1 - Geodésicas. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Sejam $x, y \in X$ dois pontos. Seja $\gamma : I \to X$ uma curva suave que minimiza distância de x a y. Isto é

$$l[\gamma] = d(x, y).$$

Observamos que, para todo $t_1 < t_2 \in I$, a restrição de γ ao subintervalo $[t_1, t_2]$ também minimiza distância entre $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$. Em particular, escolhendo t_1 e t_2 suficientemente próximos um do outro, podemos supor que o trecho $\gamma([t_1, t_2])$ está contido no domínio de uma carta (U, V, Φ). Assim, para entender curvas que minimizam comprimento em X, estudamos curvas que minimizam comprimento dentro de uma carta.

Lema e Definição 1.1

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Seja $\gamma : I \to \Omega$ uma curva parametrizada por velocidade constante. Então γ é um ponto crítico do funcional de comprimento se e somente se

$$\ddot{\gamma}^i(t) + \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) = 0, \tag{1}$$

onde $\Gamma : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ é definida por

$$\Gamma^i_{jk}(x) := \frac{1}{2} g^{im}(x)(g_{jm,k}(x) + g_{km,j}(x) - g_{ij,m}(x)). \tag{2}$$

Chamamos (1) *a* **equação geodésica** *e chamamos Γ o* **símbolo de Christoffel** *de g.*

Prova: Sem perder generalidade, podemos supor que γ é parametrizada por comprimento de arco. Seja $\nu : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ tal que $\mathrm{Supp}(\nu) \subseteq]a, b[$. Definimos $\gamma :] - \epsilon, \epsilon[\times I \to \mathbb{R}^m$ por

$$\tilde{\gamma}(s, t) := \gamma(t) + s\nu(t).$$

Para ϵ suficientmente pequeno, $\mathrm{Im}(\tilde{\gamma}) \subseteq \Omega$. Para todo $s \in] - \epsilon, \epsilon[$, definimos $\gamma_s := \tilde{\gamma}(s, \cdot)$ e $l_s := l[\gamma_s]$. Como γ é um ponto crítico de l,

$$\left.\frac{\partial l}{\partial s}\right|_{s=0} = 0.$$

Utilizando o fato de γ ser parametrizada por comprimento de arco, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s} \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma_s(t))\dot{\gamma}^i_s(t)\dot{\gamma}^j_s(t)dt}\,\bigg|_{s=0} &&= 0\\
\Rightarrow\quad &\int_a^b \frac{1}{2} g_{ij,k}(\gamma_0(t)) \frac{\partial \gamma^k_s}{\partial s}(t)\bigg|_{s=0} \dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) + g_{ij}(\gamma_0(t)) \frac{\dot{\gamma}^i}{\partial s}(t)\bigg|_{s=0} \dot{\gamma}^j_0(t)dt &&= 0\\
\Rightarrow\quad &\int_a^b \frac{1}{2} g_{ij,k}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\nu^k(t) + g_{ij}(\gamma(t))\dot{\nu}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)dt &&= 0\\
\Rightarrow\quad &\int_a^b \frac{1}{2} g_{ij,k}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\nu^k(t) - g_{ij,k}(\gamma(t))\dot{\gamma}^k(t)\dot{\gamma}^j(t)\nu^i(t)\\
&\qquad - g_{ij}(\gamma(t))\ddot{\gamma}^j(t)\nu^i(t)dt &&= 0\\
\Rightarrow\quad & - \int_a^b g_{ij}(\gamma(t))\big(\ddot{\gamma}^j(t) + \Gamma^j_{pq}(\gamma(t))\dot{\gamma}^p(t)\dot{\gamma}^q(t)\big)\nu^i(t)dt &&= 0.
\end{aligned}$$

Como essa relação vale para toda perturbação ν de γ, o resultado segue. $\square$

Definição 1.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Denotamos Γ o símbolo de Christoffel de g. Dizemos que uma curva $\gamma : I \to \Omega$ é uma geodésica quando é solução da equação de derivadas ordinárias

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) = 0. \tag{3}$$

Lema 1.3

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $g : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ uma métrica. Seja $\gamma : I \to \Omega$ uma geodésica de g. Então

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_g := \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)}$$

é constante.

Prova: De fato

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|\dot{\gamma}(t)\|_g &= \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|_g}\big(g_{ij,k}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) + 2g_{ij}(\gamma(t))\ddot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\big) \\
&= \frac{2}{\|\dot{\gamma}(t)\|_g}g_{ij}(\gamma(t))\big(\ddot{\gamma}^i(t) + \Gamma^j_{pq}(\gamma(t))\dot{\gamma}^p(t)\dot{\gamma}^q(t)\big)\dot{\gamma}(t) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como desejado. $\square$

O Lema 1.1 mostra que toda curva suave com velocidade constante que é um ponto crítico do funcional de comprimento é uma geodésica. Reciprocamente, pelo Lema 1.3, toda geodésica tem velocidade constante e é então um ponto crítico do funcional de comprimento. Contudo, como nem todo ponto crítico minimiza, esse resultado não é suficiente para provar a existência de curvas minimizantes. Além do mais, esse resultado também não é suficiente para provar que as curvas minimizantes, caso existam, sejam suaves. Para resolver esses dois problemas, é necessário estudar mais detalhadamente as soluções da equação geodésica.

Primeiro, estudamos como o símbolo de Christoffel é afetado por reparametrizações.

Definição 1.4

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Um **tensor de tipo** $(2,1)$ *sobre Ω é uma função $\sigma : \Omega \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.*

Definição 1.5

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Seja $\phi : U \to V$ um difeomorfismo. Seja $\sigma : V \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ um tensor de tipo $(2,1)$. O **pull back** *de σ por ϕ é o tensor de tipo $(2,1)$ $\phi^*\sigma : U \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ definido por*

$$\phi^*\sigma)(x)(\xi, \nu) = D\phi(x)^{-1}\sigma(y)(D\phi(x)\xi, D\phi(x)\nu)$$

onde $y := \phi(x)$.

Exercício*: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $\phi : U \to U$ a aplicação identidade. Isto é $\phi(x) = x$. Seja $\sigma : U \to \mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ um tensor de tipo $(2,1)$. Mostre que

$$\phi^*\sigma = \sigma. \qquad \square$$

Exercício**: Sejam $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $\phi : U \to V$ e $\psi : V \to W$ difeomorfismos. Seja $\sigma : W \to \mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ um tensor de tipo $(2,1)$. Mostre que

$$(\psi \circ \phi)^*\sigma = \phi^*(\psi^*\sigma). \qquad \square$$

Em termos abstratos, escrevemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}^* &= \mathrm{Id}, \text{ e} \\ (\psi \circ \phi)^* &= \phi^* \circ \psi^*. \end{aligned}$$

Isso significa que a operação de pull back para tensores de tipo $(2,1)$ é um functor contravariante.

Lema 1.6

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $g : U \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ e $g : V \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ métricas sobre U e V respectivamente. Denotamos Γ^g e Γ^h os seus respectivos símbolos de Christoffel. Se $g = \phi^*h$, então, para todo $x \in U$ e para todo $\xi, \nu \in \mathbb{R}^m$,

$$\Gamma^g(x)(\xi, \nu) = (\phi^*\Gamma^h)(x)(\xi, \nu) + D\phi(x)^{-1}D^2\phi(x)(\xi, \nu). \tag{4}$$

Prova: De fato

$$\begin{aligned}
g_{im}(x)\Gamma^{g,m}_{jk}(x) &= \frac{1}{2}\big(g_{ji,k}(x) + g_{ki,j}(x) - g_{jk,i}(x)\big) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(h_{pq}\frac{\partial \phi^p}{\partial x_j}\frac{\partial \phi^q}{\partial x_i}\right)(x) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(h_{pq}\frac{\partial \phi^p}{\partial x_k}\frac{\partial \phi^q}{\partial x_i}\right)(x) \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{pq}\frac{\partial \phi^p}{\partial x_j}\frac{\partial \phi^q}{\partial x_k}\right)(x)\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial \phi^p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \phi^q}{\partial x_j}(x)\frac{\partial \phi^r}{\partial x_k}(x)\big(h_{qp,r}(y) + h_{rp,q}(y) - h_{qr,p}(y)\big) \\
&\qquad + h_{pq}(y)\frac{\partial^2 \phi^p}{\partial x_j \partial x_k}(x)\frac{\partial \phi^q}{\partial x_i}(x) \\
&= \frac{\partial \phi^p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \phi^q}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \phi^r}{\partial x_k}(x) h_{pn}(y)\Gamma^{h,n}_{qr}(y) \\
&\qquad + h_{pq}(y)\frac{\partial^2 \phi^p}{\partial x_j \partial x_k}(x)\frac{\partial \phi^q}{\partial x_i}(x) \\
&= g_{im}(x)(D\phi(x)^{-1})^m_n (D\phi(x))^q_j (D\phi(x))^r_k \Gamma^{h,n}_{qr}(y) \\
&\qquad + g_{im}(x)(D\phi(x)^{-1})^m_n \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x_j \partial x_k}(x),
\end{aligned}$$

e o resultado segue. $\square$

Lema 1.7

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Sejam $g : U \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e $h : V \to Bilin(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ métricas sobre U e V respectivamente. Seja $\phi : U \to V$ um difeomorfismo. Seja $\gamma : I \to U$ uma curva suave. Se $\phi^* h = g$, então γ é uma geodésica de g se e somente se $\phi_* \gamma$ é uma geodésica de h.

Prova: Denotamos $\nu := \phi_* \gamma$. Então

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}^m(t) &= \frac{\partial \phi^m}{\partial x_i}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t) \\
\Rightarrow \quad \ddot{\nu}^m(t) &= \frac{\partial^2 \phi^m}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) + \frac{\partial \phi^m}{\partial x_i}(\gamma(t))\ddot{\gamma}^i(t).
\end{aligned}$$

Segue por (4) que

$$\ddot{nu}^m(t) + \Gamma^h(\nu(t))^m_{pq}\dot{\nu}^p(t)\dot{\nu}^q(t) = \frac{\partial \phi^m}{\partial x_i}(\gamma(t))\big(\ddot{\gamma}^i(t) + \Gamma^g(\gamma(t))^k_{ij}\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\big),$$

e o resultado segue. $\square$

Definição 1.8

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja $\gamma : I \to X$ uma curva suave. Dizemos que γ é uma geodésica se e somente se, para toda carta (U, V, Φ), a restrição de $(\Phi \circ \gamma)$ a $\gamma^{-1}(U)$ é uma geodésica da métrica g de Ψ.

Exercício**: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Seja $\gamma : I \to X$ uma curva suave. Seja $(U_\alpha, V_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de cartas de X tal que

$$\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Mostre que γ é uma geodésica se e somente se, para todo α, e restrição de $(\Phi_\alpha \circ \gamma)$ a $\gamma^{-1}(U_\alpha)$ é uma geodésica da métrica g_α de Ψ_α.