda}x \right\| \geq \|y_t - S((k+1)t)x\|$$

$$+ \frac{t}{\lambda}(\|y_t - S((k+1)t)x\| - \|S((k+1)t)x - x\|).$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{-(k+1)\omega t}$ tem-se

$$e^{-k\omega t}\, \|y_t - S(kt)x\| \geq e^{-(k+1)\omega t}\, \|y_t - S((k+1)t)x\|$$

$$+ \frac{t}{\lambda}\, e^{-(k+1)\omega t}(\|y_t - S((k+1)t)x\| - \|S((k+1)t)x - x\|).$$

Fazendo $k = 0, 1, \ldots, n-1$ e somando

$$\|y_t - x\| \geq e^{-n\omega t}\, \|y_t - S(nt)x\|$$

$$+ \frac{t}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} e^{-k\omega t}(\|y_t - S(kt)x\| - \|S(kt)x - x\|). \tag{7.18}$$

Se $\omega = 0$ tem-se, pois,

$$\|y_t - x\| \geq \|y_t - S(nt)x\| + \frac{t}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}(\|y_t - S(kt)x\| - \|S(kt)x - x\|)$$

e como

$$\|y_t - S(kt)x\| = \|(y_t - x) - (S(kt)x - x)\|$$

$$\geq \|y_t - x\| - \|S(kt)x - x\| \geq \|y_t - x\| - \alpha(nt, x), k = 1, \ldots, n \tag{7.19}$$

segue-se que

$$\|y_t - x\| \geq \|y_t - x\| - \alpha(nt, x) + \frac{nt}{\lambda}\|y_t - x\| - \frac{2nt}{\lambda}\alpha(nt, x)$$

donde $\forall\, n$ e $0 < t < t_0$

$$\|y_t - x\| \leq \left(2 + \frac{\lambda}{nt}\right)\alpha(nt, x).$$

Fazendo $n = [T/t]$ e tomando o limite superior de ambos os membros tem-se

$$\limsup_{t\to 0}\|y_t - x\| \leq \left(2 + \frac{\lambda}{T}\right)\alpha(T, x)$$

que é a (7.16). Seja $\omega \neq 0$. Por (7.18) e (7.19)

$$\|y_t - x\| \geq e^{-n\omega t}(\|y_t - x\| - \alpha(nt, x)) + \frac{t}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} e^{-k\omega t}(\|y_t - x\| - 2\alpha(nt, x))$$

$$= \|y_t - x\|\left(e^{-n\omega t} + \frac{t}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} e^{-k\omega t}\right) - \alpha(nt, x)\left(e^{-n\omega t} + \frac{2t}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} e^{-k\omega t}\right)$$

e, portanto,

$$\|y_t - x\| \leq \alpha(nt, x)\left(e^{-n\omega t} + \frac{2t}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} e^{-k\omega t}\right)\left(e^{-n\omega t} - 1 + \frac{t}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} e^{-k\omega t}\right)^{-1}$$

$$= \alpha(nt, x)\left(e^{-n\omega t} + \frac{2t}{\lambda}\cdot\frac{1 - e^{-n\omega t}}{e^{\omega t} - 1}\right)\left(e^{-n\omega t} - 1 + \frac{t}{\lambda}\cdot\frac{1 - e^{-n\omega t}}{e^{\omega t} - 1}\right)^{-1}.$$

Fazendo $n = [T/t]$, passando ao limite superior quando $t \to 0$ e tendo em vista que $\lambda\omega < 1$ tem-se (7.17).

7.10 - Lema: *Para todo $z \in C$, pondo $y_t = J_{\lambda,t}x$, é válida a desigualdade*

$$\frac{2t}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} e^{-2k\omega t}\langle y_t - x, F(y_t - S(kt)z)\rangle \leq \|y_t - z\|^2 - e^{-2n\omega t}\|y_t - S(nt)z\|^2 . \qquad (7.20)$$

Demonstração: Por (7.15), o Exemplo I-4.9 e tendo em vista que, por hipótese, $S \in Q_\omega(C)$ tem-se

$$e^{2\omega t}\|y_t - S(kt)z\|^2 \geq \|S(t)y_t - S((k+1)t)z\|^2 = \left\|y_t - S((k+1)t)z + \frac{t}{\lambda}(y_t - x)\right\|^2$$

$$\geq \|y_t - S((k+1)t)z\|^2 + \frac{2t}{\lambda}\langle y_t - x, F(y_t - S((k+1)t)z)\rangle.$$

A fórmula (7.20) segue daí multipllicando ambos os membros por $e^{-2(k+1)\omega t}$, fazendo $k = 0, \dots, n-1$ e somando.

7.11 - Lema: *Dado $\varepsilon > 0$, para cada $z \in C$ existe um $T > 0$ tal que se $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq kt \leq T$ e $0 < t < t_0$, então pondo $y_t = J_{\lambda,t}x$ tem-se*

$$|\langle y_t - x, F(y_t - z)\rangle - \langle y_t - x, F(y_t - S(kt)z)\rangle| < \varepsilon. \qquad (7.21)$$

Demonstração: Tem-se

$$\langle y_t - x, F(y_t - z)\rangle - \langle y_t - x, F(y_t - S(kt)z)\rangle = \langle y_t - z + z - x, F(y_t - z)\rangle$$

$$- \langle y_t - S(kt)z + S(kt)z - x, F(y_t - S(kt)z)\rangle = \|y_t - z\|^2 + \langle z - x, F(y_t - z)\rangle$$

$$- \|y_t - S(kt)z\|^2 - \langle S(kt)z - x, F(y_t - S(kt)z)\rangle$$

$$= (\|y_t - z\| - \|y_t - S(kt)z\|)(\|y_t - z\| + \|y_t - S(kt)z\|)$$

$$+ \langle z - x, F(y_t - z) - F(y_t - S(kt)z)\rangle - \langle S(kt)z - z, F(y_t - S(kt)z)\rangle.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad |\langle y_t - x, F(y_t - z)\rangle - \langle y_t - x, F(y_t - S(kt)z)\rangle| \\
&\le \|S(kt)z - z\| \left(\|y_t - z\| + \|y_t - S(kt)z)\|\right) + |\langle z - x, F(y_t - z) - F(y_t - S(kt)z)\rangle| \\
&+ \|S(kt)z - z\| \, \|y_t - S(kt)z\| \le \alpha(T, z)(\|y_t - z\| + 2\,\|y_t - S(kt)z\|) \\
&+ |\langle z - x, F(y_t - z) - F(y_t - S(kt)z)\rangle| \,.
\end{aligned}
$$

Como $S(kt)z \to z$ quando $kt \to 0$ e, pelo Lema 7.9, y_t é limitado para $0 < t < t_0$, segue-se que para kt suficientemente pequeno tem-se

$$\|y_t - z\| + 2\,\|y_t - S(kt)z\| < K,$$

onde K é uma constante. Além disto, pelo Lema 7.8, para T suficientemente pequeno tem-se $\alpha(T, x) < \varepsilon/2K$. Logo, a primeira parcela do último membro da desigualdade anterior é menor que $\varepsilon/2$ para $0 \le kt \le T$ e $T > 0$ suficientemente pequeno o mesmo acontecendo com a segunda uma vez que F é uniformemente demicontínua nos conjuntos limitados. Logo, existe $T > 0$ tal que para $0 \le kt \le T$ tem-se (7.21).

7.12 - Lema: *Se $\lambda > 0$, $\lambda\omega < 1$ e $t_m \to 0$, então uma subseqüência de $(J_{\lambda,t_m}x)$ converge para um elemento de C.*

Demonstração: Como, pelo Lema 7.9, a seqüência $(J_{\lambda,t_m}x)$ é limitada segue-se, pelo Lema 7.3, que existe uma subseqüência de (t_m), que para simplicidade de notação será representada ainda por (t_m), tal que, pondo $J_{\lambda,t_m} = y_m$, o limite

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m - z\| = \varphi(z)$$

existe para todo $z \in X$. A seguir, pelo Lema 7.5 existe um subconjunto C_0 de C, convexo, fechado, não vazio e tal que $\varphi(\xi) \le \varphi(z)$ para todo $\xi \in C_0$ e todo $z \in C$. Pelos Lemas 7.10 e 7.11 existe $T > 0$ para o qual (7.20) e (7.21) são válidas. Pondo, então,

$n_m = [T/t_m]$ tem-se

$$\frac{2t_m}{\lambda}\sum_{k=1}^{n_m} e^{-2k\omega t_m}\langle y_m - x, F(y_m - z)\rangle$$

$$\leq \frac{2t_m}{\lambda}\sum_{k=1}^{n_m} e^{-2k\omega t_m}[\langle y_m - x, F(y_m - S(kt_m)z)\rangle + \varepsilon]$$

$$\leq \|y_m - z\|^2 - e^{-2n_m\omega t_m}\|y_m - S(n_m t_m)z\|^2$$

$$+ \frac{2t_m}{\lambda}\varepsilon\sum_{k=1}^{n_m} e^{-2k\omega t_m}. \tag{7.22}$$

Se $\omega = 0$ tem-se, pois, fazendo $z = \xi \in C_0$ e passando ao limite superior quando $t \to 0$

$$\frac{2T}{\lambda}\limsup_{m\to\infty}\langle y_m - x, F(y_m - \xi)\rangle \leq \varphi(\xi)^2 - \varphi(S(T)\xi)^2 + \frac{2T}{\lambda}\varepsilon \leq \frac{2T}{\lambda}\varepsilon$$

visto que $\varphi(\xi)^2 \leq \varphi(S(T)\xi)^2$. Assim,

$$\limsup_{m\to\infty}\langle y_m - x, F(y_m - \xi)\rangle \leq 0.$$

Por outro lado, de acordo com (7.13),

$$\limsup_{m\to\infty}\langle x - \xi, F(y_m - \xi)\rangle \leq 0. \tag{7.23}$$

Somando tem-se, então,

$$\varphi(\xi)^2 = \limsup_{m\to\infty}\|y_m - \xi\|^2 = \limsup_{m\to\infty}\langle y_m - \xi, F(y_m - \xi)\rangle \leq 0.$$

Logo, $\varphi(\xi) = 0$ donde, $\lim_{m\to\infty} y_m = \xi$, i.e., a seqüência (y_n) converge para $\xi \in C$.

Se $\omega \neq 0$ tem-se, fazendo $z = \xi \in C_0$ em (7.22) e passando ao limite quando $m \to \infty$,

$$\frac{(1-e^{-2\omega T})}{\lambda\omega} \limsup_{m\to\infty} \langle y_m - x, F(y_m - \xi)\rangle \leq \varphi(\xi)^2 - e^{-2\omega T}\varphi(S(T)\xi)^2 + \frac{(1-e^{-2\omega T})}{\lambda\omega}\varepsilon,$$

donde, tendo em vista que $\varphi(\xi) \leq \varphi(S(T)\xi)$ e que $(1-e^{-2\omega T})/\lambda\omega > 0$,

$$\limsup_{m\to\infty} \langle y_m - x, F(y_m - \xi)\rangle \leq \lambda\omega\,\varphi(\xi)^2 + \varepsilon$$

e, pela arbitrariedade de ε,

$$\limsup_{m\to\infty} \langle y_m - x, F(y_m - \xi)\rangle \leq \lambda\omega\,\varphi(\xi)^2.$$

Logo, tendo em vista (7.23),

$$\limsup_{m\to\infty} \|y_m - \xi\|^2 \leq \lambda\omega\,\varphi(\xi)^2$$

ou seja $(1-\lambda\omega)\varphi(\xi)^2 \leq 0$. Portanto $\varphi(\xi)^2 = 0$ uma vez que, por hipótese, $\lambda\omega < 1$. Assim, como no caso em que $\omega = 0$, (y_m) converge para $\xi \in C$, q.e.d..

7.13 - Lema: *Seja $\lambda > 0$ e $\lambda\omega < 1$. Se $J_{\lambda,t_m}x \to \xi \in C$ e $J_{\lambda,s_m}x \to \xi' \in C$, então $\xi' = \xi$.*

Demonstração: Como anteriormente, os casos em que $\omega = 0$ e $\omega \neq 0$ serão considerados separadamente.

Seja $\omega = 0$. Tendo em vista que F é contínua na topologia fraca–* tem-se, passando (7.22) ao limite quando $m \to \infty$,

$$\frac{2T}{\lambda}\langle \xi - x, F(\xi - z)\rangle \leq \|\xi - z\|^2 - \|\xi - S(T)z\|^2 + \frac{2T}{\lambda}\varepsilon.$$

Fazendo $z = y_T = J_{\lambda,T}x$ tem-se, por (7.15) e pelo Exemplo I-4.9,

$$\begin{aligned}\frac{2T}{\lambda}\langle \xi - x, F(\xi - y_T)\rangle &\le \|\xi - y_T\|^2 - \|\xi - S(T)y_T\|^2 + \frac{2T}{\lambda}\varepsilon \\ &\le 2\langle F(\xi - y_T), S(T)y_T - y_T\rangle + \frac{2T}{\lambda}\,\varepsilon \\ &\le \frac{2T}{\lambda}\langle F(\xi - y_T), y_T - x\rangle + \frac{2T}{\lambda}\varepsilon.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \xi - x, F(\xi - y_T)\rangle \le \langle F(\xi - y_T), y_T - x\rangle + \varepsilon$$

donde, pondo $T = s_m$ e passando ao limite quando $m \to \infty$ tem-se

$$\langle \xi - x, F(\xi - \xi')\rangle \le \langle F(\xi - \xi'), \xi' - x\rangle + \varepsilon$$

e, finalmente, pela arbitrariedade de ε, $\|\xi - \xi'\| \le 0$, donde $\xi' = \xi$.

Seja $\omega \ne 0$. De (7.22) vem, no limite quando $m \to \infty$,

$$\frac{1 - e^{-2\omega T}}{\lambda\omega}\langle \xi - x, F(\xi - z)\rangle \le \|\xi - z\|^2 - e^{-2\omega T}\,\|\xi - S(T)z\|^2 + \frac{1 - e^{-2\omega T}}{\lambda\omega}\varepsilon.$$

Fazendo $z = y_T$ tem-se, com argumentação análoga à do caso em que $\omega = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1 - e^{-2\omega T}}{\lambda\omega}\langle \xi - x, F(\xi - y_T)\rangle &\le (1 - e^{-2\omega T})\,\|\xi - y_T\|^2 \\ &+ \frac{2T}{\lambda}e^{-2\omega T}\langle F(\xi - y_T), y_T - x\rangle + \frac{1 - e^{-2\omega T}}{\lambda\omega}\varepsilon.\end{aligned}$$

Pondo $T = s_m$ e passando ao limite quando $m \to \infty$ tem-se

$$\langle \xi - x, F(\xi - \xi')\rangle \le \lambda\omega\,\|\xi - \xi'\|^2 + \langle F(\xi - \xi'), \xi' - x\rangle + \varepsilon$$

donde, pela arbitrariedade de ε, $(1 - \lambda\omega)\,\|\xi - \xi'\|^2 \le 0$ e, portanto, $\xi = \xi'$ visto que, por hipótese, $\lambda\omega < 1$.

7.14 - Demonstração da Proposição 7.7: Pelo Lema 7.12, existe uma seqüência $(J_{\lambda,t_m}x)$ que converge a um elemento $\xi \in C$. Se $J_{\lambda,t}x$ não fosse convergente a ξ haveria uma seqüência (s_m) e um $\varepsilon > 0$ tais que $\|J_{\lambda,s_m}x - \xi\| \geq \varepsilon$, $m = 1, \ldots$. Mas, pelo Lema 7.12, uma subseqüência de $(J_{\lambda,s_m}x)$ converge a um certo $\xi' \in C$. Então $\|\xi - \xi'\| \geq \varepsilon$ em desacordo com o Lema 7.13. Logo $J_{\lambda,t}x$ converge para um elemento de C, q.e.d..

7.15 - Proposição: *Satisfeitas as hipóteses da Proposição 7.7 e pondo*

$$J_\lambda x = \lim_{t\to 0} J_{\lambda,t}x = \lim_{t\to 0} y_t,$$

o operador $\widetilde{A}$ *definido por*

$$\widetilde{A} = \left\{ \left(J_\lambda x, \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} \right); x \in C, \lambda > 0, \lambda\omega < 1 \right\} \tag{7.24}$$

tem as seguintes propriedades:

i) $\overline{D(\widetilde{A})} = C$

ii) $C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda\widetilde{A})$

iii) $\widetilde{A} \in \mathcal{A}(\omega)$

iv) $J_\lambda^{\widetilde{A}} x = J_\lambda x \quad \forall\, x \in C.$

Demonstração: i) Pela Proposição 7.7, $J_\lambda x = \lim_{t\to 0} J_{\lambda,t}x$ existe e pertence a C para todo $x \in C$. Logo, $D(\widetilde{A}) \subset C$. Além disto, $\forall\, x \in C$ tem-se pelo Lema 7.9,

$$\limsup_{\lambda\to 0} \|J_\lambda x - x\| \leq 2\alpha(T, x) \quad \forall\, T > 0.$$

Logo, $\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = x$ pelo Lema 7.8 e, portanto, $C \subset \overline{D(\widetilde{A})}$.

ii) Como por hipótese $\lambda > 0$ e $\lambda\omega < 1$ de $x \in C$ vem $x = J_\lambda x + x - J_\lambda x = J_\lambda x + \lambda\widetilde{A}J_\lambda x = (I + \lambda\widetilde{A})J_\lambda x$, donde $x \in \operatorname{Im}(I + \lambda\widetilde{A})$ e, portanto, $C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda\widetilde{A})$.

iii) $J_{\lambda,t}$ é o resolvente de $(I - S(t))/t$ e $(I - S(t))/t \in \mathcal{A}((e^{\omega t} - 1)/t)$. Logo,

$$\left(J_{\lambda,t}x, \frac{x - J_{\lambda,t}x}{\lambda} \right) \in \frac{I - S(t)}{t} \qquad \forall\, x \in C$$

e para $\lambda, \mu, \rho > 0$ tem-se

$$\|J_{\lambda,t}x - J_{\mu,t}y\|$$

$$\leq \left\| J_{\lambda,t}x - J_{\mu,t}y + \rho\left(\frac{x - J_{\lambda,t}x}{\lambda} + \frac{e^{\omega t}-1}{t}J_{\lambda,t}x - \frac{y - J_{\mu,t}y}{\mu} - \frac{e^{\omega t}-1}{t}J_{\mu,t}y\right)\right\|.$$

No limite quando $t \to 0$ tem-se, pois,

$$\|J_\lambda x - J_\mu y\| \leq \left\| J_\lambda x - J_\mu y + \rho(\widetilde{A}J_\lambda x + \omega J_\lambda x - \widetilde{A}J_\mu y - \omega J_\mu y)\right\|,$$

donde $\widetilde{A} \in \mathcal{A}(\omega)$.

$$\text{iv) } x = J_\lambda x + \lambda\frac{x - J_\lambda x}{\lambda} = J_\lambda x + \lambda \widetilde{A} J_\lambda x \text{ donde } J_\lambda^{\widetilde{A}} x = J_\lambda x \ \forall\, x \in C.$$

7.16 - Proposição: *Seja X um espaço de Banach reflexivo e com a norma uniformemente diferenciável à Gateaux, C um subconjunto convexo e fechado de X e $S \in Q_\omega(C)$. Então o domínio do gerador infinitesimal forte, A_0, de S é denso em C.*

Demonstração: Seja $\lambda > 0$ e $\lambda\omega < 1$. Pela Proposição 7.7, $J_{\lambda,t}x$ converge para cada $x \in C$. Pondo, como anteriormente, $J_\lambda x = \lim_{t\to 0} J_{\lambda,t}x = \lim_{t\to 0} y_t$, tem-se

$$\|S(kt)y_t - y_t\| \leq \|S(kt)y_t - S((k-1)t)y_t\| + \|S((k-1)t)y_t - y_t\|$$

$$\leq e^{(k-1)\omega t}\,\|S(t)y_t - y_t\| + \|S((k-1)t)y_t - y_t\|.$$

Fazendo $k = 1, \dots, n$, somando e tendo em vista (7.15) tem-se

$$\|S(nt)y_t - y_t\| \leq \|S(t)y_t - y_t\| \sum_{k=1}^{n} e^{(k-1)\omega t} \leq \left\|\frac{t}{\lambda}(y_t - x)\right\| \sum_{k=1}^{n} e^{(k-1)\omega t}$$

$$= \frac{nt}{\lambda h}\,\|y_t - x\|\,\frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{(k-1)\omega t}.$$

Fazendo, agora, $n = [h/t]$ e passando ao limite quando $t \to 0$ tem-se

$$\|S(h)J_\lambda x - J_\lambda x\| \leq \frac{1}{\lambda}\,\|J_\lambda x - x\| \int_0^h e^{\omega\tau}\,d\tau,$$

donde

$$\liminf_{h\to 0} \left\| \frac{S(h)J_\lambda x - J_\lambda x}{h} \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \|J_\lambda x - x\| .$$

Pela Proposição 6.1 segue-se daí que a função $t \to S(t)J_\lambda x$ é lipschitziana em todo intervalo $[0,T]$, $0 < T < \infty$ e, portanto, derivável quase sempre em $[0,\infty)$, pelo Teorema I-8.14. Dado, pois, $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que $S(t)J_\lambda x$ é diferenciável em t_0 e $\|S(t_0)J_\lambda x - J_\lambda x\| < \varepsilon/2$. Pela Proposição 6.3, $S(t_0)J_\lambda x \in D(A_0)$. Além disto pelos lemas 7.8 e 7.9 existe $\lambda > 0$, $\lambda\omega < 1$, tal que $\|J_\lambda x - x\| < \varepsilon/2$. Logo, $\|S(t_0)J_\lambda x - x\| < \varepsilon$ o que demonstra que $D(A_0)$ é denso em C.

7.17 - Teorema: *Seja X um espaço de Banach reflexivo com a norma uniformemente diferenciável no sentido de Gateaux, C um subconjunto convexo e fechado de X e $S \in Q_\omega(C)$. Então existe um operador $A \in \mathcal{A}(\omega)$ tal que $\overline{D(A)} = C \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A)$, $0 < \lambda < \lambda_0$, e $-A$ gera S, i.e.,*

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x, \qquad \forall\, x \in C,$$

uniformemente nos intervalos compactos $[0,T]$.

Demonstração: Seja $A = \overline{\widetilde{A} \cup A_0}$ onde $\widetilde{A}$ é o operador definido por (7.24) e A_0 o gerador infinitesimal de S. Tem-se que $\overline{D(A)} = C$, A é fechado e $\overline{D(A)} \subset \operatorname{Im}(I + \lambda A)$, como decorre imediatamente das propriedades de $\widetilde{A}$ e A_0. Para demonstrar que $A \in \mathcal{A}(\omega)$ é bastante mostrar que $\widetilde{A} \cup A_0 \in \mathcal{A}(\omega)$ e como A_0 e $\tilde{A}$ pertencem a $\mathcal{A}(\omega)$ pelo Corolário 6.5 e a Proposição 7.15, respectivamente, é bastante mostrar que $\forall\, z \in D(A_0)$ tem-se

$$\|J_\lambda x - z\| \leq \left\| J_\lambda x - z + \mu \left(\frac{x - J_\lambda x}{\lambda} + \omega J_\lambda x - A_0 z - \omega z \right) \right\| .$$

Mas esta relação é obtida passando ao limite a relação

$$\|y_t - z\| \leq \left\| y_t - z + \mu \left(\frac{x - y_t}{\lambda} + \frac{e^{\omega t} - 1}{t} y_t - \frac{z - S(t)z}{t} - \frac{e^{\omega t} - 1}{t} z \right) \right\| ,$$

onde $y_t = J_{\lambda,t}x$, que, em virtude de (7.15), coincide com

$$\|y_t - z\| \leq \left\| y_t - z + \mu\left(\frac{y_t - S(t)y_t}{t} + \frac{e^{\omega t}-1}{t}y_t - \frac{z - S(t)z}{t} - \frac{e^{\omega t}-1}{t}z\right)\right\|$$

e esta é válida uma vez que $(I - S(t))/t \in \mathcal{A}((e^{\omega t}-1)/t)$, pelo Exemplo II-6.14. Finalmente, se $\widetilde{S}$ é, de acordo com o Teorema 2.1, o semigrupo gerado por $-A$, o Corolário 3.15 assegura que a função $u(t) = \widetilde{S}(t)x$, $x \in C$, é solução forte do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ \qquad u(0) = x \end{cases} \tag{7.25}$$

Por outro lado, se $x \in D(A_0), S(t)x$ é lipschitziana, pela Proposição 6.1, logo diferenciável quase sempre pelo Teorema I-8.14. Por ii) da Proposição 6.3 tem-se, então,

$$-\frac{dS(t)x}{dt} \in A_0 S(t)x \quad \text{quase sempre em} \quad [0,\infty)$$

e, portanto, $S(t)x$ é solução do problema (7.25). Mas então $\widetilde{S}(t)x = S(t)x\ \forall\, x \in D(A_0)$ e como, pela Proposição 7.16, $D(A_0)$ é denso em C, segue-se que $\widetilde{S}(t)x = S(t)x\ \forall\, x \in C$. Desse modo $-A$ gera S, q.e.d..

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Às referências bibliográficas feitas no texto acrescentem-se as que seguem.

Capítulo I – O que foi dito no parágrafo 3 é essencialmente devido a Fenchel [1] e [2] e a Moreau [2]; o exposto nos parágrafos 3 e 4 é devido a Moreau [1] e [2] e a Rockafellar [4] e [5]; o Teorema 9.1 é devido a Crandall [1] e o Teorema 9.5 a Chernoff [1], no caso em que J é linear, e a Miyadera e Oharu [1] no caso geral. A demonstração apresentada no texto é extraída de Brezis-Pazy [2] e Brezis [3].

Capítulo II – A teoria exposta nos parágrafos 1 e 2 é devida principalmente a: 1) Minty [1], [2], [3] e [4] que estendeu para os espaços de dimensão infinita a Proposição 1.7, demonstrada por Debrunner e Flor [1] para os espaços de dimensão finita, demonstrou o Teorema 2.13 no caso dos espaços de Hilbert, demonstrou o Corolário 2.17 também no caso dos espaços de Hilbert e estudou os exemplos 2.7 e 2.8; 2) Browder [3] e [6] que estendeu aos espaços de Banach reflexivos o Teorema 2.13 e o Corolário 2.17 demonstrados por Minty nos espaços de Hilbert; 3) Rockafellar [1], [2], [4] e [5] que demonstrou as proposições 1.7 e 2.15 e estudou o operador subdiferencial.

§**4** – Ao que já foi mencionado no texto acrescente-se que o Teorema 4.6 é devido a Rockafellar [2] e o Teorema 4.8 a Crandall-Pazy [2]. Aplicações são encontradas em Brezis-Crandall-Pazy [1].

§**5** – A noção de operador ciclicamente monótono é devida a Rockafellar [5] que demonstrou o Teorema 5.4. O Teorema 5.6 é devido a Moreau [1] e [2] e a Brezis [3].

§**6** – A equivalência de i) e iv) no Teorema 6.2 é devida a Kato [3]; os exemplos 6.6 aparecem em Crandall [3] onde há indicações detalhadas a respeito; as propriedades demonstradas no Teorema 6.13 aparecem em Kato [3], e Crandall-Pazy [3]; as proposições 6.16 e 6.17 aparecem em Crandall-Pazy [1], a Proposição 7.2 é de Komura [1], a Proposição 7.11 de Kato [3], o Lema 7.19 de Crandall-Pazy [3] e iii) do Corolário 7.23 de Minty.

§**8** – O estudo das secções foi desenvolvido por Crandall e Pazy [2] e [3] no caso em que X e X^* são uniformemtne convexos e estendidos por Brezis [5] ao caso em que apenas X^* é uniformemente convexo.

§**9** – O Teorema 3.4 está demonstrado em Crandall-Pazy [2], o Teorema 9.5 é uma generalização de um resultado de Barbu [1] e o Teorema 9.7 aparece em Okazawa [1].

Capítulo III - §**2** – O Teorema 2.1, devido a Crandall e Liggett [1], generaliza um resultado demonstrado por Hille [1] para os operadores lineares (a demonstração desse caso particular encontra-se em Gomes [2]).

§**3** – Os teorema 3.6 e 3.12 são de Brezis e Pazy [2] e o Teorema 3.14 de Crandall-Liggett. Tanto o Teorema 3.12 como o 3.14 foram demonstrados supondo que $\overline{\operatorname{conv} D(A)} \subset \Im(I + \lambda A)$, hipótese esta substituida pela hipótese mais fraca $\overline{D(A)} \subset \Im(I + \lambda A)$ por Miyadera [3]. O Teorema 3.17, no caso dos espaços de Hilbert e o Teorema 3.18, no caso dos espaços uniformemente convexos, são devidos a Crandall-Pazy [3] e, como aparecem no texto, a Brezis [5]; o Teorema 3.19 é de Brezis e Pazy [1]. O método das aproximações descrito no Teorema 3.20 foi usado por Yosida para resolver o problema 3.1 quando A é linear, por Komura [1] e Kato [3] para A n ao linear mas m-acretivo e por Brezis-Pazy [2] com a m-acretividade substituida pela condição 3.20; os teoremas 3.21 e 3.23 são de Brezis [2] e [3].

§**4** – A noção de solução integral das equações n ao homogêneas foi introduzida por Benilan e Brezis [1]; a Proposição 4.11 e o Teorema 4.19 são devidos a Benilan [1], [3] e [4].

§**6** – O Teorema 6.9 é de Crandall-Pazy [2].

§**7** – Os teoremas 7.1 e 7.2 são devidos a Brezis e Pazy [3], e os resultados sobre geração de semigrupos expostos neste parágrafo foram extraidos de Baillon [1] que generaliza resultado de Komura [1] para os espaços de Hilbert e melhorado por Kato [4]. A demonstração de Kato é encontrada em Gomes [1] e Brezis [4].

BIBLIOGRAFIA

Asplund, E.

[1] *Average Norms.* Isr. J. Math. 5 (1967), 227–233.

Attouch, H. e A. Damlamian

[1] *Probèmes d' évolution dans les Hilberts et applications.* J. Math. Pures et Apll. 54 (1975), 53–74.

[2] *On multivalued evolutions equations in Hilbert spaces.* Isr. J. Math. 12 (1973), 373–390.

Baillon, J.B.

[1] *Générateurs et semi-groupes dans les espaces de Banach uniformement lisses.* J. Func. Anal. 29 (1978), 199-213.

Barbu, V.

[1] *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces.* Nordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands (1976).

[2] *Continuous perturbations of nonlinear m-acretive operators in Banach spaces.* Boll. Un. Math. Ital. 6 (1972), 270–278.

Benilan, Ph.

[1] *Solutions faibles d' équations d' évolution dans un espace reflexive.* Seminaire Deny sur les semi-groupes non linéaires, Orsay (1970-1971).

[2] *Exposé sur les operateurs accretifs.* Seminaire Deny sur les semi-groupes non linéaires. Orsay (1970-1971).

[3] *Équations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications.* Thèse, Orsay (1972).

[4] *Solutions integrales d' équations d' évolution dans un espace de Banach.* C.R. Acad. Sc. Paris, 274 (1972), 47–50.

Benilan e H. Brezis

[1] *Solutions faibles d' équations d' évolution dans les espaces de Hilbert.* Ann. Inst. Fourier, 22 (1972), 311–329.

Benilan, Ph. e H. Brezis e M.G. Crandall

[1] *A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$.* Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, (1975), 523–555.

Benilan, Ph., M.G. Crandall e P. Sacks

[1] *Some L^1 existence and dependence results for semilinear elliptic equations under nonlinear boundary conditions.* Appl. Math. Optim., (1988), 203–224.

Benilan, Ph. e M.G. Crandall

[1] *The continuous dependence on φ of solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$.* Indiana Un. Math. J., 30 (1981), 161–177.

Brezis, H.

[1] *Semi groupes non linéaires et applications.* Istituto Nazionale di Alta Matemática. Symposia Mathematica, vol. VII, (1971).

[2] *Propriétés régularizantes de certains semigroupes non linéaires.* Isr. J. Math. 9 (1971), 513–534.

[3] *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations.* Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E. Zarantonello (editor), Acad. Press (1971), 101–156.

[4] *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North Holland Publishing Co., Amsterdam (1973).

[5] *On a problem of T. Kato.* Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 1–6.

[6] *New results concerning monotone operators and nonlinear semigroups.* Analysis of Nonlinear Problems, RIMS (1974), 2–27.

[7] *Analyse Fonctionnnelle*, Masson, Paris (l983).

Brezis, H. e M.G. Crandall

[1] *Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u(t) - \Delta\varphi(u) = 0$.* J. Math. Pures et Appl. 58 (1979), 153–163.

Brezis, H. e A. Haraux

[1] *Image dúne some d'ópérateurs monotones et applications.* Isr. J. Math. 23 (1976), 165–186.

Brezis, H. e A. Pazy

[1] *Semigroups of nonlinear contractions on convex sets.* J. Func. Anal., 6 (1970), 237–281.

[2] *Accretive sets and differential equations in Banach spaces.* Isr. J. Math., 8 (1970), 367–383.

[3] *Convergence and approximation of nonlinear semigroups in Banach spaces.* J. Func. An., (1972), 63–74.

Brezis, H. M. Crandall e A. Pazy

[1] *Perturbations of nonlinear maximal monotone sets.* Comm. Pure Appl. Math. 23 (1976), 165–186.

Browder, F.

[1] *Nonlinear equations of evolution and nonlinear accretive operators in Banach spaces.* Bull. Am. Math. Soc. 73 (1967), 64–74.

[2] *Nonlinear monotone and accretive operators in Banach spaces.* Proc. Nat. Ac. Sc. USA, 61 (1968), 388–393.

[3] *Nonlinear maximal monotone operators in Banach spaces.* Math. Ann. 175 (1968), 89–113.

[4] *Probèmes nonlinéaires.* Les Press de l'Úniversité de Montreal (1966).

[5] *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces.* Nonlinear Functional Analysis Symposia in Pure Math., vol. 18, Part 2.

[6] *Nonlinear elliptic boundary value problems.* Bull. Am. Math. Soc. 69 (1963), 862–874.

Bruck Jr., R.E.

[1] *A characterization of Hilbert spaces.* Proc. Am. Math. Soc., 43 (1974), 173-175.

Busemberg, S.N.

[1] *Nonlinear semigroup whose generator is not dissipative.* Huston J. Math. 9 (1983), 363–387.

Calvert, B.

[1] *Maximal accretive is not m-accretive.* Boll. Un. Mat. Ital. 3 (1970), 1042–1044.

Calvert, B. e K. Gustafson

[1] *Multiplicative perturbation of nonlinear m-accretive operators.* J. Func. Anal. 10 (1972), 149–158.

Calvert, B. e C. Picard

[1] *Opérateurs accretifs et ϕ-accretifs dans un espace de Banach.* Hiroshima Math. J. 8 (1978), 11–30.

Chernoff, P.

[1] *Note on product formulas for operator semigroups.* J. Funct. Anal., 2 (1968), 238–242.

Clarkson, J.A.

[1] *Uniformly convex spaces.* Trans. A.M.S., 40 (1936), 396–414.

Crandall, M.G.

[1] *Differential equations on convex sets.* J. Math. Soc. Japan 22 (1970), 443–455.

[2] *Semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces.* Contributions to Nonlinear Func. Anal., ed. E.Zarantonello, Acad. Press, N.Y. (1971), 157–179.

[3] *An introduction to evolution governed by accretive operators.* An International Symposium, ed. L. Cesari, J. Hale e J. LaSale, Academic Press, N.Y. (1975), 131–165.

[4] *The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables.* Isr. J. Math. 12 (1972), 108–132.

Crandall, M.G. e L.C. Evans

[1] *On the relation of the operator $\partial/\partial s + \partial/\partial r$ to evolution governed by accretive operator.* Isr. J. of Math. 21 (1975), 261- -278.

Crandall, M.G. e T.M. Liggett

[1] *Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces.* Am. J. Math. 93 (1971), 265–298.

[2] *A theorem and a counter example in the theory of semigroups of nonlinear transformations.* Trans. AMS, 160 (1971), 263–278.

Crandall, M.G. e A. Pazy

[1] *Nonlinear evolution equations in Banach spaces.* Isr. J. Math. 11 (1972), 57–94.

[2] *Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets.* J. Func. Anal., 3 (1969), 376–418.

[3] *On acretive sets in Banach spaces.* J. of Func. Anal., 5 (1970), 204–217.

Crandall, M.G. e J.A. Nohel

[1] *An abstract functional differential equation and a related nonlinear Volterra equation.* Isr. J. Math., 29 (1978), 313–328.

Cudia, D.F.

[1] *The geometry of Banach spaces.* Smoothness, Trans. AMS, 110 (1964), 284–314.

Debrunner, H. e P. Flor

[1] *Ein Erweiternungssatz für Monotone Mogen.* Archiv. Math., 15 (1964), 445–447.

Devys, C. e J.M. Morel

[1] *Strict monotonicity, strict convexity and strict contractions in the semigroup theory.* J. Math. Anal. and Applications 90 (1982), 104–116.

Deimling, K.

[1] *Nonlinear Functional Analysis.* Springer Verlag (1985).

Diestel, J.

[1] *Geometry of Banach Spaces-Selected Topics.* Lectures Notes in Math., 488, Springer Verlag (1975).

Dorroh, J.

[1] *A nonlinear Hille-Yosida-Phillips theorem.* J. Func. Anal., 3 (1969), 345–353.

Ekeland, I. e R. Temam

[1] *Analyse convexe et probèmes variationnels.* Dunod - Gauthier Villars, Paris (1974).

Evans, L.C.

[1] *Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space.* Isr. J. of Mth. 26, nº 1, (1977), 1–42.

[2] *Differentiability of a nonlinear semigroup in L^1.* J. Math. Anal. and Appl., 60 (1977), 703–715.

Fan, K. e I. Glicksberg

[1] *Some geometric properties of the spheres in a normed linear space.* Duke Math. J., 25 (1958), 553–568.

Fenchel, W.

[1] *On conjugate convex functions.* Canad. J. Math., 1 (1949), 73–77.

[2] *Convex cones, sets and functions.* Notes de Cours polycopiées. Princeton University (1951).

Gomes, A.M.

[1] *Equações diferenciais e semigrupos de contrações não lineares dos espaços de Hilbert.* Textos de Métodos Matemáticos nº 15, Inst. de Mat. da UFRJ, Rio de Janeiro (1982).

[2] *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* Textos de Métodos Matemáticos nº 19, Inst. de Mat. da UFRJ, Rio de Janeiro (1985).

Goldstein, J.

[1] *Semigroups of nonlinear operators.* Tulane University Notes, New Orleans, 1972.

[2] *Nonlinear semigroups and nonlinear partial differential equations.* Memórias de Matemática nº 59, Inst. de Mat. da UFRJ, Rio de Janeiro (1975).

[3] *Semigroups no-lineales y aplicaciones.* Textos de Métodos Matemáticos nº 10, Inst. de Mat. da UFRJ, Rio de Janeiro (1976).

Gripenberg, G.

[1] *An abstract non linear Volterra equation.* Isr. J. Math. 34 (1979), 198–212.

[2] *Volterra integro-differential equations with accretive nonlinearity.* J. Diff. Eq. 60 (1985), 57–79.

Gupta, C.P.

[1] *Some theorems on the sum of non linear mappings of monotone type in Banach space.* J. Math. Anal. and Appl. 97 (1983), 38–45.

Haraux, A.

[1] *Nonlinear evolution equations - global behavior of solutions.* Lecture Notes in Mathematics, 841, A. Dold e B. Eckmann ed. - Springer-Verlag, 1981.

[2] *Nonlinear vibrations and the wave equations.* Textos de Métodos Matemáticos nº 20, Inst. de Mat. da UFRJ, Rio de Janeiro (1986).

Hewitt, E. e K. Stromberg

[1] *Real and Abstract Analysis.* Springer Verlag (1975).

Hille, E.

[1] *Functional Analysis and Semigroups.* Am. Math. Soc. Collq. Publ., vol. XXXI, Providence R.I. (1948).

Holmes, R.C.

[1] *Geometric Functional Analysis and its applications.* Springer Verlag (1975).

Kachurovski, R.I.

[1] *On monotone operators and convex functionals.* Uspekhi Mat. Nauk, 15 (1960), 213–215.

Kato, T.

[1] *Nonlinear semigroups and evolution equations.* J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508–520.

[2] *Linear evolution equations of "Hiperbolic" type* II. J. Math. Soc. Japan, vol. 25, nº 4 (1973).

[3] *Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces.* Nonlinear Funct. An., Proc. Symp. Pure Math. 18 (1970), 138–161.

[4] *Differentiability of nonlinear semigroups.* Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. AMS (1970).

Kato, T. e K. Masuda

[1] *Trotter's product formula for nonlinear semigroups generated by the subdifferentials of convex functionals.* J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 169–178.

Kobayashi, Y.

[1] *Product formula for nonlinear semigroups in Hilbert spaces.* Proc. Japan Ac. 58, ser. A (1982), 425–428.

[2] *Difference approximation of evolution equations and generation of nonlinear semigroups.* Proc. Japan Acad., 51 (1975), 406–410.

Komura, Y.

[1] *Nonlinear semigroups in Hilbert space.* J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493–507.

[2] *Differentiability of nonlinear semigroups.* J. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 375–402.

[3] *Nonlinear semigroups in Hilbert spaces.* Proc. Inter. Conf. on Func. Anal., Tokio (1969).

Konishi, Y.

[1] *Nonlinear semigroups in Banach lattices.* Proc. Japan Acad. 47 (1971), 24–28.

[2] *A remark on perturbation of m-accretive operators in Banach spaces.* Proc. Japan Acad. 47 (1971), 452–455.

Kružkov, S.N.

[1] *First order quasilinear equations in several independent variables.* Math. USSR Sbornik 10 (1970), 217–243.

Lescarret, G.

[1] *Cas d'addition des applications monotones maximales dans un espace de Hilbert.* C.R. Acad. Sc. Paris, 26 (1965), 1160–1163.

Lumer, C. e R. Phillips

[1] *Dissipative operators in Banach spaces.* Pacific J. Math. 11 (1961), 679–698.

Martin, R.H.

[1] *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces.* Wiley Interscience Publ., N.Y. (1976).

Minty, G.

[1] *On the maximal domain of a "monotone" function.* Michigan Math. J. 3 (1961), 135–137.

[2] *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space.* Duke Math. J. 29 (1962), 341–346.

[3] *On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces.* Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 50 (1963), 1038–1041.

[4] *On the monotonicity of the gradient of a convex function.* Pacif. J. Math. 14 (1964), 243–247.

[5] *On a generalization of the direct method of the calculus of variations.* Bull. Am. Math. Soc., 73 (1967), 315–321.

Miyadera, I.

[1] *On the convergence of nonlinear semigroups.* I. Tohoku Math. J. 21 (1969), 221–236.

[2] *On the convergence of non linear semigroups* II. J. Math. Soc. Japan 21 (1969), 403–412.

[3] *Some remarks on semigroups of nonlinear operators.* Tohoku Math. J. 23 (1971), 245–258.

Miyadera, I. e S. Oharu

[1] *Approximation of semigroups of nonlinear operators.* Tohoku Math. J. 22 (1970), 24–47.

Morales, C.

[1] *Nonlinear equations involving m-accretive operators.* J. Math. Anal. and Appl. 97 (1983), 329–336.

Moreau, J.J.

[1] *Proximité et dualité dans un espace Hilbertien.* Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 273–299.

[2] *Fonctionnelles convexes.* Seminaire sur les équations aux derivées partielles. College de France 1966-1967.

Oharu, S.

[1] *Note on the representation of semigroups of nonlinear operators.* Proc. Japan Acad. 42 (1966), 1149–1154.

Okazawa, N.

[1] *Singular perturbations of m-accretive operator.* J. Math. Soc. Japan, 32 (1980), 19–44.

[2] *Approximation of linear m-accretive operators in a Hilbert space.* Osaka J. Math. (1977), 85–94.

[3] *An application of perturbation theorem for m- accretive operators.* Proc. Japan Acad. LIX ser. A, nº 3 (1983), 88–99.

Pazy, A.

[1] *Semigroups of nonlinear contractions in Hilbert space.* Problems in Nonlinear Analysis (G. Prodi, ed.) CIME, Varenna. Cremonese (1971).

[2] *Semigroups of nonlinear contractions and their asymptotic behaviour.* - Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot - Watt Symposium Vol. III. R.J. Knops (editor) Pitman Research Notes in Math. 30. London (1978).

[3] *Lectures on accretive operator and nonlinear differential equation in Banach spaces.* Notes by L.A. Medeiros, Instituto de Matemática da UFRJ, Rio de Janeiro (1981).

[4] *Strong convergence of semigroups of nonlinear contractions in Hilbert space.* Jour. d'Analyse Mathematique, 34 (1978), 1–35.

Phillips, R.

[1] *Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc., 90 (1959), 193–254.

Ray, W.O.

[1] *Phi-accretive operators and Ekeland ́s Theorem.* J. Math. An. Appl. 88 (1982), 565–571.

Reich, S.

[1] *Extension problems for accretive sets in Banach spaces.* J. Func. Anal. 26 (1977), 378–395.

[2] *Product formulas, nonlinear semigroup and accretive operators.* J. Func. Anal. 36 (1980), 147–168.

[3] *Convergence and approximation of nonlinear semigroups.* J. Math. A. Appl. 76 (1980), 77–83.

Rockafeller, R.T.

[1] *Local boundedness of nonlinear monotone operators.* Michigan Math. J. 16 (1970), 397–407.

[2] *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators.* Trans. Am. Math. Soc. 149 (1970), 75–88.

[3] *Convex Analysis.* Princeton Univ. Press, 1970.

[4] *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings.* Pacific Math. J., 33 (1970), 209–216.

[5] *Characterization of the subdifferential of convex functions.* Pacific J. Math. 17 (1966), 497–510.

Schechter, E.

[1] *Perturbations of regularizing maximal monotone operators.* Isr. J. Math. 43 (1982), 49–61.

Sofonea, M.

[1] *Une méthode variationnelle pour une classe d'équations non linéaires dans les espaces de Hilbert.* Bull. Math. de la Soc. Math. de la R.S. Roumanie, Tome 30 (78), nr. 1 (1986).

Sohr, H.

[1] *A new perturbation criterion for two nonlinear m-accretive operator with applications to semilinear equations.* J. Reine Angew. Math. 333 (1982), 1–11.

Vainberg, M.M.

[1] *On some new principles in the theory of nonlinear equations.* Uspekhi Mat. Nauk, 15 (1960), 243–244.

Watanabe, J.

[1] *Semigroups of nonlinear operators on closed convex sets.* Proc. Japan Ac. Sci. 45 (1969), 219–233.

Webb, J.R.L.

[1] *Mappings of accretive and pseud-A-proper type.* J. Math. An. and Appl. 85 (1982), 146–152.

Webb, G.F.

[1] *Functional differential equations and nonlinear semigroups in L^p spaces.* J. Diff. Eq. 20 (1976), 71–89.

Yosida, K.

[1] *On the differentiability and the representation of one- parameter semi-groups of linear operators.* J. Math. Soc. Japan I (1948), 14–21.

[2] *Functional Analysis.* Springer Verlag (1966).

Zarantonello, E.

[1] *Solving functional equations by contrative averaging.* Math. Research Center, Report 160, Madison, Wisconsin (1960).

Zizler, V.

[1] *Banach spaces with differentiable norms.* Comment. Math. Univ. Caroline 8 (1968), 415–440.

ÍNDICE ALFABÉTICO