1 - Subvariedades completas. Estudamos variedades riemannianas mediante cartas. Aprendemos rapidamente que a complexidade dos problemas que nos interessam pode depender da carta escolhida. Por isso, a existência ou não de cartas com certas propriedades geométricas se tornou um problema central da geometria riemanniana. Esse questionamento novo é proprio à geometria riemanniana, pois na geometria euclideana existe apenas uma carta, que tem todas as propriedades geométricas que podemos desejar. Nesse curso, nos interessa a seguinte propriedade das cartas.

Definição 1.1

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja (U, V, Φ) uma carta de X. Seja g a métrica de Ψ. Dizemos que (U, V, Φ) é **isométrica** *quando $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ para todo $x \in V$. Dizemos que (U, V, Φ) é* **conforme** *quando $g_{ij}(x) = e^{2f(x)}\delta_{ij}$ para todo $x \in V$, onde $f : V \to \mathbb{R}$ é uma função suave.*

Observação: Toda carta isométrica é trivialmente conforme.

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja $x \in X$. Seja (U, V, Φ) uma carta de X em torno de x. Supomos que (U, V, Φ) é isométrica e que $\Phi(x) = 0$. Em particular, as retas radiais são geodésicas com velocidade constante, o que implica que (U, V, Φ) é de fato uma carta geodésica de X em torno de x. Como a carta geodésica em torno de um dado ponto é única, quando ela não é isométrica, sabemos que não pode haver nenhuma carta isométrica de X em torno de x. Obtemos dessa maneira o seguinte critério simples para a não-existência de cartas isométricas.

Lema 1.2

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja $x \in X$. Seja (U, V, Φ) uma carta geodésica em torno de x com métrica g. Se

$$g_{ij,pq}(0) \neq 0, \tag{1}$$

então X não possui carta isométrica em torno de x.

Surprendentemente, essa condição é a *única* obstrução à existência de cartas isométricas. Isto é, se a segunda derivada na origem da métrica da carta geodésica de X em y é zero para todo ponto y de uma vizinhança Ω de x, então X possui uma carta isométrica em torno deste ponto. Por esse motivo, chamamos $g_{ij,pq}(0)$ a **curvatura** de X em x, pois mede a obstrução a X ser plana. A prova dessa afirmação será o objetivo principal dessa parte do curso.

2 - Derivadas covariantes. Para melhor entender a curvatura do ponto de vista moderno, será conveniente estudar primeiro conceitos de derivação em subvariedades.

Definição 2.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Uma **derivada covariante** *sobre Ω é uma função bilinear $\nabla : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \oplus C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \to C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ que satisfaz, para todo $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e para todo $\xi, \nu \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$,*

(1) $\nabla_{f\xi}\nu = f\nabla_\xi \nu$, e

(2) $\nabla_\xi(f\nu) = (D_\xi f)\nu + f\nabla_\xi\nu$.

Observação: Dizemos que ∇ é $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$-linear na primeira variável e uma derivação na segunda.

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ∇ uma derivada covariante sobre Ω. Sejam $\xi,\nu : \Omega \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores sobre Ω. Mostre que, para todo $x \in \Omega$, se ξ e ν são iguais a zero em uma vizinhança de x, então $(\nabla_\xi\nu)(x) = 0$.

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ∇ uma derivada covariante sobre Ω. Sejam $\xi,\nu : \Omega \to \mathbb{R}^m$ campos de vetores sobre Ω. Mostre que, se $\xi(x) = 0$, então $(\nabla_\xi\nu)(x) = 0$ e que, se $\nu(x) = 0$ e $D\nu(x) = 0$, então $(\nabla_\xi\nu)(x) = 0$. Em outros termos, se $\xi,\nu,\xi',\nu' : \Omega \to \mathbb{R}^m$ são campos de vetores tais que $\xi(x) = \xi'(x)$, $\nu(x) = \nu'(x)$ e $D\nu(x) = D\nu'(x)$, então $(\nabla_\xi\nu)(x) = (\nabla_{\xi'}\nu')(x)$.

Lema 2.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ∇ uma derivada covariante sobre Ω. Existe uma única função $\Gamma : \Omega \to \mathit{Bilin}(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ tal que, para todo $\xi,\nu \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$,

$$(\nabla_\xi\nu)(x) = (D_\xi\nu)(x) + \Gamma(x)(\xi(x),\nu(x)). \tag{2}$$

Chamamos Γ o **símbolo de Christoffel** *de ∇.*

Prova: Definimos Γ^k_{ij} tal que, para todo $x \in \Omega$, e para todo i e j,

$$\Gamma^k_{ij}(x)\partial_k = (\nabla_{\partial_i}\partial_j)(x).$$

Então,

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi\nu)(x) &= (\nabla_{\xi^i\partial_i}\nu^j\partial_j)(x)\\ &= \xi^i(x)(\nabla_{\partial_i}\nu^j\partial_j)(x)\\ &= \xi^i(x)(D_{\partial_i}\nu^j)(x)\partial_j + \xi^i(x)\nu^j(x)(\nabla_{\partial_i}\partial_j)(x)\\ &= (D_\xi\nu)(x) + \Gamma(x)(\xi(x),\nu(x)),\end{aligned}$$

como desejado. Isso mostra existência. Substituindo $\xi := \partial_i$ e $\nu := \partial_j$ em (2), obtemos a unicidade, e isso completa a prova. $\square$

Estudamos agora como o símbolo de Christoffel é afetado por reparametrizações. Lembramos primeiro a definição de regra de pull-back para campos de vetores.

Definição 2.3

Sejam $U,V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja $\Phi : U \to V$ um difeomorfismo. Seja $\nu : V \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores. Definimos o **pull-back** *de ν por*

$$(\Phi^*\nu)(x) := D\Phi(x)^{-1}\nu(y),$$

onde $y := \Phi(x)$.

Exercício*: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\Phi : U \to U$ a aplicação identidade $\Phi(x) := x$. Mostre que, para todo campo de vetores $\xi : U \to \mathbb{R}^m$,

$$\Phi^*\xi = \xi.$$

Exercício**: Sejam $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\Phi : U \to V$ e $\Psi : V \to W$ difeomorfismos. Mostre que, para todo campo de vetores $\xi : W \to \mathbb{R}^m$,

$$(\Psi \circ \Phi)^*\xi = \Psi^*(\Phi^*\xi).$$

Em termos abstratos, escrevemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}^* &= \mathrm{Id}, \text{ e} \\ (\Psi \circ \Phi)^* &= \Phi^*\Psi^*. \end{aligned}$$

Vemos então que a operação de pull-back para campos de vetores também é um functor contravariante.

Definição 2.4

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja ∇ uma derivada covariante sobre V. O **pull-back** *de ∇ por Φ é a derivada covariante $\Phi^*\nabla$ definida tal que, para todo par $\xi, \nu : V \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre V,*

$$(\Phi^*\nabla)_{\Phi^*\xi}\Phi^*\nu := \Phi^*(\nabla_\xi \nu). \tag{3}$$

Exercício**: Mostre que a função $(\Phi^*\nabla)$ é unicamente definida por (3) e é uma derivada covariante.

Exercício**: Mostre que a operação de pull-back para derivadas covariantes é um functor contravariante.

Lema 2.5

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam ∇ e ∇' derivadas covariantes definidas sobre U e V respectivamente. Denotamos Γ e Γ' os seus respectivos símbolos de Christoffel. Seja $\Phi : U \to V$ um difeomorfismo. Se $\Phi^*\nabla' = \nabla$ então, para todo par $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre U e para todo $x \in \Omega$,

$$\Gamma(x)(\xi(x), \nu(x)) = (\Phi^*\Gamma')(x)(\xi(x), \nu(x)) + (D\Phi(x)^{-1})D^2\Phi(x)(\xi(x), \nu(x)), \tag{4}$$

onde Φ^* denota aqui o pull-back para tensores de tipo $(1, 2)$.

Prova: De fato, para todo par $\xi, \nu : U \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre V,

$$\begin{aligned} \Gamma(x)(\xi(x), \nu(x)) &= (\nabla_\xi \nu)(x) - (D_\xi \nu)(x) \\ &= \big((\Phi^*\nabla')_\xi \nu\big)(x) - (D_\xi \nu)(x) \\ &= (\Phi^*(\nabla'_{\Phi_*\xi}\Phi_*\nu))(x) - (D_\xi \nu)(x) \\ &= (\Phi^*(D_{\Phi_*\xi}\Phi_*\nu))(x) - (D_\xi \nu)(x) + \Phi^*(\Gamma'(\Phi_*\xi, \Phi_*\nu))(x) \\ &= (\Phi^*(D_{\Phi_*\xi}\Phi_*\nu))(x) - (D_\xi \nu)(x) + (\Phi^*\Gamma')(x)(\xi(x), \nu(x)). \end{aligned}$$

Contudo, para todo k,

$$\begin{aligned}(\Phi^*(D_{\Phi_*\xi}\Phi_*\nu))^k(x) &= (D\Phi(x)^{-1})^k_m D\Phi(x)^n_i \xi(x)^i \frac{\partial}{\partial y_n}((D\Phi\cdot\nu)^m\circ\Phi^{-1})(y)\\ &= (D\Phi(x)^{-1})^k_m \xi(x)^i \frac{\partial}{\partial x_i}((D\Phi\cdot\nu)^m)(x)\\ &= (D\Phi(x)^{-1})^k_m (D^2\Phi)(x)^m_{ij}\xi(x)^i\nu(x)^j + (D_\xi\nu(x))^k,\end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Segue pelo Lema 2.5 que a regra de transformação satisfeita pelos símbolos de Christoffel das derivadas covariantes é igual àquela satisfeita pelos símbolos de Christoffel de uma métrica. Consequentemente o símbolo de Christoffel de uma métrica serve para definir uma derivada covariante.

Definição 2.6

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja g uma métrica sobre Ω. Denotamos Γ^k_{ij} o símbolo de Christoffel de g. Definimos a **derivada covariante de Levi-Civita** *de g tal que, para todo par $\xi, \nu : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre Ω e para todo $x \in \Omega$,*

$$(\nabla_\xi\nu)(x) := (D_\xi\nu)(x) + \Gamma(x)(\xi(x), \nu(x)). \qquad (5).$$

3 - As propriedades da derivada covariante de Levi-Civita. A derivada covariante de Levi-Civita também é caracterizada pelas suas propriedades.

Definição 3.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ∇ uma derivada covariante sobre Ω. Dizemos que ∇ é **sem torsão** *quando, para todo par $\xi, \nu : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre Ω,*

$$\nabla_\xi\nu - \nabla_\nu\xi = [\xi, \nu]. \qquad (6)$$

Exercício*: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ∇ uma derivada covariante sobre Ω. Mostre que ∇ é sem torsão se e somente se o seu símbolo de Christoffel Γ^k_{ij} é simétrico em i e j.

Exercício**: Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja ∇ uma derivada covariante sobre V. Seja $\Phi : U \to V$ um difeomorfismo. Mostre que ∇ é sem torsão se e somente se $\Phi^*\nabla$ é sem torsão. Ou seja, a propriedade de uma derivada covariante ser sem torsão é invariante por difeomorfismo.

Definição 3.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja g uma métrica sobre Ω. Seja ∇ uma derivada covariante sobre Ω. Dizemos que ∇ é **paralela** *(com respeito a g) quando, para toda tripla $\xi, \nu, \mu : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre Ω,*

$$D_\xi g(\nu, \mu) = g\big(\nabla_\xi \nu, \mu\big) + g\big(\nu, \nabla_\xi \mu\big). \tag{7}$$

Exercício:** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Sejam g e ∇ uma métrica e uma derivada covariante sobre Ω. Denotamos Γ^k_{ij} o símbolo de Christoffel de ∇. Mostre que ∇ é paralela com respeito a g se e somente se, para todo i, j, k,

$$g_{ij,k} = \Gamma^p_{ik} g_{pj} + \Gamma^q_{jk} g_{ip}.$$

Exercício:** Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam g e ∇ respectivamente uma métrica e uma derivada covariante sobre V. Seja $\Phi : U \to V$ um difeomorfismo. Mostre que ∇ é paralela com respeito a g se e somente se $\Phi^*\nabla$ é paralela com respeito a $\Phi^* g$.

Teorema 3.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja g uma métrica sobre Ω. A derivada covariante de Levi-Civita de g é a única derivada covariante sobre Ω que é sem torsão e parallela com respeito a g. Além do mais, para toda tripla $\xi, \nu, \mu : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre Ω,

$$\begin{aligned} g\big(\nabla_\xi \nu, \mu\big) = \frac{1}{2}\big(&D_\xi g(\nu, \mu) + D_\nu g(\xi, \mu) - D_\mu g(\xi, \nu) \\ &+ g(\xi, [\nu, \mu]) + g(\nu, [\xi, \mu]) - g(\mu, [\nu, \xi])\big). \end{aligned} \tag{8}$$

Chamamos (8) a **fórmula de Koszul**.

Observação: Observamos que a fórmula de Koszul também vale quando é métrica é apenas não degenerada e não necessariamente positiva definida. O estudo da geometria dos espaçõs com métricas não degeneradas é chamada **geometria semi-riemanniana**. Essa teoria contempla, em particular, a relatividade geral.

Prova: Denotamos ∇ e Γ respectivamente a derivada covariante de Levi-Civita de g e o seu símbolo de Christoffel. Como Γ^k_{ij} é simétrico em i e j, ∇ é sem torsão. Em seguida, por definição,

$$\begin{aligned} \Gamma^p_{ik} g_{pj} + \Gamma^p_{jk} g_{ip} &= \frac{1}{2} g^{pq}(g_{iq,k} + g_{kq,i} - g_{ik,q}) g_{pj} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{pq}(g_{jq,k} + g_{kq,j} - g_{jk,q}) g_{ip} \\ &= \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{kj,i} - g_{ik,j}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(g_{ji,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}) \\ &= g_{ij,k}, \end{aligned}$$

e segue que ∇ é paralela com respeito a g.

Mostramos agora que toda derivada covariante ∇ que é sem torsão e paralela com respeito a g satisfaz (8). De fato, para toda tripla $\xi, \nu, \mu : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores,

$$\begin{aligned}
g\big(\nabla_\xi \nu, \mu\big) \quad &= D_\xi g(\nu, \mu) - g\big(\nu, \nabla_\xi \mu\big) \\
&= D_\xi g(\nu, \mu) - g(\nu, [\xi, \mu]) - g\big(\nu, \nabla_\mu, \xi\big) \\
\Rightarrow \quad g\big(\nabla_\xi \nu, \mu\big) + g\big(\nabla_\mu \xi, \nu\big) &= D_\xi g(\nu, \mu) - g(\nu, [\xi, \mu]).
\end{aligned}$$

Permutando ciclicamente os campos ξ, ν e μ, multiplicando as três expressões que resultam por ± 1, e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned}
2g\big(\nabla_\xi \nu, \mu\big) = D_\xi g(\nu, \mu) - D_\mu g(\xi, \nu) + D_\nu g(\mu, \xi) \\
- g(\nu, [\xi, \mu]) + g(\xi, [\mu, \nu]) - g(\mu, [\nu, \xi]),
\end{aligned}$$

e (8) segue. Finalmente, verificamos que se ∇ e ∇' são derivadas covariantes que satisfazem (8), então $\nabla = \nabla'$. A unicidade segue, e isso completa a prova. $\square$

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to \mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica sobre Ω. Denotamos Γ o símbolo de Christoffel de g. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ suave. Mostre que o símbolo de Christoffel Γ' de $g' := e^{2f} g$ satisfaz

$$(\Gamma')^k_{ij} - \Gamma^k_{ij} = \delta^k_i f_j + \delta^k_j f_i - g_{ij} f^k,$$

onde

$$f^k := g^{km} f_m.$$

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ∇ uma derivada covariante sobre Ω. Para uma curva $\gamma : I \to \Omega$, definimos $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ por

$$(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)(t) := \ddot\gamma(t) + \Gamma(\gamma(t))^k_{ij} \dot\gamma^i(t) \dot\gamma^j(t),$$

onde Γ é o símbolo de Christoffel de ∇. Dizemos então que γ é uma **geodésica** de ∇ quando ela satisfaz

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma. \tag{9}$$

Trivialmente, se ∇ é a derivada covariante de Levi-Civita de uma métrica g, todas as suas geodésicas também são geodésicas de g, e vice-versa. Mostre que se ∇ e ∇' são derivadas covariantes sem torsão com as mesmas geodésicas, então $\nabla = \nabla'$. Em particular, isso significa que a derivada covariante de Levi-Civita de uma métrica g é a única derivada covariante sem torsão cujas geodésicas são as geodésicas de g.

Lema 3.4

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam g e h métricas sobre U e V, respectivamente. Denotamos ∇^g e ∇^h suas respectivas derivadas covariantes de Levi-Civita. Seja $\Phi : U \to V$ um difeomorfismo. Se $\Phi^* h = g$ então $\Phi^* \nabla^h = \nabla^g$.

Prova: Como as propriedades de ser sem torsão e paralela são invariantes por difeomorfismo, o resultado segue pelo Teorema 2.9. □

Exercício****:** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ∇ uma derivada covariante sobre Ω. Dizemos que ∇ é **afim** quando as suas geodésicas são todas retas. Mostre que, se ∇ é sem torsão, então ela é afim se e somente se o seu símbolo de Christoffel satisfaz, para todo $x \in \Omega$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$\Gamma(x)(\xi, \nu) \in \langle \xi, \nu \rangle,$$

onde $\langle \xi, \nu \rangle$ é o plano gerado por ξ e ν.

Exercício****:** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ suave. Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$ a parametrização gráfica do gráfico de f. Isto é

$$F(x) := (x, f(x)).$$

Mostre que a métrica de F é

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + f_i(x) f_j(x).$$

Mostre que

$$g^{ij}(x) = \delta_{ij} - (1 + \|df(x)\|^2) f_i f_j.$$

Mostre que a símbolo de Cristoffel de g satisfaz

$$\Gamma_{ij}^k = f_{ij} f^k,$$

onde

$$f^k := g^{km} f_{,m}.$$

Exercício****:** Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja ∇ uma derivada covariante sobre Ω. Denotamos Γ_{ij}^k o seu símbolo de Christoffel. Seja $f \in C^2(\Omega)$. Definimos a **Hessiana** de f por

$$\mathrm{Hess}(f)_{ij} := f_{,ij} - \Gamma_{ij}^k f_{,k}. \tag{10}$$

Mostre que, para todo par $\xi, \nu : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de campos de vetores sobre Ω,

$$\mathrm{Hess}(f)(\xi, \nu) = (\nabla_\xi df)(\nu) = D_\xi df(\nu) - df(\nabla_\xi \nu).$$

Mostre que $\mathrm{Hess}(f)$ é simétrica para todo f se e somente se ∇ é sem torsão. Dizemos que f é **convexa** (resp. **strictamente convexa**) com respeito à ∇ quando $\mathrm{Hess}(f)$ é não-negativa (resp. positiva) definida em todo ponto. Mostre que f é convexa (resp. strictamente convexa) se e somente se $(f \circ \gamma)$ é convexa (resp. strictamente convexa) para toda geodésica $\gamma : I \to \Omega$ de ∇. Dizemos que Ω é **geodésicamente convexa** com respeito a ∇ quando, para todo $x, y \in \Omega$, existe uma única geodésica $\gamma : I \to \Omega$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Mostre que, se Ω é geodésicamente convexa com respeito a ∇ e se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é convexa com respeito a ∇, então f tem, no máximo, um ponto crítico, que é um mínimo global.

Exercício**: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto simplesmente conexo. Seja $g : \Omega \to \mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica sobre Ω. Dizemos que g é **Hessiana** quando existe uma função suave $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$g_{ij} = f_{ij}.$$

Observamos que nesse caso f é strictamente convexa. Mostre que g é Hessiana se e somente se, para todo i, j, k,

$$g_{ij,k} = g_{ik,j}$$

Mostre que, quando g é Hessiana, o seu símbolo de Christoffel satisfaz

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} f_{ijm}.$$

Exercício***: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto simplesmente conexo. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ suave e strictamente convexa. Denotamos g a métrica Hessiana definida por f. Mostre que se f é completa, então Ω é convexo.

Exercício***: Seja $\mathrm{Symm}(2, \mathbb{R})$ o espaço de matrizes simétricas sobre $\mathbb{R}^2$. Definimos a forma bilinear B sobre esse espaço por

$$B(M, N) := -\frac{1}{2} \mathrm{Tr}(JMJN),$$

onde

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostre que B é não-degenerada de assinatura $(2, 2)$ e que, para todo M,

$$B(M, M) = \mathrm{Det}(M).$$

Seja $\Omega := \mathrm{Symm}_+(2, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Symm}(2, \mathbb{R})$ o espaço de matrizes simétricas positiva definidas sobre $\mathbb{R}^2$. Para toda $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a métrica semi-riemanniana B_α sobre Ω por

$$B_\alpha(A)(M, N) := \mathrm{Det}(A)^\alpha B(M, N).$$

Determine o símbolo de Christoffel de B_α. Determine todas as geodésicas de B_α que passam pelo ponto Id. Mostre que, no caso em que $\alpha = 1/2$, para todo $A \in \mathrm{Symm}(2, \mathbb{R})$, a curva

$$\gamma_A(t) := (\mathrm{Id} + tA)^2$$

é uma geodésica. Determine o domínio máximo da applicação exponencial de $B_{1/2}$.