1 - Curvatura.

Definição 1.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja g uma métrica sobre Ω. Para todo $x \in \Omega$, dizemos que g é **localmente plana** *em torno de x quando existem uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}^m$, uma vizinhança V de x em Ω e um difeomorfismo $\Phi : U \to V$ tais que $\Phi^* g = \delta$.*

Nesse seção determinamos condições necessárias e suficientes para uma métrica ser localmente plana em torno de um ponto.

Definição 1.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja g uma métrica sobre Ω. Denotamos ∇ sua derivada covariante de Levi-Civita. Definimos $R : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)^3 \to C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ por

$$R(\xi, \nu, \mu) := \nabla_\xi \nabla_\nu \mu - \nabla_\nu \nabla_\xi \mu - \nabla_{[\xi,\nu]} \mu. \tag{1}$$

Chamamos R a **curvatura de Riemann** *de g.*

Lemma 1.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja g uma métrica. Denotamos R sua curvatura de Riemann. Para todo $\xi, \nu, \mu \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e para todo $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$,

$$R(f\xi, \nu, \mu) = R(\xi, f\nu, \mu) = R(\xi, \nu, f\mu) = fR(\xi, \nu, \mu).$$

Observação: Isto é, R é trilinear com respeito ao álgebra $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Prova: De fato

$$\begin{aligned}
R(f\xi, \nu, \mu) &= \nabla_{f\xi} \nabla_\nu \mu - \nabla_\nu \nabla_{f\xi} \mu - \nabla_{[f\xi,\nu]} \mu \\
&= f\nabla_\xi \nabla_\nu \mu - \nabla_\nu (f\nabla_\xi \mu) - \nabla_{f[\xi,\nu]-(D_\nu f)\xi} \mu \\
&= f\nabla_\xi \nabla_\nu \mu - f\nabla_\nu \nabla_\xi \mu - (D_\nu f)\nabla_\xi \mu \\
&\qquad - f\nabla_{[\xi,\nu]} \mu + (D_\nu f)\nabla_\xi \mu \\
&= f(\nabla_\xi \nabla_\nu \mu - \nabla_\nu \nabla_\xi \mu - \nabla_{[\xi,\nu]} \mu) \\
&= fR(\xi, \nu, \mu),
\end{aligned}$$

como desejado. Por antissimétria,

$$R(\xi, f\nu, \mu) = -R(f\nu, \xi, \mu) = -fR(\nu, \xi, \mu) = fR(\xi, \nu, \mu).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
R(\xi, \nu, f\nu) &= \nabla_\xi \nabla_\nu (f\mu) - \nabla_\nu \nabla_\xi (f\mu) - \nabla_{[\xi,\nu]} f\mu \\
&= \nabla_\xi ((D_\nu f)\mu + f\nabla_\nu \mu) - \nabla_\nu ((D_\xi f)\mu + f\nabla_\xi \mu) \\
&\qquad - (D_{[\xi,\nu]} f)\mu - f\nabla_{[\xi,\nu]} f \\
&= (D_\xi D_\nu f)\mu + (D_\nu f)\nabla_\xi \mu + (D_\xi f)\nabla_\nu \mu + f\nabla_\xi \nabla_\nu \mu \\
&\qquad - (D_\nu D_\xi f)\mu - (D_\xi f)\nabla_\nu \mu - (D_\nu f)\nabla_\xi \mu - f\nabla_\nu \nabla_\xi \mu \\
&\qquad\quad - (D_{[\xi,\nu]} f)\mu - f\nabla_{[\xi,\nu]} \mu \\
&= f(\nabla_\xi \nabla_\nu \mu - \nabla_\nu \nabla_\xi \mu - \nabla_{[\xi,\nu]} \mu) \\
&= fR(\xi, \nu, \mu),
\end{aligned}$$

o que completa a prova. $\square$

Lemma e Definição 1.4

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberta. Seja g uma métrica. Denotamos R sua curvatura de Riemann. Existe uma função única $\tilde{R} : \Omega \to Lin_3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ tal que, para todo $\xi, \nu, \mu \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e para todo $x \in \Omega$,

$$\tilde{R}(x)(\xi(x), \nu(x), \mu(x)) := R(\xi, \nu, \mu)(x). \tag{2}$$

Também chamamos $\tilde{R}$ a **curvatura de Riemann** *de g.*

Prova: Seja $\partial_1, ..., \partial_m$ uma base canônica de $\mathbb{R}^m$. Denotamos

$$\tilde{R}^l_{ijk}(x)\partial_l := R(\partial_i, \partial_j, \partial_k)(x).$$

Denotamos $\xi := \xi^i \partial_i$, $\nu := \nu^i \partial_i$ e $\mu := \mu^i \partial_i$. Então

$$\begin{aligned} R(\xi, \nu, \mu)(x) &= R(\xi^i \partial_i, \nu^j \partial_j, \mu^k \partial_k)(x) \\ &= \xi^i(x)\nu^j(x)\mu^k(x) R(\partial_i, \partial_j, \partial_k)(x) \\ &= \tilde{R}^l_{ijk}(x)\xi^i(x)\nu^j(x)\mu^k(x)\partial_l \\ &= \tilde{R}(x)(\xi(x), \nu(x), \mu(x)), \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to \mathrm{Lin}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica sobre Ω. Denotamos R a sua curvatura. Mostre que

$$R^l_{ijk} = \Gamma^l_{jk,i} - \Gamma^l_{ik,j} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}. \tag{3}$$

Definição 1.5

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Um **tensor de tipo** $(1, 3)$ *é uma função $\sigma : \Omega \to Lin_3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.*

Existem então sua maneiras diferentes de conceber a curvatura de Riemann. Na primeira, a concebemos como um funcional que "come" três campos de vetores e "cuspe" um campo de vetores. Na segunda, a concebemos como uma função de Ω em $\mathrm{Lin}_3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. O Lema mostre que essas duas concepções são equivalentes. A segunda tem a vantagem de apresentar a curvatura como um objeto matemático bem concreto com uma fórmula explicita relativamente simples enquanto a primeira permite mostrar facilmente a invariância desse objeto.

Definição 1.6

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja $\sigma : V \to Lin_3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ um tensor de tipo $(1, 3)$. Seja $\Phi : U \to V$ um difeomorfismo. O **pull-back** *de σ por Φ é o tensor de tipo $(1, 3)$ $(\Phi^*\sigma) : U \to Lin_3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ definido por*

$$(\Phi^*\sigma)(x)(\xi, \nu, \mu) := D\Phi(x)^{-1}\sigma(y)(D\Phi(x)\xi, D\Phi(x)\nu, D\Phi(x)\mu), \tag{4}$$

onde $y := \Phi(x)$.

Exercício*: Verifique que a operação de pull-back para tensores de tipo $(1, 3)$ é um functor contravariante.

Lema 1.7

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $g : U \to Lin_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e $h : V \to Lin_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ métricas. Denotamos $R^g : U \to Lin_3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ e $R^h : V \to Lin_3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ as suas respectivas curvaturas de Riemann. Seja $\Phi : U \to V$ um difeomorfismo. Se $g = \Phi^* h$, então

$$R^g = \Phi^* R^h,$$

onde Φ^* denota aqui o pull-back para tensores de tipo $(1, 3)$.

Prova: Denotamos ∇^g e ∇^h as respectivas derivadas covariantes de Levi-Civita de g e h. Sejam $\xi, \nu, \mu : U \to \mathbb{R}^m$ campos de vectores. Então

$$\begin{aligned}
R^g(\xi, \nu, \mu) &= \nabla^g_\xi \nabla^g_\nu \mu - \nabla^g_\nu \nabla^g_\xi \mu - \nabla^g_{[\xi,\nu]} \mu \\
&= (\Phi^* \nabla^h)_\xi (\Phi^* \nabla^h)_\nu \mu - (\Phi^* \nabla^h)_\nu (\Phi^* \nabla^h)_\xi \mu - (\Phi^* \nabla^h)_{[\xi,\nu]} \mu \\
&= (\Phi^* \nabla^h)_\xi \Phi^* \big(\nabla^h_{(\Phi_* \nu)} (\Phi_* \mu)\big) - (\Phi^* \nabla^h)_\nu \Phi^* \big(\nabla^h_{(\Phi_* \xi)} (\Phi_* \mu)\big) \\
&\quad - \Phi^* \big(\nabla^h_{(\Phi_* [\xi,\nu])} (\Phi_* \mu)\big) \\
&= \Phi^* \big(\nabla^h_{(\Phi_* \xi)} \nabla^h_{(\Phi_* \nu)} (\Phi_* \mu)\big) - \Phi^* \big(\nabla^h_{(\Phi_* \nu)} \nabla^h_{(\Phi_* \xi)} (\Phi_* \mu)\big) \\
&\quad - \Phi^* \big(\nabla^h_{[(\Phi_* \xi),(\Phi_* \nu)]} (\Phi_* \mu)\big) \\
&= \Phi^* \big(R^h(\Phi_* \xi, \Phi_* \nu, \Phi_* \nu)\big),
\end{aligned}$$

e o resultado segue. $\square$

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ um aberto radial. Seja $g : \Omega \to \mathrm{Lin}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica geodésica sobre Ω. Denotamos R a sua curvatura de Riemann. Mostre que, na origem

$$R_{ijkl} := g_{lm} R^m_{ijk} = \frac{1}{2}\big(g_{ik,jl} - g_{il,jk} - g_{jk,il} + g_{jl,ik}\big).$$

Vemos, em particular, que quando $g_{ij,kl}$ é igual a zero na origem, R_{ijkl} também é igual a zero nesse ponto. Consequentemente, se $R_{ijkl}(x) \neq 0$, não existe nenhuma reparametrização isométrica de g em torno de esse ponto.

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ suave. Denotamos

$$g := e^{2f} \delta_{ij}.$$

Mostre que a curvatura dessa métrica satisfaz

$$\begin{aligned}
e^{2f} g(R(\partial_i, \partial_j, \partial_k), \partial_k) = (&f_{,i} f_{,l} \delta_{jk} - f_{,i} f_{,k} \delta_{jl} - f_{,j} f_{,l} \delta_{ik} + f_{,j} f_{,k} \delta_{il}) \\
&+ (f_{,ik} \delta_{jl} - f_{,il} \delta_{jk} - f_{,jk} \delta_{il} + f_{,jl} \delta_{ik}) \\
&- (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{jl} \delta_{ik}) \|\nabla f\|^2.
\end{aligned}$$

Em particular, mostre que, quando $m = 2$,

$$g(R(\partial_i, \partial_j, \partial_k), \partial_l) = -e^{2f} \Delta f (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}).$$

Exercício****:** Seja $\Omega := \{(x_1, ..., x_m) \mid x_m > 0\}$. Seja g a métrica sobre Ω definida por

$$g_{ij} := \frac{1}{x_m^2}\delta_{ij}.$$

Mostre que a curvatura de g é

$$R(\xi, \nu, \mu) = g(\xi, \mu)\nu - g(\nu, \mu)\xi.$$

Exercício****:** Seja $\Omega := B_1(0)$ a bola unitária em $\mathbb{R}^m$. Determine a curvatura da métrica

$$g_{ij} := \frac{4}{(1 - \|x\|^2)}\delta_{ij}.$$

Exercício****:** Seja $\mathbb{S}^m$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$. Para todo $r > 0$, denotamos $V_m(r)$ o volume da bola de raio r em torno de um ponto de $\mathbb{S}^m$. Determine o limite

$$\operatorname*{Lim}_{r\to 0} \frac{V_m(r)}{r^m}.$$

Mostre que $\mathbb{S}^m$ não é plano perto de nenhum dos seus pontos.

Exercício****:** Seja g a métrica sobre $\mathbb{R}^m$ definida em coordenadas polares por

$$g := dr^2 + \sinh^2(r)d\Theta^2,$$

onde $d\Theta^2$ é a métrica canônica da esfera unitária $\mathbb{S}^m$. Para todo $r > 0$, denotamos $V_m(r)$ o volume da bola de raio r em torno da origem com respeito a essa metrica. Determine o limite

$$\operatorname*{Lim}_{r\to 0} \frac{V_m(r)}{r^m}.$$

Mostre que g não é plana em nenhuma vizinhança da origem.

2 - Métricas planas. Nessa seção mostraremos que a curvatura de Riemann é a única obstrução para uma métrica ser plana. Vamos precisar primeiro de dois teoremas sobre a integrabilidade simultânea de familias de campos de vetores.

Teorema 2.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Sejam $\xi_1, ..., \xi_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores. Si $[\xi_i, \xi_j] = 0$ para todo i, j, então, para todo $y_0 \in \Omega$, existem uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}^m$ e uma aplicação suave $\Phi : U \to \Omega$ tal que $\Phi(0) = y_0$ e, para todo i,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \xi_i \circ \Phi.$$

Exercício****:** Verifique que a condição do Teorema 2.1 é necessária.

Exercício****:** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to \mathrm{Lin}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica sobre Ω. Seja $x_0 \in \Omega$. Mostre que se g é localmente plana em torno de x_0, então existem uma vizinhança U de x_0 em Ω e uma referencial $E_1, ..., E_m : U \to \mathbb{R}^m$ de g em U tal que, para todo i, j,

$$[E_i, E_j] = 0.$$

Mostre também a reciproca. Isto é, se existe uma referencial de g com essas propriedades, então g é localmente plana em torno de x_0.

O segundo teorema que precisamos é essencialmente um corolário do Teorema 2.1 aplicado ao contexto de campos de vetores tangentes ao grupo $\mathrm{O}(m)$ de matrizes ortogonais. Lembramos primeiro que $\mathrm{O}(m)$ é uma subvariedade de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^m)$ cuja fibra tangente em Id é o espaço $\mathfrak{o}(m)$ de matrizes antisimétricas. Lembramos também que, para todo $M \in \mathrm{O}(m)$, o espaço tangente a $\mathrm{O}(m)$ em M é o conjunto de todas as matrizes da forma MA, onde $A \in \mathfrak{o}(m)$. Consequentemente, se $M : \Omega \to \mathrm{O}(m)$ é uma função suave, então, para todo i e para todo $x \in \Omega$,

$$M(x)^{-1}\big(D_{\partial_i} M\big)(x) \in \mathfrak{o}(m).$$

Teorema 2.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e simplesmente conexo. Seja $A : \Omega \to Lin(\mathbb{R}^m, \mathfrak{o}(m))$ suave. Existe uma função suave $M : \Omega \to O(m)$ tal que, para todo i,

$$M^{-1}(\partial_i M) = A(\partial_i) \tag{5}$$

se e somente se, para todo i, j,

$$\partial_j A(\partial_i) - \partial_i A(\partial_j) - [A(\partial_i), A(\partial_j)] = 0. \tag{6}$$

Além do mais, se $M, M' \to O(m)$ são soluções de (5)*, então $M'M^{-1}$ é constante.*

Exercício****:** Mostre a necessidade no Teorema 2.2. Isto é, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ é aberto, se $M : \Omega \to \mathrm{O}(m)$ é sauve, e se $A : \Omega \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{o}(m))$ é definida por (5), então A satisfaz (6).

Exercício****:** Mostre a unicidade no Teorema 2.2. Isto é, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ é aberto e se $M, M' : \Omega \to \mathrm{O}(m)$ satisfazem

$$M^{-1}(\partial_i M) = (M')^{-1}(\partial_i M'),$$

então $M'M^{-1}$ é constante.

Agora temos todos os ingredientes necessários para mostrar que a curvatura de Riemann é a única obstrução à métrica ser localmente plana.

Teorema 2.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja g uma métria sobre Ω. Denotamos R^g a sua curvatura. Se $R^g = 0$, então para todo $y \in \Omega$, existe uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}^m$, uma vizinhança V de y em Ω e um difeomorfismo $\Phi : U \to V$ tal que

$$\Phi^* g = \delta.$$

Isto é g é localmente plana em torno de todo ponto de Ω.

Prova: Supomos primeiro que existe uma referencial $E_1, ..., E_m : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de g tal que $[E_i, E_j] = 0$ para todo i, j. Pelo Teorema 2.1, existem uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}^m$, uma vizinhança V de y em Ω, e um difeomorfismo $\Phi : U \to V$ tal que, para todo i,

$$\Phi^* E_i = \partial_i.$$

Em particular, para todo i, j,

$$(\Phi^* g)(\partial_i, \partial_j) = \Phi^*(g(\Phi_* \partial_i, \Phi_* \partial_j)) = \Phi^*(g(\tilde{E}_i, \tilde{E}_j)) = \delta_{ij},$$

e segue que g é localmente plana em torno de g, como desejado.

Construimos agora uma referencial de g com essa propriedade. Seja $E_1, ..., E_m : \Omega \to \mathbb{R}^m$ uma referencial qualquera da métrica g. Definimos $A_{ij} : \Omega \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ por

$$A_{ij}(\xi) := g(\nabla_\xi E_i, E_j).$$

Afirmamos que A_{ij} define uma função $A : \Omega \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{o}(m))$. De fato, como ∇ é parallela, para todo ξ, e para todo i, j,

$$A_{ij}(\xi) + A_{ji}(\xi) = g(\nabla_\xi E_i, E_j) + g(E_i, \nabla_\xi E_j) = D_\xi g(E_i, E_j) = D_\xi \delta_{ij} = 0,$$

e segue que $A(\xi)$ é antisimétrica, como desejado. Agora, para todo i, j, p, q, temos

$$\begin{aligned}
D_{\partial_j} A_{pq}(\partial_i) &- D_{\partial_i} A_{pq}(\partial_j) + [A(\partial_i), A(\partial_j)]_{pq} \\
&= D_{\partial_j}\big(g(\nabla_{\partial_i} E_p, E_q)\big) - D_{\partial_i}\big(g(\nabla_{\partial_j} E_p, E_q)\big) \\
&\qquad + g\big(\nabla_{\partial_i} E_p, E_r\big) g\big(\nabla_{\partial_j} E_r, E_q\big) - g\big(\nabla_{\partial_j} E_p, E_r\big) g\big(\nabla_{\partial_i} E_r, E_q\big) \\
&= g\big(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} E_p, E_q\big) + g\big(\nabla_{\partial_i} E_p, \nabla_{\partial_j} E_q\big) \\
&\qquad - g\big(\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} E_p, E_q\big) - g\big(\nabla_{\partial_i} E_p, \nabla_{\partial_j} E_q\big) \\
&\qquad - g\big(\nabla_{\partial_i} E_p, E_r\big) g\big(\nabla_{\partial_j} E_q, E_r\big) + g\big(\nabla_{\partial_j} E_p, E_r\big) g\big(\nabla_{\partial_i} E_q, E_r\big) \\
&= -g(R(\partial_i, \partial_j, E_p), E_q) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como Ω é simplesmente conexa, segue pelo Teorema 2.2 que existe uma única função $M : \Omega \to \mathrm{O}(m)$ tal que $M(y) = \mathrm{Id}$ e que, para todo i,

$$(M^{-1})_{pr}\big(D_{\partial_i} M_{rq}\big) = -A_{pq}(\partial_i) = -g\big(\nabla_{\partial_i} E_p, E_q\big).$$

Em particular,

$$\begin{aligned} g\big(\nabla_{\partial_i} M_{pr} E_r, E_q\big) &= g\big(\big(D_{\partial_i} M_{pr}\big) E_r + M_{pr}\big(\nabla_{\partial_i} E_r\big), E_q\big) \\ &= \big(D_{\partial_i} M_{pq}\big) + M_{pr} g\big(\nabla_{\partial_i} E_r, E_q\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definimos então, para cada i, $\tilde{E}_i := M_{ij} E_j$. Como $E_1, ..., E_m$ é uma referencial de g e como $\partial_1, ..., \partial_m$ é uma base de $\mathbb{R}^m$, para todo i,

$$\nabla \tilde{E}_j = 0.$$

Em particular, para todo i, j,

$$[\tilde{E}_i, \tilde{E}_j] = \nabla_{\tilde{E}_i} \tilde{E}_j - \nabla_{\tilde{E}_j} \tilde{E}_i = 0,$$

o que completa a prova. □