1 - A segunda relação de Bianchi.

Teorema 1.1, Bianchi II

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos ∇ e R respectivamente a derivada covariante de Levi-Civita e a curvatura riemanniana de g. Para todo $\xi, \nu, \mu, \lambda : \Omega \to \mathbb{R}^m$,

$$(\nabla_\xi R)_{\nu\mu}\lambda + (\nabla_\nu R)_{\mu\xi}\lambda + (\nabla_\mu R)_{\xi\nu}\lambda = 0. \tag{1}$$

Prova: Seja $x_0 \in \Omega$. Para simplificar, podemos supor que

$$(\nabla\xi)(x_0) = (\nabla\nu)(x_0) = (\nabla\mu)(x_0) = (\nabla\lambda)(x_0) = 0.$$

Em particular, como ∇ é sem torsão, os colchetes de Lie de esses campos de vetores também são iguais a zero nesse ponto. Então, em x_0,

$$\begin{aligned}
(\nabla_\xi R)_{\nu\mu}\lambda + (\nabla_\nu R)_{\mu\xi}\lambda + (\nabla_\mu R)_{\xi\nu}\lambda &= \nabla_\xi\nabla_\nu\nabla_\mu\lambda - \nabla_\xi\nabla_\mu\nabla_\nu\lambda - \nabla_\xi\nabla_{[\nu,\mu]}\lambda \\
&\quad + \nabla_\nu\nabla_\mu\nabla_\xi\lambda - \nabla_\nu\nabla_\xi\nabla_m u\lambda - \nabla_\nu\nabla_{[\mu,\xi]}\lambda \\
&\qquad + \nabla_\mu\nabla_\xi\nabla_\nu\lambda - \nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\xi\lambda - \nabla_\mu\nabla_{[xi,\nu]}\lambda \\
&= R_{\xi\nu}\nabla_\mu\lambda + \nabla_{[\xi,\nu]}\nabla_\mu\lambda - \nabla_\mu\nabla_{[\xi,\nu]}\lambda \\
&\quad + R_{\nu\mu}\nabla_\xi\lambda + \nabla_{[\nu,\mu]}\nabla_\xi\lambda - \nabla_\xi\nabla_{[\nu,\mu]}\lambda \\
&\qquad + R_{\mu\xi}\nabla_\nu\lambda + \nabla_{[\mu,\xi]}\nabla_\nu\lambda - \nabla_\nu\nabla_{[\mu,\xi]}\lambda \\
&= R_{[\xi,\nu],\mu}\lambda + \nabla_{[[\xi,\nu],\mu]}\lambda \\
&\quad + R_{[\nu,\mu],\xi}\lambda + \nabla_{[[\nu,\mu],\nu]}\lambda \\
&\qquad + R_{[\mu,\xi],\nu}\lambda + \nabla_{[[\mu,\xi],\nu]}\lambda \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da relação de Jacobi para colchetes de Lie. Isso prova o resultado. $\square$

Teorema 1.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos ∇, Ric^0 e S respectivamente a derivada covariante de Levi-Civita, a curvatura de Ricci sem traço e a curvatura scalar de g. Então, para todo $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$,

$$\frac{(m-2)}{m} D_\xi S = (\nabla \cdot Ric^0)(\xi), \tag{2}$$

onde

$$(\nabla \cdot Ric^0)(\xi) := \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} Ric^0)(e_i, \xi), \tag{3}$$

e $e_1, ..., e_m$ é um referencial de g.

Observação: Verificamos que $\nabla \cdot \mathrm{Ric}^0$ não depende da referencial escolhida.

Prova: Seja $x_0 \in \Omega$. Seja $e_1, ..., e_m$ uma referencial de g. Podemos supor que, para todo i,

$$(\nabla e_i)(x_0) = 0.$$

Então, para todo ξ,

$$\sum_{i,j=1}^{m} \langle (\nabla_\xi R)_{e_i e_j} e_j, e_i \rangle + \langle (\nabla_{e_i} R)_{e_j \xi} e_j, e_i \rangle + \langle (\nabla_{e_j} R)_{\xi e_i} e_j, e_i \rangle$$
$$= m(m-1) D_\xi S - 2(m-1)(\nabla \cdot \mathrm{Ric})(\xi).$$

Segue pela segunda relação de Bianchi que

$$D_\xi S = \frac{2}{m}(\nabla \cdot \mathrm{Ric})(\xi) = \frac{2}{m}(\nabla \cdot \mathrm{Ric}^0)(\xi) + \frac{2}{m} D_\xi S,$$

o que prova o resultado. □

Teorema 1.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja g uma métrica sobre Ω. Denotamos Ric^0 e S respectivamente a curvatura de Ricci e a curvatura seccional de g. Se Ric^0 é parallelo, então S é constante. Em particular, se $Ric^0 = 0$, então S é constante.

2 - Curvatura seccional. A curvatura seccional fornece um outro olhar sobre a curvatura de uma métrica. Antes de definí-la, precisamos do seguinte resultado preliminar.

Lema 2.1

Seja $\alpha \in Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ simétrica e não degenerada. Seja $\beta \in Lin_4(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma curvatura álgebrica. Para todo plano linear $P \subseteq \mathbb{R}^m$, existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta = \kappa \alpha \odot \alpha,$$

onde $\odot$ denota o produto de Kulkarni-Nomizu.

Prova: De fato, como α é simétrica, o produto $\alpha \odot \alpha$ é uma curvatura álgebrica não trivial. Como o espaço de curvaturas álgebricas sobre P é unidimensional, existe um único $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que $\beta = \kappa \alpha \odot \alpha$, como desejado. □

Definição 2.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos $R : \Omega \to Lin_4(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ a curvatura riemanniana de g. A **curvatura seccional** *de g é a função $\kappa : \Omega \times Gr(2, m) \to \mathbb{R}$ definida tal que, para todo $x \in \Omega$, para todo $P \in Gr(2, m)$ e para todo base ξ, ν de P,*

$$\kappa(x, P) := \frac{R(x)(\xi, \nu, \nu, \xi)}{g(x)(\xi, \xi)g(x)(\nu, \nu) - g(x)(\xi, \nu)^2}. \tag{4}$$

Exercício**: Mostre que a curvatura seccional define uma função sauve de $\Omega \times \mathrm{Gr}(2, m)$ em $\mathbb{R}$.

O seguinte resultado mostra que a curvatura seccional e a curvatura riemanniana são equivalentes: enquanto a primeira expressa a curvatura de maneira geométrica, a segunda expressa a mesma informação de maneira algébrica.

Lema 2.3

Seja $\alpha \subseteq Lin_4(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma curvatura álgebrica. Definimos a função $\tilde{\kappa} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{\kappa}(\xi, \nu) := \alpha(\xi, \nu, \nu, \xi).$$

Então, para todo $\xi, \nu, \mu, \lambda \in \mathbb{R}^m$,

$$\alpha(\xi, \nu, \mu, \lambda) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\tilde{\kappa}(\xi + s\mu, \nu + t\lambda) - \tilde{\kappa}(\xi + s\lambda, \nu + t\mu)\bigg|_{s=t=0}. \tag{5}$$

Em particular, se $\alpha|_P = 0$ para todo $P \in Gr(2, m)$, então $\alpha = 0$.

Observação: Observamos que $\tilde{\kappa}$ depende linearmente de α.

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\tilde{\kappa}(\xi + s\mu, \nu + t\lambda)\bigg|_{s=t=0} &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\alpha(\xi + s\mu, \nu + t\lambda, \nu + t\lambda, \xi + s\mu)\bigg|_{s=t=0} \\ &= 2\alpha(\xi, \nu, \lambda, \mu) + 2\alpha(\xi, \lambda, \nu, \mu).\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\tilde{\kappa}(\xi + s\mu, \nu + t\lambda) - \tilde{\kappa}(\xi + s\lambda, \nu + t\mu)\bigg|_{s=t=0} \\ &= 2\alpha(\xi, \nu, \lambda, \mu) + 2\alpha(\xi, \lambda, \nu, \mu) \\ &\qquad -2\alpha(\xi, \nu, \mu, \lambda) - 2\alpha(\xi, \mu, \nu, \lambda) \\ &= 2\alpha(\xi, \lambda, \nu, \mu) + 2\alpha(\xi, \mu, \lambda, \nu) \\ &= -2\alpha(\xi, \nu, \mu, \lambda),\end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

3 - Variação de geodésicas. Uma outra visão geométrica da curvatura é fornecida pelo estudo da variação a primeira ordem de geodésicas.

Lema 3.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos ∇ e R respectivamente a derivada covariante de Levi-Civita e a curvatura riemanniana de g. Seja $\phi :]-\epsilon, \epsilon[\times I \to \Omega$ tal que, para todo $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\phi_s := \phi(s, \cdot)$ seja uma geodésica. Então

$$\nabla_{\phi_t}\nabla_{\phi_t}\phi_s = R_{\phi_t\phi_s}\phi_t. \tag{6}$$

Prova: Como ϕ_s é uma geodésica para todo s,

$$\nabla_{\phi_t}\phi_t = 0.$$

Como $[\partial_s, \partial_t] = 0$, segue que

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi_t}\nabla_{\phi_t}\phi_s &= \nabla_{\phi_t}\nabla_{\phi_s}\phi_t\\ &= \nabla_{\phi_t}\nabla_{\phi_s}\phi_t - \nabla_{\phi_s}\nabla_{\phi_t}\phi_t - \nabla_{\phi_*[\partial_s,\partial_t]}\phi_t\\ &= R_{\phi_t\phi_s}\phi_t,\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Definição 3.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos ∇ e R respectivamente a derivada covariante de Levi-Civita e a curvatura de g. Seja $\gamma : I \to \Omega$ uma geodésica de g. Seja $\xi : I \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores ao longo de γ. Dizemos que ξ é um **campo de Jacobi** *quando*

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\xi = R_{\dot\gamma\xi}\dot\gamma. \tag{7}$$

Em outros termos, os campos de Jacobi são as variaçãoes de primeiro ordem das geodésicas da métrica g. Em particular, (7) fornece uma interpretação física da curvatura em termos de forças de marés. Para ver isso, revisamos rapidamente a teoria da dinâmica de partículas em campos potenciais. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $V : \Omega \to \mathbb{R}$ um potencial. A curva $\gamma : I \to \Omega$ uma trajetória de uma partícula quando, para todo t

$$\ddot\gamma(t) = -(\nabla V \circ \gamma)(t). \tag{8}$$

Seja $\phi :]-\epsilon, \epsilon[\times I \to \Omega$ uma família suave de trajetórias. Isto é, se, para todo s, $\phi_s := \phi(s, \cdot)$ é uma trajetória. Verificamos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\phi}{\partial s}(s,t) = -\mathrm{Hess}(V)(\phi(s,t))\frac{\partial\phi}{\partial s}(s,t).$$

Segue que um campo de vetores $\xi : I \to \mathbb{R}^m$ é uma variação de primeiro ordem de trajetórias em torno de um trajetório inicial $\gamma : I \to \Omega$ se e somente se

$$\ddot{\xi}(t) = -\mathrm{Hess}(V)(\gamma(t))\xi(t).$$

Em termos experimentais, são precisamente as variações de primeiro ordem das particulas andando em uma potencial que geram os fenômenos que percebemos como marés. É por isso que chamamos a matriz hessiana de um potencial a matriz de **forças de marés** da potencial.

Voltamos agora a estudar as geodésicas. Nesse caso, a forçã experimentada por uma partícula depende não apenas da sua posição, mas também da sua velocidade. Como essa força depende quadraticamente da velocidade, as forças de marés deverão ser descritas nesse contexto por um tensor com quatro componentes, no lugar de apenas dois. Visualizamos essas forçãs da seguinte maneira. Imaginamos um laboratório de referência, cujo centro de massa está avançando ao longo de uma geodésica. O observador dentro desse laboratório perceberia que os objetos no seu entorno, avançando junto com o laboratório, experimentando forças determinadas por (7). Essas forças nada mais são que as forças de marés do fluxo geodésico ao longo do trajetório do laboratório.