Determine os símbolos de Christoffel e as curvaturas de Riemann das seguintes métricas.

(1) $g_{ij} := \frac{1}{y}\delta_{ij}$ em $\mathbb{R}^2$.

(2) $g_{ij} := \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2}\delta_{ij}$ em $B_1^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < 1\}$.

(3) $g_{ij} := \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2}\delta_{ij}$ em $B_1^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < 1\}$.

(4) $g := \mathrm{sen}^2(\pi/4+t)d\theta^2 + \mathrm{sen}^2(\pi/4-t)d\phi^2 + dt^2$ em $\{(\theta, \phi, t) \mid 0 < \theta, \phi < 2\pi,\ |t| < \pi/4\}$.

(5) $g := \frac{1}{z^2}\delta_{ij}$ em $\mathbb{R}^3$.

(6) $g := \mathrm{sen}^2(r)d\theta^2 + dr^2$ em $\{(r, \theta) \mid 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < 2\pi\}$.

(7) $g := \cosh^2(r)dt^2 + dr^2$ em $\mathbb{R}^2$.

(8) $g := \cos^2(r)(dt^2 + dr^2)$ em $\{(t, r) \mid -\pi/2 < r < \pi/2\}$.

(9) $g := \sinh^2(r)d\theta^2 + \cosh^2(r)dt^2 + dr^2$ em $\{(r, \theta, t) \mid 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < 2\pi\}$.

Tente identificar geodésicas e subvariedades totalmente geodésicas nestes espaços.

Determine os operadores de Weingarten das seguintes subvariedades.

(1) $X := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1\right\}$.

(2) $X := \{(x, \cosh(x)\cos(\theta), \cosh(x)\mathrm{sen}(\theta) \mid 0 < \theta < 2\pi\}$. X é a superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico de $\cosh(x)$ em torno no eixo x.

(3) $X := \{(r\cos(z), r\mathrm{sen}(z), z) \mid r, z \in \mathbb{R}\}$. X é o helicoide.

(4) $X := \{f(x) + yg(x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ onde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ são funções sauves.

(5) $X := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle Bx, x\rangle = 1\right\}$ onde B é uma matriz simétrica positiva-definida.

Tente identificar geodésicas nessas subvariedades.

Seja Ω um subconjunto aberto, limitado de $\mathbb{R}^m$ tal que seu bordo $\partial\Omega$ seja uma subvariedade suave. Dizemos que Ω é convexo quando, para todo $x, y \in \Omega$, o trecho de reta entre x e y também é contido em Ω.

(1) Mostre que se Ω é convexo, entáo a segunda forma fundamental II de $\partial\Omega$ satisfaz $\mathrm{II} \geq 0$ em todo ponto.

(2) Mostre, reciprocamente, que se Ω é conexo e se a segunda forma fundamental de $\partial\Omega$ satisfaz $\mathrm{II} \geq 0$ em todo ponto, então Ω é convexo.

(3) Mostre que se Ω é convexo, então existe uma função convexa $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Omega = f^{-1}(]-\infty, 0[).$$