1 - O fluxo geodésico e a aplicação exponencial. Estudamos agora as propriedades do fluxo geodésico. Nessa seção será suficiente trabalhar numa carta.

Definição 1.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos Γ seu símbolo de Christoffel. Denotamos $\xi : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m$ o campo de vetores

$$\xi(x, y) := (y^i \partial_i, -\Gamma^k_{ij}(x) y^i y^j \partial_k).$$

Chamamos o fluxo maximal $(\hat{\Phi}, \hat{\Omega})$ de ξ o **fluxo geodésico maximal** *de g.*

Observamos primeiro a seguinte propriedade de homogeneidade do fluxo geodésico. Para $\lambda > 0$, definimos $D^0_\lambda : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ e $D^1_\lambda : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ por

$$D^0_\lambda(x, \xi) = (x, \xi/\lambda) \text{ e}$$
$$D^1_\lambda(x, \xi, t) = (x, \xi/\lambda, \lambda t).$$

Lema 1.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos $(\hat{\Phi}, \hat{\Omega})$ o seu fluxo geodésico máximo. Então

$$D^1_\lambda(\hat{\Omega}) = \hat{\Omega} \textit{ e}$$
$$\hat{\Phi} \circ D^1_\lambda = D^0_\lambda \circ \hat{\Phi}.$$

Prova: Seja $(x, \xi, t) \in \hat{\Omega}$. Por definição $\hat{\Omega} \cap (\{(x, \xi)\} \times \mathbb{R}) = \{(x, \xi)\} \times I$ para algum intervalo I. Definimos $\hat{\gamma} : I \to \Omega \times \mathbb{R}^m$ por $\hat{\gamma}(t) := \hat{\Phi}(x, \xi, t)$. Denotamos γ o seu primeiro componente. Por definição, $\gamma : I \to \Omega$ é a única geodésica tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Definimos $\gamma' : \lambda I \to \Omega$ por $\gamma'(t) = \gamma(t/\lambda)$. Verificamos que γ' é a única geodésica tal que $\gamma'(0) = x$ e $\dot{\gamma}'(0) = \xi/\lambda$. Segue por definição que

$$D^1_\lambda(x, \xi, t) = (x, \xi/\lambda, \lambda t) \in \{(x, \xi/\lambda)\} \times (\lambda I) \subseteq \hat{\Omega}$$

e que

$$(\hat{\Phi} \circ D^1_\lambda)(x, \xi, t) = \hat{\Phi}(x, \xi/\lambda, \lambda t) = (\gamma'(\lambda t), \dot{\gamma}'(\lambda t)) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)/\lambda) = (D^0_\lambda \circ \hat{\Phi})(x, \xi, t),$$

como desejado. □

Definição 1.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Seja $(\hat{\Phi}, \hat{\Omega})$ o fluxo geodésico maximo de g. Definimos $V \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^m$ e $Exp : V \to \Omega$ por

$$\begin{aligned} V &:= \left\{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \mid (x, y, 1) \in \hat{\Omega}\right\} \ \textit{e} \\ Exp(x, \xi) &= (\pi_1 \circ \hat{\Phi})(x, y, 1), \end{aligned}$$

onde $\pi_1 : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \Omega$ é a projeção sobre o primeiro componente. Chamamos Exp a **aplicação exponencial** *de g. Para todo $x \in \Omega$, definimos $V_x \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Exp_x : V_x \to \Omega$ por*

$$\begin{aligned} V_x &:= \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid (x, \xi) \in V\}, \ \textit{e} \\ Exp_x(\xi) &:= Exp(x, \xi). \end{aligned}$$

Chamamos Exp_x a **aplicação exponencial** *de g em x.*

Exercício**: Seja $g_{ij} := \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2}\delta_{ij}$ com domínio $\mathbb{R}^m$. Determine a aplicação exponencial de essa métrica em 0.

Exercício***: Seja $g_{ij} := \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$ com domínio $\Omega := \{(x, y) \mid y > 0\}$. Determine a aplicação exponencial de essa métrica em 0.

Exercício***: Seja $g := dr^2 + \cosh^2(r)d\theta^2$ com domínio $\mathbb{R}\times]-\pi/2, \pi/2[$. Determine a aplicção exponencial de essa métrica em 0.

2 - Propriedades da aplicação exponencial.

Definição 2.1

Seja $V \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Dizemos que V é **radial** *(ou* **em forma de estrela***) quando, para todo $x \in V$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x \in V$.*

Lema 2.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Seja $x \in \Omega$ e denotamos $Exp_x : V_x \to \Omega$ a sua aplicação exponencial em x. Então V_x é radial e, para todo $\xi \in V$ a curva $\gamma(t) := Exp_x(t\xi)$ é a única geodésica tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = \xi$.

Prova: Seja $\xi \in V_x$. Por definição $(x, \xi, 1) \in \hat{\Omega}$. Segue que, para todo $t \in [0, 1]$, $(x, \xi, t) \in \hat{\Omega}$. Pelo Lema 1.2, para todo $t \in]0, 1]$, $(x, t\xi, 1) = D^1_{1/t}(x, \xi, t) \in \hat{\Omega}$ e

$$\begin{aligned} \gamma(t) = \mathrm{Exp}_x(t\xi) &= (\pi_1 \circ \hat{\Phi})(x, t\xi, 1) = (\pi_1 \circ \hat{\Phi} \circ D^1_{1/t})(x, \xi, t) \\ &= (\pi_1 \circ D^0_{1/t} \circ \hat{\Phi})(x, \xi, t) = (\pi_1 \circ \hat{\Phi})(x, \xi, t) \end{aligned}$$

é a única geodésica tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = \xi$, como desejado. $\square$

Lema 2.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Seja $x \in \Omega$ e denotamos $Exp_x : V_x \to \Omega$ a aplicação exponencial de Ω em x. Então

$$DExp_x(0) = Id.$$

Prova: Seja $\xi \in \mathbb{R}^m$. Seja $\gamma : I \to \Omega$ a única geodésica tal que $\gamma(0) = x$ e que $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Pelo Lema 2.2, $\mathrm{Exp}_x(t\xi) = \gamma(t)$. Segue que

$$D\mathrm{Exp}_x(0) \cdot \xi = \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Exp}_x(t\xi)\bigg|_{t=0} = \dot{\gamma}(0) = \xi,$$

como desejado. □

Corolario 2.4

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Para todo subconjunto compacto K de Ω, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$, $B_\epsilon(0) \subseteq V_x$ e Exp_x se restringe a um difeomorfismo de $B_\epsilon(x)$ sobre a sua imagen.

Prova: Isso segue diretamente do Lema 2.3 e o teorema de função inversa. □

Lema 2.5

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica riemannaina. Seja $x \in \Omega$ e supomos que $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Denotamos $Exp_x : V_x \to \Omega$ a aplicação exponencial de g em x. Denotamos $h := Exp_x^* g$ o pull-back de g por Exp_x. Então, para todo $\xi \in V_x$,

$$h(\xi)(\partial_r, \partial_r) = 1,$$

onde $\partial_r(\xi) := \xi / \|\xi\|_{\mathrm{euc}}$ é o compo de vetores radial unitário com respeito à métrica euclideana.

Prova: Seja $\xi \in V_x$. Definimos $\gamma : [0, \|\xi\|] \to \Omega$ por $\gamma(t) := \mathrm{Exp}_x(t\xi/\|\xi\|)$. Segue pelo Lema 2.2 que γ é a única geodésica de g tal que $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = \xi/\|\xi\|$. Em particular,

$$D\mathrm{Exp}_x(\xi) \cdot \partial_r = \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Exp}_x(t\xi/\|\xi\|)\bigg|_{t=\|\xi\|} = \dot{\gamma}(\|\xi\|).$$

Segue que

$$h(\xi)(\partial_r, \partial_r) = \|D\mathrm{Exp}_x(\xi) \cdot \partial_r\|_g^2 = \|\dot{\gamma}(\|\xi\|)\|^2 = \|\dot{\gamma}(0)\|^2 = 1,$$

como desejado. □

Lema 2.6

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to$ Bilin$(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Seja $x \in \Omega$ e supomos que $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Denotamos $\mathrm{Exp}_x : V_x \to \Omega$ a aplicação exponencial de g em x. Denotamos $h := \mathrm{Exp}_x^* g$ o pull back de g por Exp_x. Então, para todo $\xi \in V_x$ e para todo $\nu \in \mathbb{R}^m$ ortogonal a ξ com respeito à métrica euclideana,

$$h(\xi)(\partial_r, \nu) = 0,$$

onde $\partial_r(\xi) := \xi/\|\xi\|_{\mathrm{euc}}$ é o compo de vetores radial unitário com respeito à métrica euclideana.

Prova: Seja $\xi \in V_x$. Seja $\nu \in \mathbb{R}^m$ ortogonal a ξ com respeito à métrica euclideana. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos $\gamma :]-\epsilon, \epsilon] \times [0, \|\xi\|] \to \Omega$ por

$$\gamma(s,t) := \mathrm{Exp}(t(\xi + s\nu)/\|\xi + s\nu\|_{\mathrm{euc}}).$$

Para todo $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, denotamos $\gamma_s := \gamma(s, \cdot)$ e denotamos $\delta_s := (\partial_s \gamma)(s, \cdot)$. Pelo Lema 2.2, para todo $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, γ_s é uma geodésica de comprimento $\|\xi\|$. Em particular,

$$\left.\frac{\partial}{\partial s} l_g[\gamma_s]\right|_{s=0} = 0.$$

Contudo,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial s} l_g[\gamma_s]\right|_{s=0} &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\int_0^{\|\xi\|} \sqrt{g_{ij}(\gamma_s(t))\dot{\gamma}_s^i(t)\dot{\gamma}_s^j(t)}dt\right|_{s=0}\\ &= \int_0^{\|\xi\|} \frac{1}{2} g_{ij,k}(\gamma_0(t))\delta_0^k(t)\dot{\gamma}_0^i(t)\dot{\gamma}_0^j(t) + g_{ij}(\gamma_0(t))\dot{\delta}_0^i(t)\dot{\gamma}_0^j(t)dt\end{aligned}$$

Como γ_0 é uma geodésica, integrando por partes, obtemos

$$[g_{ij}(\gamma_0(t))\delta_0^i(t)\dot{\gamma}_0^j(t)]_0^{\|\xi\|} = 0.$$

Segue que

$$h(\xi)(\partial_r, \nu) = g(\mathrm{Exp}_x(x))(D\mathrm{Exp}_x(\xi)\cdot\partial_r, D\mathrm{Exp}_x(\xi)\cdot\nu) = g(\gamma_0(\|\xi\|))(\delta(\|\xi\|), \dot{\gamma}(\|\xi\|)) = 0,$$

como desejado. $\square$

Lema 2.7

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to$ Bilin$(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Seja $x \in \Omega$ e supomos que $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Denotamos $\mathrm{Exp}_x : V_x \to \Omega$ a aplicação exponencial de g em x. Denotamos $h := \mathrm{Exp}_x^* g$ o pull back de g por Exp_x. Para toda curva $\gamma : I \to V_x$ tal que $\gamma(0) = 0$,

$$l_h[\gamma] \geq \|\gamma(1)\|_{\mathrm{euc}}.$$

Além do mais, temos igualdade nessa relação se e somente se, a menos de reparametrização, $\gamma(t) = t\gamma(1)$.

Prova: Podemos supor que γ é parametrizada com velocidade constante com respeito a g. Denotamos

$$\begin{aligned} t_0 &:= \mathrm{Sup}\left\{t \in I \mid \gamma(t) = 0\right\}, \text{ e} \\ t_1 &:= \mathrm{Inf}\left\{t \in I \mid \|\gamma(t)\|_{\mathrm{euc}} \geq \|\gamma(1)\|\right\}. \end{aligned}$$

Como $l_h[\gamma] \geq l_h[\gamma|_{[t_0,t_1]}]$, podemos supor que $0 < \gamma(t) < \|\gamma(1)\|$ para todo $t \in]0,1[$. Definimos $\rho : I \to [0,\infty[$ por $\rho(t) := \|\gamma(t)\|_{\mathrm{euc}}$ e observamos que ρ é suave sobre o interior de I. Levando em conta os Lemas 2.5 and 2.6, e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho(t)^2 &= \frac{\partial}{\partial t}\|\gamma(t)\|^2_{\mathrm{euc}} \\ &= 2\langle\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle_{\mathrm{euc}} \\ &= 2\rho(t)\langle\partial_t,\dot\gamma(t)\rangle_{\mathrm{euc}} \\ &= 2\rho(t)h(\gamma(t))(\partial_t,\dot\gamma(t)) \\ &\leq 2\rho(t)\|\dot\gamma(t)\|_h. \end{aligned}$$

Segue que

$$\rho(1) = \int_0^1 \dot\rho(t)dt \leq \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_h dt = l_h[\gamma],$$

como desejado. Finalmente, temos igualdade se e somente se $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e, em todo ponto, $\dot\gamma(t) = c\partial_r$, para algum constante c, o que completa a prova. □

Teorema 2.8

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ *aberto. Seja* $g : \Omega \to$ *Bilin*$(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ *uma métrica. Seja* $K \subseteq \Omega$ *compacto. Existe* $\epsilon > 0$ *tal que, para todo* $x \in K$ *e para todo* $y \in B_{g,\epsilon}(x)$*, existe uma única curva* $\gamma : I \to \Omega$ *tal que* $\gamma(0) = x$*,* $\gamma(1) = y$ *e* $l_g[\gamma] = d(x,y)$ *e, além do mais, essa curva é uma geodésica.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in K$, $B_\epsilon(0) \subseteq V_x$ e a restrição de Exp_x a essa bola define um difeomorfismo sobre a sua imagem. Seja $x \in K$. Mostramos que

$$\mathrm{Exp}_x(B_\epsilon(0)) = B_{g,\epsilon}(x).$$

Seja $\xi \in B_\epsilon(0)$. Definimos $\gamma : I \to \Omega$ por $\gamma(t) := \mathrm{Exp}_x(t\xi)$. Verificamos que γ tem comprimento $\|\xi\|$ e que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = \mathrm{Exp}_x(\xi)$. Segue que $d(x, \mathrm{Exp}_x(\xi)) \leq l_g[\gamma] = \|\xi\| < \epsilon$ e $\mathrm{Exp}_x(\xi) \in B_{g,\epsilon}(x)$. Como $\xi \in B_\epsilon(0)$ é qualquer, segue que $\mathrm{Exp}_x(B_\epsilon(0)) \subseteq B_{g,\epsilon}(x)$.

Seja agora $y \in B_{g,\epsilon}(x)$. Seja $\gamma : I \to \Omega$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ e $l_g[\gamma] < \epsilon$. Mostramos que $\gamma(I) \subseteq \mathrm{Exp}_x(B_\epsilon(0))$. Supomos o contrário. Denotamos $h := \mathrm{Exp}_x^* g$. Seja

$$T := \gamma^{-1}(\mathrm{Exp}_x(B_\epsilon(0))^c),$$

e observamos que esse subconjunto é fechado. Seja $t_0 \in T$ o infimo desse conjunto. Definimos $\nu : [0, t_0[\to B_\epsilon(0)$ por $\nu(t) := \mathrm{Exp}_x^{-1}(\gamma(t))$. Como $l_h[\nu] \leq l_g[\gamma] < \epsilon$, segue pelo Lema 2.7 que $\nu([0, t_0[)$ é contido em um subconjunto compacto de $B_\epsilon(0)$. Em particular,

$$\gamma(t_0) \in \overline{\gamma[0, t_0[} \subseteq \mathrm{Exp}_x(\overline{\nu([0, t_0[)}) \subseteq \mathrm{Exp}_x(B_\epsilon(0)),$$

o que é absurdo. Segue que $\gamma(I) \subseteq \mathrm{Exp}_x(B_\epsilon(0))$ como desejado. Em particular, $y = \gamma(1) \in \mathrm{Exp}_x(B_\epsilon(0))$ e como $t \in B_{g,\epsilon}(x)$ é qualquer, segue que $B_{g,\epsilon}(x) \subseteq \mathrm{Exp}_x(B_\epsilon(0))$, e esses dois subconjuntos coincidem, como afirmado.

Finalmente, verificamos que, para todo $y := \mathrm{Exp}_x(\xi) \in B_{g,\epsilon}(x)$, a curva $\gamma_y(t) := \mathrm{Exp}_x(t\xi)$ é a única curva tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ e $l_g[\gamma] = d(x, y)$. Isso completa a prova. □

Corolario 2.9

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Sejam $x, y \subseteq X$ pontos de X. Seja $\gamma : I \to X$ uma curva C^1 por partes tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ e $l[\gamma] = d(x, y)$. Então γ é uma geodésica. em particular, γ é suave.

Prova: Supomos que γ é parametrizada por comprimento de arco. Seja $t \in I$. Seja (U, V, Φ) uma carta de X em torno de $\gamma(t)$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\gamma([t - \epsilon, t + \epsilon]) \subseteq U$. Seja g a metrica de Ψ em V. Observamos que $\Phi \circ (\gamma|_{[t-\epsilon,t+\epsilon]})$ realiza a distância em V entre $(\Phi \circ \gamma)(t - \epsilon)$ e $(\Phi \circ \gamma)(t + \epsilon)$ com respeito a g. Pelo Teorema 2.8, reduzindo ϵ se for necessário, podemos supor que a única curva em Ω de $(\Phi \circ \gamma)(t - \epsilon)$ a $(\Phi \circ \gamma)(t + \epsilon)$ cujo comprimento é igual à distância entre esses dois pontos é uma geodésica. Isto é, $\Phi \circ (\gamma|_{[t-\epsilon,t+\epsilon]})$ é uma geodésica. Como $t \in I$ é qualquer, o resultado segue. □

Concluimos essa seção estudando as propriedades básicas das geodésicas construidas no Teorema 2.8.

Lema 2.10

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Para todo subconjunto compacto K de Ω, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$, e para toda geodésica $\gamma : I \to B_\epsilon(x)$ de g, a função

$$\phi(t) := \|\gamma(t) - x\|_{\mathrm{euc}}^2$$

é convexa.

Prova: Seja $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(K) \subseteq \Omega$. Seja $C > 0$ tal que $\|\Gamma(y)\| \leq C$ para todo $y \in \overline{B}_r(K)$. Seja $x \in K$. Para simplificar, podemos supor que $x = 0$. Derivando ϕ duas vezes, e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos para $\epsilon < r$ e para toda geodésica $\gamma : I \to B_\epsilon(0)$,

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}(t) &= 2\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathrm{euc}} + 2\langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle_{\mathrm{euc}} \\
&= 2\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\mathrm{euc}} - 2\langle \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t), \gamma(t) \rangle_{\mathrm{euc}}. \\
&\geq 2(1 - C\epsilon)\|\dot{\gamma}(t)\|_{\mathrm{euc}}^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Segue que, quando $\epsilon < 1/C$, ϕ é convexa, como desejada. □

Lema 2.11

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Para todo subconjunto compacto K de Ω, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in K$ e para todo $y_1, y_2 \in B_\epsilon(x)$, existe uma única geodésica $\gamma : I \to B_\epsilon(x)$ tal que $\gamma(0) = y_1$, $\gamma(1) = y_2$ e $l_g[\gamma] = d(y_1, y_2)$.

Prova: Seja $\epsilon_1 > 0$ tal que $\overline{B}_{\epsilon_1}(K)$ seja um subconjunto compacto de Ω. Pelo Lema 2.10, podemos supor que, para todo $x \in K$ e para todo geodésica $\gamma : I \to \overline{B}_{\epsilon_1}(x)$, a função $\phi(t) := \|\gamma(t) - x\|^2_{\mathrm{euc}}$ é convexa. Pelo Teorema 2.8, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y_1 \in \overline{B}_{\epsilon_1}(K)$ e para todo $y_2 \in B_{g,\delta}(y_1)$, existe uma única geodésica $\gamma : I \to \Omega$ tal que $\gamma(0) = y_1$, $\gamma(1) = \gamma_2$ e $l_g[\gamma] = d(y_1, y_2)$. Por compacidade, reduzindo δ se for necessário, podemos supor que $B_{3\delta,g}(x) \subseteq B_{\epsilon_1}(x)$ para todo $x \in K$. Seja $\epsilon_2 > 0$ tal que $B_{\epsilon_2}(x) \subseteq B_{\delta,g}(x)$. Sejam agora $x \in K$, $y_1, y_2 \in B_{\epsilon_0}(x)$, e $\gamma : I \to \Omega$ e $\phi : I \to \mathbb{R}$ a geodésica e a função acima mencionadas. Como $d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x) + d(y_2, x) < 2\delta$, $\gamma(I) \subseteq B_{3\delta,g}(x) \subseteq B_{\epsilon_1}(x)$. Como $\phi(0), \phi(1) < \epsilon_2^2$, segue por convexidade que $\phi(t) < \epsilon_2^2$ para todo t. Concluimos que $\gamma(t) \in B_{\epsilon_2}(0)$ para todo t, como desejado. □

3 - Cartas exponenciais.

Definição 3.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Seja $x \in \Omega$ e seja (U, V, Φ) uma carta de Ω. Dizemos que (U, V, Φ) é uma **carta exponencial** *de g* **em torno de** *x quando $x \in U$, $\Phi(x) = 0$, V é radial e Φ^{-1} é a aplicação exponencial de g em x.*

Lema 3.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e radial. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Supomos que $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Se g é a métrica de uma carta exponencial então, para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$, a curva $\gamma(t) := t\xi$ é uma geodésica com velocidade de $\|\xi\|_{\mathrm{euc}}$.

Observação: Quando g tem essa propriedade, a sua aplicação exponencial em 0 é trivialmente a identidade. Em particular, segue que g é trivialmente a métrica de uma carta exponencial. **Prova:** Seja $\tilde{\Omega}$ aberto. Seja $\tilde{g}$ uma métrica sobre $\tilde{\Omega}$. Seja $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$ e seja (U, V, Φ) uma carta exponencial de $\tilde{g}$ em torno de x tal que $V = \Omega$ e $\Psi^*\tilde{g} = g$. Seja $\xi \in \mathbb{R}^m$. Definimos $\gamma(t) = t\xi$. Como V é radial, $I := \gamma^{-1}(V)$ é um intervalo em torno de 0. Como $\Psi := \mathrm{Exp}_x$, $\Psi \circ \gamma$ é uma geodésica de $\tilde{g}$. Segue por invariança que γ é uma geodésica de g. Finalmente, como $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$,

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_g = \|\dot{\gamma}(0)\|_g = \|\dot{\gamma}(0)\|_{\mathrm{euc}} = \|\xi\|_{\mathrm{euc}},$$

o que completa a prova. □

Definição 3.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e radial. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Dizemos que g é **exponencial** *quando $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ e, para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$, a curva $\gamma(t) := t\xi$ é uma geodésica.*

Vimos que, a menos de reparametrização, toda métrica é em todo lugar localmente uma métrica geodésica. Além do mais, a menos de uma rotação, essa reparametrização é única.

Dessa forma, concebemos as métricas geodésicas como as métricas escritas em forma normal. É por isso que as propriedades das métricas geodésicas têm um papel fundamental na geometria riemanniana.

Lema 3.4

Seja $\omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e radial. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica geodésica sobre Ω. Então

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(x^2) \text{ e}$$
$$\Gamma^k_{ij}(x) = O(x).$$

Prova: Seja $\xi \in \mathbb{R}^m$. Seja $\gamma(t) := t\xi$. Como γ é uma geodésica, para todo k,

$$\Gamma^k_{ij}(0)\xi^i\xi^j = 0.$$

Para todo k, como $\Gamma^k_{ij}(0)$ é simétrica, segue que $\Gamma^k_{ij}(0)$, o que prova a segunda afirmação. Em particular, para todo i, j, k,

$$A_{ijk} := g_{ik,j}(0) + g_{jk,i}(0) - g_{ij,k}(0) = 0.$$

Como g é simétrica, segue que

$$g_{ij,k}(0) = \frac{1}{2}(A_{kij} + A_{jki}) = 0,$$

o que prova a primeira afirmação. □