1 - A geometria de subvariedades. Nesse capítulo desenvolvemos ferramentas para a determinação das curvaturas de subvariedades do espaço euclidiano. Essas técnicas também se generalizam facilmente ao caso de subvariedades de variedades riemannianas quaisquers, mas não estudaremos isso aqui. Revisamos primeiro a estrutura de campos de vetores sobre subvariedades. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade, denotamos TX o seu fibrado tangente e denotamos $\pi : TX \to X$ a projeção canônica. Lembramos que um campo de vetores sobre X é uma função suave $\xi : X \to TX$ tal que, para todo $x \in X$, $(\pi \circ \xi)(x) = x$. Observamos que ξ possui dois componentes, pois TX é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{m+n} \oplus \mathbb{R}^{m+n}$. Como o primeiro componente de ξ é, por definção, a identidade, para todo x, $\xi(x) = (x, \tilde{\xi}(x))$, para alguma função $\tilde{\xi} : X \to \mathbb{R}^{m+n}$. Por definição de ξ, $\tilde{\xi}(x) \in T_xX$ para todo x e, por definição da estrutura diferencial de TX, a função $\xi : X \to TX$ é suave se e somente se a função $\tilde{\xi} : X \to \mathbb{R}^{m+n}$ é suave. Na geometria, é commun identificar dessa maneira os campos de vetores suaves sobre a subvariedade X com as funções suaves de X em $\mathbb{R}^{m+n}$ que têm essas propriedades. Em particular, para dois campos de vetores ξ, ν sobre X, denotamos

$$(D_\xi \nu)(x) := D_\xi \tilde{\nu}(x).$$

Em geral, $(D_\xi \nu)(x)$ não é um elemento de T_xX e $(D_\xi \nu)$ não pode ser identificado com um campo de vetores sobre X. Veremos agora, contudo, que há diversas maneiras de construir campos de vetores a partir desse derivada.

Lema 1.1

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Sejam $\xi, \nu \in \chi(TX)$ campos de vetores tangentes a X. Então

$$[\xi, \nu] = D_\xi \nu - D_\nu \xi. \tag{1}$$

Prova: Seja $x \in X$, seja (U, V, Φ) uma carta de X em torno desse ponto, e denotamos $y := \Phi(x)$. Denotamos $\tilde{\xi} := \Psi^* \xi$ e $\tilde{\nu} := \Psi^* \nu$. Isto é $\tilde{\xi}, \tilde{\nu} : V \to \mathbb{R}^m$ e

$$\begin{aligned} \xi \circ \Psi &= D\Psi \cdot \tilde{\xi}, \text{ e} \\ \nu \circ \Psi &= D\Psi \cdot \tilde{\nu}. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} (D_\xi \nu)(x) &= \tilde{\xi}^i(y) \bigg(\frac{\partial}{\partial x_i} (\nu \circ \Psi) \bigg)(y) \\ &= \tilde{\xi}^i(y) \bigg(\frac{\partial}{\partial x_i} (D\Psi \cdot \tilde{\nu}) \bigg)(y) \\ &= \tilde{\xi}^i(y) \tilde{\nu}^j(y) \frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x_i \partial x_j}(y) \partial_k + D\Psi^k_j(y) \bigg(\tilde{\xi}^i(y) \frac{\partial \tilde{\nu}^j}{\partial x_i}(y) \bigg) \partial_k. \end{aligned}$$

Segue por simetria da segunda derivada de Ψ que

$$\begin{aligned} (D_\xi \nu - D_\nu \xi)(x) &= D\Psi^k_j(y) \bigg(\tilde{\xi}^i(x) \frac{\partial \tilde{\nu}^j}{\partial x_i}(y) - \tilde{\nu}^i(y) \frac{\partial \tilde{\xi}^j}{\partial x_i}(y) \bigg) \partial_k \\ &= D\Psi(y) \cdot [\tilde{\xi}, \tilde{\nu}](y). \end{aligned}$$

Como isso é precisamente o segundo componente de $[\xi, \nu](x)$, isso completa a prova. $\square$

Lema 1.2

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Definimos $\Pi, \Pi^\perp : X \to End(\mathbb{R}^{m+n})$ tais que, para todo $x \in X$, $\Pi(x)$ é $\Pi^\perp(x)$ sejam as projeções ortogonais sobre T_xX e $T_xX^\perp$ respectivamente. Então Π e $\Pi^\perp$ são sauves.

Prova: Seja $x_0 \in X$. Seja Ω uma vizinhança de x_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$ e $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma submersão tal que $X \cap \Omega = \Phi^{-1}(\{0\})$. Para todo $x \in \Omega$, como $D\Phi(x)$ é sobrejetiva, $D\Phi(x)^t$ é injetiva e $D\Phi(x)D\Phi(x)^t$ é positiva definida. Definimos então $M : X \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^{m+n})$ por

$$M(x) := D\Phi(x)^t(D\Phi(x)D\Phi(x)^t)^{-1}D\Phi(x).$$

Verificamos que, para todo x,

$$\begin{aligned} M(x)^2 &= M(x), \text{ e} \\ \mathrm{Ker}(M(x)) &= \mathrm{Ker}(D\Phi(x)). \end{aligned}$$

Além do mais, para todo x,

$$\mathrm{Im}(M(x)) \subseteq \mathrm{Im}(D\Phi(x)^t) = \mathrm{Ker}(D\Phi(x))^\perp,$$

e teorema de posto-nulidade implica que

$$\mathrm{Im}(M(x)) = \mathrm{Ker}(D\Phi(x))^\perp.$$

Vemos então que, para todo $x \in X$, $M(x)$ é a projeção ortogonal sobre $T_xX^\perp$. Isto é, $M(x) = \Pi^\perp(x)$ e segue que $\Pi^\perp$ é suave. Como $\Pi = \mathrm{Id} - M$ também é suave, isso completa a prova. $\square$

Exercício**: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Definimos o **fibrado normal** de X por

$$TX^\perp := \left\{(x, \xi) \mid x \in X \text{ e } \xi \in (T_xX)^\perp\right\}.$$

Mostre que $TX^\perp$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{m+n} \oplus \mathbb{R}^{m+n}$.

Exercício**: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Definimos $Y, Z \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \oplus \mathrm{End}(\mathbb{R}^{m+n})$ por

$$\begin{aligned} Y &:= \{(x, A) \mid x \in X \text{ e } \mathrm{Im}(A) \subseteq T_xX\}, \text{ e} \\ Z &:= \left\{(x, A) \mid x \in X \text{ e } \mathrm{Im}(A) \subseteq T_xX^\perp\right\}. \end{aligned}$$

Mostre que Y é Z são subvariedades de $\mathbb{R}^{m+n} \oplus \mathrm{End}(\mathbb{R}^{m+n})$. Denotamos Y e Z por $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{m+n}, TX)$ e $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{m+n}, TX^\perp)$ respectivamente.

Vemos, em particular, que Π e $\Pi^\perp$ definem as seções $\tilde{\Pi}(x) := (x, \Pi(x))$ e $\tilde{\Pi}^\perp(x) := (x, \Pi^\perp(x))$ de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{m+n}, TX)$ e $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{m+n}, TX^\perp)$ respectivamente. Da mesma forma como no caso de campos de vetores, é commun identificar seções com as funções que são os seus segundos componentes, pois o primeiro componente é sempre trivial.

Definição 1.3

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Definimos $I : \chi(TX) \oplus \chi(TX) \to C^\infty(X)$, $II : \chi(TX) \oplus \chi(TX) \to \chi(TX^\perp)$ e $\nabla : \chi(TX) \oplus \chi(TX) \to \chi(TX)$ tais que, para todo $\xi, \nu \in \chi(TX)$,

$$\begin{aligned} I(\xi,\nu) &= \langle \xi, \nu \rangle, \\ II(\xi,\nu) &= -\Pi^\perp\big(D_\xi \nu\big), \text{ e} \\ \nabla_\xi \nu &= \Pi\big(D_\xi \nu\big). \end{aligned} \tag{2}$$

Também definimos $\nabla^\perp : \chi(TX) \oplus \chi(TX^\perp) \to \chi(TX^\perp)$ tal que, para todo $\xi \in \chi(TX)$ e para todo $\nu \in \chi(TX^\perp)$,

$$\nabla^\perp_\xi \nu = \Pi^\perp\big(D_\xi \nu\big). \tag{3}$$

Chamamos I e II e respectivamente a **primeira forma fundamental**, *a* **segunda forma fundamental** *de X. Chamamos, ∇ e $\nabla^\perp$ as* **derivadas covariantes** *de TX e de $TX^\perp$ respectivamente.*

Lema 1.4

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos I a sua primeira forma fundamental. Para todo $\xi, \nu \in \chi(TX)$ e para todo $f \in C^\infty(X)$,

$$I(f\xi, \nu) = I(\xi, f\nu) = fI(\xi,\nu). \tag{4}$$

Lema 1.5

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos II a sua segunda forma fundamental. Para todo $\xi, \nu \in \chi(TX)$ e para todo $f \in C^\infty(X)$,

$$II(f\xi, \nu) = II(\xi, f\nu) = fII(\xi,\nu). \tag{5}$$

Prova: De fato

$$\mathrm{II}(\xi, f\nu) = -\Pi^\perp(D_\xi(f\nu)) = -\Pi^\perp((D_\xi f)\nu + f(D_\xi \nu)) = -f\Pi^\perp(D_\xi \nu) = f\mathrm{II}(\xi,\nu).$$

Como a primeira relação é trivial, isso completa a prova. □

Lema 1.6

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos ∇ a derivada covariante de TX. Para todo $\xi, \nu \in \chi(TX)$ e para todo $f \in C^\infty(X)$,

$$\begin{aligned} \nabla_{f\xi}\nu &= f\nabla_\xi \nu, \text{ e} \\ \nabla_\xi(f\nu) &= (D_\xi f)\nu + f\nabla_\xi \nu. \end{aligned} \tag{6}$$

Observação: Em particular, ∇ satisfaz as axiomas de uma derivada covariante.

Prova: De fato,

$$\nabla_{f\xi}\nu = \Pi(D_{f\xi}\nu) = \Pi(fD_\xi \nu) = f\Pi(D_\xi \nu) = f\nabla_\xi \nu,$$

e

$$\nabla_\xi(f\nu) = \Pi(D_\xi(f\nu)) = \Pi((D_\xi f)\nu) + \Pi(fD_\xi \nu) = (D_\xi f)\nu + f\Pi(D_\xi \nu) = (D_\xi f)\nu + f\nabla_\xi \nu,$$

o que completa a prova. □

Lema 1.7

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos $\nabla^\perp$ a derivada covariante de $TX^\perp$. Para todo $\xi \in \chi(TX)$, para todo $\nu \in \chi(TX^\perp)$, e para todo $f \in C^\infty(X)$,

$$\begin{aligned} \nabla^\perp_{f\xi}\nu &= f\nabla^\perp_\xi \nu, \text{ e} \\ \nabla^\perp_\xi(f\nu) &= (D_\xi f)\nu + f\nabla^\perp_\xi \nu. \end{aligned} \tag{7}$$

Prova: De fato,

$$\nabla^\perp_{f\xi}\nu = \Pi^\perp(D_{f\xi}\nu) = \Pi^\perp(fD_\xi\nu) = f\Pi^\perp(D_\xi\nu) = f\nabla^\perp_\xi\nu,$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^\perp_\xi(f\nu) &= \Pi^\perp(D_\xi(f\nu)) = \Pi^\perp((D_\xi f)\nu) + \Pi^\perp(fD_\xi\nu) \\ &= (D_\xi f)\nu + f\Pi^\perp(D_\xi\nu) = (D_\xi f)\nu + f\nabla^\perp_\xi\nu, \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Lema 1.8

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos ∇ a derivada covariante de TX. Para todo $\xi, \nu \in \chi(TX)$,

$$\nabla_\xi\nu - \nabla_\nu\xi = [\xi, \nu]. \tag{8}$$

Observação: Isto é, ∇ é sem torsão.

Prova: De fato,

$$\nabla_\xi\nu - \nabla_\nu\xi = \Pi(D_\xi\nu - D_\nu\xi) = \Pi([\xi,\nu]) = [\xi,\nu],$$

como desejado. □

Lema 1.9

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos ∇ a sua derivada covariante. Para todo $\xi, \nu, \mu \in \chi(TX)$,

$$D_\xi\langle\nu,\mu\rangle = \langle\nabla_\xi\nu,\mu\rangle + \langle\nu,\nabla_\xi\mu\rangle. \tag{9}$$

Observação: Isto é, ∇ é paralela com respeito à métrica.

Prova: De fato

$$\begin{aligned} D_\xi\langle\nu,\mu\rangle &= \langle D_\xi\nu,\mu\rangle + \langle\nu, D_\xi\mu\rangle \\ &= \langle\Pi(D_\xi\nu),\mu\rangle + \langle\nu,\Pi(D_\xi\mu)\rangle \\ &= \langle\nabla_\xi\nu,\mu\rangle + \langle\nu,\nabla_\xi\mu\rangle, \end{aligned}$$

como desejado. □

Segue que ∇ é precisamente a derivada covariante de Levi-Civita de X.

Exercício**: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos $\nabla^\perp$ a derivada covariante de $TX^\perp$. Mostre que, para todo $\xi \in \chi(TX)$ e para todo $\nu, \mu \in \chi(TX^\perp)$,

$$D_\xi\langle\nu,\mu\rangle = \langle\nabla^\perp_\xi\nu,\mu\rangle + \langle\xi,\nabla^\perp,\mu\rangle.$$

Isto é, $\nabla^\perp$ também é paralelo com respeito à metrica de $TX^\perp$.

Teorema 1.10, Gauss

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos II a sua segunda forma fundamental e R a sua curvatura de Riemann. Então, para todo $\xi, \nu, \mu, \lambda \in \chi(TX)$,

$$\langle R_{\xi\nu}\mu, \lambda\rangle = \langle II(\xi,\lambda), II(\nu,\mu)\rangle - \langle II(\xi,\mu), II(\nu,\lambda)\rangle. \tag{10}$$

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}
\langle R_{\xi\nu}\mu, \lambda\rangle &= \langle \nabla_\xi(\nabla_\nu\mu), \lambda\rangle - \langle \nabla_\nu(\nabla_\xi\mu), \lambda\rangle - \langle \nabla_{[\xi,\nu]}\mu, \lambda\rangle \\
&= \langle D_\xi(\nabla_\nu\mu), \lambda\rangle - \langle D_\nu(\nabla_\xi\mu), \lambda\rangle - \langle D_{[\xi,\nu]}\mu, \lambda\rangle \\
&= \langle D_\xi(D_\nu\mu), \lambda\rangle + \langle D_\xi \mathrm{II}(\nu,\mu), \lambda\rangle \\
&\qquad - \langle D_\nu(D_\xi\mu), \lambda\rangle - \langle D_\nu \mathrm{II}(\xi,\mu), \lambda\rangle \\
&\qquad\qquad - \langle D_{[\xi,\nu]}\mu, \lambda\rangle. \\
&= D_\xi\langle \mathrm{II}(\nu,\mu), \lambda\rangle - \langle \mathrm{II}(\nu,\mu), D_\xi\lambda\rangle \\
&\qquad - D_\nu\langle \mathrm{II}(\xi,\mu), \lambda\rangle + \langle \mathrm{II}(\xi,\mu), D_\nu\lambda\rangle \\
&= \langle \mathrm{II}(\xi,\lambda), \mathrm{II}(\nu,\mu)\rangle - \langle \mathrm{II}(\xi,\mu), \mathrm{II}(\nu,\lambda)\rangle,
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Obtemos simultaneamente informações sobre a estrutura da segunda forma fundamental. Observamos primeiro que, como II envia duas copias de $\chi(TX)$ em $\chi(TX^\perp)$, se queremos definir um conceito de derivada covariante de II compatível com a regra de produto, então essa derivada tem que satisfazer, para todo $\xi \in \chi(TX)$ e para todo $\nu, \mu \in \chi(TX^\perp)$,

$$(\nabla^\perp_\xi \mathrm{II})(\nu,\mu) := \nabla^\perp_\xi \mathrm{II}(\nu,\mu) - \mathrm{II}(\nabla^\perp_\xi\nu, \mu) - \mathrm{II}(\nu, \nabla^\perp_\xi\mu).$$

Exercício**: Mostre que, para todo $\xi \in \chi(TX)$, para todo $\nu, \mu \in \chi(TX^\perp)$ e para todo $f \in C^\infty(X)$,

$$(\nabla^\perp_{f\xi}\mathrm{II})(\nu,\mu) = (\nabla^\perp_\xi)(f\nu,\mu) = (\nabla^\perp_\xi)(\nu, f\mu) = f(\nabla^\perp_\xi)(\nu,\mu).$$

Isto é, $\nabla^\perp\mathrm{II}$ é trilinear com respeito ao álgebra $C^\infty(X)$.

Teorema 1.11, Codazzi-Mainardi

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos II a sua segunda forma fundamental e ∇ a sua derivada covariante. Então, para todo $\xi, \nu, \mu \in \chi(TX)$,

$$(\nabla^\perp_\xi II)(\nu,\mu) = (\nabla^\perp_\nu II)(\xi,\mu). \tag{11}$$

Em particular, ∇II é antisimetrica.

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}
(\nabla^\perp_\xi \mathrm{II})(\nu,\mu) &= \nabla^\perp_\xi(\mathrm{II}(\nu,\mu)) - \mathrm{II}(\nabla_\xi\nu,\mu) - \mathrm{II}(\nu,\nabla_\xi\mu) \\
&= -\Pi^\perp(D_\xi\Pi^\perp(D_\nu\mu)) + \Pi^\perp(D_{\nabla_\xi\nu}\mu) + \Pi^\perp(D_\nu\nabla_\xi\mu) \\
&= -\Pi^\perp(D_\xi D_\nu\mu) + \Pi^\perp(D_{\nabla_\xi\nu}\mu) + \Pi^\perp(D_\xi\nabla_\nu\mu) + \Pi^\perp(D_\nu\nabla_\xi\mu).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
&(\nabla^\perp_\xi \mathrm{II})(\nu,\mu) - (\nabla^\perp_\nu \mathrm{II})(\xi,\mu) \\
&\quad = -\Pi^\perp(D_\xi D_\nu \mu) + \Pi^\perp(D_\nu D_\xi \mu) + \Pi^\perp(D_{\nabla_\xi \nu}\mu) - \Pi^\perp(D_{\nabla_\nu \xi}\mu) \\
&\quad = \Pi^\perp(-D_\xi D_\nu \mu + D_\nu D_\xi \mu + D_{[\xi,\nu]}\mu) \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

como desejado. □

2 - A geometria de parametrizações. Agora gostariamos de estudar as formas fundamentais e as derivadas covariantes dentro das cartas. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade e denotamos I^X, II^X, ∇^X e $\nabla^{\perp,X}$ as suas formas fundamentais e as suas derivadas covariantes. Observamos primeiro que, se Y é um subconjunto aberto de X, então as suas formas fundamentais I^Y e II^Y e as suas derivadas covariantes ∇^Y e $\nabla^{\perp,Y}$ trivialmente satisfazem, para todo $\xi,\nu \in \chi(TX)$ e para todo $\mu \in \chi(TX^\perp)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^Y(\xi|_Y, \nu|_Y) &= \mathrm{I}^X(\xi,\nu)|_Y, \\
\mathrm{II}^Y(\xi|_Y, \nu|_Y) &= \mathrm{II}^X(\xi,\nu)|_Y, \\
\nabla^Y_{\xi|_Y}\nu|_Y &= \nabla^X_\xi \nu\big|_Y, \text{ e} \\
\nabla^{\perp,Y}_{\xi|_Y}\nu|_Y &= \nabla^{\perp,X}_\xi \nu\big|_Y.
\end{aligned}$$

Isto é, as formas fundamentais e as derivadas covariantes de Y são apenas as restrições a Y das formas fundamentais a das derivadas covariantes de X. Dizemos então que as formas fundamentais e as derivadas covariantes são **operadores locais**.

Exercício**: Mais precisamente, seja X uma variedade, sejam E e F fibrados sobre X e seja $L : \chi(E) \to \chi(F)$ linear. Dizemos que L é **local** quando, para todo subconjunto aberto Y de X, existe um único operador $L^Y : \chi(E|_Y) \to \chi(F|_Y)$ tal que, para todo $\xi \in \chi(E)$,

$$L^Y(\xi|_Y) = (L\xi)|_Y.$$

Mostre que L é local se e somente se o comutador $[L, M_f]$ é local para toda $f \in C^\infty(X)$, onde M_f é o operador de multiplicação por f.

Consideramos agora o caso de hipersuperfícies, isto é, subvariedades de codimensão 1. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ uma hipersuperfície. Devido à localidade, podemos supor que X é a imagen de alguma paramétrização $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$. Denotamos I, II, ∇ e $\nabla^\perp$ as formas fundamentais e as derivadas covariantes de X. Vemos imediatemente que $\Psi^*\mathrm{I}$ é a métrica g de Ψ. Vemos em seguida que $\Psi^*\nabla$ é a derivada covariante dessa métrica. Estudamos agora a segunda forma fundamental.

Lema e Definição 2.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Existe uma função suave $N : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$ tal que, para todo $x \in \Omega$, $N(x)$ é ortogonal a $T_{\Psi(x)}X$ e $\|N(x)\| = 1$. Além *do mais, N é única a menos de troca de sinal. Chamamos N o* **campo normal unitário** *de Ψ.*

Prova: Denotamos por $\partial_1, ..., \partial_m$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Definimos $\alpha : \Omega \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{R})$ tal que, para todo $x \in \Omega$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\alpha(x)(\xi) := \mathrm{Det}(D\Psi(x)\partial_1, \cdots, D\Psi(x)\partial_m, \xi).$$

Para todo x, como $D\Psi(x)$ é injetiva, α é diferente de zero. Definimos $\hat{N} : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$ por

$$\hat{N}(x) := \alpha(x)^t.$$

Verificamos que, para todo x, $\hat{N}(x)$ é diferente de zero e é ortogonal a $T_{\Psi(x)}X$. Obtemos o campo N dividindo $\hat{N}$ pelo seu comprimento. □

Lemma 2.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos N o seu campo normal unitário e denotamos II a segunda forma fundamental de $X := \mathrm{Im}(\Psi)$. Então, para todo $\xi, \nu : \Omega \to \mathbb{R}^m$,

$$(\Psi^* II)(\xi, \nu) = \langle DN \cdot \nu, D\Psi \cdot \xi \rangle N. \tag{12}$$

Chamamos $\Psi^* II$ a **segunda forma fundamental** *de Ψ.*

Observação: Quando trabalhamos com hipersuperfícies, é commun ignorar o fator N para considerar a segunda forma fundamental em todo ponto como uma forma bilinear com valores em $\mathbb{R}$. Cabe ressaltar que esse ponto de vista introduz uma ambiguidade de sinal da segunda forma fundamental, pois o campo N é apenas único a menos de troca de sinal. Esse ambiguidade não afeita a Equação (12), pois N aparece duas vezes no seu lado direito. Contudo, ela tem que ser levada em conta na hora em que eliminamos o fator de N.

Prova: Seja $y \in \Omega$ e denotamos $x := \Psi(y)$. Então

$$\begin{aligned}(\Psi^*\mathrm{II})(\xi, \nu)(y) &= \mathrm{II}(\Psi_*\xi, \Psi_*\nu)(x) \\ &= -\big(\Pi^\perp(D_{\Psi_*\xi}\Psi_*\nu)\big)(x) \\ &= -\langle \big(D_{\Psi_*\xi}\Psi_*\nu\big)(x), N(y)\rangle N(y) \\ &= -\langle \big(D_\xi(D\Psi \cdot \nu)\big)(x), N(y)\rangle N(y).\end{aligned}$$

Contudo

$$\begin{aligned}\langle D_\xi(D\Psi \cdot \nu), N\rangle &= -D_\xi\langle D\Psi \cdot \nu, N\rangle + \langle D\Psi \cdot \nu, D_\xi N\rangle \\ &= \langle D\Psi \cdot \nu, D_\xi N\rangle,\end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Nesse contexto, Teorema 1.10 produz

Teorema 2.3, Gauss

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos $g, II : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ a métrica e a segunda forma fundamental de Ψ respectivamente. Denotamos R a curvatura de Riemann de g. Então, para todo quadruple ξ, ν, μ, λ de campos de vetores sobre Ω,

$$g(R_{\xi\nu}\mu, \lambda) = II(\xi, \lambda)II(\nu, \mu) - II(\xi, \mu)II(\nu, \lambda). \tag{13}$$

Isto é, para todo i, j, k, l,

$$R_{ijkl} = II_{il}II_{jk} - II_{ik}II_{jl}. \tag{14}$$

Da mesma maneira, Teorema 1.11 produz

Teorema 2.4

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos $g, II : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m)$ a métrica e a segunda forma fundamental de Ψ respectivamente. Denotamos ∇ a derivada covariante de g. Então, para todo triple ξ, ν, μ de campos de vetores sobre Ω,

$$(\nabla_\xi II)(\nu, \mu) = (\nabla_\nu II)(\xi, \mu). \tag{15}$$

Isto é, para todo i, j, k,

$$II_{ij;k} = II_{kj;i}. \tag{16}$$

Observação: Como II já é simétrica, segue que ∇II é simétrica com respeito a toda permutação dos seus argumentos.

Observamos finalmente o seguinte resultado.

Lema e Definição 2.5

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma parametrização. Denotamos $g, II : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ a métrica e a segunda forma fundamental de Ψ respectivamente. Existe uma única função $A : \Omega \to End(\mathbb{R}^m)$ tal que, para todo par $\xi, \nu : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores

$$II(\xi, \nu) = g(A\xi, \nu).$$

Chamamos A o **operador de Weingarten** *de Ψ.*

Exercício**: Seja $\mathbb{S}^m$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$. Mostre que as geodésicas de $\mathbb{S}^m$ são as interseções de $\mathbb{S}^m$ com planos os lineares em $\mathbb{R}^{m+1}$ (isto é, os planos em $\mathbb{R}^{m+1}$ que passam pelo origem).

Exercício**: Seja $X := \mathbb{S}^m_r$ a esfera de raio r em $\mathbb{R}^{m+1}$. Denotamos I e II a sua primeira e a sua segunda forma fundamental respectivamente. Mostre que

$$\mathrm{II} = \frac{1}{r}\mathrm{I}.$$

Mostre que a curvatura escalar de X é constante e igual a 1. Mostre que a sua curvatura de Weyl e a sua curvatura de Ricci sem traço são iguais a zero.

Exercício**: Observamos que as construções feitas nessa capítulo nã precisam que a métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ do espaço ambiente seja positiva definida. Nesse exercício, vamos estudar o que acontece quando a métrica tem sinal mixto. Supomos agora que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tem assinatura $(m,1)$. Definimos

$$X := \left\{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle x,x\rangle = -1\right\}.$$

Mostre que X é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{m+1}$ com 2 componentes connexos. Mostre que, para todo $x \in X$, a restrição de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a T_xX é positive definida. Isto é, a primeira forma fundamental I de X é positive definida. Mostre que a segunda forma fundamental de X satisfaz

$$\mathrm{II} = -\mathrm{I}.$$

Mostre que as geodésicas de X são as interseções de X com os planos lineares em $\mathbb{R}^{m+1}$. Mostre que X é completa. Mostre que a curvatura escalar de X é constante e egual a -1. Mostre que a sua curvatura de Weyl e a sua curvatura de Ricci sem traço são iguais a zero. X é o **modelo quadrico** do **espaço hiperbólico**.

Exercício**: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Denotamos por II a sua segunda forma fundamental. Definimos $H : X \to \mathbb{R}^m$ tal que, para todo $x \in X$,

$$H(x) := \mathrm{Tr}(\mathrm{II}(x)) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{II}(x)(e_i,e_i),$$

onde $e_1,\cdots,e_m$ é uma base ortonormal de T_xX. Mostre que H não depende da base ortonormal de T_xX escolhida. Mostre que H é sauve. Chamamos H a **curvatura média** de X.

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma parametrização. Denotamos $X := \mathrm{Im}(\Psi)$. Denotamos H a curvatura média de X. Componiendo H com Ψ, a concebemos como uma função de Ω em $\mathbb{R}^{m+n}$. Seja $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ tal que, para todo $x \in \Omega$, $\xi(x)$ é normal a $T_{\Psi(x)}X$. Para $t \in \mathbb{R}$, definimos $\Psi_t : \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ por

$$\Psi_t(x) := \Psi(x) + t\xi(x).$$

Seja $K \subseteq \Omega$ um subconjunto compacto. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $t \in]-\epsilon,\epsilon[$, Ψ_t é uma imersão em uma vizinhança de K. Mostre que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Vol}(\Psi_t(K))\bigg|_{t=0} = \int_K \langle H,\xi\rangle \mathrm{dVol}.$$

Dizemos que uma subvariedade é **mínima** quando é um ponto crítico da funcional de volume. Vemos então que uma subvariedade é mínima se é somente se a sua curvatura média é igual a zero.

Exercício**: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{2+m}$ uma superfície mínima. Mostre que a sua curvatura escalar é não-positiva.

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ um aberto convexo tal que $X := \partial\Omega$ seja uma subvariedade. Mostre que e segunda forma fundamental de X é não-negativa definida.

Exercício***: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ uma hipersuperfície compacta cuja segunda forma fundamental é positiva definida em todo ponto. Mostre que existe um subconjunto aberto e convexo Ω de $\mathbb{R}^{m+1}$ tal que $X = \partial\Omega$.