1 - Simetrias da curvatura de Riemann. Já vimos que a curvatura de Riemann tem um papel fundamental na geometria riemanniana por ser a única obstrução à existência de uma reparametrização isométrica de uma dada métrica. Contudo, ela é um objeto complexo cujas propriedades não são aparentes à primeira vista. Por exemplo, observamos que ela possui m^4 componentes, onde m é a dimensão da variedade, o que torna a sua determinação rapidamente trabalhosa quando a dimensão cresce. Felizmente a curvatura de Riemann também possui várias simetrias que reduzem consideravelmente o número de componentes independentes que ela tem, simplificando assim o trabalho requerido para determiná-la. Estudamos essas simetrias nessa seção.

Definição 1.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos $R : \Omega \to Lin_3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ a sua curvatura de Riemann. Definimos $\tilde{R} : \Omega \to Lin_4(E, \mathbb{R})$ tal que, para todo $\xi, \nu, \mu, \lambda : \Omega \to \mathbb{R}^m$,

$$\tilde{R}(\xi, \nu, \mu, \lambda) := g(R(\xi, \mu, \nu), \lambda). \tag{1}$$

*Também chamamos $\tilde{R}$ a **curvatura de Riemann** de g.*

Observação: Observamos que os índices dessas duas formas da curvatura de Riemann são relacionados por

$$R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m. \tag{2}$$

O levantamento e a remoção de índices são operações frequentemente utilizadas na geometria riemanniana. Por isso, costumamos conceber essas operações como transformações entre faces diferentes do mesmo objeto. Veremos que, às vezes será mais conveniente utilizar a primeira forma da curvatura de Riemann, enquanto outras vezes será mais conveniente utilizar a segunda.

Lema 1.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos $R : \Omega \to Lin_4(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ a sua curvatura de Riemann. Então, para todo ξ, ν, μ, λ,

$$R(\xi, \nu, \mu, \lambda) = -R(\nu, \xi, \mu, \lambda) = -R(\xi, \nu, \lambda, \mu). \tag{3}$$

Isto é, para todo i, j, k, l,

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}. \tag{4}$$

Observação: A antissimetria de R nos primeiros dois componentes é uma consequência direta da definição da curvatura de Riemann. Veremos na prova do Lema 1.2 que a antissimetria de R nos últimos dois componentes é uma consequência direta da paralelidade da derivada covariante de Levi-Civita, no sentido em que qualquer outra derivada covariante com essa propriedade produzirá uma curvatura com a mesma antissimetria.

Prova: A primeira igualdade segue imediatemente da definição da curvatura de Riemann. Mostramos agora a segunda igualdade. Seja $x \in \Omega$. Denotamos ∇ a derivada covariante de g. Seja $e_1, ..., e_m$ um referencial de g. Podemos supor que, para todo i,

$$(\nabla e_i)(x) = 0.$$

Em particular, para todo i, j,

$$[e_i, e_j](x) = (\nabla_{e_i} e_j)(x) - (\nabla_{e_j} e_i)(x) = 0.$$

Como ∇ é paralela com respeito a g,

$$\begin{aligned}
R(e_i, e_j, e_k, e_l)(x) &= g\big(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i} e_k, e_l\big)(x) \\
&= \big(D_{e_i} g\big(\nabla_{e_j} e_k, e_l\big)\big)(x) - \big(D_{e_j} g\big(\nabla_{e_i} e_k, e_l\big)\big)(x) \\
&= \big(D_{e_i} D_{e_j} g(e_k, e_l)\big)(x) - \big(D_{e_i} g\big(e_k, \nabla_{e_j} e_l\big)(x) \\
&\qquad - \big(D_{e_j} D_{e_i} g(e_k, e_l)\big)(x) - \big(D_{e_j} g\big(e_k, \nabla_{e_i} e_l\big)(x) \\
&= \big(D_{[e_i, e_j]} g(e_k, e_l)\big)(x) - g\big(e_k, \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} e_l\big)(x) \\
&\qquad - g\big(e_k, \nabla_{e_j}\nabla_{e_i} e_l\big)(x) \\
&= -R(e_i, e_j, e_l, e_k)(x).
\end{aligned}$$

Como $e_1(x), ..., e_m(x)$ é uma base de $\mathbb{R}^m$, isso prova a segunda igualdade. □

Lema 1.3, Primeira relação de Bianchi

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos $R : \Omega \to Lin_3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ a sua curvatura de Riemann. Para todo ξ, ν, μ,

$$R(\xi, \nu, \mu) + R(\nu, \mu, \xi) + R(\mu, \xi, \nu) = 0. \tag{5}$$

Isto é, para todo i, j, k, l,

$$R_{ijk}{}^l + R_{jki}{}^l + R_{kij}{}^l = 0. \tag{6}$$

Observação: Veremos na prova do Lema 1.3 que a primeira relação de Bianchi é consequência direta da derivada covariante ser sem torsão, no sentido em que qualquer outra derivada covariante com a mesma propriedade produziria uma curvatura com essa simetria.

Prova: Seja $x \in \Omega$. Seja $\partial_1, ..., \partial_m$ uma base canônica de $\mathbb{R}^m$. Observamos que, para todo i, j, $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Denotamos ∇ a derivada covariante de Levi-Civita de g. Para todo i, j, k,

$$\begin{aligned}
&R(\partial_i, \partial_j, \partial_k) + R(\partial_j, \partial_k, \partial_i) + R(\partial_k, \partial_i, \partial_j) \\
&\quad = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k \\
&\qquad + \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_k}\partial_i - \nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i \\
&\qquad\quad + \nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_k}\partial_j \\
&\quad = \nabla_{\partial_i}[\partial_j, \partial_k] + \nabla_{\partial_j}[\partial_k, \partial_i] + \nabla_{\partial_k}[\partial_i, \partial_j] \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

como desejado. □

As relações (3) e (5) têm por corolário a seguinte simetria que merece ser enunciada separadamente.

Lema 1.4

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica sobre Ω. Denotamos $R : \Omega \to Lin_4(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ a sua curvatura de Riemann. Para todo ξ, ν, μ, λ,

$$R(\xi, \nu, \mu, \lambda) = R(\mu, \lambda, \xi, \nu). \tag{7}$$

Isto é, para todo i, j, k, l,

$$R_{ijkl} = R_{klij}. \tag{8}$$

Prova: De fato, por (5),

$$\begin{aligned} R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} &= 0, \\ R_{jkli} + R_{klji} + R_{ljki} &= 0, \\ R_{klij} + R_{likj} + R_{iklj} &= 0, \text{ e} \\ R_{lijk} + R_{ijlk} + R_{jlik} &= 0. \end{aligned}$$

Somando essas quatro relações, e aplicando (3), obtemos

$$R_{kijl} + R_{ljki} + R_{iklj} + R_{jlik} = 0.$$

Aplicando (3) novamente, temos

$$-2R_{ikjl} + 2R_{jlik} = 0,$$

e o resultado segue. □

2 - Curvaturas algébricas. Estudamos agora como as simetrias (3), (5) e (7) afetam a estrutura da curvatura de Riemann. Observamos que para fazer isso, será suficiente estudar a curvatura pontualmente.

Definição 2.1

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma **curvatura algébrica** *é uma função multilinear $\alpha \in Lin_4(E, \mathbb{R})$ tal que, para todo $\xi, \mu, \nu, \lambda \in E$,*

$$\begin{aligned} \alpha(\xi, \mu, \nu, \lambda) + \alpha(\mu, \xi, \nu, \lambda) &= 0, \\ \alpha(\xi, \mu, \nu, \lambda) + \alpha(\xi, \mu, \lambda, \nu) &= 0, \text{ e} \\ \alpha(\xi, \mu, \nu, \lambda) + \alpha(\mu, \nu, \xi, \lambda) + \alpha(\nu, \xi, \mu, \lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Denotamos $\mathcal{R}(E)$ o espaço das curvaturas algébricas de E.

Observação: Como na prova do Lema 1.4, toda curvatura algébrica também satisfaz, para todo $\xi, \mu, \nu, \lambda \in E$,

$$\alpha(\xi, \mu, \nu, \lambda) - \alpha(\nu, \lambda, \xi, \mu) = 0. \tag{10}$$

Lema 2.2

Se E é um espaço vetorial de dimensão m, então

$$Dim(\mathcal{R}(E)) = \frac{m^2(m^2-1)}{12}. \tag{11}$$

Prova: Seja X o espaço de todos os elementos α de $\mathrm{Lin}_4(E,\mathbb{R})$ que satisfazem, para todo $\xi,\nu,\mu,\lambda \in E$,

$$\alpha(\xi,\nu,\mu,\lambda) = -\alpha(\nu,\xi,\mu,\lambda) = -\alpha(\xi,\nu,\lambda,\mu).$$

Seja Y o espaço de todos os elementos α de X que satisfazem, para todo $\xi,\nu,\mu,\lambda \in E$,

$$\alpha(\xi,\nu,\mu,\lambda) = \alpha(\mu,\lambda,\xi,\nu).$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim}(Y) &= \frac{m(m-1)(m^2-m+2)}{8}\\ &= \frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{m(m-1)}{2}+1\right).\end{aligned}$$

Seja Z o espaço de todos os elementos α de $\mathrm{Lin}_4(E,\mathbb{R})$ que satisfazem, para todo $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4 \in E$ e para toda permutação σ de $\{1,2,3,4\}$,

$$\alpha(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \epsilon(\sigma)\alpha(\xi_{\sigma(1)},\xi_{\sigma(2)},\xi_{\sigma(3)},\xi_{\sigma(4)}).$$

Observamos que

$$\mathrm{Dim}(Z) = \binom{m}{4} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}.$$

Definimos $\pi : \mathrm{Lin}_4(E,\mathbb{R}) \to \mathrm{Lin}_4(E,\mathbb{R})$ tal que, para todo $\alpha \in \mathrm{Lin}_4(E,\mathbb{R})$ e para todo $\xi,\nu,\mu,\lambda \in E$,

$$\pi(\alpha)(\xi,\nu,\mu,\lambda) := \frac{1}{3}(\alpha(\xi,\nu,\mu,\lambda)+\alpha(\nu,\mu,\xi,\lambda)+\alpha(\xi,\nu,\mu,\lambda)).$$

Observamos que $\pi(Y) \subseteq Z$ e que a restrição de π a Z é a identidade. Como $\mathcal{R}(E) := \mathrm{Ker}(\pi)\cap Y$, segue pelo teorema de posto-nulidade que

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim}(\mathcal{R}(E)) &= \mathrm{Dim}(Y) - \mathrm{Dim}(Z)\\ &= \frac{m(m-1)}{24}(3(m^2-m+2)-(m-2)(m-3))\\ &= \frac{m^2(m^2-1)}{12},\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Exercício**: Sejam X, Y e Z os espaços vetoriais definidos na prova do Lema 2.2. Mostre que

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim}(X) &= \frac{m^2(m-1)^2}{4},\\ \mathrm{Dim}(Y) &= \frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{m(m-1)}{2}+1\right), \text{ e}\\ \mathrm{Dim}(Z) &= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}.\end{aligned}$$

Exercício**: Seja $\pi : \mathrm{Lin}_4(E,\mathbb{R}) \to \mathrm{Lin}_4(E,\mathbb{R})$ a aplicação linear definida na prova do Lema 2.2. Mostre que $\pi(Y) \subseteq Z$.

Exercício**: Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $a \in \mathrm{Lin}_2(E,\mathbb{R})$ simétrica e defina $b \in \mathrm{Lin}_4(E,\mathbb{R})$ por

$$b_{ijkl} := a_{il}a_{jk} - a_{ik}a_{jl}.$$

Mostre que b é uma curvatura algébrica. Supomos agora que $\mathrm{Dim}(E) = 2$. Seja $a \in \mathrm{Lin}_2(E,\mathbb{R})$ simétrica e não degenerada e seja $b \in \mathrm{Lin}_4(E,\mathbb{R})$ uma curvatura algébrica. Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_{ijkl} = \lambda(a_{il}a_{jk} - a_{ik}a_{jl}).$$

Em termos da geometria riemanniana, esse exercício mostra que, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto, se $g : \Omega \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ é uma métrica e se $R : \Omega \to \mathrm{Lin}_4(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ denota a curvatura Riemanniana de g, então existe uma única função $\kappa : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$R_{ijkl} = \kappa(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}). \tag{12}$$

Em particular, a curvatura de uma superfície é determinada por apenas uma função. A função κ é chamada **curvatura gaussiana** da superfície.

3 - A decomposição de Ricci. O estudo de curvatura é simplificado adicionalmente pela introdução de uma decomposição em componentes invariantes, conhecido como a **decomposição de Ricci**. Para o propósito desse curso, não queremos definir formalmente o significado da palavra "invariante". Consideremos invariantes os componentes cujos valores em duas parametrizações diferentes são relacionadas por alguma operação de pull-back. Nesse sentido, por exemplo, o componente $R_{1234} = R(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4)$ não é invariante, pois o seu valor em uma carta em geral depende de muito mais do que apenas seu valor em uma outra carta. Quando nos restringimos às operações de pull-back que agem linearmente e que dependem de maneira multilinear da derivada da reparametrização, a teoria de representações nos informa que as curvaturas algébricas se decompõem em três componentes invariantes. Nessa seção, estudamos esses componentes.

Definição 3.1

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $g \in Lin_2(E,\mathbb{R})$ uma forma bilinear, simétrica e não degenerada. Seja $R \in Lin_4(E,\mathbb{R})$ uma curvatura algébrica. Definimos $Ric \in Lin_2(E,\mathbb{R})$ e

$S \in \mathbb{R}$ por

$$Ric_{ik} := \frac{1}{(m-1)} g^{jl} R_{ijkl}, \text{ e}$$
$$S := \frac{1}{m} g^{ik} Ric_{ik}.$$

Chamamos Ric e S o **componente de Ricci** *e o* **componente escalar** *de R, respectivamente, ambas com respeito a g.*

Definição 3.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos R a sua curvatura de Riemann. Denotamos $Ric : \Omega \to Lin_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e $S : \Omega \to \mathbb{R}$ o componente de Ricci e o componente escalar de R, respectivamente. Chamamos Ric e S a **curvatura de Ricci** *e a* **curvatura escalar** *de g, respectivamente.*

Exercício**: Mostre que a curvatura de Ricci satisfaz a regra de pull-back para tensores de tipo $(0, 2)$. Isto é, se $U, V \to \mathbb{R}^m$ são abertos, se $g : U \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e $g' : V \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ são métricas, se $\mathrm{Ric} : U \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e $\mathrm{Ric}' : V \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ denotam as suas respectivas curvaturas de Ricci, e se $\Phi : U \to V$ é um difeomorfismo tal que $\Phi^* g' = g$, então

$$\Phi^* \mathrm{Ric}' = \mathrm{Ric}.$$

Exercício**: Mostre que a curvatura escalar satisfaz a regra de pull-back para funções. Isto é, se $U, V \to \mathbb{R}^m$ são abertos, se $g : U \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e $g' : V \to \mathrm{Lin}_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ são métricas, se $\mathrm{S} : U \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{S}' : V \to \mathbb{R}$ denotam as suas respectivas curvaturas escalares, e se $\Phi : U \to V$ é um difeomorfismo tal que $\Phi^* g' = g$, então

$$\Phi^* \mathrm{S}' = \mathrm{S}.$$

Exercício**: Mostre que a curvatura de Ricci e a curvatura escalar da esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$ são iguais a g_{ij} e 1 respetivamente, onde g_{ij} aqui denota a métrica.

Em particular, esse exercício justifica a normalização escolhida nas Definições 3.1 e 3.2.

Para entender o terceiro componente invariante da curvatura, precisamos introduzir o seguinte conceito algébrico.

Definição 3.3

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Definimos o **produto de Kulkarni-Nomizu** $\odot$ *: $Lin_2(E, \mathbb{R}) \oplus Lin_2(E, \mathbb{R}) \to Lin_4(E, \mathbb{R})$ tal que, para toda $a, b \in Lin_2(E, \mathbb{R})$ e para todo $\xi, \nu, \mu, \lambda \in E$,*

$$\begin{aligned}(a \odot b)(\xi, \nu, \mu, \lambda) := \frac{1}{2}\Big(& a(\xi, \mu) b(\nu, \lambda) - a(\xi, \lambda) b(\nu, \mu) \\ & + b(\xi, \mu) a(\nu, \lambda) - b(\xi, \lambda) a(\nu, \mu) \Big).\end{aligned} \tag{13}$$

Isto é, para todo i, j, k, l,

$$(a \odot b)_{ijkl} := \frac{1}{2}\big(a_{il}b_{jk} - a_{ik}b_{jl} + b_{il}a_{jk} - b_{ik}a_{jl}\big). \tag{14}$$

Observação: Para todo $a, b \in \mathrm{Lin}_2(E, \mathbb{R})$,

$$a \odot b = b \odot a.$$

Isto é, o produto de Kulkarni-Nomizu é comutativo.

Exercício**: Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Mostre que, para quaisquer $a, b \in \mathrm{Lin}_2(E, \mathbb{R})$ e para todo $\xi, \nu, \mu, \lambda \in E$,

$$(a \odot b)(\xi, \nu, \mu, \lambda) = -(a \odot b)(\nu, \xi, \mu, \lambda) = -(a \odot b)(\xi, \nu, \lambda, \mu) = (a \odot b)(\mu, \lambda, \xi, \nu).$$

Exercício**: Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Mostre que, para quaisquer $a, b \in \mathrm{Lin}_2(E, \mathbb{R})$ simétricas e para todo $\xi, \nu, \mu, \lambda \in E$,

$$(a \odot b)(\xi, \nu, \mu, \lambda) + (a \odot b)(\nu, \mu, \xi, \lambda) + (a \odot b)(\mu, \xi, \nu, \lambda) = 0.$$

Esses exercícios mostram que se $a, b \in \mathrm{Lin}_2(E, \mathbb{R})$ são simétricas, então $a \odot b$ é uma curvatura algébrica.

Exercício**: Seja E um espaço vetorial de dimensão ao menos 3. Sejam $a \in \mathrm{Lin}_2(E, \mathbb{R})$ simétrica e não degenerada. Mostre que, para todo $b \in \mathrm{Lin}_2(\mathbb{R})$ e para todo i, k,

$$a^{jl}(a \odot b)_{ijkl} = \frac{1}{2}(a^{jl}b_{jl})a_{ik} + \frac{(2-m)}{2}b_{ik}. \tag{15}$$

Chamamos $(a^{ij}b_{ij})$ o **traço** de b com respeito a a. Segue que, se $\mathrm{Dim}(E) \geq 3$ e se o traço de b com respeito a a é igual a 0, então

$$b_{ik} = \frac{-2}{(m-2)}a^{jl}(a \odot b)_{ijkl}. \tag{16}$$

Definição 3.4

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $g \in Lin_2(E, \mathbb{R})$ uma forma bilinear, simétrica e não degenerada. Seja $R \in Lin_4(E, \mathbb{R})$ uma curvatura algébrica sobre E. Denotamos $Ric \in Lin_2(E, \mathbb{R})$ e $S \in \mathbb{R}$ o componente de Ricci e o componente scalar de R respectivamente. Definimos $Ric^0 \in Lin_2(E, \mathbb{R})$ por

$$Ric^0 := Ric - \frac{1}{m}(g^{ik}Ric_{ik})g = Ric - Sg, \tag{17}$$

onde m é a dimensão de E. Chamamos Ric^0 o **componente de Ricci sem traço** *de R.*

Definição 3.5

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica sobre Ω. Denotamos $R : \Omega \to Lin_4(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ a sua curvatura de Riemann. Denotamos $Ric^0 : \Omega \to Lin_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ o componente de Ricci sem traço de R. Chamamos Ric^0 a **curvatura de Ricci sem traço** *de g.*

Exercício**: Mostre que a curvatura de Ricci sem traço satisfaz a regra de pull-back para tensores de tipo $(0, 2)$.

Definição 3.6

Seja E um espaço vetorial de dimensão ao menos 3. Seja $g \in Lin_2(E, \mathbb{R})$ uma forma bilinear, simétrica e não degenerada. Seja $R \in Lin_4(E, \mathbb{R})$ uma curvatura algébrica. Denotamos Ric^0 e S o seu componente de Ricci sem traço e o seu componente escalar, respectivamente. Definimos $W \in Lin_4(E, \mathbb{R})$ por

$$W := R + \frac{2(m-1)}{(m-2)} g \odot Ric^0 - S(g \odot g). \tag{18}$$

Quando $Dim(E) \leq 2$, definimos por convenção

$$W := 0. \tag{19}$$

Chamamos W o **componente de Weyl** *de R (com respeito a g).*

Definição 3.7

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica sobre Ω. Denotamos $R : \Omega \to Lin_4(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ a sua curvatura de Riemann. Denotamos $W : \Omega \to Lin_4(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ o componente de Weyl de R. Chamamos W a **curvatura de Weyl** *de g.*

Observação: Em particular,

$$R = W - \frac{2(m-1)}{(m-2)} g \odot \mathrm{Ric}^0 + (m-1)S(g \odot g). \tag{20}$$

Exercício**: Seja E um espaço vetorial de dimensão 2. Seja $a \in \mathrm{Lin}_4(E, \mathbb{R})$ uma curvatura algébrica. Mostre que o componente de Ricci sem traço de a é igual a zero.

Exercício**: Mostre que a curvatura de Weyl satisfaz a regra de pull-back para tensores de tipo $(0, 4)$.

Exercício**: Seja E um espaço vetorial de dimensão ao menos 3 sobre $\mathbb{R}$. Seja $g \in \mathrm{Lin}_2(E, \mathbb{R})$ uma função bilinear, simétrica e não degenerada. Definimos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $\mathrm{Lin}_4(E, \mathbb{R})$ por

$$\langle a, b \rangle := g^{ip} g^{jq} g^{kr} g^{ls} a_{ijkl} b_{pqrs}. \tag{21}$$

Seja $R \in \text{Lin}_4(E, \mathbb{R})$ uma curvatura algébrica. Denotamos W, Ric^0 e S o seu componente de Weyl, o seu componente de Ricci sem traço e o seu componente escalar, respectivamente, todos com respeito a g. Mostre que

$$\begin{aligned} \langle W, g \odot \text{Ric}^0 \rangle &= 0, \\ \langle W, g \odot g \rangle &= 0, \text{ e} \\ \langle g \odot \text{Ric}^0, g \odot g \rangle &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Concluímos que a decomposição da curvatura de Riemann no seu componente de Weyl, o seu componente de Ricci sem traço, e o seu componente escalar é uma decomposição ortogonal e invariante por reparametrização. Chamamos essa decomposição a **decomposição de Ricci**.

A decomposição de Ricci revela fenômenos novos, próprios da geometria riemanniana, que não existem na geometria euclideana. Para ver isso, estudamos as decomposições de Ricci de curvaturas algébricas sobre espaços vetoriais de baixa dimensão. Seja então E um espaço vectorial. Quando $\text{Dim}(E) = 1$, $\text{Dim}(\mathcal{R}(E)) = 0$, e toda curvatura algébrica é trivial. Em termos geométricos, isso reflete o fato que todo métrica riemanniana unidimensional possui uma parametrização por comprimento de arco. Quando $\text{Dim}(E) = 2$, $\text{Dim}(\mathcal{R}(E)) = 1$ e toda curvatura algébrica R satisfaz

$$R_{ijkl} := S(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

onde S é o seu componente scalar. Em particular, o componente de Ricci sem traço e o componente de Weyl são ambos iguais a zero. Em termos geométricos, isso reflete o fato, mostrado originalmente por Gauss, que a curvatura de uma superfície é determinada por apenas uma função. Quando $\text{Dim}(E) = 3$, $\text{Dim}(\mathcal{R}(E)) = 6$. Verificamos que, nesse caso, o componente de Weyl é igual a zero e a curvatura algébrica é determinada completamente pelo seu componente de Ricci. Quando $\text{Dim}(E) \geq 4$, todos os componentes de uma curvatura algébrica podem ser diferentes de zero. Esses fatos são resumidos na Tabela 3.1.

$\text{Dim}(E)$	$\text{Dim}(\mathcal{R}(E))$	W	Ric^0	S
1	0	Não	Não	Não
2	1	Não	Não	Sim
3	6	Não	Sim	Sim
4	$*$	Sim	Sim	Sim

Table 3.1 - Componentes invariantes da curvatura.

O fato da curvatura de Weyl não existir em dimensão menor ou igual a 3 tem uma consequência geométrica interessante. Para ver isso, introduzimos o seguinte novo conceito.

Definição 3.8

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Lin_{2,+}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica sobre Ω. Dizemos que g é **localmente conformemente plana** *em torno de um ponto x_0 de Ω quando existem uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}^m$, um vizinhança V de x_0 em Ω, um difeomorfismo $\Phi : U \to V$ e uma função $f : U \to \mathbb{R}$ tal que*

$$(\Phi^* g)_{ij} = e^{2f} \delta_{ij}.$$

Acontece que, em 4 e mais dimensões, a curvatura de Weyl é a única obstrução à métrica ser localmente conformemente plana. Isto é, uma métrica é localmente conformemente plana numa vizinhança de um ponto de Ω se e somente se a sua curvatura de Weyl é igual a zero numa vizinhança desse ponto. Em 3 dimensões, a situação é diferente, e a obstrução à métrica ser localmente conformemente plana á o **tensor de Cotton**, que depende da derivada covariante da curvatura. Finalmente, em 2 dimensões, toda métrica é localmente conformemente plana. em resumo, as propriedades localmente conformes da métrica dependem também da dimensão do espaço ambiente.