1 - Subvariedades. Heuristicamente, uma variedade é um objeto localmente parametrizável por abertos de espaços euclideanos. Nessa seção, introduzimos uma classe de subconjuntos de espaços euclideanos com essa propriedade. Contudo, é vantajoso observar que essa classe não esgota todos os objetos, e nem todos os subconjuntos de espaços euclideanos, que são localmente parametrizáveis. Também é vantajoso observar que as variedades não esgotam os espaços geométricos que merecem ser estudados.

Precisamos primeiro de algumas definições.

Definição

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$.

(1) Dizemos que f é uma **submersão** *quando $Df(x)$ é sobrejetiva para todo x.*

(2) Dizemos que f é uma **imersão** *quando $Df(x)$ é injetiva para todo x.*

(3) Dizemos que f é um **mergulho** *quando ela é uma imersão e é um homeomorfismo sobre a sua imagem $X := f(U)$.*

Observação: Pelo teorema de posto-nulidade, quando f é uma submersão, $n \leq m$, enquanto, quando f é uma imersão, $n \geq m$.

Definição

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ um subconjunto. Dizemos que X é uma **subvariedade** *(de* **dimensão** *m, ou de* **codimensão** *n) quando, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança Ω de x em $\mathbb{R}^{m+n}$ e uma submersão $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$X \cap \Omega = f^{-1}(\{0\}).$$

Isto é, uma subvariedade é um subconjunto que é em todo lugar localmente o conjunto de nível de alguma submersão.

Para estudar a geometria das variedades, precisaremos do teorema da função inversa, que concebemos como o teorema fundamental da geometria diferencial. No contexto atual, enunciamos esse resultado da seguinte maneira.

Teorema 1.1, Teorema de função inversa

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ suave. Seja $x_0 \in \Omega$. Se $Df(x_0)$ é inversível, então existem

(1) uma vizinhança U de x_0 em Ω,

(2) uma vizinhança V de $y_0 := f(x_0)$ em $\mathbb{R}^m$, e

(3) um difeomorfismo suave $g : V \to U$

tais que, para todo $x \in U$,

$$(g \circ f)(x) = x.$$

2 - A estrutura diferencial induzida de uma subvariedade. Trivialmente, por ser um subconjunto de um espaço topol]ogico metrizável e separável, toda subvariedade também é metrizável e separável. Nessa seção definimos uma estrutura diferencial canônica de toda subvariedade que fará dela então uma variedade. Em primeiro lugar, isso significa que toda subvariedade é em todo lugar localmente parametrizável, como desejavamos. Porém, precisamos de um pouco mais, pois o estudo de qualquer teoria matemática é sempre mais fácil quando podemos contar com a unicidade. Não obstante, uma vez que existe uma estrutura diferencial sobre um espaço topológico, existe de fato uma infinidade de tais estruturas sobre esse espaço. De modo geral na matemática, resolvemos esse tipo de problema acrescentando condições até garantir a unicidade. No caso de subvariedades, veremos que existe apenas uma cujas cartas são todas imersões. Essa estrutura diferencial será chamada a **estrutura diferencial induzida**.

Precisamos primeiro de um segundo resultado fundamental que adapta o teorema de função inversa ao estudo de submersões.

Teorema 2.1, Teorema de submersão

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma submersão. Então, para todo $x_0 \in \Omega$, existem

(1) uma vizinhança U de x_0 em Ω,

(2) uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$,

(3) uma vizinhança W de $z_0 := f(x_0)$ em $\mathbb{R}^n$, e

(4) um difeomorfismo $g : V \times W \to U$

tais que, para todo $(y, z) \in V \times W$,

$$(f \circ g)(y, z) = z.$$

Prova: Seja $x_0 \in \Omega$. Seja $E := \mathrm{Ker}(Df(x_0))$. Como f é uma submersão, segue pelo teorema de posto-nulidade que $\mathrm{Dim}(E) = n$. Seja $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to E$ uma projeção. Definimos $\tilde{f} : \Omega \to E \oplus \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{f}(x) := (\pi(x - x_0), f(x)).$$

Verificamos que $D\tilde{f}(x_0)$ é inversível. Segue pelo teorema da função inversa que existem uma vizinhança $\tilde{U}$ de x_0 em Ω, uma vizinhança $\tilde{W}$ de $(0, z_0)$ em $E \oplus \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $\tilde{g} : \tilde{W} \to \tilde{U}$ tais que, para todo $x \in \tilde{U}$,

$$(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x) = x.$$

Como $\tilde{g}$ é um difeomorfismo, para todo $(y, z) \in \tilde{W}$,

$$\begin{aligned} &(\tilde{f} \circ \tilde{g})(y, z) = (\tilde{g}^{-1} \circ (\tilde{g} \circ \tilde{f}) \circ \tilde{f})(y, z) = (\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{g})(y, z) = (y, z) \\ \Rightarrow &(f \circ \tilde{g})(y, z) = (\pi_2 \circ (\tilde{f} \circ \tilde{g}))(y, z) = \pi_2(y, z) = z, \end{aligned}$$

onde $\pi_2 : E \oplus \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a projeção sobre o segundo fator. Sejam V uma vizinhança de 0 em E e W uma vizinhança de z_0 em $\mathbb{R}^n$ tais que $V \times W \subseteq \tilde{W}$. Denotamos $U := \tilde{g}(V \times W)$ e $\tilde{g} := g|_{V \times W}$. Verificamos que U, V, W e g são os abertos e a função desejados. $\square$

Teorema 2.2

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Para todo $x_0 \in X$, existem

(1) uma vizinhança U de x_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$,

(2) uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$,

(3) uma vizinhança W de 0 em $\mathbb{R}^n$, e

(4) um difeomorfismo $\Phi : V \times W \to U$

tais que

$$X \cap U = \Phi(V \times \{0\}).$$

Observação: Esse teorema significa que toda subvariedade é localmente aplanível. Em outros termos, a menos de um difeomorfismo de um aberto do espaço ambiente, toda subvariedade é em todo lugar localmente um aberto de um subespaço afim.

Prova: Seja $x_0 \in X$. Como X é uma subvariedade, existem uma vizinhança Ω de x_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$ e uma submersão $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tais que $X \cap \Omega = f^{-1}(\{0\})$. Pelo teorema da submersão, existem uma vizinhança U de x_0 em Ω, uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$, uma vizinhança W de 0 em $\mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $g : V \times W \to U$ tais que, para todo $(y, z) \in V \times W$,

$$(f \circ g)(y, z) = z.$$

Afirmamos que $X \cap U = g(V \times \{0\})$. Seja primeiro $x = g(y, z) \in X \cap U$. Então

$$z = (f \circ g)(y, z) = f(x) = 0,$$

e, como $x \in X \cap U$ é qualquer, segue que $X \cap U \subseteq g(V \times \{0\})$. Seja agora $x = g(y, 0) \in g(V \times \{0\})$. Então

$$f(x) = (f \circ g)(y, 0) = 0,$$

e, como $x \in g(V \times \{0\})$ é qualquer, segue que $f(V \times \{0\}) \subseteq X \cap U$. Concluímos que esses dois subconjuntos coincidem, como afirmado. $\square$

Teorema 2.3

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ uma subvariedade. Existe um único atlas maximal $\mathcal{A}$ de X tal que uma carta (U, V, Φ) de X é um elemento de $\mathcal{A}$ se e somente se $\Psi := \Phi^{-1}$ é uma imersão. Chamamos $\mathcal{A}$ a estrutura diferencial **induzida** *de X.*

Observação: Todo subconjunto aberto $X \subseteq \mathbb{R}^m$ é uma subvariedade de codimensão zero. Nesse caso, a estrutura diferencial induzida trivialmente coincide com a estrutura diferencial usual. Todo subconjunto aberto X de um subespaço afim E de $\mathbb{R}^m$ também é uma subvariedade. Nesse caso, a estrutura diferencial induzida coincide com a estrutura usual que X herda de E.

Prova: Seja $x_0 \in X$. Pelo Teorema 2.2, existem uma vizinhança $\tilde{U}$ de x_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$, uma vizinhança $\tilde{V}$ de 0 em $\mathbb{R}^m$, uma vizinhança $\tilde{W}$ de 0 em $\mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $\tilde{\Psi} : \tilde{V} \times \tilde{W} \to \tilde{U}$ tais que

$$X \cap \tilde{U} = \tilde{\Psi}(\tilde{V} \times \{0\}).$$

Denotamos $U := X \cap \tilde{U}$, $V := \tilde{V} \times \{0\}$, $\Phi := \Psi^{-1}|_U$ e $\Psi := \Psi|_V$. Verificamos que (U, V, Φ) é uma carta de X e que Ψ é uma imersão.

Seja agora (U', V', Φ') uma outra carta de X. Denotamos $\Omega := \Phi'(U \cap U')$. Afirmamos que essas duas cartas são compatíveis se e somente se Ψ' é uma imersão sobre Ω. Denotamos $\tau := \Phi \circ \Psi'$. Supomos primeiro que essas duas cartas são compatíveis, isto é, que τ é um difeomorfismo. Como Ψ é uma imersão, segue que $\Psi' = \Psi \circ (\Phi \circ \Psi') = \Psi \circ \tau$ também é, como desejado. Supomos agora que Ψ' é uma imersão. Seja $\pi_1 : \tilde{V} \times \tilde{W} \to \tilde{V}$ a projeção sobre o primeiro fator. Como $\tilde{\Psi}$ é um difeomorfismo, e como $\Psi^{-1}(X \cap \tilde{U}) = \tilde{V} \times \{0\}$, $\tau = \Phi \circ \Psi' = \pi_1 \circ \Psi^{-1} \circ \Psi'$ também é uma imersão. Como o domínio e o codomínio dessa função têm a mesma dimensão, segue pelo teorema de posto-nulidade que $D\tau(x)$ é um isomorfismo linear para todo $x \in \Omega$. Segue pelo teorema de função inversa que τ é em todo lugar um difeomorfismo local. Como τ já é um homeomorfismo sobre a sua imagen, segue que essa função é um difeomorfismo, como desejado. Isso completa a prova da afirmação.

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as cartas (U, V, Φ) de X tais que Ψ é uma imersão. Pelo que precede, todo par de cartas de $\mathcal{A}$ é compatível e, pelo Teorema 2.2, $\mathcal{A}$ recobre X. Segue que $\mathcal{A}$ é um atlas de X. Seja (U', V', Φ') uma outra carta de X compatível com $\mathcal{A}$. Seja $x \in V'$ e seja (U, V, Φ) uma carta de $\mathcal{A}$ tal que $\Psi'(x) \in U$. Em particular $x \in \Omega := \Phi'(U \cap U')$. Pelo que precede, Ψ' é uma imersão sobre Ω. Como $x \in V'$ é qualquer, segue que Ψ' é uma imersão sobre todo V'. Concluímos que uma carta (U', V', Φ') de X é compatível com $\mathcal{A}$ se e somente se Ψ' é uma imersão. Isso completa a prova de existência. Em particular, se $\mathcal{A}'$ é um outro atlas de X feita de cartas (U', V', Φ') tais que Ψ' é uma imersão então, por definição, $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Isso prova a maximalidade e também a unicidade de $\mathcal{A}$. $\square$

3 - Mergulhos e subvariedades. Na última seção, vimos que toda subvariedade é em todo lugar localmente parametrizável por uma imersão que, por ser um homeomorfismo sobre a sua imagen, também é um mergulho. Nessa seção mostraremos uma recíproca desse resultado, fechando assim o círculo: toda subvariedade é em todo lugar localmente a imagem de um mergulho, a imagen de todo mergulho é uma subvariedade, e todos esses objetos se encaixam de maniera canônica na teoria mais geral de variedades.

Precisamos primeiro de um terceiro resultado fundamental que adapta o teorema da função inversa ao estudo de imersões.

Teorema 3.1, Teorema de imersão

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão. Então, para todo $x_0 \in \Omega$, existem

(1) uma vizinhança U de x_0 em Ω,

(2) uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^n$,

(3) uma vizinhança W de $z_0 := f(x_0)$ em $\mathbb{R}^m$, e

(4) um difeomorfismo $g : W \to U \times V$

tais que $f(U) \subseteq W$ e, para todo $x \in U$,

$$(g \circ f)(x) = (x, 0).$$

Prova: Seja $x_0 \in \Omega$. Seja $E \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ tal que

$$\mathbb{R}^{m+n} = \mathrm{Im}(Df(x)) \oplus E.$$

Como f é uma imersão, pelo teorema de posto-nulidade, $\mathrm{Dim}(E) = n$. Definimos $\tilde{f} : \Omega \times E \to \mathbb{R}^{m+n}$ por

$$\tilde{f}(x, y) := f(x) + y.$$

Verificamos que $D\tilde{f}(x_0, 0)$ é inversível. Segue pelo teorema de função inversa que existem uma vizinhança $\tilde{U}$ de $(x_0, 0)$ em $\Omega \times E$, uma vizinhança $\tilde{W}$ de $z_0 = f(x_0) = \tilde{f}(x_0, 0)$ em $\mathbb{R}^{m+n}$ e um difeomorfismo $\tilde{g} : \tilde{W} \to \tilde{U}$ tal que, para todo $(x, y) \in \tilde{U}$,

$$(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x, z) = (x, z).$$

Sejam U uma vizinhança de x_0 em Ω e V uma vizinhança de 0 em E tais que $U \times V \subseteq \tilde{U}$. Denotamos $W := \tilde{g}^{-1}(U \times V)$ e $g := \tilde{g}|_W$. Verificamos que U, V, W e g são os abertos e a função desejados. $\square$

Teorema 3.2

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ um mergulho. Então $X := f(\Omega)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{m+n}$. Isto é, a imagem de todo mergulho é uma subvariedade.

Prova: Seja $x_0 \in \Omega$ e denotamos $y_0 := f(x_0)$. Pelo teorema de imersão, existem uma vizinhança $\tilde{U}$ de x_0 em Ω, uma vizinhança $\tilde{V}$ de 0 em $\mathbb{R}^n$, uma vizinhança $\tilde{W}$ de y_0 em $\mathbb{R}^{m+n}$ e um difeomorfismo $\tilde{g} : \tilde{W} \to \tilde{U} \times \tilde{V}$ tais que $f(\tilde{U}) \subseteq \tilde{W}$ e, para todo $x \in \tilde{U}$,

$$(\tilde{g} \circ f)(x) = (x, 0).$$

Como f é um homeomorfismo sobre a sua imagem, existe um aberto $\tilde{W}' \subseteq \tilde{W}$ tal que $f(\tilde{U}) = \tilde{W}' \cap X$. Sejam U uma vizinhança de x_0 em $\tilde{U}$ e V uma vizinhança de 0 em $\tilde{V}$ tais que $U \times V \subseteq \tilde{g}(\tilde{W}')$. Denotamos $W := \tilde{g}^{-1}(U \times V)$ e $g := \tilde{g}|_W$.

Afirmamos que

$$X \cap W = g^{-1}(U \times \{0\}).$$

Seja primeiro $z = g^{-1}(x, 0) \in g^{-1}(U \times \{0\})$. Então,

$$z = g^{-1}(x, 0) = (g^{-1} \circ (g \circ f))(x) = f(x) \in X.$$

Como $z \in g^{-1}(U \times \{0\})$ é qualquer, segue que $g^{-1}(U \times \{0\}) \subseteq X \cap W$. Seja agora $z \in X \cap W$. Em particular,

$$z \in X \cap W \subseteq X \cap \tilde{W}' = f(\tilde{U}).$$

Segue que

$$g(z) \in (g \circ f)(\tilde{U}) \subseteq \tilde{U} \times \{0\},$$

e que

$$z \in W \cap g^{-1}(\tilde{U} \times \{0\}) = g^{-1}(U \times V) \cap g^{-1}(\tilde{U} \times \{0\}) = g^{-1}(U \times \{0\}).$$

Como $z \in X \cap W$ é qualquer, segue que $X \cap W \subseteq g^{-1}(U \times \{0\})$. Isso prova a afirmação.

Finalmente, seja $\pi_2 : U \times V \to V$ a projeção sobre o segundo fator. Como π_2 é uma submersão e g é um difeomorfismo, $h := \pi_2 \circ g$ também é uma submersão. Como

$$X \cap W = g^{-1}(U \times \{0\}) = h^{-1}(\{0\}),$$

segue que x é uma subvariedade, como desejado. $\square$