1 - Variedades.

Definição 1.1

Seja X um espaço topológico. Uma **carta** *(de dimensão m) de X é uma tripla (U, V, Φ) onde*

(1) $U \subseteq X$ é aberto,

(2) $V \subseteq \mathbb{R}^m$ é aberto, e

(3) $\Phi : U \to V$ é um homeomorfismo.

Frequentemente denotaremos por Ψ a função inversa de Φ.

Definição 1.2

Seja X um espaço topológico. Para $i \in \{1, 2\}$, seja (U_i, V_i, Φ_i) uma carta de X. A **aplicação de transição** *de (U_1, V_1, Φ_1) em (U_2, V_2, Φ_2) é a função $\tau : \Phi_1(U_1 \cap U_2) \to \Phi_2(U_1 \cap U_2)$ definida por*

$$\tau := \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} = \Phi_2 \circ \Psi_1.$$

Dizemos que essas cartas são **compatíveis** *quando τ é um difeomorfismo suave.*

Exercício**: Mostre que se duas cartas de um espaço topológico X têm interseção não trivial, então elas têm a mesma dimensão.

Definição 1.3

Seja X um espaço topológico. Um **atlas** *de X é um conjunto $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, V_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}\}$ de cartas de X tal que*

(1) $X \subseteq \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, e

(2) para todo $\alpha, \beta \in A$, $(U_\alpha, V_\alpha, \Phi_\alpha)$ é compatível com $(U_\beta, V_\beta, \Phi_\beta)$.

Definição 1.4

Seja X um espaço topológico. Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ dois atlas de X. Dizemos que esses atlas são **compatíveis** *quando toda carta de $\mathcal{A}_1$ é compatível com toda carta de $\mathcal{A}_2$. Isto é, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são compatíveis se e somente se $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ também é um atlas.*

Antes do continuar, é vantajoso observar como esses conceitos se encaixam na teoria de conjuntos. Lembramos primeiro que, do ponto de vista da teoria de conjuntos, uma função $f : X \to Y$ se identifica com o seu gráfico, que é o subconjunto $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ do produto cartesiano $X \times Y$. Assim, uma carta de um espaço topológico X é um subconjunto Y de $X \times \mathbb{R}^m$ tal que

(1) $\pi_1|_Y$ e $\pi_2|_Y$ são injetivas,

(2) $\pi_1(Y)$ e $\pi_2(Y)$ são abertos, e

(3) $\pi_2 \circ \pi_1^{-1} : U \to V$ é um homeomorfismo,

onde $\pi_1 : X \times \mathbb{R}^m \to X$ e $\pi_2 : X \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ são as projeções canônicas. Segue que todo atlas de X é um subconjunto do espaço de subconjuntos de $X \times \mathbb{R}^m$. Em particular, podemos falar do conjunto de todas as cartas de X, o conjunto de todos os atlas de X, classes de equivalência de atlas de X, etc.

Exercício**: Mostre que a relação de compatibilidade de cartas é reflexiva, simétrica mas não transitiva

Exercício**: Mostre que a relação de compatibilidade de atlas é uma relação de equivalência.

Exercício**: Mostre que toda classe de equivalência $[\mathcal{A}]$ de atlas sobre X contém um único elemento maximal, isto é, um atlas $\mathcal{A}' \in [\mathcal{A}]$ tal que, para todo outro elemento $\mathcal{A}'' \in [\mathcal{A}]$, $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}'$.

Definição 1.5

Uma **variedade** *é um par* $(X, [\mathcal{A}])$ *onde*

(1) X *é um espaço topológico separável e metrizável, e*

(2) $[\mathcal{A}]$ *é uma classe de equivalência de atlas de* X*. Chamamos* $[\mathcal{A}]$ *a* **estrutura diferencial** *da variedade. Quando não há ambiguidade, suprimos a estrutura diferencial e denotamos a variedade apenas por* X*.*

Exemplo: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto com a topologia usual. Seja $\mathcal{A}$ o atlas de X que consiste na única carta (X, X, Id). O par $(X, [\mathcal{A}])$ é trivialmente uma variedade. Chamamos essa estrutura diferencial a **estrutura diferencial usual** de X. Quando trabalhamos com um subconjunto aberto de um espaço euclideano, utilizaremos essa estrutura diferencial, exceto quando dissemos explicitamente o contrário.

Exemplo: Seja $X := \mathbb{R}$ com a topologia usual. Definimos as cartas

$$\begin{array}{lll} U_1 := \mathbb{R} & V_1 := \mathbb{R} & \Phi_1(x) := x, \text{ e} \\ U_2 := \mathbb{R} & V_2 := \mathbb{R} & \Phi_2(x) := x^3. \end{array}$$

Como $X = U_1 = U_2$, os conjuntos $\mathcal{A}_1 := \{(U_1, V_1, \Phi_1)\}$ e $\mathcal{A}_1 := \{(U_1, V_1, \Phi_1)\}$ são atlas de X. Como a aplicação de transição

$$\tau(x) := (\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(x) = (\Phi_2 \circ \Psi_1)(x) = x^3$$

não é um difeomorfismo, esses dois atlas não são compatíveis. Isto é, $(X, [\mathcal{A}_1])$ e $(X, [\mathcal{A}_2])$ são variedades distintas.

Exercício**: Seja $X := \mathbb{R}$ com a topologia usual. Mostre que o conjunto de classes de equivalência de atlas de X não é enumerável.

Exercício***: Seja $X := \mathbb{R}$ com a topologia usual. Determine a cardinalidade do conjunto de classes de equivalência de atlas de X. Você pode supor a hipótese de continuum.

2 - Funções.

Definição

Sejam $(X, [\mathcal{A}])$ uma variedade e E um espaço de Banach. Dizemos que uma função $f : X \to E$ é suave quando, para toda carta (U, V, Φ) do atlas maximal de $[\mathcal{A}]$, a composição $f \circ \Psi$ é suave.

Exercício**: Sejam $(X, [\mathcal{A}])$ uma variedade, E um espaço de Banach e $f : X \to E$ uma função. Seja $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ um recobrimento de X por subconjuntos abertos. Mostre que f é suave se e somente se $f|_{U_\alpha}$ é suave para todo $\alpha \in A$.

Exercício**: Sejam $(X, [\mathcal{A}])$ uma variedade, E um espaço de Banach e $f : X \to E$. Mostre que f é suave se e somente se existe um atlas $\mathcal{A}' \subseteq [\mathcal{A}]$ tal que, para toda carta (U, V, Φ) de $\mathcal{A}'$, a composição $f \circ \Psi$ é suave.

Exercício*: Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto, E um espaço de Banach e $f : X \to E$. Mostre que f é suave no sentido de funções definidas sobre variedades se e somente se é suave no sentido clássico.

Lema 2.1

Seja X um espaço métrico separável localmente compacto. Existe uma sequência $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos abertos de X tal que

(1) para todo m, $\overline{\Omega}_m$ é compacto,

(2) para todo m, $\overline{\Omega}_m \subseteq \Omega_{m+1}$, e

(3) $X = \cup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m$.

Dizemos que (Ω_m) é uma **exaustão** *de X por abertos relativamente compactos.*

Prova: Seja (x_m) uma sequência densa em X. Para todo m, denotamos

$$R_m := \sup\{r \mid r > 0 \text{ e } \overline{B}_r(x_m) \text{ compacto}\}.$$

Como X é localmente compacto, $R_m > 0$. Para todo m, seja B_m a bola aberta de raio $R_m/2$ em torno de x_m. Afirmamos que (B_m) recobre todo X. De fato, seja $x \in X$. Denotamos

$$R := \sup\{r \mid r > 0 \text{ e } \overline{B}_r(x) \text{ compacto}\}.$$

Como (x_m) é denso em X, existe m tal que $x_m \in B_{R/3}(x)$. Em particular, $2R/3 < R_m$ e então $x \in B_m$, o que prova a afirmação.

Seja $\Omega_1 := B_1$. Definimos as sequências $(\Omega_m) \in X$ e $(N_m) \in \mathbb{N}$ recursivamente tal que, para todo m,

$$N_m := \inf\{n \mid \overline{\Omega}_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_k\} \text{ e}$$

$$\Omega_m := \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

Verificamos que (Ω_m) é a sequência desejada de subconjuntos abertos de X, o que completa a prova. $\square$

No próxima seção, mostraremos o seguinte resultado.

Lema 2.2

Seja X uma variedade. Para todo $x \in X$ e para toda vizinhança Ω de x em X existe uma função suave $f : X \to [0, \infty[$ tal que $f(x) > 0$ e que Supp$(f) \subseteq \Omega$.

Esse lema nos permite mostrar o seguinte resultado fundamental de geometria diferencial.

Teorema 2.3

Seja X uma variedade. Seja $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ um recobrimento de X por subconjuntos abertos. Existe uma família enumerável $(\phi_\beta)_{\beta \in B} : X \to \mathbb{R}$ de funções suaves sobre X tal que

(1) para todo β, $\phi_\beta \geq 0$,

(2) para todo β, existe α tal que Supp$(\phi_\beta) \subseteq U_\alpha$,

(3) para todo $x \in X$, existe uma vizinhança Ω de x em X tal que

$$\#\{\beta \in B \mid \mathrm{Supp}(\phi_\beta) \cap \Omega \neq \emptyset\} < \infty, \text{ e}$$

(4) $\sum_{\beta \in B} \phi_\beta = 1$.

Dizemos que $(\phi_\beta)_{\beta \in B}$ é uma **partição da unidade localmente finita**.

Prova: Seja (Ω_m) um exaustão de X por abertos relativamente compactos. Denotamos $\Omega_{-2} := \Omega_{-1} := \emptyset$. Pelo Lema 2.2, para todo m e para todo $x \in \overline{\Omega}_m \setminus \Omega_{m-1}$, existe uma função suave $\tilde{\phi}_{m,x} : X \to [0, \infty[$ tal que $\tilde{\phi}_{m,x}(x) > 0$ e Supp$(\tilde{\phi}_{m,x}) \subseteq U_\alpha(\Omega_{m+1} \setminus \overline{\Omega}_{m-2})$ para algum α. Por compacidade, para todo m, existe um conjunto finito $\{x_{m,1}, ..., x_{m,n_m}\}$ de elementos de $\overline{\Omega}_m \setminus \Omega_{m-1}$ tal que, para todo $y \in \overline{\Omega}_m \setminus \Omega_{m-1}$,

$$\sum_{i=1}^{n_m} \tilde{\phi}_{m,x_i}(y) > 0.$$

Como o conjunto $\Phi := \left\{\tilde{\phi}_{m,x_i} \mid 1 \leq i \leq n_m\right\}$ é enumerável, podemos escrevê-lo na forma de uma sequência $(\tilde{\phi}_\beta)$. Verificamos que essa sequência tem as propriedades (1), (2) e (3). Em particular, a soma

$$\tilde{\phi} := \sum_{\beta \in B} \tilde{\phi}_\beta$$

é bem definida, suave, e estritamente positiva em todo ponto. Para todo β, definimos então

$$\phi_\beta := \tilde{\phi}_\beta / \tilde{\phi}.$$

Verificamos que (ϕ_β) é a família desejada, e isso completa a prova. $\square$

3 - Funções suaves com suporte compacto. Para todo polinômio $P \in \mathbb{R}[X]$, definimos a função $\phi_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_P(x) := \begin{cases} P(1/x)e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Denotamos $\mathcal{P} := \{\phi_P \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Lema 3.1

Para todo $P \in \mathbb{R}[X]$, ϕ_P é derivável e $\phi'_P \in \mathcal{P}$. Em particular, todo elemento de $\mathcal{P}$ é suave.

Prova: Observamos primeiro que todo elemento de $\mathcal{P}$ é contínua. Seja agora $P \in \mathbb{R}[X]$. Trivialmente, sobre o subconjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ϕ_P é trivialmente derivável e

$$\phi'_P = \phi_Q,$$

onde

$$Q(x) = (P(x) - P'(x))x^2.$$

Como ϕ_Q é contínua, segue pela regra de l'Hôpital que ϕ_P também é derivável em $x = 0$ e que $\phi'_P(0) = 0 = \phi_Q(0)$. Segue que $\phi'_P = \phi_Q \in \mathcal{P}$, como desejado. $\square$

Lema 3.2

Para todo $\epsilon > 0$, existe uma função suave $f : \mathbb{R} \to [\infty[$ tal que

(1) f é crescente,

(2) $f(x) = 0$ para todo $x \leq -\epsilon$, e

(3) $f(x) = 1$ para todo $x \geq \epsilon$.

Prova: Definimos

$$\tilde{f} := \int^x \phi_1(\epsilon + y)\phi(\epsilon - y)dy.$$

Verificamos que $\tilde{f}$ é crescente, $\tilde{f}(x) = 0$ sobre $]-\infty, -\epsilon]$ e $\tilde{f}(x) =: C > 0$ sobre $[\epsilon, \infty[$. Segue que $f(x) := \tilde{f}(x)/C$ é a função desejada, e isso completa a prova. $\square$

Provamos agora Lema 2.2.

Proof of Lema 2.2: Seja (U, V, Φ) uma carta de X em torno de x. Reduzindo U se for necessário, podemos supor que $U \subseteq \Omega$. Também podemos supor que $\Phi(x) = 0$ e que $\overline{B}_2(0) \subseteq V$. Seja $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função construída no Lema 3.2 com $\epsilon = 1$. Definimos $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) := \tilde{f}(2 - \|x\|).$$

Verificamos que f é suave, $f(0) = 1 > 0$ e $\mathrm{Supp}(f) \subseteq \overline{B}_2(0) \subseteq V$. Segue que $f \circ \Phi$ é a função desejada. $\square$