① Deformações Isomonodrômicas

Um tema no qual me interessei bastante é aquele de construir ou entender representações lineares de grupos fundamentais de variedades q. complexas quase projetivas.

Sendo dados X uma variedade (complexa) projetiva e D uma hipersuperfície algébrica sobre X, trata-se de estudar dos morfismos de grupos

$$\pi_1(X \setminus D, *) \longrightarrow GL_m(\mathbb{C});$$

por um certo inteiro $m>0$, chamado posto da representação.

Tais morfismos podem ser obtidos como representações de monodromia de conexões planas de posto m, isto é mapas de feixes de grupos abelianos $\nabla : \mathbb{V} \longrightarrow \Omega^1_{X\setminus D} \otimes \mathbb{V}$ ~~que satisfazem~~

onde $\mathbb{V}$ é o feixe das seções holomorfas de um fibrado vetorial holomorfo de posto m $V \longrightarrow X \setminus D$ acima de $X \setminus D$ e que satisfazem

i) ∇ é $\mathbb{C}$-linear

(Leibniz) ii) $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$
para qualquer $f \in \mathcal{O}_{X\setminus D, x}$, $s \in \mathbb{V}_{X \setminus D, x}$
$x \in X \setminus D$

(∇ plana) (iii) $\nabla^2 = 0$

A monodromia destas conexões obtem-se fazendo a continuação analíticas da seções horizontais da conexão (seções s que satisfazem $\nabla s \equiv 0$)

ao longo dos caminhos que representam os elementos de $\pi_1(X \setminus D, *)$.

A condição $\nabla^2 = 0$ é uma condição de integrabilidade, que ~~geram~~ significa exatamente que a seções horizontais definem uma folheação de codimensão 1 transversa as fibras sobre o espaço total de V.

Isto é, a monodromia de ∇ é exatamente a monodromia do fibrado plano assim associado a ∇.

Reciprocamente, podemos fazer a suspensão de qualquer representação

$$\rho : \pi_1(X \setminus D) \longrightarrow GL_m(\mathbb{C}),$$

obter um fibrado plano de posto m,

$$\xi \in H^1(X \setminus D, GL_m(\mathbb{C}))$$

que corresponde a uma conexão plana de posto m (holomorfa), com a boa monodromia.
Vamos denotar ∇_ρ esta conexão acima de $X \setminus D$

(2) <u>Riemann-Hilbert</u>

Aparece então naturalmente a questão de estender a conexão ∇_e acima de X na sua integralidade. Obviamente, teríamos que aceitar uma certa forma de singularidade ~~para~~ acima de D para a extensão procurada.

Classicamente, o problema de Riemann-Hilbert tratava do caso $X = \mathbb{CP}^1$, $D = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ e de estender ∇_e em uma conexão <u>meromorfa</u> sobre ~~o~~ fibrado trivial acima de $\mathbb{P}^1$.

<u>Definição</u>: Uma conexão meromorfa sobre o fibrado holomorfo $\mathbb{V} \longrightarrow X$ é um mapa de feixes de grupos abelianos

$$\nabla : \mathbb{V} \longrightarrow \Omega^1_X(D) \otimes \mathbb{V}$$

t.q. temos as condições

(i) ∇ é $\mathbb{C}$-linear

(ii) $\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s$,
$\forall (f, s) \in \mathcal{O}_{X,x} \times \mathbb{V}_{X,x}$, $\forall x \in X$.

onde $\Omega^1_X(D)$ ~~são as~~ é o feixe das formas meromorfas sobre X, com polos em D. Se D for minimal com esta propriedade, é chamado o <u>lugar polar de ∇</u>.

Uma conexão meromorfa sobre X é considerada plana se $\nabla_{|X \setminus \text{lugar polar}(\nabla)}$ é plana.

Na sua monografia "Équations différentielles à points singuliers réguliers" ($\simeq 1970$) Pierre Deligne retomou a questão de estender conexões holomorfas planas acima de compactificações projetivas de variedades quase-projetivas de alta dimensão.

Ele ~~[illegible]~~ conseguiu estender as conexões em conexões com "singularidades regulares no infinito".

Neste fim, ele procedeu como segue:

1) Usando o então recente teorema de desingularização de Hironaka, temos a existência de uma compactificação projetiva na qual o divisor no infinito D tem unicamente cruzamentos normais (normal crossing) i.e as únicas singularidades de D são do tipo $V \cap D = \{ y_1 \cdots y_k = 0 \}$ para qualquer carta local $(y_1, \cdots, y_d)$ sobre ~~[illegible]~~ um aberto V de X.

2) Estender a conexão $\nabla_{\mathcal{C}}$ em uma conexão logarítmica neste caso favorável de cruzamentos normais.

(11) (3) 3) Estudar ~~as secções~~ d como o ~~feixe~~ par (V, ∇) está transformado quando passamos de uma compactificação com cruzamentos normais a uma compactificação qualquer.

Depois deste trabalho de Deligne foi considerado como resolvido o problema de Riemann-Hilbert sobre a extensão dos fibrados planos.

Eu queria acrescentar aqui o ponto 2) acima. Neste fim precisamos uma definição.

Definição Uma conexão ~~meromorfa~~ meromorfa é logarítmica se ~~ass~~ é da forma

$$\nabla : V \to \Omega^1_X(\log D) \otimes V$$

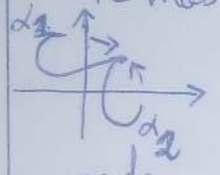
onde $\Omega^1_X(\log D) \subset \Omega^1_X(D)$ são as formas logarítmicas i.e. as formas ω t.q. $\begin{cases} \omega \\ d\omega \end{cases}$ têm polos simples em D.

A ideia da extensão de Deligne é a) de construir uma conexão logarítmica ~~a~~ que tenha a boa monodromia local ao redor de qualquer ponto do divisor com cruzamentos normais D. ~~Depois~~ e b) colar estes modelos locais.

Consideremos então a situação local

$X = \mathbb{D}\times\cdots\times\mathbb{D} = \mathbb{D}^d$ $\qquad D = \{y_1\cdots y_d = 0,\ (y_1,\dots,y_d)\in\mathbb{D}^d\}$

onde $\mathbb{D} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$



Temos $\pi_1(X\setminus D) = \langle \alpha_1,\dots,\alpha_d \mid [\alpha_i,\alpha_j]=1,\ i,j\in[1,n] \rangle$

$\simeq \mathbb{Z}^d$

onde $\alpha_j(t) = \cancel{e}\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{2i\pi t},\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right)$, $t\in[0,1]$

Qualquer fibrado V holomorfo acima de $\mathbb{D}^n$ é trivializável $V\simeq \mathcal{O}_{\mathbb{D}^d}^{\oplus m}$

Uma conexão logarítmica sobre $\mathcal{O}_{\mathbb{D}^d}^{\oplus m}$ é então da forma

$$\mathcal{O}^{\oplus m} \longrightarrow \cancel{\oplus}\,\Omega^1_{\mathbb{D}^d}(\log D)\otimes\mathcal{O}^{\oplus m}$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \longmapsto dZ - A\cdot\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

onde $dZ = \begin{pmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_m \end{pmatrix}$ e A é uma matriz de formas logarítmicas com polos em D:

$$A = \sum_{j=1}^{d} A_j \frac{dy_j}{y_j} + \tilde{A}, \quad A_j \in M_m(\mathbb{C}),\ \tilde{A} \text{ é holomorfa}$$

(4) A condição $\nabla^2 = 0$ fica $A \wedge A = dA = 0$

i.é. $[A_k, A_j] = 0 \quad j,k \in [\![1,d]\!]$ $\quad ([A,B] := AB - BA)$

caso $\tilde{A} \equiv 0$ e a representação de monodromia da conexão dada por $(A_1, \ldots, A_d)$ é

$$\alpha_j \longmapsto \exp(2i\pi A_j) \quad , \quad j = 1, \ldots, d$$

Tendo $\pi_1(X \setminus D) \simeq \mathbb{Z}^d$, ~~sabemos~~ qualquer representação de $\pi_1(X \setminus D)$ é da forma $\alpha_j \longmapsto M_j \; , \; j \in [\![1,d]\!]$

com $M_j M_k = M_k M_j \quad , \; j,k \in [\![1,d]\!]$

Consideremos as decomposições de Jordan das matrizes M_j:

$$M_j = D_j \cdot U_j$$

com D_j semi-simples
U_j ~~nilpotente~~ unipotente

e $D_j U_j = U_j D_j$.

$\forall j \in [\![1,d]\!]$ D_j e U_j são polinomios em M_j, então todas a matrizes do conjunto $\{D_1, U_1, \ldots, D_d, U_d\}$ comutam entre se.

Neste contexto, a menos de uma conjugação comum de todas as matrizes, podemos supor que as matrizes $(D_j)_{j\in[\![1,d]\!]}$ são diagonais

$$D_j = \mathrm{diag}(\lambda^j_1, \dots, \lambda^j_m)$$

Podemos definir i) $C_j = \mathrm{diag}(\theta^j_1, \dots, \theta^j_m)$

onde $e^{2i\pi\theta^j_k} = \lambda^j_k$

$\mathrm{Re}\,\theta^j_k \in [0,1)$

ii) $B_j = \frac{1}{2i\pi}\log(1-X_j) = \frac{-1}{2i\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{X_j^k}{k}$

onde $1-X_j = U_j$

e verificar, com $A_j = B_j + C_j$, $[A_k, A_j] = 0$ $j,k\in[\![1,d]\!]$

e $\exp(2i\pi A_j) = \exp(2i\pi B_j)\exp(2i\pi C_j)$

$= U_j D_j$

<u>Obs</u>: É importante aqui ter escolhido o <u>mesmo</u> logaritmo para todas as ocorrências de um autovalor λ dado; para manter certas comutatividades.

Acabamos de realizar o passo a) de Deligne.

(5) Fica então o problema b) de colar os vários modelos locais com ∇_e, para obter a nossa extensão de ∇_e em uma conexão acima de X.

Mais precisamente, temos uma conexão ∇_e sobre $X \setminus D$ e conexões ∇_j sobre abertos U_j t.q. $\underbrace{(X \setminus D) \cup \bigcup_j U_j}_{= X}$

Usando a unicidade da suspensão, temos um isomorfismo de conexões φ_j acima de $X \cap U_j$, t.q.

$$\varphi_j^* \nabla_{j|U_j \setminus D} = \nabla_{e|U_j \setminus D}$$

Para a colagem dar certo, é suficiente verificar que o isomorfismo $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ entre $\nabla_{j|U_j \cap U_k \setminus D}$ e $\nabla_{k|U_j \cap U_k \setminus D}$ possui uma extensão holomorfa a $U_j \cap U_k$.

Usando um argumento de ~~tipo~~ codimensão 2, basta verificar que $\varphi_j \circ \varphi_n^{-1}$ é holomorfo no ponto genérico de D, onde é liso.
Em boas coordenadas, acabamos tendo que decidir se um automorfismo de uma conexão local $Z \longmapsto dZ - A_1 \frac{dy_1}{y_1} Z$ definido em $\mathbb{D} \setminus \{y_1 = 0\}$ possui uma extensão holomorfa em $y_1 = 0$.

Nestas condições, ~~o~~ automorfismo é da forma $Z \longmapsto G(y_1)Z$ onde

$y_1 \longmapsto G(y_1)$ é holomorfa em $\mathbb{D}^\times$

$\mathbb{D}^\times \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$

Por outro lado, por um argumento de regularidade, G tem que ser meromorfa sobre $\mathbb{D}$; e usando um desenvolvimento de Laurent para G, podemos verificar que os automorfismos meromorfos são aqueles dados por $G \equiv G_0 \in GL_m(\mathbb{C})$; e segue a holomorficidade.

Eu trabalhei ~~sobre~~ generalizações desta extensão de Deligne usando outros modelos locais.
Nesta direção, eu defini a noção de

(6) "mild transversal model" no meu artigo "Algebraic isomonodromic deformations ..." publicado em Math. Annalen (2017)

<u>Def</u> Uma conexão ~~sobre~~ meromorfa sobre D com polos em $\{y = 0\}$ é "mild" (bem comportada) se todos os seus automorfismos meromorfos são holomorfos.

Usando este conceito eu consegui um resultado sobre deformações isomonôdromi-cas e sua algebraizabilidade:

<u>Deformações isomonodrômicas</u>

<u>Def</u> Considere uma família de curvas algébricas $(\mathcal{E}_t)$ lisas compactos $/\mathbb{C}$ obtidas como fibras de um mapa próprio $X \xrightarrow{\pi} \Delta$

Considere um divisor D sobre X que intersecta cada fibra $\mathcal{E}_t$ em n pontos, $n \geq 0$. Se $t_0 \in \Delta$, $\mathcal{E}_{t_0} = \pi^{-1}(t_0)$ e ∇_0 é uma conexão logarítmica acima de $\mathcal{E}_{t_0}$ com polos em $\mathcal{E}_{t_0} \cap D$, ∇_1 uma deformação isomodrômica de ∇_0 ao longo da família $\mathcal{E}_t$ é

Um fibrado V sobre X munido de uma conexão plana ∇ com polos em D t.q.
$\nabla|_{\mathcal{C}_{t_0}} \underset{hol.}{\simeq} \nabla_0$.

Malgrange (Séminaire du Bois Marie $\simeq 80$) construiu ~~a def~~ a deformação isomonodrômica universal para conexões logarítmicas, acima do espaço de Teichmüller $\widetilde{T}_{g,n}$ (g = gênero ($\mathcal{C}_{t_0}$))

No caso $g=0$, mostrei o seguinte resultado em Math. Ann. 2017
No caso geral, foi mostrado em conjunto com V. Heu (Journal de Math. de Jussieu 2021)

Teorema Considere uma curva compacta lisa $\mathcal{C}_0$ de gênero g, e ∇_0 uma conexão logarítmica sobre $\mathcal{C}_0$, com n polos $x_1,\dots,x_n$, $2g-n+2>0$. Suponha que a monodromia de ∇_0 é semi-simples ou que ~~o~~ posto de ∇_0 é 2.
Então, são equivalentes

(1) O germe da deformação isomonodrômica universal de ∇_0 em $\mathcal{C}_0$ é algebraizável

(2) A órbita de $[\rho] \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathcal{C}_0 \setminus \{x_1,\dots,x_n\}), GL_n(\mathbb{C}))/GL_n(\mathbb{C})$ sob o mapping class group $MCG_{g,n}$ é finita.

(3) Comentários

A condição (1) significa que o germe da deformação isomonodrómica acima de um polidisco bastante pequeno é isomorfa ao germe de uma conexão algébrica sobre uma variedade algébrica.

A ação do mapping class group em (2) é obtida através ~~da ação~~ do morfismo de $MCG_{g,n}$ ~~sobre~~ até $\mathrm{Out}(\pi_1(\mathcal{E}_0 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}))$, fazendo pull-back das representações.

sendo o quociente em $\mathrm{Hom}(\pi_1(\ ), GL_m(\mathbb{C})) / GL_m(\mathbb{C})$ aquele por conjugação:

$$\rho \xmapsto{M} M^{-1} \rho M .$$

Usando este teorema de algebrização é então relevante entender as órbitas finitas em $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathcal{E}_0 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}), GL_m(\mathbb{C})) / GL_m(\mathbb{C}) =: \chi(GL_m)_{g,n}$ para construir conexões algébricas.

(representações de grupos fundamentais quase-~~projetivos~~ projetivos)

Neste sentido o primeiro resultado foi dado por O. Lysovii e Y. Tikhi que classificaram as órbitas finitas de $MCG_{0,4}$ sobre $X_{0,4}(GL_2(\mathbb{C}))$.

No caso de posto 2, $g=0$ esta classificação está relacionada com equações diferenciais clássicas.

<u>Teorema</u> (Cor. de Math. Ann. 2017 G.C.)

Seja (λ_i) uma solução de um Sistema de Garnier que governa a deformação isomonodrômica de uma sl_2-conexão sem polos aparentes sobre $\mathbb{P}^1$ então são equivalentes

(1) (λ_i) têm um número finito de ramos (finite branching)

(2) (λ_i) são funções algébricas

(3) A representação de monodromia ρ da conexão deformada dá uma órbita finita $MCG_{0,n} \cdot [\rho]$.

Este teorema generaliza um teorema de Iwasaki sobre o caso $(\lambda_i) = \lambda_1$, & conexão com 4 polos publicado em Advances in Math. 2008.

(9)

O teorema de Iwasaki indica que as órbitas finitas de Lysovii-Tikhi correspondem às soluções algébricas da famosa equação de Painlevé VI.

Na mesma direção trabalhei sobre classificação de órbitas finitas ~~so~~bre os conjuntos $X_{g,n}$

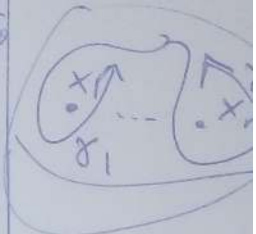
O primeiro resultado foi um trabalho sobre o caso $g=0$, $n \geq 4$ para representações redutíveis de posto 2. Foi um trabalho em comum com D. Moussard, publicado em IMRN (2018)

Podemos resumir a classificação assim.

1) Basta classificar as representações $\rho \in PSL_2$ que dão órbitas finitas, com ρ redutíveis.
Normalizando, acabamos com a ação de $MCG_{0,n}$ sobre $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}), \mathrm{Aff}(\mathbb{C})) / \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$

2) As
as
de

3) MCC



line

cada

para

$\mathbb{C}_\lambda$

(

Usando

2) As órbitas finitas sob $MCG_{0,n}$ são as órbitas finitas sob o subgrupo de índice finito que fixa os pontos $x_1, \dots, x_n$.
MCGpure$_{0,n}$

3) $MCG_{\text{pure}\,0,n}$ fixa a parte linear dos $\rho(\gamma_i) = \lambda_i z + \tau_i$

pois cada elemento de MCGpure preserva a classe de conjugação de γ.

→ Acabamos com uma ação linear de MCGpure $0,n$ sobre cada $\mathbb{P}H^1(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}, \mathbb{C}_\lambda)$ para qualquer sistema local de posto 1 $\mathbb{C}_\lambda$ sobre $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.

($\mathbb{C}_\lambda$ = sistema local com monodromia $\lambda: \gamma_i \longmapsto \lambda_i$)

~~Usando Hom(π_1, Aff(C))~~

$\{x_1, \dots, x_n\}), Aff(\mathbb{C}))$
$Aff(\mathbb{C})$

10 b

T

A

10) 4) Basta estudar as ações lineares de $MCG_{pure\,0,n}$ sobre os espaços projetivos $\mathbb{P}H^1(\mathbb{P}^1\setminus\{x_1,\dots,x_n\}, \mathbb{C}_\lambda)$ e ver para qual λ temos órbitas finitas.

5) $\mathbb{P}H^1(\mathbb{P}^1\setminus\{x_1,\dots,x_n\}, \mathbb{C}_\lambda) \simeq \mathbb{P}^{n-3}$

O caso $n=4$ corresponde à lista de Schwartz sobre as equações hipergeométricas de Gauß com soluções algébricas.

$\Rightarrow$ classificação já dada.

Usando confluência podemos resolver para $n>4$.

seja $i(\lambda) = \#\{i\in[\![1,n]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$

~~sez~~

Teorema se $n=5$ e $i(\lambda)=5$ e
e ~~[illegible]~~ : $\alpha_i \mapsto \lambda_i z + \tau_i$ dá uma
órbita finita então
$(\lambda_2, \dots, \lambda_5) = (\xi, \dots, \xi, \xi^2)$ onde
ordem$(\xi)=6$
e a ação de $MCG_{pure\, 0,5}$ é aquela
do grupo Hesiano ~~[illegible]~~ projetivizado
do grupo de reflexões complexas primitivo de ordem 648
Teorema se $n=5$ e $i(\lambda)=6$ e
e ~~dá~~ uma órbita finita
$(\lambda_1 - \lambda_6) = (\xi, \dots, \xi)$ onde ordem$(\xi)=6$
e a ação de $MCG_{pure\, 0,6}$ é aquela do
grupo simples de ordem 25920,
projetivizado do grupo de reflexões complexas
de ordem 155520.
Teorema Se $e: \lambda_i z + \tau_i$ $i=1,\dots,n$ com órbita finita
Se $i(\lambda) > 2$, $n > i(\lambda)$
$\forall i$ t.q. $\lambda_i = 0$ $e(\alpha_i) = id.$

10 bis

Teorema: $n \geq 3$

$\lambda = (a, 1, \dots, 1, a^{-1})$ $(i(\lambda) = 2)$

A ação de $MCG_{pure,0,n}$ tem $n-2$ pontos fixos

$$[\tau_1 : \dots : \tau_n] = [1 : 0 \dots : 0]$$

$$\vdots$$

$$[0 : \dots : 1]$$

e senão

$[\tau_1 : \dots : \tau_n]$ tem órbita de tamanho ω^{k-1} onde ω = ordem de a

e $k = \# \{ i \in [\![1, n]\!] , \tau_i \neq 1 \}$.

(então ω^{k-1} finito $\Leftrightarrow$ ω finito)

(11) Mostrei também uma classificação dos órbitas finitas para representações redutíveis de posto 2, em conjunto com V. Heu, no caso de curvas de gênero $g \geq 1$.

Teorema (Jussien 2021)

$\rho : \pi_1(\Sigma_{g,n}) \to GL_2(\mathbb{C})$ redutível dá uma órbita finita. se e só se

① ρ é soma direta de representações escalares com imágens finitas

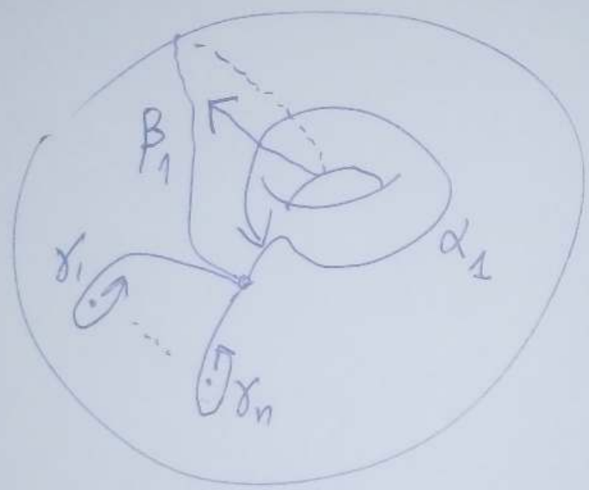
ou

② $g = 1$ $n > 0$ e $[\rho]$ é na órbita de $[\lambda \otimes \rho_{\mu,c}]$ sob $MCG_{1,n}$, onde λ scalar com imágem finita

$$\rho_{\mu,c}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\mu,c}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\mu-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mu,c}(\gamma_i) = \begin{pmatrix} 1 & c_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\pi_1(\Sigma_{1,n}) = \langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \mid [\alpha_1, \beta_1]^{-1} = \gamma_1 \ldots \gamma_n$



finita