Quelques développements d'agrégation

Vincent Pit

25 septembre 2007

J'ai rassemblé dans ce papier un certain nombre de développements que j'avais préparé pour l'agrégation de 2006. J'ai choisi d'exposer ces résultats en particulier car ils sont soit difficilement trouvables, soit profondément remaniés par rapport aux références bibliographiques. Dans tous les cas, il s'agit de développements sur lesquels j'ai pris un réel plaisir à travailler.

Les preuves sont volontairement assez détaillées afin que le lecteur puisse se faire une idée aussi précise que possible du niveau impliqué, mais aussi ne perde pas de temps à buter sur des résultats intermédiaires. Elles sont bien souvent trop longues pour être présentées telles quelles au jury. Il convient donc à chacun de les reprendre en choisissant quelles parties exposer et en éludant les arguments qui paraissent superflus, un travail qui ne peut être qu'individuel.

Bon travail et bonne chance !

Table des matières

Remarque. Certains développements vont à la fois en algèbre et en analyse. Vérifiez les listes !

1 Algèbre et géométrie

1.1 Théorème de Lie-Kolchin

Théorème 1.1.1 (Lie-Kolchin)**.** *Tout sous-groupe connexe résoluble G de $GL(n,\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles $\mathcal{B}$.*

Preuve : On dira qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{C}^n$ est *stable par G* (ou *G-stable*) lorsqu'il est stable par tous les éléments de G. $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$ le sont quel que soit G, et s'ils sont les seuls on dira que G est *irréductible*.

Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur n.
– Si $n = 1$, $GL(n,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, OK.
– Supposons le théorème montré pour tout $k \leq n$, avec $n \geq 2$.

• Si G est irréductible, nous allons d'abord prouver le lemme suivant :

Lemme 1.1.2. *Un sous-groupe connexe résoluble irréductible est commutatif.*

Comme G est résoluble, on peut définir $m = \inf\left\{k \geq 1 \mid D^kG = \{I_n\}\right\}$. G est alors abélien *SSI* $m = 1$. Supposons par l'absurde que $m \geq 2$, et posons $H = D^{m-1}G$. On va montrer que $H = \{I_n\}$, ce qui assurera la contradiction.

$DH = D(D^{m-1}G) = D^mG = \{I_n\}$, donc H est abélien. On peut ainsi en trigonaliser simultanément tous les éléments, et il existe $P \in GL(n,\mathbb{C})$ tel que $PHP^{-1} \subset \mathcal{B}$. Quitte à remplacer G par PGP^{-1}, on peut alors supposer que $H \subset \mathcal{B}$.

Soit $V \subset \mathbb{C}^n$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs propres communs à tous les éléments de H. Montrons que $V = \mathbb{C}^n$.

> $H \subset \mathcal{B}$ donc $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{B}$ est vecteur propre de toute matrice de H. Donc $V \neq \{0\}$. Pour montrer que $V = \mathbb{C}^n$, il suffit alors de prouver que V est G-stable et d'utiliser l'irréductibilité de G. Soit donc $g \in G$ et v propre à tous les $h \in H$, montrons que $g(v) \in V$. Pour tout $h \in H$, $h(g(v)) = gg^{-1}h(g(v)) = g(g^{-1}hg)(v)$ où $g^{-1}hg \in H$ puisque $H \triangleleft G$ comme groupe engendré par des commutateurs. v est propre pour $g^{-1}hg$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g^{-1}hg(v) = \lambda v$. Alors $h(g(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$ et $g(v) \in V$.

Il existe ainsi une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres communs à tous les éléments de H. Donc H est un sous-groupe du groupe des matrices diagonales inversibles $\mathcal{T}$.

Soit $h \in H$, et considérons $\varphi_h \ : \begin{array}{ccc} G & \to & H(\triangleleft G) \\ g & \mapsto & g^{-1}hg \end{array}$. φ_h est continue et G connexe, donc $\varphi_h(G)$ est aussi connexe. Par ailleurs, pour tout $g \in G$, $\varphi_h(g)$ est diagonale et a les mêmes valeurs propres que h. $\varphi_h(G)$ ne peut donc qu'être fini et, comme il est connexe, il est réduit à un élément. Puisque $h \in \varphi_h(G)$, ceci signifie que $\varphi_h(G) = \{h\}$ pour tout $h \in H$, c'est-à-dire : $\forall h \in H, \forall g \in G, g^{-1}hg = h \Leftrightarrow H \subset Z(G)$ (centre de G).

Soit toujours $h \in H$ et $W \neq \{0\}$ un espace propre de h. $h \in Z(G)$ donc W est G-stable, et comme il est non nul l'irréductibilité de G assure une nouvelle fois que $W = \mathbb{C}^n$. Il existe ainsi $\lambda_h \in \mathbb{C}$ tel que $h = \lambda_h I_n$. Mais $m \geq 2$ donc $H \subset DG \subset SL(n,\mathbb{C})$ (puisque le déterminant d'un commutateur vaut 1). Alors $\forall h \in H, \lambda_h^n = \det(h) = 1$, d'où l'on déduit que H est nécessairement fini. Comme il est connexe, il est réduit à I_n. C'est absurde.

> Le commutateur d'un groupe connexe G est en effet connexe, ce qui peut se voir en écrivant $DG = \bigcup_{m\geq 1} S_m$, avec $S = \mathrm{Im}((g_1, g_2) \in G^2 \mapsto g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1})$ et $S_m = \mathrm{Im}((g_1, \ldots, g_m) \in S^m \mapsto g_1 \ldots g_m)$ qui sont connexes comme images continues de connexes. On conclut pour H par récurrence sur m. □

D'après le lemme, on peut alors trigonaliser tous ses éléments dans une même base, ce qui conclut ce cas.

• Sinon, il existe $V \subset \mathbb{C}^n$ G-stable et non trivial. Soit W un supplémentaire de G ; quitte à conjuguer G par une matrice de changement de base, on peut supposer que toutes les matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} g_1 & u \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$

Alors $\begin{cases} \alpha : g \in G \mapsto g_1 \in GL(\dim V, \mathbb{C}) \\ \beta : g \in G \mapsto g_2 \in GL(\dim W, \mathbb{C}) \end{cases}$ induisent deux sous-groupes respectivement $\alpha(G)$ de $GL(\dim V, \mathbb{C})$ et $\beta(G)$ de $GL(\dim W, \mathbb{C})$, connexes résolubles comme images d'un groupe connexe résoluble par un morphisme de groupes continu. Puisque V a été supposé non trivial, $1 \leq \dim V, \dim W \leq n-1$ et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\alpha(G)$ et $\beta(G)$: il existe $P_1 \in GL(\dim V, \mathbb{C})$, $P_2 \in GL(\dim W, \mathbb{C})$ telles que $P_1 \alpha(G) P_1^{-1}$ et $P_2 \beta(G) P_2^{-1}$ soient des groupes de matrices triangulaires supérieures. En notant $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$, on constate alors que $PGP^{-1} \subset \mathcal{B}$. ■

Références : On trouve cette preuve dans le désordre dans [CL05].

Leçons :
– 103. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
– 106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Exemples et applications.
– 121. Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.
– 124. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
– 125. Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espaces vectoriel de dimension finie. Applications.

Commentaires : Il est tout à fait possible de ne faire que le lemme qui est déjà intéressant en soi. Attention à la dernière étape de la récurrence où beaucoup voudront éviter de causer de quotients de groupes résolubles.

1.2 Décomposition de Dunford effective

Théorème 1.2.1. *Soit k un corps et $P \in k[X]$ unitaire. On suppose que P est scindé sur k ou que $\operatorname{car} k = 0$. Notons $A = k[X]/(P)$ qui a une structure de k-algèbre commutative, et $x = \overline{X} \in A$. Il existe $u, v \in A$ tels que $x = u + v$ où :*
(i) u est annulé par un polynôme scindé à racines simples dans une extension de k ;
(ii) v nilpotent.

Preuve : Ecrivons la décomposition en produits d'irréductibles de P : $P = {P_1}^{\alpha_1} \dots {P_s}^{\alpha_s}$, où P_i unitaire irréductible et $\alpha_i \geq 1$. On pose $Q = P_1 \dots P_s$. Alors $Q \mid P$, et pour $r = \max\limits_{i=1\dots s} \alpha_i$, $P \mid Q^r$. Par conséquent, $Q^r(x) = 0$ dans A.

On pose la suite de Newton $\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \geq 0, x_{n+1} = x_n - \frac{Q(x_n)}{Q'(x_n)} \end{cases}$

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $Q'(x_n)$ est inversible dans A (ce qui assurera l'existence de la suite) et que $Q(x_n) \in Q(x)^{2^n} A$.

– Si $n = 0$, on a évidemment que $Q(x) \in Q(x)A$. Reste à montrer que $Q'(x)$ est inversible. Remarquons alors que $P \wedge Q' = 1$.

Il suffit de prouver que $\forall i, P_i \nmid Q'$ pour conclure. Par l'absurde : s'il existait un i tel que $P_i \mid Q' = \sum\limits_k P'_k \prod\limits_{j \neq k} P_j$, alors $P_i \mid P'_i \prod\limits_{j \neq i} P_j$ (il divise trivialement tous les autres) et on en déduirait par le lemme de Gauss ($P_i \wedge P_j = 1$ pour $i \neq j$) que $P_i \mid P'_i$.
Or $P'_i \neq 0$ pour tout i car $\begin{cases} \text{si } \operatorname{car} k = 0, P_i \text{ non constant } \Rightarrow P'_i \neq 0; \\ \text{si } P \text{ scindé, } P_i = X - \lambda_i \text{ pour un } \lambda_i \in k, \text{ d'où } P'_i = 1. \end{cases}$

Comme $\deg P'_i < \deg P_i$, on obtient ainsi que $P_i \nmid P'_i$ pour tout i. C'est absurde.

Si on évalue alors une relation de Bezout $PU + Q'V = 1$ en x, on obtient que $Q'(x)V(x) = 1$ (puisque $P(x) = 0$ dans A), i.e. que $Q'(x)$ est inversible dans A.

– Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang n, et montrons-la au rang $n + 1$.

Si $Q' = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i X^i$, $Q'(x_{n+1}) - Q'(x_n) = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i (x_{n+1}^i - x_n^i)$ où $\begin{cases} (x_{n+1} - x_n) \sum\limits_{i=0}^{d-1} x_{n+1}^i x_n^{d-1-i} \text{ si } i \neq 0; \\ 0 \text{ si } i = 0. \end{cases}$

Donc $Q'(x_{n+1} - x_n) - Q'(x_n) \in (x_{n+1} - x_n)A \subset Q(x_n)A$ par définition de x_{n+1}. Comme $Q(x_n) \in Q(x)^{2^n} A$ par hypothèse de récurrence, et que $Q(x)^r = 0$, $Q(x_n)A$ est un idéal nilpotent (il est contenu dans $Q(x)A$ puisque $2^n \geq 1$). $Q'(x_{n+1}) - Q'(x_n)$ est ainsi nilpotent. Alors $Q'(x_{n+1}) = \underbrace{Q'(x_{n+1}) - Q'(x_n)}_{\text{nilpotent}} + \underbrace{Q'(x_n)}_{\text{inversible}}$ est inversible d'après le lemme qui suit :

Lemme 1.2.2. *Soient A un anneau commutatif, $u \in A$ inversible et $n \in A$ nilpotent. Alors $u + n$ est inversible.*

Il revient au même de montrer que $1 + u^{-1}n$ est inversible. Pour $k \geq 0$, on factorise :
$1 + (-1)^k (u^{-1}n)^{k+1} = (1 + u^{-1}n)(1 - u^{-1}n + (u^{-1}n)^2 - \dots + (-1)^k (u^{-1}n)^k) = (1 + u^{-1}n)b_k$.
Pour k tel que $n^{k+1} = 0, n^k \neq 0$, on a aussi $(u^{-1}n)^{k+1} = 0$; et il vient $(1 + u^{-1}n)b_k = 1$. □

D'autre part, on peut écrire $Q(X + Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2 \widetilde{Q}(X, Y)$ où $\widetilde{Q} \in k[X, Y]$ (par linéarité, il suffit de vérifier cette écriture pour Q monôme, ce que l'on voit facilement avec $(X + Y)^m = X^m + mYX^{m-1} + Y^2(\dots)$). Si on note $y = x_{n+1} - x_n = -\frac{Q(x_n)}{Q'(x_n)}$, alors $Q(x_n) + yQ'(x_n) = 0$ et on en déduit que $Q(x_{n+1}) = Q(x_n + y) = Q(x_n) + yQ'(x_n) + y^2 \widetilde{Q}(x_n, y)$. Ainsi $Q(x_{n+1}) = y^2 \widetilde{Q}(x_n, y) = \frac{Q(x_n)^2}{Q'(x_n)^2} \widetilde{Q}(x_n, y) \in Q(x_n)^2 A \subset Q(x)^{2^{n+1}} A$, achevant la récurrence.

Comme $Q(x)^r = 0$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, Q(x)^{2^n} = 0$ et donc $Q(x_n) = 0$. La suite (x_n) est donc stationnaire. Soit u sa dernière valeur : on a alors $Q(u) = 0$ avec Q scindé à racines simples dans une extension. Il suffit alors de vérifier que $v = x - u$ est bien nilpotent : $v = x - u = x_0 - x_{n_0} = \underbrace{x_0 - x_1}_{\in Q(x)A} + \underbrace{x_1 - x_2}_{\in Q(x)A} + \ldots + \underbrace{x_{n_0-1} - x_{n_0}}_{\in Q(x)A} \in Q(x)A$ donc nilpotent. ■

Application à la décomposition de Dunford. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que χ_f soit scindé sur k. Considérons le morphisme d'algèbres $\Phi : \begin{array}{ccc} k[X] & \to & k[f] \\ X & \mapsto & f \end{array}$; il passe au quotient $A = k[X]/(\chi_f) \to k[f]$ car le théorème de Cayley-Hamilton assure que $\chi_f \in \ker \Phi$.

On applique le théorème pour $P = \chi_f$: on peut alors écrire $x = u + v$ avec u et v vérifiant (i) et (ii), et qui de plus commutent puisque A est une algèbre commutative. Soient $d = \Phi(u)$ et $n = \Phi(v)$. La propriété de morphisme d'algèbres de Φ assure alors que $dn = nd$, n nilpotent et $Q(d) = 0$ avec Q scindé à racines simples dans une extension. Par conséquent $Q \mid \chi_f$, et comme χ_f est scindé sur k, Q l'est aussi ; ses racines dans k sont alors simples. d, annulé par un polynôme scindé à racines simples dans k, est bien diagonalisable sur k.

Pourquoi effective ? L'intérêt de cette preuve réside dans le fait que si car $k = 0$ alors on a $P = (P \wedge P')Q$, ce qui permet de calculer Q par l'algorithme d'Euclide sans connaître les P_i.

En effet, si on écrit $P = P_i^{\alpha_i} U$ avec $P_i \wedge U = 1$, $P' = (\alpha_i P_i' U + P_i U')P_i^{\alpha_i - 1}$. On a déjà vu que $P_i \nmid P_i'$; comme car $k = 0$, $\alpha_i P_i' \neq 0$ donc $P_i \nmid \alpha_i P_i'$ et par suite $P_i \nmid \alpha_i P_i' U + P_i V$ (sinon $P_i \mid \alpha_i P_i' U$ d'où par Gauss $P_i \mid \alpha_i P_i'$, absurde). Par conséquent, P_i apparaît exactement $\alpha_i - 1$ fois dans P', et ainsi $P \wedge P' = P_1^{\alpha_1 - 1} \ldots P_s^{\alpha_s - 1} = \frac{P}{Q}$.

Références : On trouve la preuve sous cette forme dans un papier de D. Ferrand disponible sur le site de Rennes. On retrouve aussi l'idée dans [RB06], mais c'est moins beau (pas d'idéaux) et plus confus.

Leçons :

– 111. Exemples d'applications des idéaux d'un anneau commutatif unitaire.
– 124. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
– 126. Endomorphismes diagonalisables.
– 128. Endomorphismes nilpotents.
– 129. Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.

Commentaires : Ca va dans ideaux et dans nilpotents. C'est constructif (pas comme ce commentaire).

1.3 Théorème de point fixe de Markov-Kakutani

1.4 Théorème de la base adaptée

1.5 Théorème des zéros de Hilbert

1.6 Algorithme de Berlekamp

1.7 Théorème de Molien

1.8 Equation diophantienne et série génératrice

2 Analyse et probabilités

2.1 Théorème de Cartan-Von Neumann

Théorème 2.1.1 (Cartan-Von Neumann)**.** *Tout sous-groupe fermé G de $GL(n,\mathbb{R})$ est une sous-variété.*

Preuve : Pour tout $M \in G$, $\varphi_M \ : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array}$, est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme (car polynomial, et de réciproque $\varphi_{M^{-1}}$). Il suffit donc de prouver que G est une sous-variété au voisinage de I_n ; en composant par les φ_M, on obtiendra que G est une sous-variété au voisinage de chacun de ses points.

On notera $\exp : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto e^M = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \in GL(n,\mathbb{R})$ l'exponentielle de matrice. On va montrer que, restreinte à un espace vectoriel bien choisi, l'exponentielle de matrice réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local dans un voisinage de I_n dans G. Il faut cependant exhiber cet espace vectoriel qui paramétrera G : ce sera $\mathcal{L}_G = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in G\big\}$.

Lemme 2.1.2. *$\mathcal{L}_G$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- $0 \in \mathcal{L}_G$ donc $\mathcal{L}_G \neq \emptyset$.
- $M \in \mathcal{L}_G, \lambda \in \mathbb{R}^*, e^{t\lambda M} \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $\lambda M \in \mathcal{L}_G$.
- Soient $A, B \in \mathcal{L}_G$. Montrons d'abord que $e^{A+B} = \lim\limits_{k\to+\infty} (e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}})^k$.

  Comme $e^X = I_n + X + o(\|X\|)$, $d\exp(0) = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. D'après le théorème d'inversion locale, exp réalise donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans un voisinage de $I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Si on note l sa réciproque, $dl(I_n) = d\exp(0)^{-1} = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, et on obtient le développement limité $l(X) = 0 + Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(X - I_n) + o(\|X - I_n\|)$ au voisinage de I_n.

  D'autre part, on a $e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} = I_n + \frac{A+B}{k} + o(\frac{1}{k})$ lorsque $k \to +\infty$, d'où :

$$\begin{aligned}(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}})^k &= \Big(\exp(l(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}))\Big)^k = \exp\Big(kl(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}})\Big) \\ &= \exp\left(kl(I_n + \frac{A+B}{k} + o(\frac{1}{k}))\right) = \exp(A+B+o(1)) \to \exp(A+B)\end{aligned}$$

Si $t \in \mathbb{R}$, on obtient bien que $e^{t(A+B)} = \lim\limits_{k\to+\infty} (\underbrace{e^{\frac{t}{k}A}}_{\in G} \underbrace{e^{\frac{t}{k}B}}_{\in G})^k \in G$ car G est un groupe fermé. □

Soit $\mathcal{N}$ un supplémentaire de $\mathcal{L}_G$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($\mathcal{N} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $\mathcal{L}_G = \{0\}$).

Lemme 2.1.3. *Il n'existe pas de suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ telle que* $\begin{cases} M_k \to 0 \\ \forall k \geq 0, e^{M_k} \in G \end{cases}$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle suite exite. Alors $\varepsilon_k = \frac{M_k}{\|M_k\|}$ est dans la sphère unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est compacte ($\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie). Quitte à remplacer (ε_k) par une suite extraite, on peut alors supposer qu'elle converge vers un ε de norme 1. Or $\varepsilon_k \in \mathcal{N}$, fermé comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\varepsilon \in \mathcal{N}$.

Montrons alors que $\varepsilon \in \mathcal{L}_G$: si $t \in \mathbb{R}$, $e^{t\varepsilon} = \lim\limits_{k\to+\infty} e^{t\frac{M_k}{\|M_k\|}}$ par continuité de exp.

On décompose $\frac{t}{\|M_k\|} = \underbrace{\lambda_k}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\mu_k}_{|\ |\leq\frac{1}{2}}$; ainsi $e^{t\frac{M_k}{\|M_k\|}} = e^{\lambda_k M_k} e^{\mu_k M_k} \Rightarrow (e^{M_k})^{\lambda_k} = \underbrace{e^{t\varepsilon_k}}_{\to e^{t\varepsilon}} \quad \underbrace{e^{-\mu_k M_k}}_{\substack{\to I_n \text{ car } M_k \to 0 \\ \text{et } |\mu_k| \leq \frac{1}{2}}}$ converge visiblement vers $e^{t\varepsilon}$. Comme $e^{M_k} \in G$ et G fermé, $e^{t\varepsilon} \in G$ pour tout t, i.e. $\varepsilon \in \mathcal{L}_G$.

Par conséquent $\varepsilon \in \mathcal{N} \cap \mathcal{L}_G = \{0\}$, soit $\varepsilon = 0$, ce qui contredit $\|\varepsilon\| = 1$. □

Posons $\Phi \ : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{L}_G & \to & GL(n,\mathbb{R}) \\ (M,\ L) & \mapsto & e^M e^L \end{array}$.

Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$, et par un développement limité on voit que $d\Phi = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe U voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(U)$ soit un ouvert de $GL(n,\mathbb{R})$ contenant I_n et $\Phi : U \to \Phi(U)$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Il existe alors $V \subset U$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\Phi : V \cap \mathcal{L}_G \to \Phi(V) \cap G$ soit surjective.

Par l'absurde : sinon, tout voisinage de 0 contenu dans U possède des éléments non inclus dans $\mathcal{L}_G$ et dont les images par Φ sont dans G. Pour tout k tel que $B(0, \frac{1}{k}) \subset U$, il existe ainsi $X_k = \underbrace{M_k}_{\in \mathcal{N}} + \underbrace{L_k}_{\in \mathcal{L}_G} \in B(0, \frac{1}{k})$ tel que $M_k \neq 0$ ($X_k \notin \mathcal{L}_G$) et $\Phi(X_k) \in G$.

Lorsque $k \to +\infty$, $X_k \to 0$ donc $M_k \to 0$. D'autre part, $e^{M_k} = \underbrace{\Phi(X_k)}_{\in G} \underbrace{e^{-L_k}}_{\in G \text{ car } L_k \in \mathcal{L}_G} \in G$.

L'existence de (M_k) contredit donc le lemme 2.1.3.

Φ induit ainsi un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $V \cap \mathcal{L}_G$, voisinage de 0 dans $\mathcal{L}_G$, dans $\Phi(V) \cap G$, voisinage de I_n dans G. ■

Espace tangent en l'identité. Si $\mathcal{L}_G = \{0\}$, G est discret. Sinon, $\mathcal{L}_G$ dirige l'espace tangent à G en I_n.

En effet, Si $X \in \mathcal{L}_G$, $t \mapsto \exp(tX)$ est une courbe dans G passant par I_n, dont le vecteur tangent à 0 est X (facile par un développement limité). Donc $\mathcal{L}_G \subset \overrightarrow{T_{I_n}G}$, mais comme $\dim \overrightarrow{T_{I_n}G} = \underbrace{\dim G = \dim \mathcal{L}_G}_{\text{par la preuve précédente}}$ on a en fait égalité.

Références : Il fait l'objet de deux exercices dans [GT98]. On le trouve aussi dans [MT86], mais c'est plus confus.

Leçons :
– 106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Exemples et applications.
– 127. Exponentielle de matrices. Applications.
– 214. Applications du théorème d'inversion locale et des fonctions implicites.
– 215. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Commentaires : Cette preuve présente le double avantage de ne pas parler du tout de groupes et d'algèbres de Lie, ainsi que de ne nécessiter aucune connaissance préalable sur le logarithme matriciel l dont on retrouve d'ailleurs le développement limité dans le premier lemme. Ce lemme (que l'on doit à S. Giraud) est par ailleurs assez technique et peut être admis si le temps vient à manquer. Dans les deux références données, on trouve aussi la preuve d'un développement limité à l'ordre deux, mais ce résultat n'est utile que si l'on souhaite prouver que $\mathcal{L}_G$ est stable par crochet de Lie.

2.2 Théorème de Hadamard-Lévy

Théorème 2.2.1 (Hadamard-Lévy)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. f est un difféomorphisme SSI f est propre (l'image réciproque par f de tout compact est un compact) et $df(x)$ est inversible pour tout x.*

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$: Si f est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme, f^{-1} est continue donc l'image de tout compact par f^{-1} est un compact. D'autre part, $d(f^{-1} \circ f)(x) = id_{\mathbb{R}^n} = df^{-1}(f(x)) \circ df(x)$, donc $df(x)$ est inversible pour tout x.

$\boxed{\Leftarrow}$: (i) f est injective :

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) - f(x_0)$, dont il est équivalent de montrer l'injectivité. g est elle aussi propre et, comme $dg(x) = df(x)$, dg est inversible en tout point. On pose alors $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$. Puisque $x_0 \in S$, il suffit de prouver que S est réduit au singleton $\{x_0\}$ pour voir que g est injective.

Étape 1. *S est fini.*

Comme g est propre, $S = g^{-1}(\{0\})$ est compact. Supposons par l'absurde que S est infini : il admet donc un point d'accumulation, et il existe $(\alpha_k) \in S^{\mathbb{N}}$ tel que $\alpha_k \to \alpha \in S$. $dg(\alpha)$ étant inversible, le théorème d'inversion locale donne l'existence de $\begin{cases} U \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } x_0 \\ V \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } 0 \end{cases}$ tels que g induise un difféomorphisme de U dans V. En particulier, g est injective sur U, mais pour k suffisamment grand $\alpha_k \in U$ et $g(\alpha_k) = 0$. C'est absurde. $\square$

Posons $S = \{p_1 \dots p_N\}$ et $F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto dg(x)^{-1}\,[g(x)]$. Comme f est $\mathcal{C}^2$, F est $\mathcal{C}^1$.

Étape 2. *Pour tout $q \in \mathbb{R}^n, (S_q)$: $\begin{cases} \forall t > 0, x_q'(t) = -F(x_q(t)) \\ x_q(0) = q \end{cases}$ admet une unique solution maximale définie sur $[0; +\infty[$.*

Puisque F est $\mathcal{C}^1$, on a par le théorème de Cauchy-Lipschitz existence et unicité d'une solution maximale x_q de (S_q) sur $[0; T^*[$. Alors, pour $t \in [0; T^*[$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(g(x_q(t))\right) &= dg(x_q(t))\left[x_q'(t)\right] = -dg(x_q(t))\left[F(x_q(t))\right] \\ &= -dg(x_q(t))\left[dg(x_q(t))^{-1}(g(x_q(t)))\right] = -g(x_q(t)) \end{aligned}$$

$t \in [0; T^*[\mapsto g(x_q(t))$ est ainsi solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. En la résolvant, il vient que $g(x_q(t)) = g(q)e^{-t}$. Or pour tout $t \in [0; T^*[$, $g(x_q(t)) \in \overline{B}(0, \|q\|)$ qui est compact. Comme g est propre, $K = g^{-1}(\overline{B}(0, \|q\|))$ est compact, et on a que : $\forall t \leq T^*, x_q(t) \in K$. D'après le principe des majorations à priori, $T^* = +\infty$. $\square$

Étape 3. *Pour tout p_i, il existe $\delta_i > 0$ tel que : $\exists T \geq 0, \|x_q(T) - p_i\| < \delta_i \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x_q(t) = p_i$.*

Fixons $p_i \in S$. $dg(p_i)$ est inversible donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe $\begin{cases} U \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } p_i \\ V \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } 0 \end{cases}$ tels que $g : U \to V$ induise un difféomorphisme. Soient $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(0, \varepsilon_i) \subset V$ et $\delta_i > 0$ tel que $B(p_i, \delta_i) \subset g^{-1}(B(0, \varepsilon_i))$; montrons qu'ils conviennent. On suppose qu'il existe $T \geq 0$ tel que $\|x_q(T) - p_i\| < \delta_i$, et on note $q' = x_q(T)$. L'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne que : $\forall t \geq 0, x_q(T + t) = x_{q'}(t)$. Alors :

$$\begin{aligned} q' \in B(p_i, \delta_i) &\Rightarrow g(q') \in B(0, \varepsilon_i) \Rightarrow \forall t \geq 0, g(x_{q'}(t)) = g(q')e^{-t} \in B(0, \varepsilon_i) \ (e^{-t} \leq 1) \\ &\Rightarrow x_q(T + t) = x_{q'}(t) = g^{-1}\left(g(x_{q'}(t))\right) = g^{-1}\left(g(q')e^{-t}\right). \end{aligned}$$

où ce dernier terme tend vers $g^{-1}(0) = p_i$ lorsque $t \to +\infty$. $\square$

Notons $W_i = \left\{ q \in \mathbb{R}^n \mid \lim\limits_{t \to +\infty} x_q(t) = p_i \right\}$.

Étape 4. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^N W_i$.

Si $q \in \mathbb{R}^n$, on a vu que $x_q(t)$ était à valeurs dans un compact K. Il existe donc une suite strictement croissante de réels positifs (t_k) telle que $(x_q(t_k))_{k \geq 0}$ converge vers $l \in K$. Or $g(x_q(t_k)) = g(q)e^{-t_k} \to 0$ donc la continuité de g assure que $g(l) \in S$. Si $g(l) = p_i$, il existe k_0 tel que $x_q(t_{k_0}) \in B(p_i, \delta_i)$, et le point précédent conclut. $\square$

Étape 5. *Les W_i sont ouverts.*

Soit $q \in W_i$. D'après le point précédent, $\lim\limits_{t \to +\infty} x_q(t) = p_i \in S$ et il existe donc $T > 0$ tel que $x_q(T) \in B(p_i, \frac{\delta_i}{2})$. En appliquant le théorème de continuité des solutions de (S_q) par rapport aux conditions initiales, on obtient l'existence d'un $\eta > 0$ tel que, pour tout q' vérifiant $\|q - q'\| < \eta$, on ait $\|x_q(T) - x_{q'}(T)\| < \frac{\delta_i}{2}$. Pour ces q', $\|x_{q'}(T) - p_i\| \leq \|x_{q'}(T) - x_q(T)\| + \|x_q(T) - p_i\| < \delta_i$, et donc $q' \in W_i$. $\square$

D'après la troisième étape, $i \neq j \Rightarrow W_i \cap W_j = \emptyset$. Ainsi $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^N W_i$ où les W_i sont des ouverts disjoints : par connexité de $\mathbb{R}^n$, $N = 1$ et $S = \{x_0\}$.

<u>(ii) f est surjective</u> :

Comme $\mathbb{R}^n$ est connexe, il suffit de montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$.

– Si $y_0 = f(x_0) \in f(\mathbb{R}^n)$ il existe par théorème d'inversion locale $\begin{cases} U \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } x_0 \\ V \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } y_0 \end{cases}$ tels que $f : U \to V$ soit un difféomorphisme. Pour tout $y \in V$, $y = f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$ avec $x \in U$. $f(\mathbb{R}^n)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

– Soit $(y_k) = (f(x_k)) \in f(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que $y_k \to y \in \mathbb{R}^n$, montrons que $y \in f(\mathbb{R}^n)$. Posons $K = \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$. C'est un compact, et comme f est propre $f^{-1}(K)$ est aussi compact. Puisqu'il contient la suite $(x_k)_{k \geq 0}$., il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(k)}$ converge vers $x \in f^{-1}(K)$. Mais alors $y = \lim\limits_{k \to +\infty} y_{\varphi(k)} = \lim\limits_{k \to +\infty} f(x_{\varphi(k)}) = f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$ par continuité de f. ■

Références : [QZ02], page 392.

Leçons :
– 204. Connexité. Exemples et applications.
– 214. Applications du théorème d'inversion locale et des fonctions implicites.
– 215. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
– 220. Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.
– 221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
– 222. Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

Conmmentaires : Long mais joli et rentable. On peut ne faire que l'injectivité, mais c'est dommage pour la leçon connexité. L'hypothèse f $\mathcal{C}^1$ est en fait suffisante pour avoir le même résultat, mais la preuve est plus compliquée. Attention, [QZ02] affirme allégrement que les p_i sont des points d'équilibres asymptotiquement stables, alors qu'il ne prouve déjà pas qu'ils sont stables. Ce résultat est cependant juste, et s'obtient en adaptant le troisième point de la démonstration de l'injectivité.

2.3 Théorème de Wiener

Théorème 2.3.1 (Wiener)**.** *Notons* $A = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\right\}$ *que l'on munit de la norme* $\|f\|_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$*. Alors* $(A, \| \ \|_A)$ *est une algèbre de Banach ; et si* $f \in A$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{T}$*, alors* $\frac{1}{f} \in A$.

Preuve : Remarquons pour commencer que si $f \in A$, alors f est somme de sa série de Fourier, et celle-ci converge normalement.

Lemme 2.3.2. $(A, \| \ \|_A)$ *est une algèbre de Banach.*

C'est clairement un espace vectoriel, et $\varphi : \begin{array}{ccc} (l^1(\mathbb{Z}), \| \ \|_1) & \to & (A, \| \ \|_A) \\ (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{int}) \end{array}$, qui est bien défini puisque la série converge normalement, induit un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, pour $u \in l^1(\mathbb{Z})$, la convergence normale de la série $\varphi(u)$ assure que $c_n(\varphi(u)) = u_n$, d'où $\|\varphi(u)\|_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi(u))| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| = \|u\|_1$; ainsi φ est une isométrie. φ est enfin clairement surjective donc A est isométrique à $l^1(\mathbb{Z})$. Comme celui-ci est complet, A l'est aussi.

Soient alors $f, g \in A$, montrons que $\|fg\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$. Notons $f = \varphi(u), g = \varphi(v)$. Comme le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergent, $u * v \in l^1(\mathbb{Z})$ et alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{T}, \varphi(u*v)(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right) e^{inx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{n-k} e^{inx}\right) \text{ par cv. normale} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ikx} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{n-k} e^{i(n-k)x}\right) = \varphi(u)(x).\varphi(v)(x) \text{ en translatant} \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(u)\varphi(v) = fg = \varphi(u*v)$, donc φ est un morphisme d'algèbres et il vient alors que $fg \in A$ et $\|fg\|_A = \|u*v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1 = \|f\|_A \|g\|_A$.

Remarquons finalement que A est unitaire puisque $1 \in A$ et $\|1\|_A = 1$. □

Donnons-nous alors deux inégalités :

- Si $f \in A, x \in \mathbb{T}, |f(x)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = \|f\|_A$. Donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|_A$.
- Si $f \in A \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, $f' \in L^2$ donc $(c_n(f'))_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable et $c_n(f) = \frac{1}{n} |c_n(f')|$. D'où :

$$\|f\|_A = |c_0(f)| + \sum_{n\neq 0} |c_n(f)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\right| + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} |c_n(f')| \text{, puis par Cauchy-Scwartz}$$

$$\|f\|_A \leq \|f\|_\infty + \sqrt{\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n\neq 0} |c_n(f')|^2} \leq \|f\|_\infty + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|f'\|_2 \leq \|f\|_\infty + 2\|f'\|_\infty \ \left(\text{car } \frac{\pi}{\sqrt{3}} \leq 2\right).$$

Soit alors $f \in A$ telle que : $\forall x \in \mathbb{T}, f(x) \neq 0$. En notant $\lambda = \min_{x\in\mathbb{T}} |f(x)| > 0$ et $g = \frac{f}{\lambda} \in A$, on est ramené à montrer que $\frac{1}{g} \in A$ avec $|g| \geq 1$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose le polynôme trigonométrique $P_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(g) e^{-int}$. Puisque $g \in A$, $\|P_N - g\|_A = \displaystyle\sum_{|n|>N} |c_n(g)| \to 0$ lorsque $N \to +\infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|P_N - g\|_A < \frac{1}{3}$.

Si on note $P = P_N$, on a que $|P| \geq \frac{2}{3}$

On peut le voir en faisant un dessin (P et g sont au plus distants de $\frac{1}{3}$ en norme infinie), ou par le calcul suivant pour $x \in \mathbb{T}$:

$|P(x)| = |P(x) - g(x) + g(x)| \geq |g(x)| - |P(x) - g(x)| \geq 1 - \|P - g\|_\infty \geq 1 - \|P - g\|_A$

D'où $|P(x)| \geq 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$. En particulier P ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.

Comme $\left\| \dfrac{(P-g)^{n-1}}{P^n} \right\|_\infty \leq \dfrac{1}{3^{n-1}} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \dfrac{3}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$, la série des $\left(\dfrac{(P-g)^{n-1}}{P^n}\right)_{n\geq 1}$ converge normalement sur $\mathbb{T}$ vers $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(P-g)^{n-1}}{P^n} = \frac{1}{P}\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{g}{P}\right)^{n-1} = \frac{1}{P}\frac{1}{1-(1-\frac{g}{P})} = \frac{1}{g}$.

Montrons que cette série converge aussi en $\| \ \|_A$. D'après la deuxième inégalité, il vient :

$$\left\| \frac{1}{P^n} \right\|_A \leq \left\| \frac{1}{P^n} \right\|_\infty + 2\left\| n\frac{P'}{P^{n+1}} \right\|_\infty \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2n\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \|P'\|_\infty = \left(\frac{3}{2}\right)^n (1+3n\|P'\|_\infty).$$

Alors par propriété d'algèbre de Banach,

$$\left\| \frac{(P-g)^{n-1}}{P^n} \right\|_A \leq \|P-g\|_A^{n-1} \left\| \frac{1}{P^n} \right\|_A \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^n (1+3n\|P'\|_\infty) = \frac{3}{2^n}(1+3n\|P'\|_\infty).$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left\| \frac{(P-g)^{n-1}}{P^n} \right\|_A$ converge donc, et comme A est complet la série de terme général $\left(\dfrac{(P-g)^{n-1}}{P^n}\right)_{n\geq 1}$ converge normalement dans $(A, \| \ \|_A)$ vers $h \in A$. Mais comme $\| \ \|_\infty \leq \| \ \|_A$, cette série converge dans $(A, \| \ \|_\infty)$ vers h. Par unicité de la limite, $\dfrac{1}{g} = h \in A$. ■

Références : Un papier de H. Hennion.

Leçons :
– 201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.
– 205. Espaces complets. Exemples et applications.
– 241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
– 242. Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.
– 246. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.

Commentaires : Ce théorème classique se trouve dans tout bon livre d'analyse harmonique (tel que [Kat04]), mais il est souvent prouvé par le biais de la théorie des algèbres de Banach. Cette preuve est élémentaire, pas trop difficile et se recase beaucoup mieux du point de vue de l'agrégation.

2.4 Théorème d'Ascoli dans les espaces métriques

Définition 2.4.1. Soient (X,d), (E,δ) deux espaces métriques, et H une famille de fonctions de X dans E. H est dite *équicontinue en $x \in X$* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in X, d(x,y) < \alpha \Rightarrow \forall f \in H, \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

H est *équicontinue* lorsqu'elle est équicontinue en tout point de X. Elle est *uniformément équicontinue* lorsque α ne dépend pas de x :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in X, d(x,y) < \alpha \Rightarrow \forall f \in H, \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Si l'espace de base est (métrique) compact, on a en fait l'équivalence :

Lemme 2.4.2. *Si X est un espace métrique compact, H est équicontinue SSI elle est uniformément équicontinue.*

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$: Évident d'après les définitions.
$\boxed{\Rightarrow}$: Soit $\varepsilon > 0$. H est équicontinue donc, pour tout $x \in X$, il existe un $\alpha_x > 0$ pour lequel $\forall y \in B(x, \alpha_x), \forall f \in H, \delta(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. On peut écrire que $X \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \dfrac{\alpha_x}{2})$; par compacité il existe alors $x_1 \dots x_p \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{i=1\dots p} B(x_i, \dfrac{\alpha_{x_i}}{2})$. Posons $\eta = \min_{i=1\dots l} \alpha_{x_i}$, et soient $x, y \in X$ tels que $d(x,y) < \frac{\eta}{2}$. Il existe un $i \in [\![1\,;\,l]\!]$ (dépendant de x) tel que $x \in B(x_i, \frac{\alpha_i}{2})$. Alors $d(y, x_i) \leq d(y,x) + d(x, x_i) < \frac{\eta}{2} + \frac{\alpha_i}{2} \leq \frac{\alpha_i}{2} + \frac{\alpha_i}{2} = \alpha_i$, ce qui signifie que $y \in B(x_i, \alpha_i)$; et il vient finalement que : $\forall f \in H, \delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f(x_i)) + \delta(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

Théorème 2.4.3 (Ascoli)**.** *Soient (X,d) un espace métrique compact et (E,δ) un espace métrique quelconque. On munit $\mathcal{C}^0(X,E)$ de la distance $\delta_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} \delta(f(x), g(x))$. Soit $H \subset \mathcal{C}^0(X,E)$. H est relativement compact SSI :*
(i) H est uniformément équicontinue.
(ii) Pour tout $x \in X$, $H_x = \{f(x) \mid f \in H\}$ est relativement compact dans E.

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$: Pour montrer que H est relativement compact, il est équivalent de montrer que l'on peut extraire de toute suite de H une sous-suite qui converge, bien évidemment pas dans H (auquel cas il serait compact), mais dans $(\mathcal{C}^0(X,E), \delta_\infty)$. Soit donc $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de H. X est métrique compact donc séparable : soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite dense de X.

Étape 1. *Il existe alors une suite extraite $(f_{n_p})_{p \geq 0}$ telle que $(f_{n_p}(x_k))_{p \geq 0}$ converge pour tout k.*

C'est une conséquence du procédé d'extraction diagonale.

H_{x_0} est relativement compact dans E donc il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi_0(p)}(x_0))_{p \geq 0}$ converge dans E. H_{x_1} est aussi relativement compact dans E donc il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(p)}(x_l))_{p \geq 0}$ converge, tandis que $(f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(p)}(x_0))_{p \geq 0}$ converge encore comme extraction d'une suite convergente. On construit ainsi $\varphi_0, \dots, \varphi_m, \dots$ telles que $(f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m(p)}(x_k))_{p \geq 0}$ converge pour $k \leq m$. Pour tout p, on pose alors $n_p = \varphi_0 \circ \dots \varphi_p(p)$. $(f_{n_p})_{p \geq 0}$ convient. □

Étape 2. $(f_{n_p})_{p \geq 0}$ *est de Cauchy dans* $(\mathcal{C}^0(X,E), \delta_\infty)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme équicontinuité de $\{f_{n_p} \mid p \in \mathbb{N}\} \subset H$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x,y) < \eta \Rightarrow \forall p \geq 0, \delta(f_{n_p}(x), f_{n_p}(y)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (1). Comme $(x_k)_{k \geq 0}$ est dense, $X \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(x_k, \eta)$ et il existe alors par compacité $k_1, \dots, k_l$ tels que $X \subset \bigcup_{i=1\dots l} B(x_{k_i}, \eta)$.

Chacune des suites $(f_{n_p}(x_{k_i}))_{p\geq 0}$ converge donc est de Cauchy ; comme les (x_{k_i}) sont en nombre fini, il existe $N \geq 0$ tel que : $\forall p, q \geq N, \forall i \in [\![1\,;\,l]\!], \delta(f_{n_p}(x_{k_i}), f_{n_q}(x_{k_i})) < \frac{\varepsilon}{3}$ (2). Prenons alors $p, q \geq N$ et $x \in X$. Pour j tel que $x \in B(x_{k_j}, \eta)$ (du recouvrement), on a :

$$\delta(f_{n_p}(x), f_{n_q}(x)) \leq \underbrace{\delta(f_{n_p}(x), f_{n_p}(x_{k_j}))}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ par }(1)} + \underbrace{\delta(f_{n_p}(x_{k_j}), f_{n_q}(x_{k_j}))}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ par }(2)} + \underbrace{\delta(f_{n_q}(x_{k_j}), f_{n_q}(x))}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ par }(1)} < \varepsilon$$

ce qui prouve par passage au sup que (f_{n_p}) est de Cauchy. □

(E, δ) n'ayant pas été supposé complet, on ne sait rien de la complétude de $(\mathcal{C}^0(X, E), \delta_\infty)$. Heureusement, on va pouvoir s'en passer. En effet, pour tout $x \in X$, la suite $(f_{n_p}(x))_{p\geq 0}$ prend ses valeurs dans H_x relativement compact, donc elle admet au moins une valeur d'adhérence. D'autre part, si $\varepsilon > 0$ il existe $N \geq 0$ tel que : $\forall p, q \geq N, \delta(f_{n_p}(x), f_{n_q}(x)) \leq \delta_\infty(f_{n_p}, f_{n_q}) < \varepsilon$ (3). Ceci prouve que $(f_{n_p}(x))_{p\geq 0}$ est de Cauchy ; elle admet donc au plus une valeur d'adhérence. Cette suite converge par conséquent vers un certain $f(x) \in E$. En faisant tendre q vers $+\infty$ dans (3), on obtient alors que : $\forall p \geq N, \forall x \in X, \delta(f_{n_p}(x), f(x)) < \varepsilon$. On a ainsi montré que $f \in \mathcal{C}^0(X, E)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \delta_\infty(f_{n_p}, f) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$: Supposons H relativement compact.
(i) Comme $H \subset \overline{H}$ compact, H est précompacte. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $f_1 \dots f_l \in H$ tel que $H \subset \bigcup\limits_{i=1\dots l} B(f_i, \dfrac{\varepsilon}{3})$. La famille finie $(f_i)_{i\in[\![1\,;\,l]\!]}$ de fonctions continues est clairement équicontinue. Soit $x \in X$. Il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall y \in X, d(x, y) < \alpha \Rightarrow \forall i \in [\![1\,;\,l]\!], \delta(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Donnons-nous $y \in B(x, \alpha)$. Si $f \in H$, $f \in B(f_i, \frac{\varepsilon}{3})$ pour un certain i, et alors :

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f_i(x)) + \delta(f_i(x), f_i(y)) + \delta(f_i(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

(ii) Soient $x \in X$ et $(y_n)_{n\geq 0} = (f_n(x))_{n\geq 0} \in {H_x}^{\mathbb{N}}$. $(f_n)_{n\geq 0} \in H^{\mathbb{N}}$ donc, par relative compacité de H, il existe $(n_p)_{p\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que l'extraction $(f_{n_p})_{p\geq 0}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}^0(X, E)$. Alors $y_{n_p} = f_{n_p}(x) \to f(x)$ lorsque $p \to +\infty$. H_x est donc relativement compact. ■

Références : Un cours de M. Pierre. Le cas E complet se trouve dans [QZ02].

Leçons :
– 201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.
– 203. Utilisation de la notion de compacité.
– 208. Utilisation de la continuité uniforme en analyse.
– 209. Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.
– 241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Commentaires : L'uniforme équicontinuité correspond formellement à une notion d'équi-uniforme-continuité (une famille de fonctions uniformément continues dont le α ne dépendrait pas de la fonction).

Le théorème est encore vrai pour X un espace topologique compact, pour lequel on peut encore définir la notion d'équicontinuité en remplaçant les boules dans X par des voisinages. Par contre, la notion d'équicontinuité uniforme n'a plus de sens, et le théorème s'énonce donc en termes d'équicontinuité simple. La démonstration fait appel au théorème de Tychonoff dans son cadre général. Notons que l'argument d'extraction diagonale de la preuve qui vient d'être exposée ici correspond au théorème de Tychonoff pour un nombre dénombrable de compacts (appliqué à $\prod_{k\in\mathbb{N}} \overline{H_{x_k}}$).

2.5 Dual de L^p, $1 \leq p \leq 2$

2.6 Sous-espaces fermés de L^p

2.7 Continuité des fonctions convexes

2.8 Sous-espaces stables par translation

Théorème 2.8.1. *Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $F \subset E$. On pose, pour $a \in \mathbb{R}$,* $\tau_a \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x-a)) \end{array}$
Alors F est une sous-espace vectoriel de E de dimension finie n et stable par τ_a pour tout $a \in \mathbb{R}$ SSI il existe $(\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f^{(n)} + \alpha_{n-1} f^{(n-1)} + \ldots + \alpha_0 f = 0 \right\}$, i.e. F est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants.

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$: Si $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f^{(n)} + \alpha_{n-1} f^{(n-1)} + \ldots + \alpha_0 f = 0 \right\}$, c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n par le théorème de Cauchy-Lipschitz, et invariant par translation puisque l'équation différentielle qui le définit l'est.

$\boxed{\Rightarrow}$: Soient F un tel sous-espace, $n = \dim F$ et $(f_i)_{1 \le i \le n}$ une base de F. Fixons $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\tau_{-a} f_i \in F$ par hypothèse, donc il existe $\lambda_{i,1}(a) \dots \lambda_{i,1}(a) \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\tau_{-a} f_i = \lambda_{i,1}(a) f_1 + \ldots + \lambda_{i,n}(a) f_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut alors intégrer cette relation sur $[0\,;\,x]$: $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_0^x f_i(t+a)dt = \lambda_{i,1}(a) \int_0^x f_1(t)dt + \ldots + \lambda_{i,n}(a) \int_0^x f_n(t)dt$.
Notons $F_i(x) = \displaystyle\int_0^x f_i(t)dt$. Puisque $\displaystyle\int_0^x f_i(t+a)dt = \int_a^{x+a} f_i(t)dt = F_i(x+a) - F_i(x)$, l'équation précédente se réécrit : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \forall x \in \mathbb{R}, F_i(x+a) - F_i(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_{i,k}(a) F_k(x)$.

On doit d'abord montrer que les f_i sont régulières ; et pour ce faire, on va montrer que les $a \mapsto \lambda_{i,j}(a)$ le sont en les exprimant en fonction des F_i.

Notons $\underline{x} = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A(\underline{x}) = (F_i(x_j))_{1 \le i,j \le n}$. Montrons qu'il existe $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ pour lequel $A(\underline{x})$ est inversible.

Sinon, $\begin{vmatrix} F_1(x_1) & \dots & F_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ F_n(x_1) & \dots & F_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$ pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Dérivons successivement en $x_1 \dots x_n$; par linéarité du déterminant par rapport à chacune des colonnes, et puisque chaque x_i n'apparait que dans une colonne, on obtient que : $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$. Ceci contredit le...

Lemme 2.8.2. *Si $(f_i)_{1 \le i \le n}$ est libre, il existe $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $(f_i(x_j))_{1 \le i,j \le n}$ est inversible.*

C'est un résultat classique ; en voici deux preuves.
a) Avec le déterminant : montrons par récurrence sur n qu'il existe $(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que le déterminant de cette matrice soit non nul :
∘ Si $n = 1$, f_1 est libre donc non nulle : il existe x_1 tel que $f_1(x_1) \neq 0$.
∘ Supposons la propriété vérifiée au rang $n-1$. Notons $\Delta_i(x_1 \dots x_{n-1})$ le mineur associé à $f_i(x_n)$ dans $d(\underline{x}) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$. Un développement selon la dernière colonne donne que $d(\underline{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n (-1)^{i+n+1} f_i(x_n) \Delta_i(x_1 \dots x_{n-1})$. L'hypothèse de récurrence assure l'existence de $x_1 \dots x_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\Delta_n(x_1 \dots x_{n-1}) \neq 0$. Mais si l'on suppose que $d(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ pour tout x_n, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n \left((-1)^{i+n+1} \Delta_i(x_1 \dots x_{n-1}) \right) f_i = 0$, ce qui contredit la liberté des $(f_i)_{1 \le i \le n}$. Il existe donc x_n tel que $d(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \neq 0$.

b) Par dualité : pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta_x \ : \ \begin{array}{rcl} F & \rightarrow & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$ la forme linéaire d'évaluation en x. $\delta_x \in F^*$ où $\dim F^* = \dim F = n$. Soit $\Gamma = \{\delta_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \mathrm{vect}(\Gamma)$. Son orthogonal est $G^\circ = \Gamma^\circ = \{f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R}, \delta_x(f) = 0\} = \{f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\} = \{0\}$. Une formule de dualité donne alors que $\dim G = n - \dim G^\circ = n = \dim F^*$, ce qui prouve que Γ engendre F^*. Comme $\dim F^* = n$, il existe $(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $(\delta_{x_j})_{1 \leq j \leq n}$ forme une base de F^*. Notons $(g_1 \dots g_n)$ sa base antéduale (de F). Il existe alors $(a_{i,k})_{1 \leq i,k \leq n}$ tel que $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], f_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} g_k$. La matrice des $(a_{i,k})_{1 \leq i,k \leq n}$ est inversible puisqu'il s'agit en fait de la transposée de la matrice de passage de (g_k) à (f_i). Il reste à constater que $f_i(x_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} g_k(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \delta_{k,j} = a_{i,j}$ pour voir qu'avec ce choix de (x_j) la matrice des $(f_i(x_j))$ est inversible. □

$\forall (i,j), F_i(x_j + a) - F_i(x_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k}(a) F_k(x_j)$, donc $(F_i(x_j + a) - F_i(x_j))_{i,j} = (\lambda_{i,j}(a))_{i,j} A(\underline{x})$. Comme $A(\underline{x})$ est inversible, $(\lambda_{i,j}(a))_{i,j} = (F_i(x_j + a) - F_i(x_j))_{i,j} A(\underline{x})^{-1}$. La continuité des f_i assure que les F_i sont $\mathcal{C}^1$ et par suite que $a \mapsto \lambda_{i,j}(a)$ est $\mathcal{C}^1$. Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_i(x + a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k}(a) f_k(x)$ (relation $(E_{x,a})$), donc les $a \mapsto f_i(0 + a) = f_i(a)$ sont $\mathcal{C}^1$.

Formons $\dfrac{(E_{x,a}) - (E_{x,0})}{a}$ pour tout $a \neq 0$: $\dfrac{f_i(x+a) - f_i(x)}{a} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{i,k}(a) - \lambda_{i,k}(0)}{a} f_k(x)$. On peut alors faire tendre a vers 0 puisque les quantités considérées sont dérivables, d'où l'on obtient que $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \forall x \in \mathbb{R}, f_i'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k}'(0) f_k(x)$. Une récurrence immédiate donne alors que $F \subset \mathcal{C}^\infty$ et que $D \ : \ \begin{array}{rcl} F & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ stabilise F $(D(F) \subset F)$.

Vu comme endomorphisme de l'espace de dimension finie F, D admet un polynôme minimal. Il existe ainsi $r \leq n$ et $(\alpha_0 \dots \alpha_{r-1}) \in \mathbb{R}^r$ tels que $X^r + \alpha_{r-1} X^{r-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$ soit le polynôme minimal de D. Ceci donne l'inclusion $F \subset \left\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f^{(r)} + \alpha_{r-1} f^{(r-1)} + \dots + \alpha_0 f = 0\right\}$. Mais comme l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire de degré r est par Cauchy-Lipschitz de dimension r d'une part, et que $\dim F = n$ d'autre part, nécessairement $n \leq r$. Finalement, $n = r$ et l'inclusion est en fait une égalité. ■

Références : [Lei00] p. 92 donne l'idée pour $n = 2$. Les deux preuves du lemme se trouvent dans [Gou98] p. 152, ou bien encore dans [BMP05] p. 142.

Leçons :
– 120. Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.
– 123. Déterminant. Exemples et applications.
– 125. Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espaces vectoriel de dimension finie. Applications.
– 129. Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs. Applications.
– 132. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
– 201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.
– 211. Utilisation de la dimension finie en analyse.
– 220. Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.
– 221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

– 222. Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.
– 228. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
– 233. Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.

Commentaires : Élémentaire, mais rentabilité record ! Choisir d'exposer la preuve a) ou b) du lemme suivant l'objet de la leçon.

A noter qu'on aurait pu utiliser le polynôme caractéristique au lieu du polynôme minimal, puisqu'on ne se sert pas vraiment de la minimalité mais plutot du fait que $r \leq n$. Cela nous aurait épargné la peine d'utiliser Cauchy-Lipschitz une seconde fois, mais nécessitait Cayley-Hamilton pour prouver qu'il était bien annulateur.

2.9 Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une *marche aléatoire* sur $\mathbb{Z}^d$ est une suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, où les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) de même loi μ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. En remarquant que $\mathbb{P}(\limsup[S_n = 0])$ s'interprète comme la probabilité de passer une infinité de fois en 0, on dit que la marche aléatoire est *récurrente* lorsque cette probabilité est 1 et *transiente* lorsqu'elle est nulle.

Une condition nécessaire de récurrence est que la loi μ soit centrée.

Proposition 2.9.1. *Soit $m = E(X_1)$. Si $m < +\infty$ et $m \neq 0$, la marche aléatoire est transiente.*

Preuve : D'après la loi forte des grands nombres, il existe $A \subset \Omega$ de probabilité 1 tel que : $\forall \omega \in A$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = m$. Si $\omega \in A$, il existe donc $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{|S_n(\omega)|}{n} \geq \frac{|m|}{2}$, i.e. $|S_n(\omega)| \geq \frac{|m|\,N}{2} > 0$. $S_n(\omega)$ ne passe donc qu'un nombre fini de fois par 0, d'où $\omega \notin \limsup[S_n = 0]$. Par conséquent, $\limsup[S_n = 0] \subset A^c$ et $\mathbb{P}(\limsup[S_n = 0]) = 0$. ■

Nous allons maintenant montrer un critère de récurrence/transience pour S_n, que l'on appliquera ensuite aux marches aléatoires usuelles.

Théorème 2.9.2. *Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ une marche aléatoire de loi μ sur $\mathbb{Z}^d$. Alors la marche aléatoire est :*
(i) transiente si $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[S_n = 0] < +\infty$;
(ii) récurrente si $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[S_n = 0] = +\infty$.

Preuve : (i) $\mathbb{P}(\limsup[S_n = 0]) = 0$ par le lemme de Borel-Cantelli.

(ii) Ici, par contre, on ne peut pas appliquer Borel-Cantelli car les $[S_n = 0]$ n'ont aucune raison d'être indépendants. On va donc devoir découper les événements.

Si $\omega \in \Omega$, alors soit $S_n(\omega)$ vaut 0 une infinité de fois, soit il est non nul à partir d'un certain rang. Par conséquent, $\Omega = (\limsup[S_n = 0]) \sqcup (\liminf[S_n \neq 0])$. Or :

$$\begin{aligned}\liminf[S_n \neq 0] = \bigcup_{p\geq 1}\bigcap_{n\geq p}[S_n \neq 0] &= \bigsqcup_{r\geq 1}\left([S_r = 0] \cap \left(\bigcap_{l>r}[S_l \neq 0]\right)\right) ;\\ &= \bigsqcup_{r\geq 1}\left([S_r = 0] \cap \left(\bigcap_{l>r}[S_l - S_r \neq 0]\right)\right) ;\end{aligned}$$

où $[S_r = 0]$ et $\bigcap_{l>r}[S_l - S_r \neq 0]$ sont indépendants pour tout $r \geq 1$ puisque $S_l - S_r$ ne dépend que des $(X_k)_{k>r}$. Donc $\mathbb{P}\left([S_r = 0] \cap \left(\bigcap_{l>r}[S_l - S_r \neq 0]\right)\right) = \mathbb{P}[S_r = 0]\mathbb{P}\left(\bigcap_{l>r}[S_l - S_r \neq 0]\right)$.

Examinons le second terme :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{l>r}[S_l - S_r \neq 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{R>r}\bigcap_{l=r+1}^{R}[S_l - S_r \neq 0]\right) = \lim_{R\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{l=r+1}^{R}[X_l + \ldots + X_{r+1} \neq 0]\right),$$

puisque les $(\bigcap_{l=r+1}^{R}[S_l - S_r \neq 0])_{R>r}$ sont décroissants et que $\mathbb{P}[S_{r+1} - S_r \neq 0] < +\infty$.

Mais $\mathbb{P}\left(\bigcap_{l=r+1}^{R}[X_l+\ldots+X_{r+1}\neq 0]\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{l=r+1}^{R}[X_{l-r}+\ldots+X_1\neq 0]\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{R-r}[S_k\neq 0]\right)$.

En effet, si $f:(x_R,\ldots,x_{r+1})\mapsto(x_{r+1},x_{r+2}+x_{r+1},\ldots,x_R+\ldots+x_{r+1})$, on peut écrire que $\bigcap_{l=r+1}^{R}[X_l+\ldots+X_{r+1}\neq 0]=[f(X_R,\ldots,X_{r+1})\neq(0,\ldots,0)]$. La probabilité de cet événement ne dépend que de la loi de la variable aléatoire $Y=f(X_R,\ldots,X_{r+1})$ qui elle-même ne dépend, par le théorème de transport, que de la loi de $(X_R,\ldots,X_{r+1})$. Puisque les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, les vecteurs $(X_R,\ldots,X_{r+1})$ et $(X_{R-r},\ldots,X_1)$ ont même loi, et on peut remplacer le premier par le second.

Comme les $(\bigcap_{k=1}^{R-r}[S_k\neq 0])_{R>r}$ sont décroissants et que $\mathbb{P}[S_1\neq 0]<+\infty$, on peut repasser la limite à l'intérieur, et donc $\mathbb{P}\left([S_r=0]\cap\left(\bigcap_{l>r}[S_l-S_r\neq 0]\right)\right)=\mathbb{P}[S_r=0]\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1}[S_k\neq 0]\right)$. Cette dernière probabilité ne dépend plus de r et est la probabilité de non retour en 0 de la marche aléatoire.

En rassemblant tous les morceaux, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}1=\mathbb{P}(\Omega)&=\mathbb{P}(\limsup[S_n=0])+\sum_{r\geq 1}\mathbb{P}\left([S_r=0]\cap\left(\bigcap_{l>r}[S_l-S_r\neq 0]\right)\right);\\&=\mathbb{P}(\limsup[S_n=0])+\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1}[S_k\neq 0]\right)\sum_{r\geq 1}\mathbb{P}[S_r=0].\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{r\geq 1}\mathbb{P}[S_r=0]=+\infty$ par hypothèse, nécessairement $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1}[S_k\neq 0]\right)=0$ et donc $\mathbb{P}(\limsup[S_n=0])=1$. ■

On note (e_i) la base canonique de $\mathbb{Z}^d$, et on considère maintenant la loi $\mu_d=\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{d}\delta_{e_i}+\delta_{-e_i}$ sur $\mathbb{Z}^d$. Elle correspond à un déplacement aléatoire sur un des $\frac{1}{2d}$ noeuds voisins.

Théorème 2.9.3 (Polya, 1921)**.** *Soit (S_n) une marche aléatoire de loi μ_d.*
(i) Si $d\leq 2$, la marche aléatoire est récurrente.
(ii) Si $d\geq 3$, la marche aléatoire est transiente.

Preuve : (i) • Cas $d=1$. Pour n impair, $S_n\neq 0$ donc $\mathbb{P}[S_n=0]=0$. Si $n=2k$ et $S_{2k}=0$, S_{2k} est somme de k 1 et de k -1. Par le choix de la loi μ_1 et l'indépendance des (X_n), tous les $\binom{2k}{k}$ tels tirages possibles de 1 et de -1 ont même probabilité $\frac{1}{2^{2k}}$ de survenir, ce qui donne $\mathbb{P}[S_{2k}=0]=\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\sim\frac{1}{2^{2k}}\frac{(\frac{2k}{e})^{2k}\sqrt{4\pi k}}{(\frac{k}{e})^{2k}2\pi k}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ par la formule de Stirling. Comme la série des $(\frac{1}{\sqrt{k}})$ diverge, le théorème précédent conclut à la récurrence de la marche aléatoire.

• Cas $d=2$. Notons $X_n=(X_n^1,X_n^2)$ et $S_n=(S_n^1,S_n^2)$. Les variables réelles $U_k=X_k^1+X_k^2$ et $V_k=X_k^1-X_k^2$ sont indépendantes et de même loi $\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_{-1})=\mu_1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_{2k}=0]=\mathbb{P}[S_{2k}^1=0,S_{2k}^2=0]&=\mathbb{P}[S_{2k}^1+S_{2k}^2=0,S_{2k}^1-S_{2k}^2=0];\\&=\mathbb{P}[U_1^1+\ldots+U_{2k}^1=0]\mathbb{P}[V_1^1+\ldots+V_{2k}^1=0].\end{aligned}$$

D'après le cas $d=1$, $\mathbb{P}[S_{2k}=0]\sim\frac{1}{\pi k}$ qui est le terme général d'une série divergente.

(ii) Supposons $d\geq 3$. L'idée est de voir $\mathbb{P}[S_n=k]$ comme un coefficient de Fourier de la fonction caractéristique de S_n que l'on notera $f_n:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^d&\to&\mathbb{C}\\x&\mapsto&E(e^{2\pi i\langle S_n|x\rangle})=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{P}[S_n=k]e^{2\pi i\langle k|x\rangle}\end{array}$.

Les (X_n) étant i.i.d., $f_n(x) = E(e^{2\pi i\langle X_1|x\rangle} \dots e^{2\pi i\langle X_n|x\rangle}) = E(e^{2\pi i\langle X_1|x\rangle}) \dots E(e^{2\pi i\langle X_n|x\rangle}) = \varphi(x)^n$ où φ est la fonction caractéristique de la loi μ_d. On constate alors que $\mathbb{P}[S_n = k]$ est le coefficient de Fourier $\hat{f_n}(k) = \hat{\varphi^n}(k) = \displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} \varphi^n(x)e^{-2\pi i\langle k|x\rangle}dx$. En particulier, $\mathbb{P}[S_n = 0] = \int_{\mathbb{T}^d} \varphi^n(x)dx$.
Remarquons que $\varphi(x) = E(e^{2\pi i\langle X_1|x\rangle}) = \dfrac{1}{2d}\displaystyle\sum_{k=1}^{d} e^{2\pi i x_k} + e^{-2\pi i x_k} = \dfrac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos(2\pi x_k)$, donc $|\varphi| \leq 1$.
Ceci nous permet d'écrire la série des $(\mathbb{P}[S_n = 0])$ comme limite croissante de série entière :

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}[S_n = 0] = \lim_{\varepsilon\nearrow 1}\sum_{n\geq 1}\varepsilon^n\mathbb{P}[S_n = 0] = \lim_{\varepsilon\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}^d}\sum_{n\geq 1}\varepsilon^n\varphi^n = \lim_{\varepsilon\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{1-\varepsilon\varphi} = \int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{1-\varphi},$$

la dernière égalité provenant du théorème de convergence monotone appliqué sur $[\varphi < 0]$ et $[\varphi \geq 0]$. Pour en finir, il suffit de voir que cette dernière intégrale converge pour $d \geq 3$.
$\frac{1}{1-\varphi}$ est définie et continue sur $[-1;1]^d\backslash\{(-1,\dots,-1);0;(1,\dots,1)\}$. Traitons le cas de 0, les deux autres se résolvant de la même manière. On note tout d'abord qu'au voisinage de 0, $1-\varphi(x) \sim \frac{d}{4\pi^2\|x\|^2}$. Pour montrer que cette fonction est intégrable en 0, on effectue le changement de variables en coordonnées sphériques $x = rs, r \geq 0, s \in S^{d-1}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{B(0,\eta)}\frac{1}{\|x\|^2}dx = \int_0^\eta\int_{S^{d-1}}\frac{1}{r^2}r^{d-1}\tau_d(s)drds = \int_{S^{d-1}}\tau_d(s)ds\int_0^\eta r^{d-3}dr$. Cette dernière intégrale étant finie pour $d \geq 3$, le point est démontré. ■

Références : Un cours de H. Hennion pour le premier théorème, et [BEK05] p. 83 ou [DM72] p. 82 pour le théorème de Polya.

Leçons :
– 249. Le jeu de pile ou face (suites de variables de Bernoulli indépendantes).
– 251. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

Commentaires : Le premier théorème est généralement montré dans la littérature via les chaînes de Markov. Ce développement en donne une preuve élémentaire pour ceux qui ne font pas l'option proba-stats auxquels je conseille, pour des raisons de temps, de ne prouver ensuite que les cas $d = 1, 2$ du théorème de Polya. Pour ceux qui sont à l'aise avec les chaînes de Markov, il est préférable d'ignorer le critère (ce qui tend évidemment une perche au jury) et d'exposer le théorème de Polya dans son intégralité.

Références

[BEK05] Michel Benaïm and Nicole El Karoui. *Promenade Aléatoire*. Presses de l'École Polytechnique, 2005.

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*. H&K, seconde edition, 2005.

[CL05] Antoine Chambert Loir. *Analyse Corporelle*. Presses de l'École Polytechnique, 2005.

[DM72] Harry Dym and Henry P. McKean. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, 1972.

[Gou98] Xavier Gourdon. *Les maths en tête : algèbre*. Ellipses, 1998.

[GT98] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel*. Ellipses, 1998.

[Kat04] Yitzhak Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, third edition, 2004.

[Lei00] Eric Leichtnam. *Exercies corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des E.N.S. : tome analyse*. Ellipses, 2000.

[MT86] Rachid Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986.

[QZ02] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Agrégation de mathématiques : Éléments d'analyse*. Dunod, seconde edition, 2002.

[RB06] Jean-Jacques Risler and Pascal Boyer. *Alèbre pour la Licence 3*. Dunod, 2006.