1 - Formas diferenciais. Já vimos como a curvatura de Riemann é um objeto complexo cuja determinação não é trivial. Nesse e no próximo capítulo, vamos estudar técnicas para determiná-la em vários contextos diferentes. Começamos com o caso de superfícies, que vamos estudar mediante a técnica de referenciais móveis. Introduzimos, primeiro, alguns conceitos álgebricos preliminares.

Definição 1.1

Seja E um espaço vetorial. Para $\alpha, \beta \in \mathit{Lin}(E, \mathbb{R})$, definimos $\alpha \wedge \beta \in \mathit{Lin}_2(E, \mathbb{R})$ tal que, para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi, \nu) := \alpha(\xi)\beta(\nu) - \alpha(\nu)\beta(\xi). \tag{1}$$

Observação: Observamos que $\wedge$ é um produto anticomutativo e que, para todo $\alpha, \beta \in \mathrm{Lin}(E, \mathbb{R})$, $\alpha \wedge \beta$ e uma função antissimétrica.

Exercício**: Mais geralmente, para um espaço vetorial E, denotamos $E^* := \mathrm{Lin}(E, \mathbb{R})$ seu espaço dual e denotamos $\Lambda^k E^*$ o espaço de funções antissimétricas em $\mathrm{Lin}_k(E, \mathbb{R})$. Para $\alpha \in \Lambda^k E^*$ e $\beta \in \Lambda^l E^*$, definimos $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l} E^*$ tal que, para todo $\xi_1, \cdots, \xi_{k+l} \in E$,

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi_1, \cdots, \xi_{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \alpha(\xi_{\sigma(1)}, \cdots, \xi_{\sigma(k)}) \beta(\xi_{\sigma(k+1)}, \cdots, \xi_{\sigma(k+l)}), \tag{2}$$

onde o somatório é feito sobre o conjunto de todas as permutações σ do conjunto

$$\{1, \cdots, k+l\}.$$

Mostre que, para todo α, β,

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha.$$

Mostre que, para todo α, β, γ,

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Isto é, $\wedge$ é anticomutativo e associativo. Denotamos por m a dimensão de E. Seja $\partial_1, \cdots, \partial_m$ uma base de E. Denotamos por $dx^1, \cdots, dx^m$ a sua base dual de E^*. Mostre que, para todo k, o conjunto

$$\left\{ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k \right\}$$

é uma base de $\Lambda^k E^*$. Mostre que

$$\mathrm{Dim}(\Lambda^k E^*) = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Observamos, em particular, que $\Lambda^k E^* = 0$ para todo $k > m$. Por convenção, definimos $\Lambda^0 E^* := \mathbb{R}$. Chamamos a soma

$$\Lambda^* E^* := \oplus_{0 \leq k \leq m} \Lambda^k E^*$$

a **álgebra alternada** de E^*.

Exercício*: Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja $\Phi : U \to V$ um difeomorfismo. Mostre que, para todo $\alpha : V \to \Lambda^k \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e para todo $\beta : V \to \Lambda^k \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$,

$$\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^* \alpha) \wedge (\Phi^* \beta).$$

Isto é, o produto $\wedge$ é invariante por reparametrização.

Definição 1.2

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Para $\alpha : U \to Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, definimos $d\alpha : U \to \Lambda^2 Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ tal que, para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$d\alpha(\xi, \nu) = D_\xi \alpha(\nu) - D_\nu \alpha(\xi). \tag{3}$$

Chamamos $d\alpha$ a **derivada exterior** *de α.*

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Mostre que, para todo $\alpha : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e para todo $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$,

$$d\alpha(\xi, \nu) = D_\xi \alpha(\nu) - D_\nu \alpha(\xi) - \alpha([\xi, \nu]).$$

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ suave. Definimos $df : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ tal que, para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$,

$$df(\xi) = D_\xi f.$$

Mostre que $d(df) = 0$.

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e simplesmente conexo. Seja $\alpha : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ suave. Mostre que $\alpha = df$ para alguma função suave $f : U \to \mathbb{R}$ se e somente se $d\alpha = 0$.

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Para todo k, denotamos

$$\Omega^k(U) := C^\infty(U, \Lambda^k \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})).$$

Para todo k, definimos $d : \Omega^k(U) \to \Omega^k(U)$ por

$$d \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \alpha_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_k} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{4}$$

Mostre que, para toda $\alpha \in \Omega^k(U)$ e para toda $\beta \in \Omega^l(U)$,

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta).$$

Exercício**: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\delta : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ uma aplicação linear tal que

(1) para todo $f \in \Omega^0(U) := C^\infty(U, \mathbb{R})$,

$$\delta f = df, \tag{5}$$

(2) para todo $f \in \Omega^0(U)$,

$$\delta(\delta f) = 0, \text{ e} \tag{6}$$

(3) para todo $\alpha \in \Omega^k(U)$ e para todo $\beta \in \Omega^l(U)$,

$$\delta(\alpha \wedge \beta) = (\delta\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\delta\beta). \tag{7}$$

Mostre que $\delta = d$. Isto é, d é o único endomorfismo linear de $\Omega^*(U)$ que satisfaz (5), (6) e (7).

Exercício**: Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja $\Phi : U \to V$ um difeomorfismo. Para todo k, denotamos $\Phi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ a operação de pull-back para tensores de tipo $(0, k)$. Isto é, para toda $\alpha \in \Omega^k(V)$, para todo $x \in U$ e para todo $\xi_1, \cdots, \xi_k \in \mathbb{R}^m$,

$$(\Phi^*\alpha)(x)(\xi_1, \cdots, \xi_k) = \alpha(y)(D\Phi(x)\xi_1, \cdots, D\Phi(x)\xi_k),$$

onde $y := \Phi(x)$. Mostre que, para toda $\alpha \in \Omega^k(V)$,

$$d(\Phi^*\alpha) = \Phi^*(d\alpha).$$

Isto é, d é invariante por reparametrização. Em particular, o caso particular em que Φ é uma aplicação linear mostra que (4) é independente da base de $\mathbb{R}^m$ escolhida.

Exercício**: Mais geralmente, sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \to \mathbb{R}^n$ abertos. Seja $\Phi : U \to V$ suave. Mostre que, para toda $\alpha \in \Omega^k(V)$,

$$d(\Phi^*\alpha) = \Phi^*(d\alpha).$$

2 - Referenciais móveis. Agora temos o equipamento necessário para introduzir a teoria dos referenciais móveis. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : U \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Seja $e_1, ..., e_m : U \to \mathbb{R}^m$ um referencial de g. Denotamos $e^1, \cdots, e^m$ o seu referencial dual. Isto é, para todo i, j,

$$e^i(e_j) = \delta^i_j.$$

Definição 2.1

Para todo $1 \leq i, j \leq m$, definimos $\omega^j_i \in \Omega^1(U)$ tal que, para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$,

$$\omega^j_i(\xi) := e^j\big(\nabla_\xi e_i\big). \tag{8}$$

Chamamos ω a **forma de conexão** *do referencial $e_1, \cdots, e_m$.*

Lema 2.2

Para todo $1 \leq i, j \leq m$,

$$\omega^j_i = -\omega^i_j. \tag{9}$$

Prova: De fato, para todo ξ,

$$\begin{aligned}\omega^j_i(\xi) &= e^j\big(\nabla_\xi e_i\big)\\ &= g\big(e_j, \nabla_\xi e_i\big)\\ &= D_\xi g(e_j, e_i) - g\big(\nabla_\xi e_j, e_i\big)\\ &= -e^i\big(\nabla_\xi e_j\big)\\ &= -\omega^i_j(\xi),\end{aligned}$$

como desejado. □

Lema 2.3

para todo $1 \leq i \leq m$,

$$de^i = -\omega^i_j \wedge e^j. \tag{10}$$

Prova: De fato, para todo m e para todo n,

$$\begin{aligned} de^i(e_m, e_n) &= D_{e_m} e^i(e_n) - D_{e_n} e^i(e_m) - e^i([e_m, e_n]) \\ &= -e^i\big(\nabla_{e_m} e_n - \nabla_{e_n} e_m\big) \\ &= -\omega^i_n(e_m) + \omega^i_m(e_n) \\ &= -\omega^i_k(e_m) e^k(e_n) + \omega^i_k(e_n) e^k(e_m) \\ &= -(\omega^i_k \wedge e^k)(e_m, e_n), \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Exercício****:** Para todo i, j, seja $\tilde{\omega}^i_j \in \Omega^1(U)$. Supomos que $(\tilde{\omega}^i_j)$ satisfaz (9) e (10). Mostre que $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j$ para todo i, j. Isto é, (ω^i_j) é definida por essas duas propriedades, sem necessidade da derivada covariante de Levi-Civita.

Definição 2.4

Para todo i, j, *definimos* $\Omega^i_j \in \Omega^2(U)$ *por*

$$\Omega^i_j := d\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k. \tag{11}$$

Chamamos Ω^i_j *a* **forma de curvatura** *do referencial.*

Observação: Observamos novamente a semelhança entre o lado direito de (11) e a equação de Lax.

Lema 2.5

Denotamos R *a curvatura de Riemann de* g. *Para todo* $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ *e para todo* i, j,

$$R_{\xi\nu} e_i = \Omega^j_i(\xi, \nu) e_j. \tag{12}$$

Prova: Podemos supor que ξ e ν são constantes. Em particular, $[\xi, \nu] = 0$. Segue que

$$\begin{aligned} R_{\xi\nu} e_i &= \nabla_\xi \nabla_\nu e_i - \nabla_\nu \nabla_\xi e_i \\ &= \nabla_\xi\big(\omega^j_i(\nu) e_j\big) - \nabla_\nu\big(\omega^j_i(\xi) e_j\big) \\ &= \big(D_\xi \omega^j_i(\nu) - D_\nu \omega^j_i(\xi)\big) e_j \\ &\qquad + \big(\omega^k_i(\nu)\omega^j_k(\xi) - \omega^k_i(\xi)\omega^j_k(\nu)\big) e_j \\ &= d\omega^j_i(\xi, \nu) e_j - (\omega^k_i \wedge \omega^j_k)(\xi, \nu) e_j, \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

3 - Superfícies. Em duas dimensões, essa teoria fornece uma fórmula muito simples para a curvatura escalar. Denotamos $\alpha := \omega_2^1$. Observamos que, para todo ξ,

$$\begin{aligned}\nabla_\xi e_1 &= -\alpha(\xi)e_2, \text{ e}\\ \nabla_\xi e_2 &= \alpha(\xi)e_1.\end{aligned}$$

Lema 3.1

Para todo ξ,

$$\alpha(\xi) = g(\xi, [e_1, e_2]). \tag{13}$$

Prova: De fato,

$$[e_1, e_2] = \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 = \alpha(e_1)e_1 + \alpha(e_2)e_2,$$

e o resultado segue, pois e_1, e_2 é em todo ponto uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ com respeito a g. $\square$

Lema 3.2

A curvatura escalar de g é

$$S = d\alpha(e_1, e_2). \tag{14}$$

Prova: De fato, como $\alpha \wedge \alpha = 0$, por (12),

$$d\alpha(e_1, e_2) = \langle R_{e_1 e_2} e_2, e_1 \rangle = S,$$

como desejado. $\square$

Exercício****:** Determine a curvatura escalar da métrica

$$g = dr^2 + \sin^2(r)d\theta^2.$$

Exercício****:** Determine a curvatura escalar da métrica

$$g = dr^2 + \sinh^2(r)d\theta^2.$$

Exercício****:** Determine a curvatura escalar da métrica

$$g = dt^2 + \cos^2(r)dr^2.$$

Exercício****:** Determine a curvatura escalar da métrica

$$g = dt^2 + \cosh^2(r)dr^2.$$

Exercício****:** Determine a curvatura escalar da métrica

$$g = \frac{1}{1 - \|x\|^2}\delta + \frac{\|x\|^2}{(1 - \|x\|^2)^2}dr^2.$$

Exercício****:** Seja I um subintervalo aberto de $]0, \infty[$. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ suave. Determine a curvatura escalar da superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo z.

Exercício****:** Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ suave. Determine a curvatura escalar do gráfico de f.

Finalmente, aplicando (14) no caso de uma métrica conforme, temos a seguinte relação.

Lema 3.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ suave. Denotamos $g : U \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ a métrica

$$g_{ij} := e^{2f}\delta_{ij}. \tag{15}$$

A curvatura escalar de g é

$$S = -e^{-2f}\Delta f. \tag{16}$$

Prova: Seja ∂_1, ∂_2 uma base canônica de $\mathbb{R}^2$. Denotamos $e_i := e^{-f}\partial_i$. Observamos que e_1, e_2 é um referencial de g. Como

$$[e_1, e_2] = -e^{-2f}(f_1\partial_2 - f_2\partial_1).$$

temos

$$\alpha = -f_1 dx^2 + f_2 dx^1$$

e

$$d\alpha = -\Delta f dx^1 \wedge dx^2.$$

Segue que

$$S = d\alpha(e_1, e_2) = -e^{-2f}\Delta f,$$

como desejado. □

Exercício****:** Determine a curvatura escalar da métrica

$$g_{ij} := \frac{1}{y^2}\delta_{ij}.$$

Exercício****:** Determine a curvatura escalar da métrica

$$g_{ij} := \frac{4}{(1 + \|x\|^2)^2}\delta_{ij}.$$

Exercício****:** Determine a curvatura escalar da métrica

$$g_{ij} := \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2}\delta_{ij}.$$

Exercício****:** Identificamos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$. Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{C}^*$ holomorfa. Determine a curvatura escalar da métrica

$$g_{ij} := \|f\|^2\delta_{ij}.$$

Determine todas as geodésicas de g. Determine todas as geodésicas da métrica

$$g_{ij} := e^{-y}\delta_{ij}.$$