1 - Grupos de Lie.

Definição 1.1

Um **grupo de Lie** *é um grupo G que também é uma variedade e cujas operações de inversão e de multiplicação são sauves.*

Exercício:** O grupo ortogonal $\mathrm{O}(m)$ é o grupo de matrices ortogonais em $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$, isto é

$$\mathrm{O}(m) := \left\{M \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \mid MM^t = \mathrm{Id}\right\}.$$

Mostre que $\mathrm{O}(m)$ é um grupo de Lie.

Exercício:** O grupo especial linear $\mathrm{SL}(m)$ é o grupo de matrices de determinante 1 em $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$. Isto é

$$\mathrm{SL}(m) := \{M \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \mid \mathrm{Det}(M) = 1\}.$$

Mostre que $\mathrm{SL}(m)$ é um grupo de Lie.

Dizemos que um grupo de Lie é **linear** quando é um subgrupo de $\mathrm{GL}(m)$ para algum m. Existe uma teoria abstracta de grupos de Lie que também contempla grupos não-lineares, mas isso foge demais do proposito desse curso e vamos nos limitar nesse capítulo aos grupos lineares.

Definição 1.2

Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie. Para todo $M \in G$, definimos $L_M, R_M : G \to G$ por

$$\begin{aligned} L_M N &:= MN, \text{ e} \\ R_M N &:= NM. \end{aligned} \tag{1}$$

Chamamos L_M e R_M a **translação por esquerda** *por M e a* **translação por direita** *por M respectivamente.*

Observação: Trivialmente, para todo M, L_M e R_M definem difeomorfismos de G cujos respectivos inversos são $L_{M^{-1}}$ e $R_{M^{-1}}$.

Definição 1.3

Para um grupo de Lie linear $G \subseteq GL(m)$, denotamos

$$\mathfrak{g} := T_{\mathrm{Id}} G. \tag{2}$$

Chamamos $\mathfrak{g}$ o **àlgebra de Lie** *de G.*

Lema 1.4

Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie linear. Denotamos $\mathfrak{g}$ o seu àlgebra de Lie. Para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$[X, Y] := XY - YX \in \mathfrak{g}.$$

Prova: Sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$. Seja $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to G$ tal que $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ e que $\dot{\gamma}(0) = X$. Para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, definimos $\Phi_t : G \to G$ por

$$\Phi_t(M) := \gamma(t) M \gamma(t)^{-1}.$$

Para todo t, como $\Phi_t(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, $D\Phi_t(\mathrm{Id})$ envie $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$. Em particular, para todo t,

$$D\Phi_t(\mathrm{Id})Y = \gamma(t) Y \gamma(t)^{-1} \in \mathfrak{g}.$$

Derivando esse relação com respeito a t, obtemos

$$XY - YX \in \mathfrak{g},$$

como desejado. $\square$

Exercício**: Mais geralmente, um **àlgebra de Lie** é um par $(E, [\cdot, \cdot])$ onde E é um espaço vetorial e $[\cdot, \cdot] : E \oplus E \to E$ é uma operação bilinear antisimétrica tal que, para todo $\xi, \nu, \mu \in E$,

$$[\xi, [\nu, \mu]] + [\nu, [\mu, \xi]] + [\mu, [\xi, \nu]] = 0. \tag{3}$$

Chamamos (3) a **relação de Jacobi**. Mostre que $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ é um àlgebra de Lie, onde $\wedge$ é o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$. Mostre que esse àlgebra de Lie é isomorfo à

$$\mathfrak{o}(3) := T_{\mathrm{Id}}\mathrm{O}(3).$$

Exercício**: Seja H o espaço de quaternionos. Seja $I \subseteq H$ o subespaço tridimensional de quaternionos imaginários. Definimos $b : I \oplus I \to I$ por

$$b(z, w) := \mathrm{Im}(zw).$$

Mostre que (I, b) é um àlgebra de Lie. Mostre que esse àlgebra também é isomorfo à $\mathfrak{o}(3)$.

Definição 1.5

Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie linear. Denotamos $\mathfrak{g}$ o seu àlgebra de Lie. Para $X \in \mathfrak{g}$, definimos $X^L, X^R \in \chi(TG)$ por

$$\begin{aligned} X^L(M) &:= MX, \text{ e} \\ X^R(M) &:= XM. \end{aligned} \tag{4}$$

Chamamos X^L e X^R a **translação por esquerda** *e a* **translação por direita** *de X respectivamente.*

Observação: Observamos que, para todo M,

$$\begin{aligned} X^L(M) &= DL_M(\mathrm{Id}) \cdot X, \text{ e} \\ X^R(M) &= DR_M(\mathrm{Id}) \cdot X, \end{aligned}$$

o que comprova que X^L e X^R são em todo ponto tangentes a G.

Lema 1.6

Seja G um grupo de Lie linear. Denotamos $\mathfrak{g}$ o seu àlgebra de Lie. Para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} [X^L, Y^L] &= [X, Y]^L, \ \textit{e} \\ [X^R, Y^R] &= -[X, Y]^R. \end{aligned} \tag{5}$$

Prova: De fato,

$$\begin{aligned} [X, Y]^L(M) &= \big(D_{X^L} Y^L - D_{Y^L} X^L\big)(M) \\ &= \big(D_{MX} NY - D_{MY} NX\big)\big|_{N=M} \\ &= MXY - MYX \\ &= M[X, Y] \\ &= [X, Y]^L(X), \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Definição 1.7

Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie linear. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica sobre G. Dizemos que essa métrica é **invariante por esquerda** *quando, para todo $M \in G$,*

$$L_M^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Dizemos que essa métrica é **invariante por direita** *quando, para todo $M \in G$,*

$$R_M^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Dizemos que essa métrica é **bi-invariante** *quando é invariante por esquerda e por direita.*

Exercício**: Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ por

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{Tr}(XY^t). \tag{6}$$

Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define uma métrica bi-invariante sobre $\mathrm{O}(m)$. Chamamos essa métrica a **métrica canônica** de $\mathrm{O}(m)$.

Exercício**: Seja $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ uma matriz simétrica e positiva definida. Definimos a forma biliner $b_A : \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ por

$$b_A(X, Y) := \mathrm{Tr}(XA^{-1}Y^t A).$$

Definimos

$$\mathrm{O}(A) := \left\{ M \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^m) \mid A^{-1} M^t A M = \mathrm{Id} \right\}.$$

Mostre que $\mathrm{O}(A)$ é um grupo de Lie. Mostre que b_A define uma métrica bi-invariante sobre $\mathrm{O}(A)$.

Lema 1.8

Seja $G \in GL(M)$ um grupo de Lie linear. Denotamos $\mathfrak{g}$ o seu àlgebra de Lie. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica bi-invariante sobre G. Para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$\langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle = 0. \tag{7}$$

Prova: Seja $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to G$ tal que $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. Para todo $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, definimos $\Phi_t : G \to G$ por

$$\Phi_t(M) := L_{\gamma(t)} R_{\gamma(t)^{-1}} M = \gamma(t) M \gamma(t)^{-1}.$$

Observamos que, para todo t, $\Phi_t(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é bi-invariante, $\Phi_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Segue que, para todo t,

$$\langle \gamma(t) Y \gamma(t)^{-1}, \gamma(t) Z \gamma(t)^{-1} \rangle = \langle Y, Z \rangle.$$

Derivando essa relação em $t = 0$, obtemos

$$\langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle = 0,$$

como desejado. $\square$

Lema 1.9

Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie linear. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ume métrica bi-invariante sobre G. Denotamos ∇ a derivada covariante de Levi-Civita dessa métrica. Para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\nabla_{X^L} Y^L = \frac{1}{2}[X^L, Y^L]. \tag{8}$$

Prova: Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Observamos que $\langle X^L, Y^L \rangle$, $\langle X^L, Z^L \rangle$ e $\langle Y^L, Z^L \rangle$ são funções constantes sobres G. Segue pela fórmula de Koszul que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{X^L} Y^L, Z^L \rangle &= \frac{1}{2}\big[\langle X^L, [Y^L, Z^L]\rangle + \langle Y^L, [X^L, Z^L]\rangle + \langle [X^L, Y^L], Z^L\rangle\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[\langle X^L, [Y, Z]^L\rangle + \langle Y^L, [X, Z]^L\rangle + \langle [X, Y]^L, Z^L\rangle\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[\langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[-\langle [Y, Z], Z\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle\big] \\
&= \frac{1}{2}\langle [X, Y], Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle [X, Y]^L, Z^L\rangle
\end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada, segue que

$$\nabla_{X^L} Y^L = \frac{1}{2}[X, Y]^L,$$

como desejado. $\square$

Lema 1.10

Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie linear. Denotamos $\mathfrak{g}$ o seu àlgebra de Lie. Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uma métrica bi-invariante de G. Para todo $X \in \mathfrak{g}$, a curva

$$\gamma_X(t) := Exp(tX) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tX)^m}{m!}. \tag{9}$$

é uma geodésica dessa métrica. Em particular, a aplicação exponencial dessa métrica é

$$Exp(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}. \tag{10}$$

Prova: Seja $X \in \mathfrak{g}$. Observamos primeiro que, para todo t,

$$\dot{\gamma}_X(t) = \gamma_X(t)X = X^L(\gamma_X(t)).$$

Como X^L é tangente a G, segue por unicidade das curvas integrais de X^L que γ_X é contida em X. Derivando γ_X mais uma vez, obtemos, para todo t,

$$\big(\nabla_{\dot{\gamma}_X}\dot{\gamma}_X\big)(t) = \big(\nabla_{X^L}X^L\big)(\gamma(t)) = \frac{1}{2}[X,X]^L(\gamma(t)) = 0.$$

Segue que γ_X é uma geodésica, como desejado. □

Lema 1.11

Seja $G \subseteq GL(m)$ um grupo de Lie linear. Denotamos $\mathfrak{g}$ o seu àlgebra de Lie. Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uma métrica bi-invariante sobre G. A sua curvatura de Riemann satisfaz, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$R_{XY}Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]. \tag{11}$$

Prova: De fato

$$\begin{aligned}
R_{X^LY^L}Z^L &= \nabla_{X^L}\nabla_{Y^L}Z^L - \nabla_{Y^L}\nabla_{X^L}Z^L - \nabla_{[X^L,Y^L]}Z^L \\
&= \frac{1}{2}\nabla_{X^L}[Y^L,Z^L] - \frac{1}{2}\nabla_{Y^L}[X^L,Z^L] - \nabla_{[X,Y]^L}Z^L \\
&= \frac{1}{2}\nabla_{X^L}[Y,Z]^L - \frac{1}{2}\nabla_{Y^L}[X,Z]^L - \nabla_{[X,Y]^L}Z^L \\
&= \frac{1}{4}[X,[Y,Z]]^L - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]]^L - \frac{1}{2}[[X,Y],Z]^L \\
&= -\frac{1}{4}[Z,[X,Y]]^L - \frac{1}{2}[[X,Y],Z]^L \\
&= -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]^L,
\end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Exercício****:** Determine a curvatura de Ricci e a curvatura escalar do grupo $\mathrm{O}(m)$ com a métrica canônica.

2 - Submersões riemannianas. Utilizando a toeria de submersões riemannianas, estudamos agora as geodésicas e as curvaturas de espaçoes quocientes de grupos de Lie. Primeiro, denotamos $\mathrm{Gr}(m, m+n)$ a variedade grassmanniana de subespaçoes m-dimensionais de $\mathbb{R}^{m+n}$.

Definição 2.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ aberto. Uma **distribuição** *(de dimensão m) sobre Ω é uma função suave $E : \Omega \rightarrow Gr(m, m+n)$.*

Lema 2.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ aberto. Seja $E : \Omega \rightarrow Gr(m, m+n)$ uma função continua. Então E é suave se e somente se, para todo $x \in \Omega$, existe uma vizinhança U de x em Ω e funções suaves $e_1, ..., e_m : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ tais que, para todo $y \in U$, $(e_1(y), ..., e_m(y))$ seja uma base de $E(y)$.

Prova: Seja $x \in \Omega$. Denotamos $E_x := E(x)$. Seja F_x um subespaço complementar de E_x em $\mathbb{R}^{m+n}$. Isto é,

$$\mathbb{R}^{m+n} = E_x \oplus F_x.$$

Denotamos por U o subconjunto de todos os $y \in \Omega$ tais que $E(y)$ seja um gráfico sobre E_x de uma aplicação linear $M(y) \in \mathrm{Lin}(E_x, F_x)$. Por continuidade, U é aberto e, por definição de $\mathrm{Gr}(m, m+n)$, E é suave sobre U se e somente se M é suave.

Supomos agora que M é suave. Seja $e_{1,x}, ..., e_{m,x}$ uma base de E_x. Verificamos que as funções $e_1, ..., e_m : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ definidas por

$$e_i(y) := e_{i,x} + M(y)e_{i,x}$$

satisfazem as hipotesas do lema. Reciprocamente, sejam $e_1, ..., e_m : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ como no enunciado do lema. Denotamos $\Pi : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow E_x$ e $\Pi^\perp : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow F_x$ as projeções ao longo de F_x e de E_x respectivamente. Definimos $A : U \rightarrow \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, E_x)$ e $B : U \rightarrow \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, F_x)$ tal que, para todo i,

$$\begin{aligned} A(y) \cdot \partial_i &= \Pi(e_i(y)), \text{ and} \\ B(y) \cdot \partial_i &= \Pi^\perp(e_i(y)). \end{aligned}$$

Para todo $y \in U$, como $E(y)$ é um gráfico em cima de E_x, $A(y)$ é um isomorfismo linear. Como $M = BA^{-1}$ é suave isso completa a prova. □

Definição 2.3

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos. Sejam $g : U \rightarrow Lin_{2,+}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ e $h : V \rightarrow Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ metricas. Seja $\Phi : U \rightarrow V$ uma submersão suave. Dizemos que Φ é uma **submersão riemanniana** *quando existe uma distribuição $E : U \rightarrow Gr(m, m+n)$ tal que*

(1) E seja ortogonal a $Ker(D\Phi)$ com respeito a g, e

(2) $\Phi^* h|_E = g|_E$.

Chamamos E a **distribuição horizontal** *de Φ.*

Definição 2.4

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos. Sejam $g : U \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ e $h : V \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ metricas. Seja $\Phi : U \to V$ uma submersão riemanniana e denotamos E a sua dsitribuição horizontal. Seja $\xi : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ um campo de vetores. Dizemos que ξ é **horizontal** *quando $\xi(x) \in E(x)$ para todo x e dizemos que ξ é* **vertical** *quando $\xi(x) \in Ker(D\Phi(x))$ para todo x.*

Definição 2.5

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos. Sejam $g : U \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ e $h : V \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ metricas. Seja $\Phi : U \to V$ uma submersão riemanniana. Seja $\xi : V \to \mathbb{R}^n$ e $\overline{\xi} : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ campos de vetores. Dizemos que $\overline{\xi}$ é um **levantamento** *de ξ quando, para todo $x \in U$,*

$$D\Phi(x)\overline{\xi}(x) = \xi(x).$$

Dizemos que $\overline{\xi}$ é o **levantamento horizontal** *de ξ quando, além do mais, ξ é horizontal.*

Exercício*: Verifique que o levantamento horizontal de ξ, quando existe, é único.

Lema 2.6

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos. Sejam $g : U \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ e $h : V \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ metricas. Seja $\Phi : U \to V$ uma submersão riemanniana. Para todo campo de vetores $\xi : V \to \mathbb{R}^n$, existe um único levantamento horizontal $\overline{\xi} : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ de ξ.

Prova: Denotamos por $\Pi : U \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^{m+n})$ a projeção ortogonal sobre E. Como E é suave, Π também é. Seja $\tilde{\xi} : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ um levantamento qualquer de ξ. Verificamos que $\overline{\xi} := \Pi(\tilde{\xi})$ é o levantamento horizontal de ξ, e isso completa a prova. $\square$

Lema 2.7

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos. Sejam $g : U \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ e $h : V \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ metricas. Seja $\Phi : U \to V$ uma submersão riemanniana. Denotamos por Π a projeção ortogonal sobre a distribuição horizontal de Φ. Sejam $\xi, \nu : V \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Para todo par de levantamentos $\overline{\xi}, \overline{\nu} : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ de esses campos de vetores,

$$\Pi([\overline{\xi}, \overline{\nu}]) = \overline{[\xi, \nu]},$$

onde $\overline{[\xi, \nu]}$ é o levantamento horizontal de $[\xi, \nu]$.

Prova: Seja $f \in C^\infty(V)$. Denotamos $\overline{f} := f \circ \Phi$. Observamos que, para todo campo vertical ν, $D_\nu \overline{f} = 0$. Segue que

$$\begin{aligned}
D_{\Pi([\overline{\xi}, \overline{\nu}])}\overline{f} &= D_{[\overline{\xi}, \overline{\nu}]}\overline{f} \\
&= D_{\overline{\xi}} D_{\overline{\nu}} \overline{f} - D_{\overline{\nu}} D_{\overline{\xi}} \overline{f} \\
&= D_{\overline{\xi}} \overline{D_\nu f} - D_{\overline{\nu}} \overline{D_\xi f} \\
&= \overline{D_\xi D_\nu f} - \overline{D_\nu D_\xi f} \\
&= \overline{D_{[\xi, \nu]} f} \\
&= D_{\overline{[\xi, \nu]}} \overline{f}.
\end{aligned}$$

Como $f \in C^\infty(V)$ é qualquer, o resultado segue. $\square$

Lema 2.8

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos. Sejam $g : U \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ e $h : V \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ metricas. Denotamos $\overline{\nabla}$ e ∇ as derivadas covariantes de Levi-Civita de g e de h respectivamente. Seja $\Phi : U \to V$ uma submersão riemanniana. Denotamos $\Pi : U \to End(\mathbb{R}^{m+n})$ a projeção sobre a sua distribuição horizontal. Sejam $\xi, \nu : V \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Denotamos $\overline{\xi}, \overline{\nu}$ os seus respectivos levantamentos horizontais. Então,

$$\Pi\big(\overline{\nabla}_{\overline{\xi}}\overline{\nu}\big) = \overline{\nabla_{\xi}\nu}.$$

Prova: Essa relação segue diretamente de Lema 2.7 e a fórmula de Koszul. □

Exercício:** Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos. Sejam $g : U \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ e $h : V \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ metricas. Seja $\Phi : U \to V$ uma submersão riemanniana. Seja $\gamma : I \to U$ uma geodésica de g. Mostre que, se $\dot{\gamma}(t)$ é horizontal para todo t, então $(\Phi \circ \gamma)$ é uma geodésica de h.

3 - Espaços simétricos. Seja G um grupo de Lie. Podemos supor que G é um grupo linear. Seja X uma variedade riemanniana.

Definição 3.1

Uma **ação** *de G sobre X é uma função suave $\alpha : G \times X \to X$ tal que*

(1) para todo $g \in G$, $\alpha_g := \alpha(g, \cdot)$ seja uma isometria; e

(2) para todo $g, h \in G$, $\alpha_{gh} = \alpha_g \alpha_h$.

Denotamos

$$gx := \alpha(g, x).$$

Definição 3.2

Seja α uma ação de G sobre X. Dizemos que α é transitiva quando, para todo $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

A partir de agora, supomos que α é uma ação transitiva de G sobre X. Seja $x_0 \in X$ um ponto de base. Denotamos

$$H := \mathrm{Stab}(\{0\}).$$

Também definimos $\pi : G \to X$ por

$$\pi(g) := gx_0.$$

Exercício:** Mostre que π define uma bijeção de G/H em X.

Exercício*:** Mostre que π é uma submersão. Em particular $H = \pi^{-1}(\{x_0\})$ é uma subvariedade.

Denotamos $\mathfrak{g} := T_{\mathrm{Id}}G$ o àlgegra de Lie de G. Denotamos $\mathfrak{h} := T_{\mathrm{Id}}H$ o àlgebra de Lie de H. Seja g uma métrica bi-invariante sobre G. Definimos a distribuição horizontal E sobre G por

$$E := \left\{(M, MA) \mid A \in \mathfrak{h}^\perp\right\}.$$

Exercício****:** Mostre que E é uma subvariedade.

Exercício*****:** Mostre que X possui uma única métrica h tal que π seja uma submersão riemanniana com distribuição h horizontal E.

Exercício****:** Seja $\gamma : I \to G$ uma geodésica. Mostre que se $\dot\gamma(0) \in E_{\gamma(0)}$, então $\dot\gamma(t) \in E_{\gamma(t)}$ para todo t. Segue em particular que as projeções das geodésicas horizontais em G são geodésicas em X.

Observamos que $D\pi(\mathrm{Id})$ define uma isométria de $\mathfrak{h}^\perp$ em $T_{x_0}X$. Assim, identificamos esses dois espaços vetoriais.

Definição 3.3

Dizemos que X é um **espaço simétrico** *quando*

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\perp] &\subseteq \mathfrak{h}^\perp, \ e \\ [\mathfrak{h}^\perp, \mathfrak{h}^\perp] &\subseteq \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Denotamos $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ e $p^\perp : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}^\perp$ as projeções ortogonais.

Lema 3.4

Para todo $A \in \mathfrak{g}$ e para todo $N \in H$,

$$\begin{aligned} p(N^{-1}AN) &= N^{-1}p(A)N \ e \\ p^\perp(N^{-1}AN) &= N^{-1}p^\perp(A)N. \end{aligned}$$

Prova: Como H é um subgrupo de Lie de G, $\mathfrak{h}$ é preservada por conjugação por elementos de H. Como g é bi-invariante, $\mathfrak{h}^\perp$ também é preservada por conjugação por elementos de H. Em particular, as projeções ortogonais sobre esses subespações também são preservadas por conjugação por elementos de H. Isso prova o resultado. □

Para $A \in \mathfrak{h}^\perp$, definimo $\tilde{A} \in \chi(E)$ por

$$\tilde{A}(M) := Mp^\perp(M^{-1}AM). \tag{12}$$

Lema 3.5

Para todo $A \in \mathfrak{h}^\perp$ e para todo $N \in H$,

$$R_N^* \tilde{A} = \tilde{A}.$$

Em particular, $\tilde{A}$ é o levantamento horizontal de um único campo de vetores $\overline{A}$ sobre X.

Prova: De fato, para todo $M \in G$,

$$\begin{aligned}
R_N^* \tilde{A}(M) &= DR_N(MN)^{-1} \tilde{A}(MN) \\
&= DR_{N^{-1}}(MN) MNp^\perp(N^{-1}M^{-1}AMN) \\
&= MNp^\perp(N^{-1}M^{-1}AMN)N^{-1} \\
&= Mp^\perp(M^{-1}AM) \\
&= \tilde{A}(M),
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Definimos $\tilde{\nabla} : \chi(E) \oplus \chi(E) \to \chi(E)$ por

$$\tilde{\nabla}_\xi \nu := p^\perp(\nabla_\xi \nu). \tag{13}$$

Lema 3.6

Para todo $A, B \in \mathfrak{h}^\perp$ e para todo $M \in G$,

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{A}} \tilde{B})(M) := M[p(M^{-1}BM), p^\perp(M^{-1}AM)]. \tag{14}$$

Prova: Seja (E_α) uma base ortonormal de $\mathfrak{h}^\perp$. Então

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\tilde{A}} \tilde{B})(M) &= \big(\nabla_{\tilde{A}} \langle p^\perp(M^{-1}BM), E_\alpha \rangle E_\alpha^L\big)(M) \\
&= \langle p^\perp[M^{-1}BM, p^\perp(M^{-1}AM)], E_\alpha \rangle E_\alpha^L(M) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \langle p^\perp(M^{-1}BM), E_\alpha \rangle [p^\perp(M^{-1}AM), E_\alpha] \\
&= M[p(M^{-1}BM), p^\perp(M^{-1}AM)] + \frac{1}{2} p([p^\perp(M^{-1}AM), p^\perp(M^{-1}BM)]) \\
&= M[p(M^{-1}BM), p^\perp(M^{-1}AM)],
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Definimos a curvatura de $\tilde{\nabla}$ tal que, para todo $\xi, \nu, \mu \in \chi(E)$,

$$\tilde{R}_{\xi\nu}\mu := \tilde{\nabla}_\xi \tilde{\nabla}_\nu \mu - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\xi \mu - \tilde{\nabla}_{[\xi,\nu]}\mu. \tag{15}$$

Lema 3.7

Para todo $A, B, C \in \mathfrak{h}^\perp$,

$$(\tilde{R}_{\tilde{A}\tilde{B}}\tilde{C})(Id) = -[[A, B], C]. \tag{16}$$

Prova: Observamos primeiro que

$$(\nabla\tilde{A})(\mathrm{Id}) = (\nabla\tilde{B})(\mathrm{Id}) = (\nabla\tilde{C})(\mathrm{Id}) = 0.$$

Segue que

$$(\tilde{R}_{\tilde{A}\tilde{B}}\tilde{C})(\mathrm{Id}) = (\tilde{\nabla}_{\tilde{A}}\tilde{\nabla}_{\tilde{B}}\tilde{C})(\mathrm{Id}) - (\tilde{\nabla}_{\tilde{B}}\tilde{\nabla}_{\tilde{A}}\tilde{C})(\mathrm{Id}).$$

Pelo Lema 3.6, para todo M,

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{B}}\tilde{C})(M) = M[p(M^{-1}CM), p^\perp(M^{-1}BM)].$$

Repitindo o mesmo argumento, obtemos em $M = \mathrm{Id}$,

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{\tilde{A}}\tilde{\nabla}_{\tilde{B}}\tilde{C})(\mathrm{Id}) &= [p([C, A]), p^\perp(B)] + [C, p^\perp([B, A])] + \frac{1}{2}[A, [p(C), B]] \\ &= [[C, A], B].\end{aligned}$$

Segue pela relação de Jacobi que

$$(\tilde{R}_{\tilde{A}\tilde{B}}\tilde{C})(\mathrm{Id}) = [[C, A], B] - [[C, B], A] = -[[A, B], C],$$

como desejado. $\square$

Teorema 3.8

Para todo $A, B, C \in \mathfrak{h}^\perp$, denotando

$$\xi := D\pi(Id)A,\ \nu := D\pi(Id)B,\ e\ \mu := D\pi(Id)C,$$

temos

$$R_{\xi\nu}\mu = -D\pi(Id)([[A, B], C]).$$

Exercício**: Definimos $\alpha : \mathrm{O}(m + 1) \times \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ por

$$\alpha(M, x) := Mx.$$

Mostre que α é uma ação transitiva. Denotamos $x_0 := (0, ..., 0, 1)^t$. Mostre que

$$H := \mathrm{Stab}(\{x_0\}) = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in \mathrm{O}(m) \right\}.$$

Seja g a métrica bi-invariante sobre $\mathrm{O}(m+1)$ definida por

$$g(A,B) := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(AB^t).$$

Mostre que a projeção $\pi : \mathrm{O}(m+1) \to \mathbb{S}^m; M \mapsto Mx_0$ é uma submersão riemanniana. Mostre que $\mathbb{S}^m$ é um espaço simétrico. Determine as geodésicas e a curvature de $\mathbb{S}^m$.

Exercício*:** Seja $\mathrm{Gr}(m, m+n)$ a variedade grassmanniana de subespaços vetoriais de dimensão m de $\mathbb{R}^{m+n}$. Definimos $\alpha : \mathrm{O}(m+n) \times \mathrm{Gr}(m, m+n) \to \mathrm{Gr}(m, m+n)$ por

$$\alpha(M, V) := \{Mx \mid x \in V\}.$$

Mostre que α é uma ação transitiva de $\mathrm{O}(m+n)$ sobre $\mathrm{Gr}(m, m+n)$. Seja $V_0 := \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Mostre que

$$H := \mathrm{Stab}(\{V_0\}) = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in \mathrm{O}(m), N \in \mathrm{O}(n) \right\}.$$

Definimos $\pi : \mathrm{O}(n+m) \to \mathrm{Gr}(m, m+n)$ por

$$\pi(M) := \alpha(M, V_0) = MV_0.$$

Determine a métrica h sobre $\mathrm{Gr}(m, m+n)$ com respeito a qual π é uma submersão riemanniana. Mostre que $\mathrm{Gr}(m, m+n)$ é um espaço simétrico. Determina a sua curvatura de Riemann e as suas geodésicas.