1 - Subvariedades completas. Na última seção, mostramos a existência de uma única geodésica minimizante entre quaisquer dois pontos de uma subvariedade que são suficientemente próximos um do outro. Nessa seção, estudamos as condições suficientes para que esse resultado possa ser transformado num resultado global, isto é, estudamos as condições suficientes para a existência de geodésicas minimizantes entre quaisquer dois pontos de uma subvariedade.

Definição 1.1

Seja X uma subvariedade. Seja $\gamma : I \to X$ uma geodésica. Uma **extensão** *(estrita) de γ é uma geodésica $\gamma' : I' \to X$ tal que $I \nsubseteq I'$ e $\gamma'|_I = \gamma$. Dizemos que γ é* **extensível** *quando existe uma extensão. Caso contrário, dizemos que γ é* **inextensível**.

Observação: Definimos a relação $\lesssim$ sobre o espaço de geodésicas em X tal que $\gamma \lesssim \gamma'$ quando γ' é uma extensão de γ ou quando essas duas geodésicas são iguais. Verificamos que $\lesssim$ define um ordem parcial sobre o espaço de geodésicas e que toda geodésica γ tem uma única extensão maximal γ'.

O critério de inextensibilidade de geodésicas é semelhante àquela de inextensibilidade de curvas integrais de fluxos.

Lema 1.2

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja $\gamma : I \to X$ uma geodésica. Definimos $\hat{\gamma} : I \to \mathbb{R} \times X$ por $\hat{\gamma}(t) := (t, \gamma(t))$. A geodésica γ é inextensível se e somente se $\hat{\gamma}$ é própria.

Prova: Supomos primeiro que $\hat{\gamma}$ é própria. Mostramos que γ é inextensível. Supomos o contrário. Então existe uma extensão $\gamma' : I' \to X$ de γ. Denotamos $]a, b[:= I$ e $]a', b'[:= I'$. Sem perder generalidade, podemos supor que $b < b'$. Seja $0 < \delta < b - a$ e denotamos $K := \hat{\gamma}'([b - \delta, b])$. Por ser a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua, K é compacto. Porém, $\hat{\gamma}^{-1}(K) = [b - \delta, b[$, o que não é compacto. Isso contradiz a propriedade de $\hat{\gamma}$, o que prova a afirmação.

Supomos agora que $\hat{\gamma}$ não é própria. Mostramos que γ é extensível. Seja $\hat{K} \subseteq \mathbb{R} \times X$ compacto tal que $\hat{\gamma}^{-1}(K)$ não seja compacta. Seja $R > 0$ e $K \subseteq X$ compacto tal que $\hat{K} \subseteq [-R, R] \times K$. Vemos que $\hat{\gamma}^{-1}([-R, R] \times K)$ também não é compacta. Seja $(U_i, V_i, \Phi_i)_{1 \leq i \leq m}$ e $(K_i)_{1 \leq i \leq m}$ respectivamente uma família finita de cartas de X e uma família finita de compactos de X tal que $K_i \subseteq U_i$ para todo i e que $K = \cup_{i=1}^m K_i$. Para cada i, denotamos $I_i := \gamma^{-1}(U_i)$ e $\gamma_i := \gamma|_{I_i}$. Como

$$\hat{\gamma}^{-1}([-R, R] \times K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \hat{\gamma}_i^{-1}([-R, R] \times K_i),$$

existe $1 \leq j \leq m$ tal que $\hat{\gamma}_j^{-1}([-R, R] \times K_j)$ não seja compacta. Em particular, $\nu_j := (\Phi_j \circ \gamma_j)$ é extensível. Seja $\nu_j' : I_j' \to V_i$ uma extensão de ν_j e denotamos $\gamma_j' := \Psi_i \circ \nu_j'$. Denotamos

$$I' := I_j' \cup (\bigcup_{i \neq j} I_i)$$

e definimos $\gamma' : I' \to X$ por

$$\gamma'(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in \cup_{i \neq j} I_i \text{ e} \\ \gamma_j'(t) & \text{se } t \in I_j'. \end{cases}$$

Verificamos que γ' é uma extensão de γ', o que prova a afirmação. $\square$

Esse critério nos permite estabelecer uma condição suficiente simples para que toda geodésica possa ser estendida indefinidamente.

Lema 1.3

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$ uma subvariedade. Se X é completa, então toda geodésica inextensível em X tem domínio $\mathbb{R}$.

Prova: Supomos o contrário. Seja $\gamma :]a, b[\to X$ uma geodésica inextensível tal que $]a, b[\neq \mathbb{R}$. Sem perder generalidade, podemos supor que $b < \infty$. Seja (t_m) uma sequência em I que converge até b. Como γ tem velocidade constante, a sequência $(\gamma(t_m))$ de pontos de X é de Cauchy. Como X é completa, essa sequência tem um limite $x_0 \in X$. O conjunto $K := \{(t_m, \gamma(t_m)\} \cup \{(b, x_0)\}$ é compacto. Porém, a sua preimagem $\hat{\gamma}^{-1}(K)$ não é compacta. Isso contradiz a inextensibilidade de γ, o que prova o resultado. $\square$

O Lema 1.3 também fornece condições suficientes para a existência de geodésicas minimizantes entre quaisquer dois pontos de uma subvariedade. Contudo, será mais prático enunciar esse resultado com uma hipótese um pouco mais fraca.

Lema 1.4

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$ uma subvariedade. Seja $x \in X$. Supomos que toda geodésica inextensível passando por x tem domínio $\mathbb{R}$. Então, para todo $y \in X$, existe uma geodésica $\gamma : I \to X$ tal que $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ e $l[\gamma] = d(x, y)$.

Prova: Seja (U, V, Φ) uma carta de X em torno de x tal que $\Phi(x) = 0$. Seja g a métrica de Φ. Seja $0 < \epsilon < d(x, y)$ tal que a aplicação exponencial de g em x define um difeomorfismo de $B_{2\epsilon}(0)$ na sua imagem. Seja $\mathbb{S}^{m-1}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^m$ e definimos $\delta : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(\xi) := d((\Psi \circ \operatorname{Exp}_x)(\epsilon\xi), y).$$

Como $\mathbb{S}^{m+1}$ é compacto e δ é contínua, existe $\xi \in \mathbb{S}^{m-1}$ que minimiza essa função. Afirmamos que $\gamma := \gamma_\xi$ é a geodésica desejada.

Mostramos primeiro que $d(\gamma(\epsilon), y) = d(x, y) - \epsilon$. De fato, seja $\delta < \epsilon$ e seja $\nu : [0, d(x, y) + \delta] \to X$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\nu(0) = x$ e $\nu(d(x, y) + \delta) = y$. Por continuidade, existe $t_0 \in [0, d(x, y) + \delta]$ tal que $d(x, \gamma(t_0)) = \epsilon$. Em particular, $t_0 \geq \epsilon$ e segue que $d(\gamma(t_0), y) \leq d(x, y) + \delta - \epsilon$. Contudo, como $\gamma(t_0)$ é um elemento de $(\Psi \circ \operatorname{Exp}_x)(\epsilon\mathbb{S}^{m-1})$,

$$d(\gamma(\epsilon), y) = \delta(\xi) \leq d(\gamma(t_0), y) \leq d(x, y) + \delta - \epsilon,$$

e, como $\delta > 0$ é qualquer, segue que $d(\gamma(\epsilon), y) \leq d(x, y) - \epsilon$. Finalemente, segue pela desigualdade triangular que $d(\gamma(\epsilon), g) \geq d(x, y) - \epsilon$, o que prova a afirmação.

Denotamos por I o conjunto de todos os $0 < t \leq d(x, y)$ tais que $d(\gamma(t), y) = d(x, y) - t$. Vimos que $\epsilon \in I$. Por continuidade, I é fechado. Mostramos agora que I é um intervalo. De fato, sejam $0 < t_1 < t_0$ tais que $t_0 \in I$. Pela desigualdade triangular,

$$d(\gamma(t_1), y) \leq d(\gamma(t_1), \gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0), y) \leq (t_0 - t_1) + (d(x, y) - t_0) = d(x, y) - t_1,$$

e

$$d(\gamma(t_1), y) \geq d(x, y) - d(x, \gamma(t_1)) \geq d(x, y) - t_1.$$

Segue por essas duas desigualdades que $d(\gamma(t_1), y) = d(x, y) - t_1$, e concluímos que I é um intervalo, como afirmado.

Seja $t_0 := \mathrm{Sup}(I)$. O resultado seguirá uma vez que mostrarmos que $t_0 = d(x, y)$. Supomos o contrário. Seja $x_0 := \gamma(t_0)$. Como antes, existe $\epsilon' > 0$ e uma geodésica $\gamma' : I \to X$ tal que $\gamma'(0) = x_0$ e $d(\gamma'(\epsilon'), y) = d(x_0, y) - \epsilon'$. Mostramos como antes que $d(\gamma(t_0 - \epsilon'), \gamma'(\epsilon')) = 2\epsilon'$. Definimos $\nu : [-\epsilon', \epsilon'] \to X$ por

$$\nu(t) = \begin{cases} \gamma(t_0 + t) & \text{se } t \in]-\epsilon', 0] \text{ e} \\ \gamma'(t) & \text{se } t \in [0, \epsilon'[. \end{cases}$$

Vemos que ν é suave por partes e que $l[\nu] = d(\gamma(t_0 - \epsilon'), \gamma'(\epsilon'))$. Porém, reduzindo ϵ' se for necessário, podemos supor que a única curva que realiza a distância entre esses dois pontos é uma geodésica, o que mostra que ν é suave. Segue que $\gamma'(t) = \gamma(t - t_0)$ e, em particular, que $t_0 + \epsilon \in I$. Isso é uma contradição e segue que $t_0 = d(x, y)$, o que completa a prova. $\square$

2 - A aplicação exponencial. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja $x \in X$. Seja (U, V, Φ) uma carta de X em torno de x. Supomos que $\Phi(x) = 0$ e que a métrica g_{ij} de Ψ é igual a δ_{ij} nesse ponto. Para $\xi \in \mathbb{R}^m$, denotamos $\gamma_\xi : I_\xi \to X$ a geodésica máxima tal que $\gamma_\xi(0) = x$ e

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi \circ \gamma_\xi)(t)\bigg|_{t=0} = \xi.$$

Denotamos

$$\hat{\Omega}_x := \{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mid t \in I_\xi\}$$

e definimos $F_x : \hat{\Omega}_x \to X$ por

$$F_x(t, \xi) := \gamma_\xi(t).$$

Chamamos $(F_x, \hat{\Omega}_x)$ o **fluxo geodésico máximo** de X em x.

Lema 2.1

$\hat{\Omega}_x$ é aberto e F_x é suave.

Prova: Seja $\xi \in \mathbb{R}^m$. Denotamos $I_\xi :=]a, b[$ e lembramos que $a < 0 < b$. Denotamos J_ξ o conjunto de todos os reais $0 < t < b$ tal que $[0, t[\times B_\epsilon(\xi) \subseteq \hat{\Omega}_x$ para algum $\epsilon > 0$ e que F_x seja suave sobre esse aberto. Afirmamos que $t_0 := \mathrm{Sup}\, J_\xi$ é igual a b. Supomos o contrário. Seja (U, V, Φ) uma carta de X em torno de $x_0 := \gamma_\xi(t_0)$. Denotamos $(G, \hat{\Omega})$ o fluxo geodésico máximo da métrica g de Ψ. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\gamma_\xi([t_0 - 2\epsilon, t_0]) \subseteq U_i$. Reduzindo ϵ se for necessário, podemos supor que

(1) $]0, t_0 - \epsilon[\times B_\epsilon(\xi) \subseteq \hat{\Omega}_x$,

(2) F_x é suave sobre o interior desse conjunto,

(3) $F_x(\{t_0 - 2\epsilon\} \times B_\epsilon(\xi)) \subseteq U$,

(4) para todo $\nu \in B_\epsilon(\xi)$,

$$]-3\epsilon, 3\epsilon[\times \{((\Phi \circ F_x)(t_0 - 2\epsilon, \nu), \partial_t(\Phi \circ F_x)(t - 2\epsilon, \nu))\} \subseteq \hat{\Omega}.$$

Segue por unicidade que, para todo $\nu \in B_\epsilon(\xi)$, $]t_0 - 5\epsilon, t_0 + \epsilon[\subseteq I_\nu$ e que, sobre $]t_0 - 5\epsilon, t_0 + \epsilon[\times B_\epsilon(\xi)$,

$$F_x(t, \nu) = (\Psi \circ G)(t - (t_0 - 2\epsilon), (\Phi \circ F_x)(t_0 - 2\epsilon, \nu), \partial_t(\Phi \circ F_x)(t_0 - 2\epsilon, \nu)).$$

Segue que F_x é suave sobre esse subconjunto e, em particular, que $t_0 + \epsilon \in J_\xi$. Isso é absurdo, e a afirmação segue. Como $\xi \in \mathbb{R}^m$ é qualquer, isso prova o resultado. □

Verificamos como antes a invariancia do fluxo geodésico. Essa vez, para $\lambda > 0$, definimos $D^2_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ por

$$D^2_\lambda(t, \xi) = (\lambda t, \xi/\lambda),$$

e obtemos

Lema 2.2

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja $x \in X$. Seja $(F_x, \hat{\Omega}_x)$ o fluxo geodésico máximo de X em x. Então, para todo $\lambda > 0$, $D^2_\lambda(\Omega_x) = \Omega_x$ e $F_x \circ D^2_\lambda = F_x$.

Isso nos leva à definição da aplicação exponencial em subvariedades.

Definição 2.3

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja $x \in X$. Seja $(F_x, \hat{\Omega}_x)$ o fluxo geodésico máximo de X em x. Definimos $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Exp_x : \Omega_x \to X$ por

$$\Omega_x := \left\{\xi \in \mathbb{R}^m \mid (1, \xi) \in \hat{\Omega}_x\right\}, \text{ e}$$
$$Exp_x(\xi) := F_x(1, \xi).$$

Chamamos Exp_x a **aplicação exponencial** *de X em x.*

Fechamos essa seção com o Teorema de Hopf-Rinow, que afirma que a completude é suficiente para que os primeiros dois postulados da geometria euclidiana sejam satisfeitos por uma subvariedade.

Teorema 2.4, Hopf-Rinow

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. As seguintes afirmações são equivalentes.

(1) X é completa,

(2) existe $x \in X$ tal que toda geodésica inextensível passando por x tenha domínio $\mathbb{R}$,

(3) existe $x \in X$ tal que Exp_x tenha domínio $\mathbb{R}^m$,

(4) toda geodésica inextensível em X tem domínio $\mathbb{R}$, e

(5) para todo $x \in X$ a função Exp_x tem domínio $\mathbb{R}^m$.

Prova: Segue pela definição da aplicação exponencial que (2) e (3) assim como (4) e (5) são tautológicas. Pelo Lema 1.3, (1) implica (4) e, trivialmente, (4) implica (2). Só resta então mostrar que (2) implica (1). Seja $x \in X$ um ponto em que (2) é satisfeita. Pelo Lema 1.4, para todo $r > 0$, $\overline{B}_r(x) = \mathrm{Exp}_x(\overline{B}_r(0))$. Em particular, como Exp_x é suave, $\overline{B}_r(x)$ é compacto para todo r e segue que X é completa, como desejado. □