Codage symbolique et formalisme thermodynamique pour les surfaces hyperboliques de volume fini

Une présentation rapide de mes travaux de recherche

VINCENT PIT

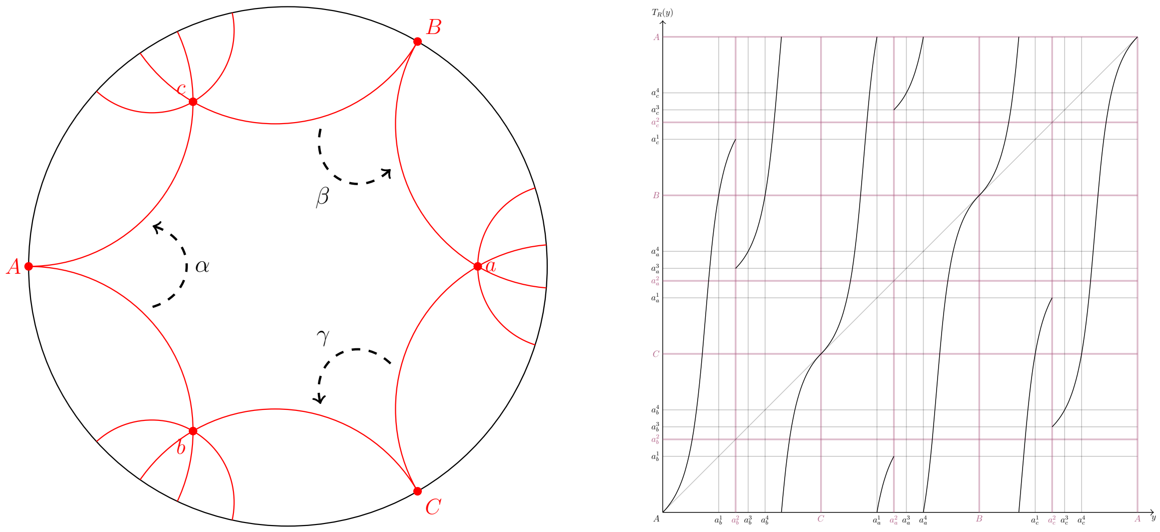
4 avril 2013

Mon travail de recherche porte sur l'étude de différents objets associés aux surfaces et orbifolds hyperboliques à courbure constante et de volume fini, tels que le flot géodésique ou les fonctions propres du laplacien, au travers d'une application de Markov du cercle appelée transformation de Bowen-Series qui est canoniquement associée à un domaine fondamental de la surface dans l'espace hyperbolique. Ce sujet est à l'interface de plusieurs thématiques : géométrie des groupes, dynamique symbolique et formalisme thermodynamique.

1 Transformation de Bowen-Series et orbite-équivalence

Cette transformation a été introduite en 1979 par Bowen et Series dans le célèbre article [BS79]. Voici les grandes lignes de sa construction : on note $\mathbb{H}$ l'espace hyperbolique usuel à courbure constante -1, et soit Γ un groupe discret d'isométries hyperboliques tel que l'orbifold quotient $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ soit de volume hyperbolique fini. On suppose qu'il existe un domaine fondamental convexe $\mathcal{D}$ pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ possédant un nombre fini de côtés et qui n'est pas un triangle hyperbolique dont les trois sommets sont dans $\mathbb{H}$. Cela implique que ses côtés sont des segments de géodésiques hyperboliques et sont deux à deux appariés par un système symétrique de générateurs de Γ. Un point x du cercle est alors soit dans le demi-espace délimité par un unique côté de $\mathcal{D}$, auquel cas la transformation de Bowen-Series envoie x sur son image par l'isométrie associée audit côté ; soit dans l'intersection de deux tels demi-espaces, auquel cas il faut faire un choix de convention entre utiliser l'isométrie associée au côté gauche (ce qui donne la *transformation de Bowen-Series à gauche* T_L) ou celle associée au côté droit (ce qui donne la *transformation de Bowen-Series à droite* T_R). Ces transformations sont expansives, et même uniformémemnt expansives lorsque le quotient $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ est compact. Dans toute la suite, T représentera indifféremment T_L ou T_R.

Cependant, cette transformation ne préserve une partition de Markov que si le domaine fondamental $\mathcal{D}$ vérifie de plus la propriété dite d'*even corners* : si $\mathcal{N}$ est l'ensemble des géodésiques complètes de $\mathbb{H}$ qui passent par un sommet de $\mathcal{D}$ et qui sont Γ-équivalentes à une des géodésiques complètes supportant les côtés de $\mathcal{D}$, on demande à ce qu'aucune géodésique de $\mathcal{N}$ ne coupe l'intérieur du domaine fondamental. On constate alors que les points de $\mathcal{N}$ délimitent une partition du cercle en intervalles qui est Markovienne pour la transformation T, mais qui est infinie lorsque $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ n'est pas compact.



Un domaine fondamental even corners et sa transformation de Bowen-Series à droite

Cette propriété d'even corners implique en particulier qu'en chaque sommet du domaine fondamental $\mathcal{D}$ se rencontrent un nombre pair de tuiles images de $\mathcal{D}$, et donc que les relations du groupe dans le système de générateurs donné par l'appariement des côtés sont toutes de longueur paire. Elle impose aussi à ce que les bords de $\mathcal{D}$ se projettent sur des géodésiques fermées dans le quotient. Ces deux propriétés ne sont cependant pas des conditions suffisantes pour assurer que $\mathcal{D}$ soit even corners. Il s'agit en fait d'une condition est assez courante, mais pour laquelle il est difficile de construire des exemples explicites pour une surface donnée. Ainsi, si $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ est compact et que Γ ne contient pas d'éléments elliptiques (i.e. $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ est une vraie surface compacte), il existe toujours un domaine fondamental even corners obtenu en découpant la surface le long de géodésiques fermées formant une base de l'homologie. Si $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ est non compact, de volume fini et toujours sans point conique, alors il possède un domaine fondamental dont tous les sommets sont à l'infini, et un tel domaine est naturellement even corners. Par ailleurs, si Γ est n'importe quel groupe fuchsien du premier type, il existe un autre groupe fuchsien Γ' qui a même signature que Γ et qui admet un domaine fondamental even corners explicite. Toutefois, les domaines fondamentaux even corners sont rares parmi les familles classiques de domaines fondamentaux canoniques : par exemple, le domaine de Dirichlet de Γ basé en P (i.e. l'ensemble des points de $\mathbb{H}$ plus proches de P que de $(\Gamma \setminus \{\mathrm{id}\})P$) ne peut être even corners que pour P pris dans un ensemble de mesure nulle.

Durant ma thèse, mon premier apport a été de remarquer que T préserve en fait une partition de Markov finie obtenue à partir de l'originale en rassemblant tous les intervalles qui s'accumulent autour des sommets à l'infini du domaine fondamental, et de décider d'étudier la transformation via cette nouvelle approche.

De par la définition de T, il est clair que deux points qui sont sur la même T-orbite sont aussi sur une même Γ-orbite pour l'action naturelle de Γ sur le bord à l'infini $\mathbb{S}^1$. Un résultat remarquable de Bowen et Series assure que la réciproque est aussi vraie :

$$\forall x, y \in \mathbb{S}^1, (\exists p, q \geq 0, T^p(x) = T^q(y)) \Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma, y = \gamma(x))$$

T est ainsi orbite-équivalente avec le groupe Γ. Cependant, ce résultat présentait deux imprécisions notables. Tout d'abord, la preuve originale omettait un nombre fini d'orbites, correspondant aux bords de la partition. Plus important, il s'agit d'un résultat ponctuel qui ne donne aucune information sur les exposants p et q. En raffinant la preuve originale, j'ai pu démontrer le résultat suivant, disponible dans [Pit12] :

Théorème 1.1. *Soit $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ la transformation de Bowen-Series associée à un domaine fondamental even corners d'un groupe fuchsien Γ de covolume fini, définie sur la partition $(I_v)_{v\in V}$ du cercle en intervalles de sorte que $T(x) = \gamma_v(x)$ pour tout $x \in I_v$.*

Soit X un ensemble sur lequel Γ agit à gauche, et notons $\mathbb{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{S}^1$ sur lequel Γ agit aussi naturellement à gauche. Soit $F : \mathbb{I} \times X \to \mathbb{C}$ une application. Si $\gamma \in \Gamma$ et $I \in \mathbb{I}$, on dit que F vérifie la proprité $\mathcal{I}(I, \gamma)$ lorsque :

$$\forall x \in X, F(I, x) = F(\gamma(I), \gamma(x))$$

Supposons que F vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. *$\forall I, J \in \mathbb{I}, I \sqcup J \in \mathbb{I} \Rightarrow \forall x \in X, F(I \sqcup J, x) = F(I, x) + F(J, x)$ (additivité pour des intervalles contigus) ;*
2. *Si (b_n) est une suite croissante de points de $]a; b[$ qui converge vers b, alors : $\forall x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} F([a; b_n[\,, x) = F([a; b[\,, x)$ (continuité) ;*
3. *Pour tout (I, γ) tel que F vérifie $\mathcal{I}(I, \gamma)$, F vérifie aussi $\mathcal{I}(J, \gamma)$ pour tout $J \in \mathbb{I}, J \subset I$ (inclusion) ;*
4. *F vérifie $\mathcal{I}(I_v, \gamma_v)$ pour tout $v \in V$ (invariance par Bowen-Series).*

Alors F vérifie $\mathcal{I}(I, \gamma)$ pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $I \in \mathbb{I}$.

Ce théorème généralise le résultat de Bowen et Series : on peut le récupérer en prenant $X = \mathbb{S}^1$ et, à y fixé, $F(x, I)$ égal à 1 si x, y sont dans la même T-orbite et égal à 0 sinon. Mais, avec un choix plus judicieux de X et F, il démontre de plus que les exposants p et q apparaissant dans la relation d'orbite-équivalence peuvent être choisis localement constants, ce qui permet de décrire parfaitement les orbites périodiques de la transformation de Bowen-Series :

Théorème 1.2. *On a une bijection entre :*

- *les orbites périodiques hyperboliques de T ;*
- *les classes de conjugaisons d'isométries hyperboliques primitives de Γ.*

En utilisant ce second résultat, on peut alors exprimer la fonction zéta dynamique de T en termes de la fonction zéta de Selberg de Γ. Nous verrons aussi plus loin que ce théorème joue un rôle crucial dans l'étude des distributions propres de l'opérateur de transfert de T.

2 Codage symbolique du flot géodésique

Depuis les travaux d'Artin pour coder les géodésiques de la surface modulaire par des fractions continues, différentes techniques ont été développées pour étendre cette construction à des groupes fuchsiens quelconques et ainsi obtenir une représentation symbolique du flot géodésique sur les surfaces quotients correspondantes.

La première d'entre elles repose sur le codage de Morse. Il consiste, étant donné un domaine fondamental $\mathcal{D}$ pour $\mathbb{H}_{/\Gamma}$, à remarquer que toute géodésique sur la surface dont une origine a été choisie se relève en une unique géodésique complète de $\mathbb{H}$ coupant $\mathcal{D}$ et dont l'origine est dans $\mathcal{D}$. On peut alors représenter la géodésique par la suite des générateurs du groupe correspondants aux côtés des copies du domaine fondamental rencontrées en suivant la géodésique du passé vers le futur. Passer d'une tuile du pavage induit par $\mathcal{D}$ à une autre correspond dans ce codage à décaler les symboles. Il est alors simple de voir que la suspension de ce sous-shift par le temps de passage dans $\mathcal{D}$ est conjuguée au flot géodésique sur la surface. Malheureusement un tel codage n'est pas sofique, mais Series a démontré dans [Ser81] puis dans [Ser86] que l'on pouvait conjuguer ce sous-shift à un autre sous-shift de même alphabet, obtenu en lisant les générateurs du groupe donnés successivements par les transformations de Bowen-Series à gauche (pour l'extrémité passé de la géodésique) et à droite (pour son extrémité futur), et qui lui est sofique.

La seconde approche est celle adoptée par Adler et Flatto dans [AF91]. Plutôt que de coder les géodésiques directement par les suites de symboles, l'idée est de les paramétrer par un point de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ privé de sa diagonale, et de se ramener tout d'abord à une section de Poincaré du flot naturellement associée à $\mathcal{D}$: le *billard géodésique* (B, T_B). Cette section de Poincaré est obtenue en prenant pour B toutes les géodésiques de $\mathbb{H}$ qui soit coupent l'intérieur de $\mathcal{D}$, soit sont tangentes à $\mathcal{D}$ tout en le laissant sur leur droite ; et pour laquelle l'application de premier retour est donnée par $T_B(x, y) = (\gamma[x, y](x), \gamma[x, y](y))$ où $\gamma[x, y]$ est l'élément de Γ associé au côté par lequel (x, y) sort du domaine fondamental. De même que pour le codage de Morse, la suspension du billard géodésique par le temps de passage dans $\mathcal{D}$ est conjuguée au flot géodésique. Lorsque Γ est cocompact et que $\mathcal{D}$ a un angle droit à chacun de ses sommets, Adler et Flatto ont démontré que ce billard géodésique était conjugué à un autre système dynamique (C, T_C) où C est une partie du tore qui peut s'écrire comme une réunion de rectangles, et T_C est une extension de la transformation de Bowen-Series à droite.

Dans l'optique d'utiliser ces techniques dans un cadre de formalisme thermodynamique, je me suis concentré sur cette seconde approche. J'ai ainsi démontré qu'un résultat similaire existait pour les groupes Γ de covolume fini :

Théorème 2.1. *Soit Γ un groupe fuchsien de covolume fini, et $\mathcal{D}$ un domaine fondamental even corners pour Γ. Il existe une partie $C \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ qui s'écrit comme une réunion finie de rectangles C_k, et une bijection $T_C : C \to C$ telle que :*

1. *Pour chaque C_k, il existe un $\gamma_k \in \Gamma$ tel que $T_C(x, y) = (\gamma_k(x), \gamma_k(y))$ pour tout point $(x, y) \in C_k$;*
2. *Le second facteur de T_C est la transformation de Bowen-Series à droite T_R ;*
3. *Le premier facteur de T_C^{-1} est la transformation de Bowen-Series à gauche T_L.*

De plus, (C, T_C) est conjugué au billard géodésique (B, T_B), et la conjugaison $\varphi : C \to B$ peut être choisie de sorte que :

1. *Pour tout $(x, y) \in B \cap C$, $\varphi(x, y) = (x, y)$;*
2. *Il existe un nombre fini de blocs connexes $Y_1, \ldots, Y_p$ tels que $C \setminus B = Y_1 \sqcup \ldots \sqcup Y_p$, et pour chaque Y_i il existe un $g_i \in \Gamma$ tel que $\varphi(x, y) = (g_i(x), g_i(y))$ pour tout point $(x, y) \in Y_i$.*

Ainsi, non seulement le billard géodésique est conjuguée à une application Markov d'une partie du tore, mais cette conjugaison agit diagonalement par des éléments du groupe, et a une combinatoire finie et parfaitement explicite. En utilisant l'expansivité de la transformation de Bowen-Series, on peut alors voir que le flot géodésique sur $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ est conjugué à une suspension d'un sous-shift de type fini et d'alphabet fini.

3 Opérateur de transfert et laplacien hyperbolique

Un autre aspect important de cette transformation est qu'elle possède des liens profonds avec les éléments propres du laplacien sur la surface, en particulier par le biais de son *opérateur de transfert*. Il s'agit de l'opérateur fonctionnel défini pour tout $f \in E$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ par :

$$\mathcal{L}_s f(y) = \sum_{T(x)=y} \frac{f(x)}{|T'(x)|^s}$$

où E est un espace de fonctions approprié préservé par cet opérateur.

Dans le cas où le quotient $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ est compact, Pollicott a démontré dans [Pol91] qu'il était possible de trouver un espace E pour lequel $\mathcal{L}_s$ avait de très bonnes propriétés spectrales. Si le domaine fondamental ne possède pas de sommet à l'infini, on peut en effet construire une collection d'ouverts U_k de $\mathbb{C}$ simplement connexes, contenant chacun un intervalle de la partition de Markov finie préservée par T, et tels que $T^{-1}(U_l) \subset U_k$ dès que $T(U_k) \cap U_l \neq \emptyset$. L'espace E des fonctions de $\mathbb{S}^1$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à chaque intervalle I_k de la partition de Markov de T admet un prolongement analytique à l'ouvert U_k correspondant est préservé par $\mathcal{L}_s$; sur cet espace, l'opérateur de transfert est compact et même nucléaire. Cela permet alors d'exprimer le déterminant de Fredholm de $\mathcal{L}_s$ en termes de la fonction zéta de Selberg du groupe, et ainsi de montrer que 1 est valeur propre de $\mathcal{L}_s$ si et seulement si $s(1-s)$ est valeur propre du laplacien hyperbolique sur $\mathbb{H}_{/\Gamma}$.

Un de mes axes de travail a été de généraliser ce résultat au cas de groupes de covolume fini, la difficulté étant que le procédé de construction de ces ouverts n'est plus valable dans ce cadre. Dans le cas de la surface modulaire, Mayer a contourné la difficulté en regardant l'opérateur de transfert pour la transformation de Bowen-Series induite sur un intervalle récurrent pour récupérer de bonnes propriétés fonctionnelles (voir par exemple [CM00]). Je lui ai préféré une approche plus directe, afin de déterminer explicitement les éléments propres de l'opérateur de transfert.

On sait depuis Helgason et son ouvrage [Hel81] qu'à toute fonction propre du laplacien de l'espace hyperbolique à croissance au plus exponentielle est associée une distribution agissant sur l'espace des fonctions analytiques sur le bord à l'infini, et que l'on peut retrouver la fonction initiale en testant cette distribution contre le noyau de Poisson. Cette distribution est appelée *distribution de Helgason* (et notée $\mathcal{D}_f$) associée à la fonction propre du laplacien ; elle est obtenue en décomposant la fonction propre en harmoniques sphériques et en construisant la forme linéaire qui associe à une fonction de $\mathbb{S}^1$ la somme de ses coefficients de Fourier pondérée par lesdits coefficients harmoniques. Cette définition ne permet malheureusement pas d'exprimer simplement l'invariance de la fonction propre par une isométrie, mais les travaux d'Otal dans [Ota98] en donnent une nouvelle expression plus géométrique dans laquelle la Γ-invariance de la fonction propre a une formulation simple (voir [LT08]) qui incite à penser que les distributions de Helgason sont des distributions propres de $\mathcal{L}_s$ pour la valeur propre 1.

Mais il subsiste un problème : ces distributions agissent sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$, espace qui n'est pas laissé invariant par $\mathcal{L}_s$. Heureusement, les travaux d'Otal fournissent un deuxième ingrédient : les distributions de Helgason peuvent en fait être vues comme la dérivée faible d'une fonction Hölder, i.e. il existe une fonction $D_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ α-Hölder pour $0 < \alpha \leq 1$ et telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1), \langle \mathcal{D}_f, \varphi \rangle = \tilde{\varphi}(2\pi) D_f(2\pi) - \tilde{\varphi}(0) D_f(0) - \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}'(t) D_f(t) dt$$

Grâce à cette formule, on peut prolonger $\mathcal{D}_f$ aux fonctions φ qui ne sont que $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $\left[e^{ia}; e^{ib}\right]$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\left[e^{ia}; e^{ib}\right]), \langle \tilde{\mathcal{D}}_f, \varphi \rangle = \tilde{\varphi}(b) D_f(b) - \tilde{\varphi}(a) D_f(a) - \int_a^b \tilde{\varphi}'(t) D_f(t) dt$$

et ainsi en un opérateur linéaire continu $\tilde{\mathcal{D}}_f$ sur l'espace E des fonctions qui sont $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle de la partition de Markov préservée par T, espace qui est bien invariant par $\mathcal{L}_s$.

En utilisant le théorème d'invariance cité plus haut, j'ai démontré que dans le cas Γ cofini les fonctions propres bornées du laplacien pour la valeur propre s(1-s) sont en bijection avec les distributions propres de $\mathcal{L}_s$ pour la valeur propre 1 suffisamment régulières pour s'écrire comme la dérivée faible d'une fonction continue :

Théorème 3.1. *Soit Γ un groupe fuchsien de covolume fini, et $\mathcal{D}$ un domaine fondamental even corners pour Γ. Soit $\mathcal{L}_s$ l'opérateur de transfert pour la transformation de Bowen-Series associée à $\mathcal{D}$. Supposons que $0 < \Re(s) \leq 1$. On a un isomorphisme entre :*

- *les opérateurs linéaires continus ν sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1)$, pour lesquels il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1, \langle \nu, \varphi \rangle = \tilde{\varphi}(2\pi)g(2\pi) - \tilde{\varphi}(0)g(0) - \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}'(t)g(t)dt$$

  et dont l'extension $\tilde{\nu}$ à E satisfait : $\mathcal{L}_s^\star \nu = \nu$;
- *les fonctions propres bornées du laplacien sur $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ pour la valeur propre $s(1-s)$.*

Cet isomorphisme est donné par $\nu \mapsto (z \mapsto \langle \nu, P(z,.)^s \rangle)$ où P est le noyau de Poisson.

Il faut noter que 1 n'est valeur propre de module maximal de $\mathcal{L}_s$ que lorsque $s = 1$, auquel cas la distribution de Helgason correspondante est la mesure de Lebesgue, associée à la fonction harmonique constante sur la surface.

4 Formalisme thermodynamique pour des applications Markov couplées

La question qui se pose ensuite naturellement est de déterminer quelles sont les fonctions propres de cet opérateur de transfert, et si possible d'établir une formule explicite les reliant à ses distributions propres. L'idée est de pouvoir exprimer les fonctions propres du laplacien en termes de fonctions propres de l'opérateur de transfert, qui sont des objets intrinsèquement plus simples.

Dans [LT08], Lopes et Thieullen ont montré que lorsque le quotient $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ est compact il est possible de construire une application linéaire injective envoyant les distributions propres de l'opérateur de transfert de T_R pour une valeur propre donnée vers les fonctions propres de l'opérateur de transfert de T_L pour la même valeur propre. L'outil principal de leur procédé est la rectification (C, T_C) du billard géodésique construite par Adler et Flatto : si on note $k^s(x,y) = |x-y|^{-2s}$ pour tous points $x \neq y$ du cercle, l'application linéaire en question est donnée par :

$$\nu \mapsto (x \mapsto \langle \nu, k^s(x,.)\mathbb{1}_C(x,.)\rangle)$$

Ayant étendu la construction de Adler et Flatto au cas $\mathbb{H}_{/\Gamma}$ de volume fini, j'ai pu généraliser ce résultat dans ce nouveau cadre, mais au prix d'autoriser des fonctions propres de l'opérateur de transfert non bornées au voisinage des sommets à l'infini du domaine fondamental. Ceci est cohérent avec le fait que la mesure SRB de la transformation de Bowen-Series n'est pas finie dans le cas non compact :

Théorème 4.1. *Soit Γ un groupe fuchsien de covolume fini, et $\mathcal{D}$ un domaine fondamental even corners pour Γ. Notons (C, T_C) l'extension de T_R donnée par le théorème 2.1. L'application :*

$$\nu \mapsto (x \mapsto \langle \nu, k^s(x,.)\mathbb{1}_C(x,.)\rangle)$$

est une injection linéaire entre :

- *les opérateurs linéaires continus ν sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1)$, pour lesquels il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1, \langle \nu, \varphi \rangle = \tilde{\varphi}(2\pi)g(2\pi) - \tilde{\varphi}(0)g(0) - \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}'(t)g(t)dt$$

  et dont l'extension $\tilde{\nu}$ à E satisfait : $\mathcal{L}_{R,s}^\star \nu = \lambda \nu$;

- *les fonctions $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, dont la restriction à l'intérieur de chaque intervalle de la partition de Markov est $\mathcal{C}^1$, dont la dérivée ψ' est bornée au voisinage de tout point du bord de la partition qui n'est pas un sommet à l'infini du domaine fondamental, et qui satisfont $\mathcal{L}_{L,s}\psi = \lambda\psi$.*

Reste alors la question de la surjectivité de cette application. Dans le cas d'un quotient compact, elle est assurée par les propriétés spectrales des deux opérateurs de transfert (qui sont tous deux compacts et ont mêmes distributions propres), mais ce n'est plus vrai lorsque le quotient n'est pas compact. D'autre part, même dans le cas cocompact la réciproque n'est pas explicite. En cherchant à reconstruire une distribution propre à partir d'une fonction propre, je me suis rendu compte que ce type de dualité était générale pour toute paire d'applications de Markov couplées du cercle, c'est-à-dire qui sont toutes deux facteurs d'une même bijection T_C de type "transformation du boulanger" :

Théorème 4.2. *Soient $T_L, T_R : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ deux applications surjectives et expansives, préservant une partition de Markov finie, dont chaque branche est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, et telles qu'il existe $C \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ réunion de rectangles ainsi qu'une bijection $T_C : C \to C$ tels que :*

$$T_C(x,y) = (T_L(x), S_R(x,y)) \text{ et } T_C^{-1}(x,y) = (S_L(x,y), T_R(y))$$

Soient $A_L, A_R : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ deux potentiels couplés par une application $W : C \to \mathbb{C}$ satisfaisant :

1. *$\forall (x,y) \in C, A_L(x) + W(x,y) = W(T_C(x,y)) + A_R(S_R(x,y))$;*
2. *W est uniformément minorée sur C ;*
3. *pour tout $x \in \mathbb{S}^1$ l'application $y \mapsto W(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de la fibre de C au dessus de x ;*
4. *pour tout $y \in \mathbb{S}^1$ l'application $x \mapsto W(x,y)$ est lipschitz sur l'intérieur de la fibre de C au dessus de y.*

On note $\mathcal{L}_L$ et $\mathcal{L}_R$ les opérateurs de transfert respectifs de (T_L, e^{A_L}) et (T_R, e^{A_R}).

1. *L'application :*
$$\Phi : \nu \to \big(x \mapsto \langle \nu, e^{W(x,.)}\mathbb{1}_C(x,.)\rangle\big)$$
est une injection linéaire de l'espace des distributions propres de $\mathcal{L}_R$ pour la valeur propre 1 qui sont la dérivée faible d'une fonction continue vers l'espace des fonctions propres de $\mathcal{L}_L$ pour la même valeur propre 1 et qui sont lipschitz sur l'intérieur de chaque intervalle de la partition de Markov.
2. *Supposons que pour tout $(x,y) \in C$, la série de terme général $e^{A_L^n(S_L^n(x,y))}$ converge, où A_L^n est la somme de Birkhoff d'ordre n de A_L et $S_L^n(x,y) = \pi_1 T_C^{-n}(x,y)$. Soit ψ telle que $\mathcal{L}_L\psi = \psi$ et que l'on suppose lipschitz sur l'adhérence de chaque intervalle de la partition de Markov. Alors il existe une unique application linéaire continue ν, dérivée faible d'une fonction continue, distribution propre de $\mathcal{L}_R$ pour la valeur propre 1, et telle que $\psi = \Phi(\nu)$. De plus, ν peut être construite explicitement à partir de ψ via :*

$$\begin{aligned}
&C \cap \{x\} \times \mathbb{S}^1 = [c(x); d(x)[\\
&\qquad h(x',y') = \lim_{n\to+\infty} \sum_{T_L^n(x)=x'} \psi(x) e^{A_L^n(x) - W(x', S_L^n(x,c(x)))}\mathbb{1}_{[c(x');y'[}(S_L^n(x,c(x)))\\
&\qquad\qquad h_0 = 0, h_{k+1} = h_k + h(x_k,y_k) - h(x_{k+1},y_k)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{où } I_k^R = [y_k; y_{k+1}[\text{ et } x_k \text{ est tel que } (x_k,y_k) \in C\\
&\qquad\quad h(y) = h_k + h(x_k,y) \text{ si } y \in I_k^R\\
&\qquad\qquad \nu = h'
\end{aligned}$$

Ce résultat est applicable aux transformations de Bowen-Series à gauche et à droite en prenant (C, T_C) donné par le théorème 2.1, $A_L = -s \log |T_L'|$, $A_R = -s \log |T_R'|$ ainsi que $W(x, y) = -s \log |x - y|^2$. Le premier point est alors une reformulation du théorème précédent, et le second n'est applicable que dans le cas cocompact car il nécessite que les fonctions propres considérées soient bornées.

Dans un cadre général, ce résultat montre que lorsque ses hypothèses sont vérifiées, les seules distributions propres possibles pour cet opérateur de transfert sont nécessairement des dérivées faibles de fonction continues, donnant ainsi un résultat de régularité pour des distributions propres associés à des valeurs propres non nécessairement de module maximal.

Références

[AF91] Roy Adler and Leopold Flatto, *Geodesic Flows, Interval Maps and Symbolic Dynamics*, Bulletin of the American Mathematical Society **25** (1991), no. 2, 229–334.

[BS79] Rufus Bowen and Caroline Series, *Markov Maps associated with Fuschians Groups*, Publications de l'IHES **50** (1979), 401–418.

[CM00] Cheng-Hung Chang and Dieter H. Mayer, *Thermodynamic Formalism and Selberg's zeta function for modular groups*, Regular and Chaotics Dynamics **5** (2000), no. 3, 281–312.

[Hel81] Sigurdur Helgason, *Topics in Harmonic Analysis on Homogenous Spaces*, Progress in Mathematics, vol. 13, Birkhäuser, 1981.

[LT08] Artur Oscar Lopes and Philippe Thieullen, *Eigenfunctions of the Laplacian and eigenfunctions of the associated Ruelle operator*, Nonlinearity **21** (2008), 2239–2253.

[Ota98] Jean-Pierre Otal, *Sur les fonctions propres du Laplacien du disque hyperbolique*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences **327** (1998), no. 1, 161–166.

[Pit12] Vincent Pit, *Invariant relations for the Bowen-Series transform*, Conformal Geometry and Dynamics **16** (2012), 103–123.

[Pol91] Mark Pollicott, *Some Applications of Thermodynamic Formalism to Manifolds with Constant Negative Curvature*, Advances in Mathematics **85** (1991), 161–192.

[Ser81] Caroline Series, *Symbolic dynamics for geodesic flows*, Acta Mathematica **146** (1981), no. 1-2, 103–128.

[Ser86] ———, *Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **6** (1986), 601–625.