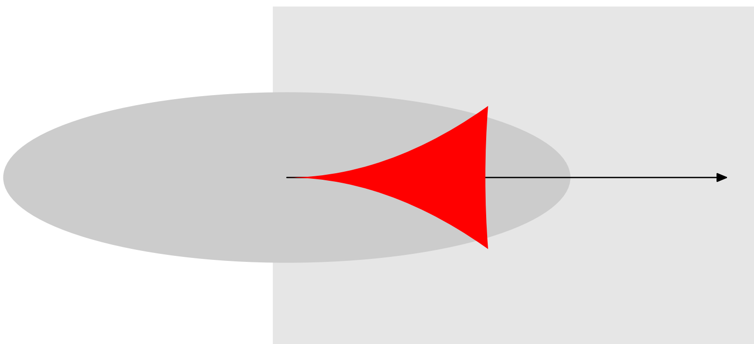
TEXTOS DE MATEMÁTICA
EDITORA INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

SOLUÇÕES RACIONAIS DE CERTAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Fernando Costa Marques

Dinamérico P. Pombo Jr.



2021

Costa Marques, Fernando; Pereira Pombo Jr., Dinamérico.

C838s Soluções Racionais de Certas Equações Diofantinas - 1 ed.

Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2021.

37p.; 23cm.

Inclui bibliografia.

ISBN: **978-65-86502-02-2**

1. Equações Diofantinas. 2. Soluções Racionais.

3. Teoria dos Números.

I. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática.

II. Título.

SOLUÇÕES RACIONAIS DE CERTAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Fernando Costa Marques

Dinamérico P. Pombo Jr.

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense
Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas Reis, s/nº
Bloco G, Campus do Gragoatá
24210-201 Niterói, RJ Brasil

2020

Sumário

Introdução

A Teoria dos Números, considerada por muitos como a Rainha da Matemática, vem, desde a antiguidade, desafiando mentes privilegiadas como as de Euclides, Diofanto, Fermat, Euler, Lagrange, Gauss, Dirichlet, Riemann, Ramanujan e Selberg, entre outras. Ela se caracteriza pela simplicidade dos seus problemas e pela eventual dificuldade em resolvê-los, bem como pela elegância e profundidade dos métodos que lhe são inerentes, como é amplamente discutido em [1].

Um aspecto importante da Teoria dos Números é o estudo de soluções de equações diofantinas, entendido sob um prisma amplo, o qual engloba o estudo de soluções inteiras de determinadas equações. Neste contexto há o resultado clássico de Diofanto caracterizando as soluções inteiras da equação $x^2 + y^2 = z^2$. Na mesma ordem de ideias se insere a celebrada conjectura de Fermat, datada de 1637, segundo a qual a equação $x^n + y^n = z^n$ $(n = 3, 4, 5, \dots)$ não possuiria solução inteira não trivial, esclarecida por Euler no caso $n = 3$ e por Fermat no caso $n = 4$. Finalmente, 357 anos depois, A. Wiles [9] (ver também [8]) usou um ferramental sofisticado para estabelecer a validade da conjectura de Fermat. Cabe ainda mencionar que problemas desta natureza podem apresentar uma certa peculiaridade: por exemplo, ao passo que cada uma das equações $x^2 + y^2 = 3z^2$, $x^2 + y^2 = 7z^2$ e $x^2 + y^2 = 11z^2$ não possui solução inteira não trivial, ambas as equações $x^2 + y^2 = 5z^2$ e $x^2 + y^2 = 13z^2$ as possuem [6, p. 115]. Obviamente, há também o problema fundamental de averiguar se certas equações diofantinas possuem soluções racionais. Nesta direção cabe ressaltar o resultado de Euler [4, pp. 199-200], no qual as soluções racionais da equação $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$ são caracterizadas.

O objetivo central deste trabalho é o estudo de soluções racionais de certas equações diofantinas, como passamos a descrever sucintamente. No Capítulo 1 utilizamos uma técnica conhecida para explicitar uma família infinita de soluções racionais para cada uma das equações $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$, $x^3 + y^3 + z^3 + r^3 = u^3 + v^3 + t^3 + s^3$, $x^4 + y^4 + z^4 + r^4 = u^4 + v^4 + t^4 + s^4$, $x^3 + y^3 + z^3 + r^3 + o^3 + q^3 = u^3 + v^3 + t^3 + s^3 + n^3 + p^3$ e $x^4 + y^4 + z^4 + r^4 + o^4 + q^4 = u^4 + v^4 + t^4 + s^4 + n^4 + p^4$. Os Capítulos 2 e 3 são dedicados às equações $x^n + y^2 = z^2$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. No Capítulo 2 apresentamos uma reflexão de cunho geométrico, intimamente relacionada a certas soluções das referidas equações.

E, no Capítulo 3, exibimos três famílias infinitas de soluções racionais para as mesmas equações e discutimos a maneira pela qual tais famílias estão relacionadas. Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos considerações a respeito do comportamento p-ádico das soluções discutidas no texto.

Cabe aqui ressaltar que a leitura do presente trabalho pressupõe apenas o conhecimento de fatos básicos sobre os números inteiros e os números racionais.

Neste trabalho $\mathbb{Q}$ denotará o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais. Escreveremos ainda $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Os autores gostariam de agradecer a Marco Aurélio Palumbo Cabral e Severino Collier Coutinho pelas valiosas sugestões.

Capítulo 1

Soluções racionais das equações

$$x^3 + y^3 = u^3 + v^3,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + r^3 = u^3 + v^3 + t^3 + s^3,$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + r^4 = u^4 + v^4 + t^4 + s^4,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + r^3 + o^3 + q^3 = u^3 + v^3 + t^3 + s^3 + n^3 + p^3 \quad \text{e}$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + r^4 + o^4 + q^4 = u^4 + v^4 + t^4 + s^4 + n^4 + p^4$$

A solução racional geral da equação $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$ foi obtida por Euler e explicitada no Teorema 235 de [4]. Ramanujan afirmou que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$,

$$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2$$
$$y = 4a^2 - 4ab + 6b^2,$$
$$z = 5a^2 - 5ab - 3b^2,$$
$$t = 6a^2 - 4ab + 4b^2$$

é solução da equação $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ (o que foi confirmado [3, p. 326]), o que fornece a solução $x, y, u = -z, \quad v = t$ da equação $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$.

Neste capítulo obteremos uma família de soluções racionais para cada uma das equações mencionadas no título do mesmo utilizando uma técnica, encontrada em [7] (ver também [4, p. 201]), que propicia a obtenção de soluções racionais da equação $x^4 + y^4 = u^4 + v^4$. Inicialmente, provaremos o seguinte

Teorema 1.1. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}^*$, com $a \neq b$,

$$x = a^6 + a^5b + 4a^4b^2 - 2a^3b^3 + 7a^2b^4 + ab^5,$$
$$y = a^5b - 5a^4b^2 - 2a^3b^3 + 4a^2b^4 + ab^5 + b^6,$$
$$u = a^6 + a^5b + 4a^4b^2 - 2a^3b^3 - 5a^2b^4 + ab^5,$$
$$v = a^5b + 7a^4b^2 - 2a^3b^3 + 4a^2b^4 + ab^5 + b^6$$

é solução da equação $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$.

Demonstração. Escrevamos

$$x = aw + c,\ y = bw - d,\ u = aw + d,\ v = bw + c.$$

Substituindo x, y, u, v na equação em questão, obtemos a seguinte equação em w:

$$[3c(a^2 - b^2) - 3d(a^2 + b^2)]w^2 + [3c^2(a - b) - 3d^2(a - b)]w = 2d^3.$$

O coeficiente

$$3c(a^2 - b^2) - 3d(a^2 + b^2)$$

de w^2 será nulo se tomarmos $c = a^2 + b^2$ e $d = a^2 - b^2$. Neste caso, $c + d = 2a^2$ e $c - d = 2b^2$, o que implica

$$c^2 - d^2 = (c + d)(c - d) = 4a^2b^2.$$

Consequentemente,

$$[3c^2(a - b) - 3d^2(a - b)]w = 3(c^2 - d^2)(a - b)w$$
$$= 12a^2b^2(a - b)w = 2d^3 = 2(a - b)^3(a + b)^3,$$

o que equivale a

$$w = \frac{(a - b)^2(a + b)^3}{6a^2b^2} \cdot$$

E, multiplicando os números racionais c, d e w, acima mencionados, pelo mesmo número racional $6a^2b^2$, obtemos os números racionais que também denotaremos por c, d e w, dados por

$$c = 6a^4b^2 + 6a^2b^4,\ d = 6a^4b^2 - 6a^2b^4 \text{ e } w = (a - b)^2(a + b)^2(a + b) = (a^2 - b^2)^2(a + b).$$

Finalmente, substituindo c, d e w, mencionados na linha acima, em $x = aw + c$, $y = bw - d$, $u = aw + d$, $v = bw + c$, constatamos que

$$x = a^6 + a^5b + 4a^4b^2 - 2a^3b^3 + 7a^2b^4 + ab^5,$$
$$y = a^5b - 5a^4b^2 - 2a^3b^3 + 4a^2b^4 + ab^5 + b^6,$$
$$u = a^6 + a^5b + 4a^4b^2 - 2a^3b^3 - 5a^2b^4 + ab^5,$$
$$v = a^5b + 7a^4b^2 - 2a^3b^3 + 4a^2b^4 + ab^5 + b^6,$$

concluindo assim a demonstração.

Observação 1.2. Se, no Teorema 1.1, supusermos $a = 0$ ou $b = 0$, ou $a = b$, é claro que x, y, u, v também será solução da equação $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$.

Observação 1.3. Nas condições do Teorema 1.1 ou nas condições da Observação 1.2, se $a, b \in \mathbb{Z}$, então $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.4. Tomando $a = n \ \ (n = 2, 3, 4, \dots)$ e $b = 1$ no Teorema 1.1, observamos que x, y, u e v podem assumir valores tão grandes quanto se queira. Tomando $a = 1$ e $b = -n \ \ (n = 1, 2, \dots)$ no Teorema 1.1, observamos que x e u podem assumir valores tão pequenos quanto se queira; e, tomando $a = \dfrac{1}{n}$ e $b = -\dfrac{1}{n} \ \ (n = 2, 3, \dots)$ no Teorema 1.1, observamos que x, y, u e v podem assumir valores tão próximos de 0 quanto se queira.

A seguir usaremos a mesma técnica para estabelecer o seguinte

Teorema 1.5. Para quaisquer $a,\ b,\ e,\ g \in \mathbb{Q}^*$, com $a > b$ e $e > g$,

$$\begin{aligned}
x = &- a\,g^6 + 3\,a\,e^2\,g^4 - 6\,b^2\,e^2\,g^3 - 6\,a^2\,e^2\,g^3 - 3\,a\,e^4\,g^2 + 6\,b^2\,e^3\,g^2 + 6\,a^2\,e^3\,g^2 \\
&+ a\,e^6 - a\,b^6 - 6\,a^2\,b^5 + 9\,a^3\,b^4 - 6\,a^4\,b^3 + 3\,a^5\,b^2 + a^7, \\
y = &- b\,g^6 + 3\,b\,e^2\,g^4 - 6\,b^2\,e^2\,g^3 + 6\,a^2\,e^2\,g^3 - 3\,b\,e^4\,g^2 + 6\,b^2\,e^3\,g^2 - 6\,a^2\,e^3\,g^2 \\
&+ b\,e^6 - b^7 - 3\,a^2\,b^5 + 6\,a^3\,b^4 + 3\,a^4\,b^3 - 6\,a^5\,b^2 + a^6\,b, \\
z = &- e\,g^6 - 6\,e^2\,g^5 + 9\,e^3\,g^4 - 6\,e^4\,g^3 + 3\,e^5\,g^2 - 6\,a^2\,b^3\,g^2 + 6\,a^3\,b^2\,g^2 + e^7 - 6\,a^2\,b^3\,e^2 \\
&+ 6\,a^3\,b^2\,e^2 - b^6\,e + 3\,a^2\,b^4\,e - 3\,a^4\,b^2\,e + a^6\,e, \\
r = &- g^7 - 3\,e^2\,g^5 + 6\,e^3\,g^4 + 3\,e^4\,g^3 - 6\,e^5\,g^2 - 6\,a^2\,b^3\,g^2 + 6\,a^3\,b^2\,g^2 + e^6\,g - b^6\,g \\
&+ 3\,a^2\,b^4\,g - 3\,a^4\,b^2\,g + a^6\,g + 6\,a^2\,b^3\,e^2 - 6\,a^3\,b^2\,e^2, \\
u = &- a\,g^6 + 3\,a\,e^2\,g^4 + 6\,b^2\,e^2\,g^3 - 6\,a^2\,e^2\,g^3 - 3\,a\,e^4\,g^2 - 6\,b^2\,e^3\,g^2 + 6\,a^2\,e^3\,g^2 + a\,e^6 \\
&- a\,b^6 + 6\,a^2\,b^5 - 3\,a^3\,b^4 - 6\,a^4\,b^3 + 3\,a^5\,b^2 + a^7, \\
v = &- b\,g^6 + 3\,b\,e^2\,g^4 - 6\,b^2\,e^2\,g^3 - 6\,a^2\,e^2\,g^3 - 3\,b\,e^4\,g^2 + 6\,b^2\,e^3\,g^2 + 6\,a^2\,e^3\,g^2 + b\,e^6 \\
&- b^7 - 3\,a^2\,b^5 + 6\,a^3\,b^4 - 9\,a^4\,b^3 + 6\,a^5\,b^2 + a^6\,b, \\
t = &- e\,g^6 + 6\,e^2\,g^5 - 3\,e^3\,g^4 - 6\,e^4\,g^3 + 3\,e^5\,g^2 + 6\,a^2\,b^3\,g^2 - 6\,a^3\,b^2\,g^2 + e^7 - 6\,a^2\,b^3\,e^2 \\
&+ 6\,a^3\,b^2\,e^2 - b^6\,e + 3\,a^2\,b^4\,e - 3\,a^4\,b^2\,e + a^6\,e, \\
s = &- g^7 - 3\,e^2\,g^5 + 6\,e^3\,g^4 - 9\,e^4\,g^3 + 6\,e^5\,g^2 - 6\,a^2\,b^3\,g^2 + 6\,a^3\,b^2\,g^2 + e^6\,g - b^6\,g \\
&+ 3\,a^2\,b^4\,g - 3\,a^4\,b^2\,g + a^6\,g - 6\,a^2\,b^3\,e^2 + 6\,a^3\,b^2\,e^2
\end{aligned}$$

é solução da equação $x^3 + y^3 + z^3 + r^3 = u^3 + v^3 + t^3 + s^3$.

Demonstração. Escrevamos

$$x = aw + c,\ y = bw - d,\ z = ew + f,\ r = gw - h, \qquad (*)$$
$$u = aw + d,\ v = bw + c,\ t = ew + h,\ s = gw + f.$$

Substituindo x, y, z, r, u, v, t, s na equação em questão, observamos que o coeficiente de w^3 será nulo e chegamos à seguinte equação:

$$[3a^2(c-d) + 3e^2(f-h) - 3b^2(c+d) - 3g^2(f+h)]w^2 +$$
$$[3(c^2-d^2)(a-b) + 3(f^2-h^2)(e-g)]w = 2d^3 + 2h^3.$$

Assim sendo, tomando $c = a^2 + b^2$, $d = a^2 - b^2$, $f = e^2 + g^2$ e $h = e^2 - g^2$, o coeficiente de w^2 será nulo e então teremos

$$[3(c^2-d^2)(a-b) + 3(f^2-h^2)(e-g)]w = 2d^3 + 2h^3.$$

Observemos ainda que

$$c^2 - d^2 = (c-d)(c+d) = 4a^2b^2,\ f^2 - h^2 = (f-h)(f+h) = 4e^2g^2,$$
$$d^3 = (a^2-b^2)^3 \text{ e } h^3 = (e^2-g^2)^3,$$

de modo que

$$[12a^2b^2(a-b) + 12e^2g^2(e-g)]w = 2(a^2-b^2)^3 + 2(e^2-g^2)^3 = 2(a-b)^3(a+b)^3 + 2(e-g)^3(e+g)^3,$$

isto é,

$$w = \frac{(a-b)^3(a+b)^3 + (e-g)^3(e+g)^3}{6a^2b^2(a-b) + 6e^2g^2(e-g)} = \frac{(a^2-b^2)^3 + (e^2-g^2)^3}{6(a^2b^2(a-b) + e^2g^2(e-g))}.$$

Finalmente, multiplicando c, d, f, h e w, mencionados acima, pelo mesmo número racional

$$\gamma = 6(a^2b^2(a-b) + e^2g^2(e-g)) > 0,$$

obtemos números racionais, que também denotaremos por c, d, f, h e w, a saber, $c = \gamma(a^2+b^2)$, $d = \gamma(a^2-b^2)$, $f = \gamma(e^2+g^2)$, $h = \gamma(e^2-g^2)$ e $w = (a^2-b^2)^3 + (e^2-g^2)^3$.

Finalmente, substituindo-os em (*) e usando o Software Maxima, constatamos que x, y, z, r, u, v, t, s são exatamente como no enunciado do teorema, concluindo assim a demonstração.

Observação 1.6. Se, no Teorema 1.5, supusermos a e e dois números racionais arbitrários e $b = g = 0$, é claro que x, y, z, r, u, v, t, s também será solução de $x^3 + y^3 + z^3 + r^3 = u^3 + v^3 + t^3 + s^3$.

Observação 1.7. Nas condições do Teorema 1.5 ou da Observação 1.6, se $a, b, e, g \in \mathbb{Z}$, então $x, y, z, r, u, v, t, s \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.8. Tomando $a = e = n$ $(n = 2, 3, \dots)$ e $b = g = 1$ no Teorema 1.5, observamos que x, z, u, t podem assumir valores tão grandes quanto se queira.

Observação 1.9. Tomando $a = e = \dfrac{1}{n}$ e $b = g = -\dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ no Teorema 1.5, observamos que x, y, z, r, u, v, t, s podem assumir valores tão próximos de 0 quanto se queira.

Provemos, agora, o

Teorema 1.10. Para quaisquer $a, b, e, g \in \mathbb{Q}$, com $a > b > 0$ e $e > g > 0$,

$$\begin{aligned}
x = & -2\,a\,e\,g^9 + 6\,a\,e^3\,g^7 - 6\,b^3\,e^3\,g^5 - 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,a\,e^7\,g^3 + 6\,b^3\,e^5\,g^3 + 6\,a^3\,e^5\,g^3 \\
& + 2\,a\,e^9\,g - 2\,a^2\,b^9 - 6\,a^3\,b^8 + 6\,a^4\,b^7 + 6\,a^5\,b^6 - 6\,a^6\,b^5 + 2\,a^{10}\,b, \\
y = & -2\,b\,e\,g^9 + 6\,b\,e^3\,g^7 - 6\,b^3\,e^3\,g^5 + 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,b\,e^7\,g^3 + 6\,b^3\,e^5\,g^3 - 6\,a^3\,e^5\,g^3 \\
& + 2\,b\,e^9\,g - 2\,a\,b^{10} + 6\,a^5\,b^6 + 6\,a^6\,b^5 - 6\,a^7\,b^4 - 6\,a^8\,b^3 + 2\,a^9\,b^2, \\
z = & -2\,e^2\,g^9 - 6\,e^3\,g^8 + 6\,e^4\,g^7 + 6\,e^5\,g^6 - 6\,e^6\,g^5 - 6\,a^3\,b^5\,g^3 + 6\,a^5\,b^3\,g^3 + 2\,e^{10}\,g \\
& - 6\,a^3\,b^5\,e^3 + 6\,a^5\,b^3\,e^3 - 2\,a\,b^9\,e + 6\,a^3\,b^7\,e - 6\,a^7\,b^3\,e + 2\,a^9\,b\,e, \\
r = & -2\,e\,g^{10} + 6\,e^5\,g^6 + 6\,e^6\,g^5 - 6\,e^7\,g^4 - 6\,e^8\,g^3 - 6\,a^3\,b^5\,g^3 + 6\,a^5\,b^3\,g^3 + 2\,e^9\,g^2 \\
& - 2\,a\,b^9\,g + 6\,a^3\,b^7\,g - 6\,a^7\,b^3\,g + 2\,a^9\,b\,g + 6\,a^3\,b^5\,e^3 - 6\,a^5\,b^3\,e^3,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u =& -2\,a\,e\,g^9+6\,a\,e^3\,g^7+6\,b^3\,e^3\,g^5-6\,a^3\,e^3\,g^5-6\,a\,e^7\,g^3-6\,b^3\,e^5\,g^3+6\,a^3\,e^5\,g^3\\
&+2\,a\,e^9\,g-2\,a^2\,b^9+6\,a^3\,b^8+6\,a^4\,b^7-6\,a^5\,b^6-6\,a^6\,b^5+2\,a^{10}\,b,\\
v =& -2\,b\,e\,g^9+6\,b\,e^3\,g^7-6\,b^3\,e^3\,g^5-6\,a^3\,e^3\,g^5-6\,b\,e^7\,g^3+6\,b^3\,e^5\,g^3+6\,a^3\,e^5\,g^3\\
&+2\,b\,e^9\,g-2\,a\,b^{10}+6\,a^5\,b^6-6\,a^6\,b^5-6\,a^7\,b^4+6\,a^8\,b^3+2\,a^9\,b^2,\\
t =& -2\,e^2\,g^9+6\,e^3\,g^8+6\,e^4\,g^7-6\,e^5\,g^6-6\,e^6\,g^5+6\,a^3\,b^5\,g^3-6\,a^5\,b^3\,g^3+2\,e^{10}\,g\\
&-6\,a^3\,b^5\,e^3+6\,a^5\,b^3\,e^3-2\,a\,b^9\,e+6\,a^3\,b^7\,e-6\,a^7\,b^3\,e+2\,a^9\,b\,e,\\
s =& -2\,e\,g^{10}+6\,e^5\,g^6-6\,e^6\,g^5-6\,e^7\,g^4+6\,e^8\,g^3-6\,a^3\,b^5\,g^3+6\,a^5\,b^3\,g^3+2\,e^9\,g^2\\
&-2\,a\,b^9\,g+6\,a^3\,b^7\,g-6\,a^7\,b^3\,g+2\,a^9\,b\,g-6\,a^3\,b^5\,e^3+6\,a^5\,b^3\,e^3
\end{aligned}
$$

é solução da equação $x^4+y^4+z^4+r^4=u^4+v^4+t^4+s^4$.

Demonstração. Escrevamos, para $w\in\mathbb{Q}^*$,

$$
\begin{aligned}
&x=aw+c,\ y=bw-d,\ z=ew+f,\ r=gw-h, &&(**)\\
&u=aw+d,\ v=bw+c,\ t=ew+h,\ s=gw+f.
\end{aligned}
$$

(Claramente $x,\ y,\ z,\ r,\ u,\ v,\ t,\ s$ seria solução da equação em questão se $w=0$.) Substituindo-os na equação obtemos a seguinte equação em w:

$$
\begin{aligned}
4\big(a^3(c-d)-b^3(c+d)+e^3(f-h)-g^3(f+h)\big)w^3+6\big(a^2(c^2-d^2)+b^2(d^2-c^2)+e^2(f^2-h^2)\\
+g^2(h^2-f^2)\big)w^2=4\big((b-a)c^3+(b+a)d^3+(g-e)f^3+(g+e)h^3\big)w.
\end{aligned}
$$

Assim sendo, tomando $c=a^3+b^3$, $d=a^3-b^3$, $f=e^3+g^3$, $h=e^3-g^3$, teremos $c+d=2a^3$, $c-d=2b^3$, $f+h=2e^3$, $f-h=2g^3$ e, por consequência, o coeficiente de w^3 se anulará. Além disso, $c^2-d^2=4a^3b^3$ e $f^2-h^2=4e^3g^3$, e daí resulta que

$$
a^2(c^2-d^2)+b^2(d^2-c^2)+e^2(f^2-h^2)+g^2(h^2-f^2)=4(a^5b^3-a^3b^5+e^5g^3-e^3g^5).
$$

Portanto, podemos escrever

$$
6\big(a^3b^3(a^2-b^2)+e^3g^3(e^2-g^2)\big)w^2=\big((b-a)c^3+(b+a)d^3+(g-e)f^3+(g+e)h^3\big)w.
$$

E, como $w \neq 0$, obtém-se

$$6\big(a^3b^3(a^2-b^2)+e^3g^3(e^2-g^2)\big)w = (b-a)c^3+(b+a)d^3+(g-e)f^3+(g+e)h^3.$$

Ponhamos

$$\theta = 6\big(a^3b^3(a^2-b^2)+e^3g^3(e^2-g^2)\big) > 0.$$

Finalmente, escrevendo

$$c=\theta(a^3+b^3),\ d=\theta(a^3-b^3),\ f=\theta(e^3+g^3),\ h=\theta(e^3-g^3)$$

e $w=(b-a)c^3+(b+a)d^3+(g-e)f^3+(g+e)h^3$, substituindo-os em (**) e usando o Software Maxima, constatamos que x, y, z, r, u, v, t, s são exatamente como no enunciado do teorema, concluindo assim a demonstração.

Observação 1.11. Nas condições do Teorema 1.10, se $a, b, e, g \in \mathbb{Z}$, então x, y, z, r, u, v, t, $s \in 2\mathbb{Z}$.

Observação 1.12. Tomando $a = e = n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ e $b = g = 1$ no Teorema 1.10, observamos que x, y, z, r, u, v, t, s podem assumir valores tão grandes quanto se queira.

Observação 1.13. Tomando $a = e = \dfrac{1}{n}$ e $b = g = \dfrac{1}{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ no Teorema 1.10, observamos que x, y, z, r, u, v, t, s podem assumir valores tão próximos de 0 quanto se queira.

Estabeleçamos agora o

Teorema 1.14. Para quaisquer $a, b, e, g, i, k \in \mathbb{Q}^*$, com $a > b$, $e > g$ e $i > k$,

$$\begin{aligned}
x = &-a\,k^6+3\,a\,i^2\,k^4-6\,b^2\,i^2\,k^3-6\,a^2\,i^2\,k^3-3\,a\,i^4\,k^2+6\,b^2\,i^3\,k^2+6\,a^2\,i^3\,k^2+a\,i^6\\
&-a\,g^6+3\,a\,e^2\,g^4-6\,b^2\,e^2\,g^3-6\,a^2\,e^2\,g^3-3\,a\,e^4\,g^2+6\,b^2\,e^3\,g^2+6\,a^2\,e^3\,g^2+a\,e^6\\
&-a\,b^6-6\,a^2\,b^5+9\,a^3\,b^4-6\,a^4\,b^3+3\,a^5\,b^2+a^7,\\
y = &-b\,k^6+3\,b\,i^2\,k^4-6\,b^2\,i^2\,k^3+6\,a^2\,i^2\,k^3-3\,b\,i^4\,k^2+6\,b^2\,i^3\,k^2-6\,a^2\,i^3\,k^2+b\,i^6\\
&-b\,g^6+3\,b\,e^2\,g^4-6\,b^2\,e^2\,g^3+6\,a^2\,e^2\,g^3-3\,b\,e^4\,g^2+6\,b^2\,e^3\,g^2-6\,a^2\,e^3\,g^2+b\,e^6\\
&-b^7-3\,a^2\,b^5+6\,a^3\,b^4+3\,a^4\,b^3-6\,a^5\,b^2+a^6\,b,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z = & - e\, k^6 + 3\, e\, i^2\, k^4 - 6\, g^2\, i^2\, k^3 - 6\, e^2\, i^2\, k^3 - 3\, e\, i^4\, k^2 + 6\, g^2\, i^3\, k^2 + 6\, e^2\, i^3\, k^2 + e\, i^6 \\
& - e\, g^6 - 6\, e^2\, g^5 + 9\, e^3\, g^4 - 6\, e^4\, g^3 + 3\, e^5\, g^2 - 6\, a^2\, b^3\, g^2 + 6\, a^3\, b^2\, g^2 + e^7 - 6\, a^2\, b^3\, e^2 \\
& + 6\, a^3\, b^2\, e^2 - b^6\, e + 3\, a^2\, b^4\, e - 3\, a^4\, b^2\, e + a^6\, e, \\
r = & - g\, k^6 + 3\, g\, i^2\, k^4 - 6\, g^2\, i^2\, k^3 + 6\, e^2\, i^2\, k^3 - 3\, g\, i^4\, k^2 + 6\, g^2\, i^3\, k^2 - 6\, e^2\, i^3\, k^2 + g\, i^6 \\
& - g^7 - 3\, e^2\, g^5 + 6\, e^3\, g^4 + 3\, e^4\, g^3 - 6\, e^5\, g^2 - 6\, a^2\, b^3\, g^2 + 6\, a^3\, b^2\, g^2 + e^6\, g - b^6\, g \\
& + 3\, a^2\, b^4\, g - 3\, a^4\, b^2\, g + a^6\, g + 6\, a^2\, b^3\, e^2 - 6\, a^3\, b^2\, e^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
o = & - i\, k^6 - 6\, i^2\, k^5 + 9\, i^3\, k^4 - 6\, i^4\, k^3 + 3\, i^5\, k^2 - 6\, e^2\, g^3\, k^2 + 6\, e^3\, g^2\, k^2 - 6\, a^2\, b^3\, k^2 \\
& + 6\, a^3\, b^2\, k^2 + i^7 - 6\, e^2\, g^3\, i^2 + 6\, e^3\, g^2\, i^2 - 6\, a^2\, b^3\, i^2 + 6\, a^3\, b^2\, i^2 - g^6\, i + 3\, e^2\, g^4\, i \\
& - 3\, e^4\, g^2\, i + e^6\, i - b^6\, i + 3\, a^2\, b^4\, i - 3\, a^4\, b^2\, i + a^6\, i, \\
q = & - k^7 - 3\, i^2\, k^5 + 6\, i^3\, k^4 + 3\, i^4\, k^3 - 6\, i^5\, k^2 - 6\, e^2\, g^3\, k^2 + 6\, e^3\, g^2\, k^2 - 6\, a^2\, b^3\, k^2 \\
& + 6\, a^3\, b^2\, k^2 + i^6\, k - g^6\, k + 3\, e^2\, g^4\, k - 3\, e^4\, g^2\, k + e^6\, k - b^6\, k + 3\, a^2\, b^4\, k - 3\, a^4\, b^2\, k \\
& + a^6\, k + 6\, e^2\, g^3\, i^2 - 6\, e^3\, g^2\, i^2 + 6\, a^2\, b^3\, i^2 - 6\, a^3\, b^2\, i^2, \\
u = & - a\, k^6 + 3\, a\, i^2\, k^4 + 6\, b^2\, i^2\, k^3 - 6\, a^2\, i^2\, k^3 - 3\, a\, i^4\, k^2 - 6\, b^2\, i^3\, k^2 + 6\, a^2\, i^3\, k^2 + a\, i^6 \\
& - a\, g^6 + 3\, a\, e^2\, g^4 + 6\, b^2\, e^2\, g^3 - 6\, a^2\, e^2\, g^3 - 3\, a\, e^4\, g^2 - 6\, b^2\, e^3\, g^2 + 6\, a^2\, e^3\, g^2 + a\, e^6 \\
& - a\, b^6 + 6\, a^2\, b^5 - 3\, a^3\, b^4 - 6\, a^4\, b^3 + 3\, a^5\, b^2 + a^7, \\
v = & - b\, k^6 + 3\, b\, i^2\, k^4 - 6\, b^2\, i^2\, k^3 - 6\, a^2\, i^2\, k^3 - 3\, b\, i^4\, k^2 + 6\, b^2\, i^3\, k^2 + 6\, a^2\, i^3\, k^2 + b\, i^6 \\
& - b\, g^6 + 3\, b\, e^2\, g^4 - 6\, b^2\, e^2\, g^3 - 6\, a^2\, e^2\, g^3 - 3\, b\, e^4\, g^2 + 6\, b^2\, e^3\, g^2 + 6\, a^2\, e^3\, g^2 + b\, e^6 \\
& - b^7 - 3\, a^2\, b^5 + 6\, a^3\, b^4 - 9\, a^4\, b^3 + 6\, a^5\, b^2 + a^6\, b,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t = & - e\, k^6 + 3\, e\, i^2\, k^4 + 6\, g^2\, i^2\, k^3 - 6\, e^2\, i^2\, k^3 - 3\, e\, i^4\, k^2 - 6\, g^2\, i^3\, k^2 + 6\, e^2\, i^3\, k^2 + e\, i^6 \\
& - e\, g^6 + 6\, e^2\, g^5 - 3\, e^3\, g^4 - 6\, e^4\, g^3 + 3\, e^5\, g^2 + 6\, a^2\, b^3\, g^2 - 6\, a^3\, b^2\, g^2 + e^7 - 6\, a^2\, b^3\, e^2 \\
& + 6\, a^3\, b^2\, e^2 - b^6\, e + 3\, a^2\, b^4\, e - 3\, a^4\, b^2\, e + a^6\, e, \\
s = & - g\, k^6 + 3\, g\, i^2\, k^4 - 6\, g^2\, i^2\, k^3 - 6\, e^2\, i^2\, k^3 - 3\, g\, i^4\, k^2 + 6\, g^2\, i^3\, k^2 + 6\, e^2\, i^3\, k^2 + g\, i^6 \\
& - g^7 - 3\, e^2\, g^5 + 6\, e^3\, g^4 - 9\, e^4\, g^3 + 6\, e^5\, g^2 - 6\, a^2\, b^3\, g^2 + 6\, a^3\, b^2\, g^2 + e^6\, g - b^6\, g \\
& + 3\, a^2\, b^4\, g - 3\, a^4\, b^2\, g + a^6\, g - 6\, a^2\, b^3\, e^2 + 6\, a^3\, b^2\, e^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n = & - i\, k^6 + 6\, i^2\, k^5 - 3\, i^3\, k^4 - 6\, i^4\, k^3 + 3\, i^5\, k^2 + 6\, e^2\, g^3\, k^2 - 6\, e^3\, g^2\, k^2 + 6\, a^2\, b^3\, k^2 \\
& - 6\, a^3\, b^2\, k^2 + i^7 - 6\, e^2\, g^3\, i^2 + 6\, e^3\, g^2\, i^2 - 6\, a^2\, b^3\, i^2 + 6\, a^3\, b^2\, i^2 - g^6\, i + 3\, e^2\, g^4\, i \\
& - 3\, e^4\, g^2\, i + e^6\, i - b^6\, i + 3\, a^2\, b^4\, i - 3\, a^4\, b^2\, i + a^6\, i, \\
p = & - k^7 - 3\, i^2\, k^5 + 6\, i^3\, k^4 - 9\, i^4\, k^3 + 6\, i^5\, k^2 - 6\, e^2\, g^3\, k^2 + 6\, e^3\, g^2\, k^2 - 6\, a^2\, b^3\, k^2 \\
& + 6\, a^3\, b^2\, k^2 + i^6\, k - g^6\, k + 3\, e^2\, g^4\, k - 3\, e^4\, g^2\, k + e^6\, k - b^6\, k + 3\, a^2\, b^4\, k - 3\, a^4\, b^2\, k \\
& + a^6\, k - 6\, e^2\, g^3\, i^2 + 6\, e^3\, g^2\, i^2 - 6\, a^2\, b^3\, i^2 + 6\, a^3\, b^2\, i^2
\end{aligned}
$$

é solução da equação $x^3 + y^3 + z^3 + r^3 + o^3 + q^3 = u^3 + v^3 + t^3 + s^3 + n^3 + p^3$.

Demonstração. Argumentaremos como na demonstração do Teorema 1.5. Com efeito, ponhamos

$$
\begin{aligned}
& x = aw + c,\ y = bw - d,\ z = ew + f,\ r = gw - h,\ o = iw + j,\ q = kw - \ell, \\
& u = aw + d,\ v = bw + c,\ t = ew + h,\ s = gw + f,\ n = iw + \ell,\ p = kw + j.
\end{aligned}
$$

Substituindo x, y, z, r, o, q, u, v, t, s, n, p na equação em questão, observamos que o coeficiente de w^3 será nulo. Além disso, tomando

$$
c = a^2 + b^2,\ d = a^2 - b^2,\ f = e^2 + g^2,\ h = e^2 - g^2,\ j = i^2 + k^2,\ \ell = i^2 - k^2,
$$

concluímos que o coeficiente de w^2 também será nulo e chegamos à igualdade

$$
w = \frac{(a^2 - b^2)^3 + (e^2 - g^2)^3 + (i^2 - k^2)^3}{6\big(a^2b^2(a - b) + e^2g^2(e - g) + i^2k^2(i - k)\big)}\,.
$$

Finalmente, multiplicando c, d, f, h, j, ℓ e w pelo mesmo número racional $6\big(a^2b^2(a-b) + e^2g^2(e-g) + i^2k^2(i-k)\big)$, obtemos números racionais, os quais também denotaremos por c, d, f, h, ℓ e w. Substituindo-os em x, y, z, r, o, q, u, v, t, s, n, p, mencionados no início da demonstração, e usando o Software Maxima, constatamos que x, y, z, r, o, q, u, v, t, s, n, p são exatamente como no enunciado do teorema, concluindo assim a demonstração.

Finalizaremos o capítulo estabelecendo o

Teorema 1.15. Para quaisquer $a, b, e, g, i, k \in \mathbb{Q}$, com $a > b > 0$, $e > g > 0$ e $i > k > 0$,

$$
\begin{aligned}
x =& - 2\,a\,i\,k^9 + 6\,a\,i^3\,k^7 - 6\,b^3\,i^3\,k^5 - 6\,a^3\,i^3\,k^5 - 6\,a\,i^7\,k^3 + 6\,b^3\,i^5\,k^3 + 6\,a^3\,i^5\,k^3 \\
&+ 2\,a\,i^9\,k - 2\,a\,e\,g^9 + 6\,a\,e^3\,g^7 - 6\,b^3\,e^3\,g^5 - 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,a\,e^7\,g^3 + 6\,b^3\,e^5\,g^3 \\
&+ 6\,a^3\,e^5\,g^3 + 2\,a\,e^9\,g - 2\,a^2\,b^9 - 6\,a^3\,b^8 + 6\,a^4\,b^7 + 6\,a^5\,b^6 - 6\,a^6\,b^5 + 2\,a^{10}\,b, \\
y =& - 2\,b\,i\,k^9 + 6\,b\,i^3\,k^7 - 6\,b^3\,i^3\,k^5 + 6\,a^3\,i^3\,k^5 - 6\,b\,i^7\,k^3 + 6\,b^3\,i^5\,k^3 - 6\,a^3\,i^5\,k^3 \\
&+ 2\,b\,i^9\,k - 2\,b\,e\,g^9 + 6\,b\,e^3\,g^7 - 6\,b^3\,e^3\,g^5 + 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,b\,e^7\,g^3 + 6\,b^3\,e^5\,g^3 \\
&- 6\,a^3\,e^5\,g^3 + 2\,b\,e^9\,g - 2\,a\,b^{10} + 6\,a^5\,b^6 + 6\,a^6\,b^5 - 6\,a^7\,b^4 - 6\,a^8\,b^3 + 2\,a^9\,b^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z =& - 2\,e\,i\,k^9 + 6\,e\,i^3\,k^7 - 6\,g^3\,i^3\,k^5 - 6\,e^3\,i^3\,k^5 - 6\,e\,i^7\,k^3 + 6\,g^3\,i^5\,k^3 + 6\,e^3\,i^5\,k^3 \\
&+ 2\,e\,i^9\,k - 2\,e^2\,g^9 - 6\,e^3\,g^8 + 6\,e^4\,g^7 + 6\,e^5\,g^6 - 6\,e^6\,g^5 - 6\,a^3\,b^5\,g^3 + 6\,a^5\,b^3\,g^3 \\
&+ 2\,e^{10}\,g - 6\,a^3\,b^5\,e^3 + 6\,a^5\,b^3\,e^3 - 2\,a\,b^9\,e + 6\,a^3\,b^7\,e - 6\,a^7\,b^3\,e + 2\,a^9\,b\,e, \\
r =& - 2\,g\,i\,k^9 + 6\,g\,i^3\,k^7 - 6\,g^3\,i^3\,k^5 + 6\,e^3\,i^3\,k^5 - 6\,g\,i^7\,k^3 + 6\,g^3\,i^5\,k^3 - 6\,e^3\,i^5\,k^3 \\
&+ 2\,g\,i^9\,k - 2\,e\,g^{10} + 6\,e^5\,g^6 + 6\,e^6\,g^5 - 6\,e^7\,g^4 - 6\,e^8\,g^3 - 6\,a^3\,b^5\,g^3 + 6\,a^5\,b^3\,g^3 \\
&+ 2\,e^9\,g^2 - 2\,a\,b^9\,g + 6\,a^3\,b^7\,g - 6\,a^7\,b^3\,g + 2\,a^9\,b\,g + 6\,a^3\,b^5\,e^3 - 6\,a^5\,b^3\,e^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
o =& - 2\,i^2\,k^9 - 6\,i^3\,k^8 + 6\,i^4\,k^7 + 6\,i^5\,k^6 - 6\,i^6\,k^5 - 6\,e^3\,g^5\,k^3 + 6\,e^5\,g^3\,k^3 - 6\,a^3\,b^5\,k^3 \\
&+ 6\,a^5\,b^3\,k^3 + 2\,i^{10}\,k - 6\,e^3\,g^5\,i^3 + 6\,e^5\,g^3\,i^3 - 6\,a^3\,b^5\,i^3 + 6\,a^5\,b^3\,i^3 - 2\,e\,g^9\,i \\
&+ 6\,e^3\,g^7\,i - 6\,e^7\,g^3\,i + 2\,e^9\,g\,i - 2\,a\,b^9\,i + 6\,a^3\,b^7\,i - 6\,a^7\,b^3\,i + 2\,a^9\,b\,i, \\
q =& - 2\,i\,k^{10} + 6\,i^5\,k^6 + 6\,i^6\,k^5 - 6\,i^7\,k^4 - 6\,i^8\,k^3 - 6\,e^3\,g^5\,k^3 + 6\,e^5\,g^3\,k^3 - 6\,a^3\,b^5\,k^3 \\
&+ 6\,a^5\,b^3\,k^3 + 2\,i^9\,k^2 - 2\,e\,g^9\,k + 6\,e^3\,g^7\,k - 6\,e^7\,g^3\,k + 2\,e^9\,g\,k - 2\,a\,b^9\,k + 6\,a^3\,b^7\,k \\
&- 6\,a^7\,b^3\,k + 2\,a^9\,b\,k + 6\,e^3\,g^5\,i^3 - 6\,e^5\,g^3\,i^3 + 6\,a^3\,b^5\,i^3 - 6\,a^5\,b^3\,i^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u =& - 2\,a\,i\,k^9 + 6\,a\,i^3\,k^7 + 6\,b^3\,i^3\,k^5 - 6\,a^3\,i^3\,k^5 - 6\,a\,i^7\,k^3 - 6\,b^3\,i^5\,k^3 + 6\,a^3\,i^5\,k^3 \\
&+ 2\,a\,i^9\,k - 2\,a\,e\,g^9 + 6\,a\,e^3\,g^7 + 6\,b^3\,e^3\,g^5 - 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,a\,e^7\,g^3 - 6\,b^3\,e^5\,g^3 \\
&+ 6\,a^3\,e^5\,g^3 + 2\,a\,e^9\,g - 2\,a^2\,b^9 + 6\,a^3\,b^8 + 6\,a^4\,b^7 - 6\,a^5\,b^6 - 6\,a^6\,b^5 + 2\,a^{10}\,b, \\
v =& - 2\,b\,i\,k^9 + 6\,b\,i^3\,k^7 - 6\,b^3\,i^3\,k^5 - 6\,a^3\,i^3\,k^5 - 6\,b\,i^7\,k^3 + 6\,b^3\,i^5\,k^3 + 6\,a^3\,i^5\,k^3 \\
&+ 2\,b\,i^9\,k - 2\,b\,e\,g^9 + 6\,b\,e^3\,g^7 - 6\,b^3\,e^3\,g^5 - 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,b\,e^7\,g^3 + 6\,b^3\,e^5\,g^3 \\
&+ 6\,a^3\,e^5\,g^3 + 2\,b\,e^9\,g - 2\,a\,b^{10} + 6\,a^5\,b^6 - 6\,a^6\,b^5 - 6\,a^7\,b^4 + 6\,a^8\,b^3 + 2\,a^9\,b^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t =& -2\,e\,i\,k^9 + 6\,e\,i^3\,k^7 + 6\,g^3\,i^3\,k^5 - 6\,e^3\,i^3\,k^5 - 6\,e\,i^7\,k^3 - 6\,g^3\,i^5\,k^3 + 6\,e^3\,i^5\,k^3 \\
&+ 2\,e\,i^9\,k - 2\,e^2\,g^9 + 6\,e^3\,g^8 + 6\,e^4\,g^7 - 6\,e^5\,g^6 - 6\,e^6\,g^5 + 6\,a^3\,b^5\,g^3 - 6\,a^5\,b^3\,g^3 \\
&+ 2\,e^{10}\,g - 6\,a^3\,b^5\,e^3 + 6\,a^5\,b^3\,e^3 - 2\,a\,b^9\,e + 6\,a^3\,b^7\,e - 6\,a^7\,b^3\,e + 2\,a^9\,b\,e, \\
s =& -2\,g\,i\,k^9 + 6\,g\,i^3\,k^7 - 6\,g^3\,i^3\,k^5 - 6\,e^3\,i^3\,k^5 - 6\,g\,i^7\,k^3 + 6\,g^3\,i^5\,k^3 + 6\,e^3\,i^5\,k^3 \\
&+ 2\,g\,i^9\,k - 2\,e\,g^{10} + 6\,e^5\,g^6 - 6\,e^6\,g^5 - 6\,e^7\,g^4 + 6\,e^8\,g^3 - 6\,a^3\,b^5\,g^3 + 6\,a^5\,b^3\,g^3 \\
&+ 2\,e^9\,g^2 - 2\,a\,b^9\,g + 6\,a^3\,b^7\,g - 6\,a^7\,b^3\,g + 2\,a^9\,b\,g - 6\,a^3\,b^5\,e^3 + 6\,a^5\,b^3\,e^3, \\
n =& -2\,i^2\,k^9 + 6\,i^3\,k^8 + 6\,i^4\,k^7 - 6\,i^5\,k^6 - 6\,i^6\,k^5 + 6\,e^3\,g^5\,k^3 - 6\,e^5\,g^3\,k^3 + 6\,a^3\,b^5\,k^3 \\
&- 6\,a^5\,b^3\,k^3 + 2\,i^{10}\,k - 6\,e^3\,g^5\,i^3 + 6\,e^5\,g^3\,i^3 - 6\,a^3\,b^5\,i^3 + 6\,a^5\,b^3\,i^3 - 2\,e\,g^9\,i \\
&+ 6\,e^3\,g^7\,i - 6\,e^7\,g^3\,i + 2\,e^9\,g\,i - 2\,a\,b^9\,i + 6\,a^3\,b^7\,i - 6\,a^7\,b^3\,i + 2\,a^9\,b\,i, \\
p =& -2\,i\,k^{10} + 6\,i^5\,k^6 - 6\,i^6\,k^5 - 6\,i^7\,k^4 + 6\,i^8\,k^3 - 6\,e^3\,g^5\,k^3 + 6\,e^5\,g^3\,k^3 - 6\,a^3\,b^5\,k^3 \\
&+ 6\,a^5\,b^3\,k^3 + 2\,i^9\,k^2 - 2\,e\,g^9\,k + 6\,e^3\,g^7\,k - 6\,e^7\,g^3\,k + 2\,e^9\,g\,k - 2\,a\,b^9\,k + 6\,a^3\,b^7\,k \\
&- 6\,a^7\,b^3\,k + 2\,a^9\,b\,k - 6\,e^3\,g^5\,i^3 + 6\,e^5\,g^3\,i^3 - 6\,a^3\,b^5\,i^3 + 6\,a^5\,b^3\,i^3
\end{aligned}
$$

é solução da equação $x^4 + y^4 + z^4 + r^4 + o^4 + q^4 = u^4 + v^4 + t^4 + s^4 + n^4 + p^4$.

Demonstração. Argumentaremos como na demonstração do Teorema 1.10. Com efeito, para $w \in \mathbb{Q}^*$, ponhamos

$$
\begin{gathered}
x = aw + c,\ y = bw - d,\ z = ew + f,\ r = gw - h,\ o = iw + j,\ q = kw - \ell, \\
u = aw + d,\ v = bw + c,\ t = ew + h,\ s = gw + f,\ n = iw + \ell,\ p = kw + j.
\end{gathered}
$$

(Claramente x, y, z, r, o, q, u, v, t, s, n, p seria solução da equação em questão se $w = 0$.)

Substituindo x, y, z, r, o, q, u, v, t, s, n, p na equação em questão, observamos que o coeficiente de w^4 será nulo. E, tomando

$$c = a^3 + b^3,\ d = a^3 - b^3,\ f = e^3 + g^3,\ h = e^3 - g^3,\ j = i^3 + k^3,\ \ell = i^3 - k^3,$$

observamos que o coeficiente de w^3 será nulo e chegamos à igualdade

$$w = \frac{(b-a)c^3 + (b+a)d^3 + (g-e)f^3 + (g+e)h^3 + (k-i)j^3 + (k+i)\ell^3}{6\big(a^3b^3(a^2-b^2) + e^3g^3(e^2-g^2) + i^3k^3(i^2-k^2)\big)}.$$

Finalmente, multiplicando c, d, f, h, j, ℓ e w pelo mesmo número racional maior do que 0

$$6\big(a^3b^3(a^2-b^2) + e^3g^3(e^2-g^2) + i^3k^3(i^2-k^2)\big),$$

obtemos números racionais, que também denotaremos por c, d, f, h, j, ℓ e w. Substituindo-os em x, y, z, r, o, q, u, v, t, s, n, p, considerados no início da demonstração, e usando o Software Maxima, constatamos que esses números são exatamente como no enunciado do teorema, concluindo assim a demonstração.

Capítulo 2

As equações $x^n + y^2 = z^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; aspectos geométricos

Neste capítulo, e no próximo, abordaremos certos aspectos do estudo de soluções racionais das equações acima citadas.

Neste capítulo abordaremos propriedades geométricas relacionadas às soluções mencionadas, algumas motivadas por um caso particular importante de um teorema de Gauss. Gráficos esclarecedores serão também apresentados.

Inicialmente, consideraremos o caso em que n é par.

Proposição 2.1. Sejam $k \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{Q}^*$. Para quaisquer $y, z \in \mathbb{Q}$, para que x, y, z seja solução da equação

$$x^{2k} + y^2 = z^2,$$

é necessário e suficiente que (y, z) pertença à hipérbole

$$\frac{z^2}{\left(|x|^k\right)^2} - \frac{y^2}{\left(|x|^k\right)^2} = 1$$

no plano $\mathbb{Q}^2$.

Demonstração. Com efeito, basta observar que as afirmações abaixo são equivalentes para quaisquer $y, z \in \mathbb{Q}$:

$$x^{2k} + y^2 = z^2\,;$$

$$\frac{z^2}{x^{2k}} - \frac{y^2}{x^{2k}} = 1\,;$$

$$\frac{z^2}{\left(|x|^k\right)^2} - \frac{y^2}{\left(|x|^k\right)^2} = 1\,.$$

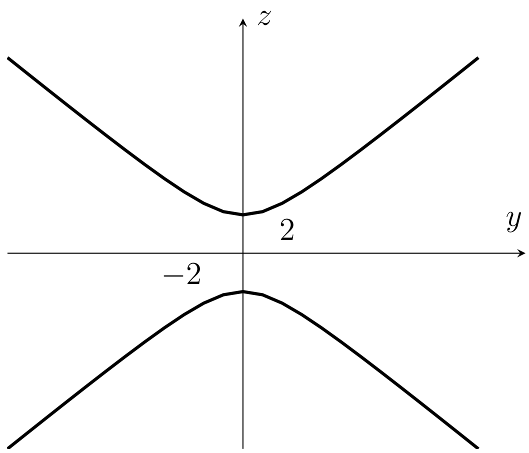
Exemplo 2.2. Tomando $k = 1$, $x = -2$ e $y, z \in \mathbb{Q}$, temos que x, y, z é solução da equação

$$x^2 + y^2 = z^2$$

se, e somente se, (y, z) pertence à hipérbole

$$\frac{z^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

no plano $\mathbb{Q}^2$, cujo gráfico esboçamos abaixo.



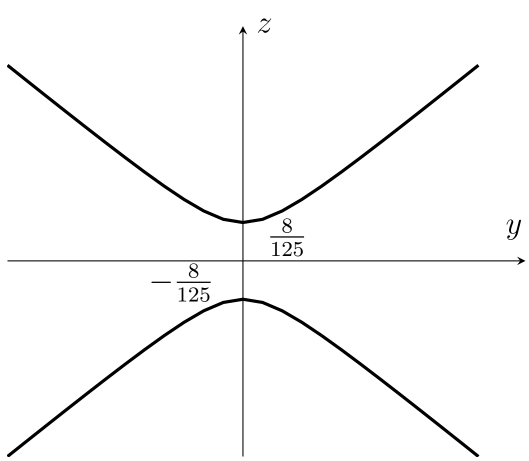
Exemplo 2.3. Tomando $k = 3$, $x = \dfrac{2}{5}$ e $y, z \in \mathbb{Q}$, temos que x, y, z é solução da equação

$$x^6 + y^2 = z^2$$

se, e somente se, (y, z) pertence à hipérbole

$$\frac{z^2}{\left(\frac{8}{125}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{8}{125}\right)^2} = 1$$

no plano $\mathbb{Q}^2$, cujo gráfico esboçamos abaixo.



Passemos ao caso em que n é ímpar, provando a seguinte

Proposição 2.4. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x = \dfrac{\alpha}{\beta}$, onde $\alpha = a^2$ e $\beta = b^2$ para certos $a, b \in \mathbb{N}^*$. Nestas condições, para $y, z \in \mathbb{Q}$, tem-se que x, y, z é solução da equação

$$x^{2k+1} + y^2 = z^2$$

se, e somente se, (y, z) pertence à hipérbole

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$$

no plano $\mathbb{Q}^2$, onde $c = \left(\frac{a}{b}\right)^{2k+1} \in \mathbb{Q}$ e $c > 0$.

Demonstração. Inicialmente, notemos que

$$\begin{aligned} x^{2k+1} &= \frac{\alpha^{2k+1}}{\beta^{2k+1}} = \frac{(a^2)^{2k+1}}{(b^2)^{2k+1}} = \frac{(a^{2k+1})^2}{(b^{2k+1})^2} \\ &= \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+1}\right]^2 = c^2. \end{aligned}$$

Como, para $y, z \in \mathbb{Q}$, as afirmações

$$x^{2k+1} + y^2 = z^2$$

e

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} = \frac{z^2}{x^{2k+1}} - \frac{y^2}{x^{2k+1}} = 1$$

são equivalentes, a demonstração está concluída.

Observação 2.5. A condição "$\alpha = a^2$ e $\beta = b^2$ para certos $a, b \in \mathbb{N}^*$" foi inspirada em um caso particular importante [4, p. 40] de um teorema de Gauss [2, artigo 42].

Observação 2.6. A Proposição 2.4 não é aplicável, por exemplo, a $x = 2^3, 2^5, 2^7, \ldots, 3^3, 3^5, 3^7, \ldots, 5^3, 5^5, 5^7, \ldots$.

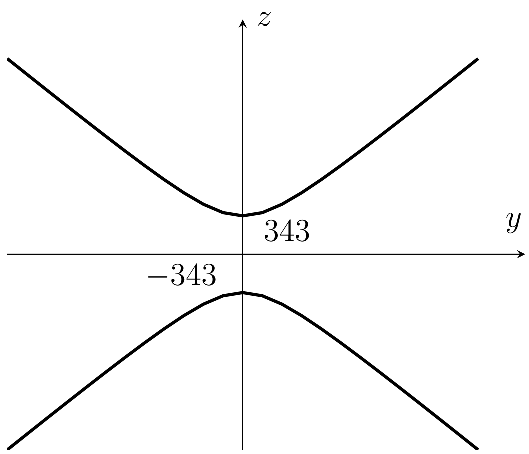
Exemplo 2.7. Tomando $k = 1$, $x = 49 = 7^2$ e $y, z \in \mathbb{Q}$, temos que x, y, z é solução da equação

$$x^3 + y^2 = z^2$$

se, e somente se, (y, z) pertence à hipérbole

$$\frac{z^2}{343^2} - \frac{y^2}{343^2} = 1$$

no plano $\mathbb{Q}^2$, cujo gráfico esboçamos abaixo.



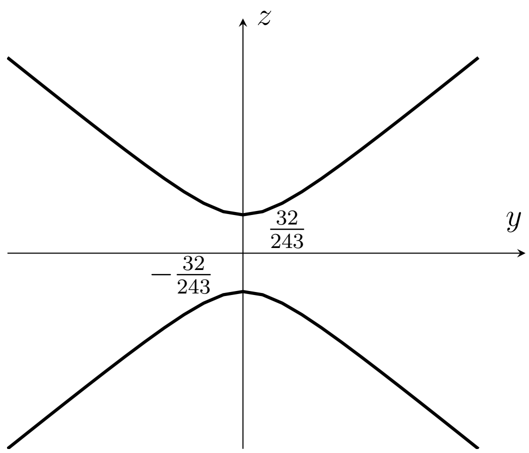
Exemplo 2.8. Tomando $k = 2$, $x = \dfrac{4}{9} = \dfrac{2^2}{3^2}$ e $y, z \in \mathbb{Q}$, temos que x, y, z é solução da equação

$$x^5 + y^2 = z^2$$

se, e somente se, (y, z) pertence à hipérbole

$$\frac{z^2}{\left(\frac{32}{243}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{32}{243}\right)^2} = 1$$

no plano $\mathbb{Q}^2$, cujo gráfico esboçamos abaixo.



Finalmente, provemos a

Proposição 2.9. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{Q}$ tal que $-x = \dfrac{\alpha}{\beta}$, onde $\alpha = a^2$ e $\beta = b^2$ para certos $a, b \in \mathbb{N}^*$. Nestas condições, para $y, z \in \mathbb{Q}$, tem-se que x, y, z é solução da equação

$$x^{2k+1} + y^2 = z^2$$

se, e somente se, (y, z) pertence à hipérbole

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

no plano $\mathbb{Q}^2$, onde $c = \left(\frac{a}{b}\right)^{2k+1} \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad c > 0.$

Demonstração. Como $2k + 1$ é ímpar, $\big(-x \big)^{2k+1} = -x^{2k+1}$. Logo, o resultado segue imediatamente da Proposição 2.4.

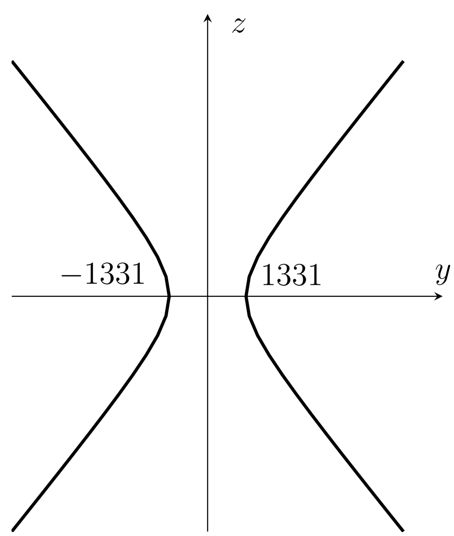
Exemplo 2.10. Tomando $k = 1$, $x = -\frac{1}{121} = -\frac{1}{11^2}$ e $y, z \in \mathbb{Q}$, temos que x, y, z é solução da equação

$$x^3 + y^2 = z^2$$

se, e somente se, (y, z) pertence à hipérbole

$$\frac{y^2}{(1331)^2} - \frac{z^2}{(1331)^2} = 1$$

no plano $\mathbb{Q}^2$, cujo gráfico esboçamos abaixo.



Capítulo 3

As equações $x^n + y^2 = z^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; aspectos aritméticos

Iniciaremos o capítulo abordando certas soluções específicas das nossas equações.

Proposição 3.1. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrário e sejam $x, y, \alpha \in \mathbb{Q}$, com $\alpha \neq 0$. Para que $x, y, z = y + \alpha$ seja uma solução da equação

$$x^n + y^2 = z^2,$$

é necessário e suficiente que

$$y = \frac{x^n - \alpha^2}{2\alpha} \quad \text{e} \quad z = \frac{x^n + \alpha^2}{2\alpha} \cdot$$

Demonstração. Admitamos que $x, y, z = y+\alpha$ seja uma solução da equação em questão. Então

$$x^n + (z - \alpha)^2 = z^2,$$

o que equivale a

$$x^n + z^2 - 2z\alpha + \alpha^2 = z^2,$$

o que equivale a

$$z = \frac{x^n + \alpha^2}{2\alpha} \cdot$$

Consequentemente,

$$y = z - \alpha = \frac{x^n + \alpha^2}{2\alpha} - \alpha = \frac{x^n + \alpha^2 - 2\alpha^2}{2\alpha} = \frac{x^n - \alpha^2}{2\alpha} \cdot$$

Reciprocamente, suponhamos

$$y = \frac{x^n - \alpha^2}{2\alpha} \quad \text{e} \quad z = \frac{x^n + \alpha^2}{2\alpha} \; (= y + \alpha).$$

Então

$$x^n + \left(\frac{x^n - \alpha^2}{2\alpha}\right)^2 = x^n + \frac{x^{2n} - 2x^n\alpha^2 + \alpha^4}{4\alpha^2} = \frac{4x^n\alpha^2 + x^{2n} - 2x^n\alpha^2 + \alpha^4}{4\alpha^2}$$
$$= \frac{x^{2n} + 2x^n\alpha^2 + \alpha^4}{4\alpha^2} = \left(\frac{x^n + \alpha^2}{2\alpha}\right)^2,$$

mostrando que $x, y, y+\alpha$ é solução da equação em questão.

Corolário 3.2. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\ 2, 2^n - 1, 2^n + 1$ é solução inteira da equação

$$x^{n+2} + y^2 = z^2.$$

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 3.1, substituindo n por $n+2$, $\ y$ por $2^n - 1\ $ e $\ \alpha$ por 2.

Lembremos [4, p. 14] que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, o *n-ésimo número de Fermat* é $F_n = 2^{2^n} + 1$ (logo, $F_n - 2 = 2^{2^n} - 1$).

Exemplo 3.3. Como consequência direta do Corolário 3.2 tem-se que $2, F_n - 2, F_n$ é solução da equação $x^{2^n+2} + y^2 = z^2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

Proposição 3.4. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrário. Então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$,

$$x = 4ab,\ \ y = 2^{n-1}(a^n - b^n),\ \ z = 2^{n-1}(a^n + b^n)$$

é solução racional da equação

$$x^n + y^2 = z^2.$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
x^n + y^2 &= (4ab)^n + \big(2^{n-1}(a^n - b^n)\big)^2 \\
&= 4^n a^n b^n + 2^{2n-2}(a^{2n} - 2a^n b^n + b^{2n}) \\
&= 2^{2n-2}(a^{2n} + 2a^n b^n + b^{2n}) = 2^{2n-2}(a^n + b^n)^2 \\
&= \big(2^{n-1}(a^n + b^n)\big)^2 = z^2.
\end{aligned}$$

Observação 3.5. No caso particular em que $a, b \in \mathbb{Z}$, é claro que $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.6. No caso particular em que $n = 2$, a Proposição 3.4 nos diz que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$,

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2$$

é solução da equação

$$x^2 + y^2 = z^2$$

(lembrar o resultado de Diofanto [4, p. 190]).

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ designaremos por S_n o conjunto de todas as ternas $x = 4ab$, $y = 2^{n-1}(a^n - b^n),\ z = 2^{n-1}(a^n + b^n)$, quando a e b variam em $\mathbb{Q}$ ($x \in 4\mathbb{Z}$ se $a, b \in \mathbb{Z}$).

Observação 3.7. (a) Qualquer $x \in \mathbb{Q}^*$ "gera" um elemento de S_n, por exemplo,

$$x = 4\left(\frac{1}{4x}\right)x^2,\ y = 2^{n-1}\left(\left(\frac{1}{4x}\right)^n - x^{2n}\right),\ z = 2^{n-1}\left(\left(\frac{1}{4x}\right)^n + x^{2n}\right).$$

(b) Se $x \in 4\mathbb{Z}$, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 4a$. Fazendo $b = 1$, obtém-se então o elemento $x, y = 2^{n-1}(a^n - 1),\ z = 2^{n-1}(a^n + 1)$ de S_n.

Proposição 3.8. Seja $k \in \mathbb{N}^*$ arbitrário. Então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$,

$$x = 2ab,\ y = 2^{k-1}(a^{2k} - b^{2k}),\ z = 2^{k-1}(a^{2k} + b^{2k})$$

é solução da equação $x^{2k} + y^2 = z^2$.

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
x^{2k} + y^2 &= (2ab)^{2k} + \big(2^{k-1}(a^{2k} - b^{2k})\big)^2 \\
&= 2^{2k}\, a^{2k}\, b^{2k} + 2^{2k-2}(a^{4k} - 2a^{2k}b^{2k} + b^{4k}) \\
&= 2^{2k-2}(a^{2k} + b^{2k})^2 = \big(2^{k-1}(a^{2k} + b^{2k})\big)^2 \\
&= z^2.
\end{aligned}$$

Proposição 3.9. Sejam $m, k \in \mathbb{N}^*$ arbitrários e $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ a aplicação dada por $\varphi(t) = 2^{k-1}\, t^k$ para todo $t \in \mathbb{Q}$. Se $x = 4ab,\ y = 2^{mk-1}(a^{mk} - b^{mk}),\ \ z = 2^{mk-1}(a^{mk} + b^{mk})$ é um elemento arbitrário de S_{mk}, então $x' = 4\varphi(a)\varphi(b),\ y, z$ é um elemento de S_m.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
y &= 2^{mk-1}(a^{mk} - b^{mk}) = 2^{mk-1}\big((a^k)^m - (b^k)^m\big) \\
&= 2^{mk-m+m-1}\big((a^k)^m - (b^k)^m\big) = 2^{m-1}\, 2^{(k-1)m}\big((a^k)^m - (b^k)^m\big) \\
&= 2^{m-1}\big((2^{k-1}a^k)^m - (2^{k-1}b^k)^m\big) = 2^{m-1}\big((\varphi(a))^m - (\varphi(b))^m\big)
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$z = 2^{mk-1}(a^{mk} + b^{mk}) = 2^{m-1}\big((\varphi(a))^m + (\varphi(b))^m\big).$$

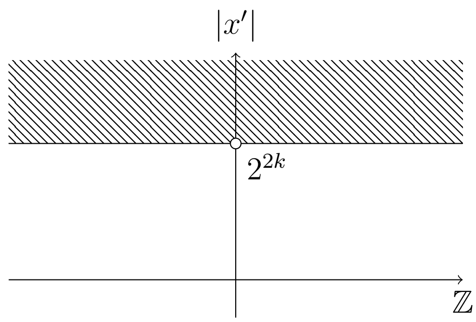
Adotaremos o abuso de notação $S_{mk} \subset S_m$ para representar o que acabamos de provar.

Observação 3.10. Como $\varphi(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, $\;x' = 4\varphi(a)\varphi(b) \in 4\mathbb{Z}$ caso $a, b \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.11. Como $|\varphi(t)| \geq 2^{k-1}$ para todo $t \in \mathbb{Z}^*$, tem-se

$$|x'| = 4|\varphi(a)|\,|\varphi(b)| \geq 4\big(2^{k-1}\big)^2 = 2^{2k}$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^*$; portanto, quanto maior for o valor de k maior será o de $|x'|$.



Observação 3.12. Sejam $m, k, \ell \in \mathbb{N}^*$ arbitrários, $n = mk$ e $o = n\ell = (mk)\ell = m(k\ell)$. Então, de acordo com a nossa convenção, $S_o \subset S_m$. Mais explicitamente, escrevamos $\varphi(t) = 2^{k-1}t^k$ e $\psi(t) = 2^{\ell-1}t^\ell$ para $t \in \mathbb{Q}$. Se $x = 4uv$, $y = 2^{o-1}(u^o - v^o)$, $z = 2^{o-1}(u^o + v^o)$ é um elemento arbitrário de S_o, a ele associaríamos o elemento $x' = 4\psi(u)\psi(v), y, z$ de S_n e, a este último, associaríamos o elemento $x'' = 4\varphi(\psi(u))\varphi(\psi(v)), y, z$ de S_m, ou seja, o elemento $x'' = 4(\varphi \circ \psi)(u)(\varphi \circ \psi)(v), y, z$ de S_m (notemos que $(\varphi \circ \psi)(t) = 2^{k\ell-1}\, t^{k\ell}$ para $t \in \mathbb{Q}$).

A título de ilustração, apresentamos a seguinte família de inclusões:

$$\begin{array}{llllllllllll}
S_2 & \supset & S_4 & \supset & S_8 & \supset & S_{16} & \supset & S_{32} & \supset \ldots\ldots. \\
\cup & & & & \cup & & & & & \\
S_{10} & & S_3 & \supset & S_{24} & \supset & S_{120} & \supset & S_{1320} & \supset \ldots.. \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & \\
S_{50} & & S_9 & \supset & S_{72} & \supset & S_{720} & \supset & S_{2160} & \supset \ldots.. \\
\cup & & & & \cup & & & & & \\
S_{350} & & & & S_{504} & & & & & \\
\cup & & & & \cup & & & & & \\
\vdots & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Proposição 3.13. Seja $k \in \mathbb{N}^*$ arbitrário. Então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$,

$$x = 2ab, \quad y = 2^{k-1}\big(2a^{2k+1} - b^{2k+1}\big), \quad z = 2^{k-1}\big(2a^{2k+1} + b^{2k+1}\big)$$

é solução da equação

$$x^{2k+1} + y^2 = z^2.$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
x^{2k+1} + y^2 &= (2ab)^{2k+1} + \Big[2^{k-1}\big(2a^{2k+1} - b^{2k+1}\big)\Big]^2 \\
&= 2^{2k+1}\, a^{2k+1}\, b^{2k+1} + \big(2^k\, a^{2k+1} - 2^{k-1}\, b^{2k+1}\big)^2 \\
&= 2^{2k+1}\, a^{2k+1}\, b^{2k+1} + 2^{2k}\, a^{4k+2} - 22^k\, a^{2k+1}\, 2^{k-1}\, b^{2k+1} + 2^{2k-2}\, b^{4k+2} \\
&= 2^{2k+1}\, a^{2k+1}\, b^{2k+1} + 2^{2k}\, a^{4k+2} - 2^{2k}\, a^{2k+1}\, b^{2k+1} + 2^{2k-2}\, b^{4k+2} \\
&= 2^{2k}\, a^{2k+1}\, b^{2k+1} + 2^{2k}\, a^{4k+2} + 2^{2k-2}\, b^{4k+2} \\
&= \Big[2^{k-1}\big(2a^{2k+1} + b^{2k+1}\big)\Big]^2 = z^2.
\end{aligned}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}^*$ designemos por S'_{2k} o conjunto de todas as ternas $x = 2ab$, $y = 2^{k-1}(a^{2k} - b^{2k})$, $z = 2^{k-1}(a^{2k} + b^{2k})$, para a e b variando em $\mathbb{Q}$ ($x \in 2\mathbb{Z}$ se $a, b \in \mathbb{Z}$). Para cada $k \in \mathbb{N}$ designemos por S'_{2k+1} o conjunto de todas as ternas $x = 2ab$, $y = 2^{k-1}(2a^{2k+1} - b^{2k+1})$, $z = 2^{k-1}(2a^{2k+1} + b^{2k+1})$, para a e b variando em $\mathbb{Q}$ ($x \in 2\mathbb{Z}$ se $a, b \in \mathbb{Z}$).

Observação 3.14. Analogamente ao que dissemos na Observação 3.7, qualquer $x \in \mathbb{Q}^*$ "gera" um elemento de S'_{2k} e um elemento de S'_{2k+1}. E a todo inteiro par estão associados um elemento de S'_{2k} e um elemento de S'_{2k+1}.

Os dois próximos resultados afirmam que, essencialmente, S_{2k} e S'_{2k} são disjuntos, bem como S_{2k+1} e S'_{2k+1}. Mais precisamente:

Proposição 3.15. Seja $k \in \mathbb{N}^*$. Se $a, b, u, v \in \mathbb{Q}$,

$$2^{2k-1}(a^{2k} - b^{2k}) = 2^{k-1}(u^{2k} - v^{2k})$$

e

$$2^{2k-1}(a^{2k} + b^{2k}) = 2^{k-1}(u^{2k} + v^{2k}),$$

então $a = b = u = v = 0$ (logo, $4ab = 2uv = 0$).

Demonstração. Da primeira igualdade vem

$$2^k(a^{2k} - b^{2k}) = u^{2k} - v^{2k},$$

ao passo que da segunda igualdade vem

$$2^k(a^{2k} + b^{2k}) = u^{2k} + v^{2k}.$$

Somando as duas igualdades imediatamente acima obtemos

$$22^k\, a^{2k} = 2u^{2k}, \text{ isto é, } (2a^2)^k = (u^2)^k.$$

Analogamente, subtraindo as duas mesmas igualdades obtemos

$$\left(2b^2\right)^k = \left(v^2\right)^k.$$

Admitamos $a \neq 0$. Então $u \neq 0$ e $\left(\dfrac{u}{a}\right)^2 = 2$, o que não pode ocorrer visto que $a, u \in \mathbb{Q}$. Logo, $a = 0$, o que implica $u = 0$.

Admitamos, agora, $b \neq 0$. Então $v \neq 0$ e $\left(\dfrac{v}{b}\right)^2 = 2$, o que não pode ocorrer pois $b, v \in \mathbb{Q}$. Logo, $b = 0$, o que implica $v = 0$.

Proposição 3.16. Seja $k \in \mathbb{N}$. Sejam $a, b, u, v \in \mathbb{Q}$ tais que

$$2^{2k}(a^{2k+1} - b^{2k+1}) = 2^{k-1}(2u^{2k+1} - v^{2k+1})$$

e

$$2^{2k}(a^{2k+1} + b^{2k+1}) = 2^{k-1}(2u^{2k+1} + v^{2k+1}).$$

Então $u = a$ e $v = 2b$ (logo, $4ab = 2uv$) se $k = 0$ e $a = b = u = v = 0$ (logo, $4ab = 2uv = 0$) se $k \geq 1$.

Demonstração. Da primeira igualdade vem

$$2^{k+1}(a^{2k+1} - b^{2k+1}) = 2u^{2k+1} - v^{2k+1},$$

ao passo que da segunda igualdade vem

$$2^{k+1}(a^{2k+1} + b^{2k+1}) = 2u^{2k+1} + v^{2k+1}.$$

Somando as duas igualdades imediatamente acima obtemos

$$u^{2k+1} = 2^k\, a^{2k+1}, \text{ isto é, } u = \sqrt[2k+1]{2^k}\, a.$$

Analogamente, subtraindo as duas mesmas igualdades obtemos

$$v^{2k+1} = 2^{k+1}\, b^{2k+1}, \text{ isto é, } v = \sqrt[2k+1]{2^{k+1}}\, b.$$

Consequentemente, $u = a$ e $v = 2b$ se $k = 0$.

Suponhamos, agora, $k \geq 1$. Se $a \neq 0$, $u \neq 0$ e $\dfrac{u}{a} = \sqrt[2k+1]{2^k}$. Mas, como $\sqrt[2k+1]{2^k}$ não é racional [4, p. 40], a igualdade $u = \sqrt[2k+1]{2^k}\, a$ não pode ocorrer. Portanto, $a = 0$, o que implica $u = 0$.

Analogamente conclui-se que $b = 0$, o que implica $v = 0$.

Capítulo 4

Comentários p-ádicos

Para cada primo $p = 2, 3, 5, \ldots$, Hensel [5] introduziu o *valor absoluto p-ádico* $|\cdot|_p$ em $\mathbb{Z}$ da seguinte forma: $|0|_p = 0$; se $x \in \mathbb{Z}^*$, x se expressa de modo único na forma $x = zp^n$ (onde $z \in \mathbb{Z}^*$, $p \nmid z$ e $n \in \mathbb{N}$), e se define $|x|_p = \dfrac{1}{p^n} \cdot$

É claro que $|x|_p \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. E, para $x \in \mathbb{Z}^*$, $|x|_p = 1$ se, e somente se, $p \nmid x$.

A função $|\cdot|_p \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ goza das propriedades abaixo, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$:

(i) $|x|_p = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(ii) $|xy|_p = |x|_p\,|y|_p\,$;

(iii) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

Com efeito, (i) é óbvia. Para justificar a validade de (ii), sejam $x, y \in \mathbb{Z}^*$ (caso contrário, (ii) é evidente) e escrevamos $x = r\,p^m$, onde $p \nmid r$ e $m \in \mathbb{N}$, e $y = s\,p^n$, onde $p \nmid s$ e $n \in \mathbb{N}$. Por um resultado fundamental de Euclides [4, p. 3], $p \nmid rs$. Como $xy = rs\,p^{m+n}$, temos

$$|xy|_p = \frac{1}{p^{m+n}} = \frac{1}{p^m}\,\frac{1}{p^n} = |x|_p\,|y|_p\,.$$

Para justificar a validade de (iii), admitamos $x(x + y) \neq 0$ (caso contrário, (iii) é evidente) e escrevamos $x = r\,p^m$ e $y = s\,p^n$, como acima, com $m \leq n$. Então

$$x + y = r\,p^m + s\,p^n = (r + s\,p^{n-m})p^m$$

e, por definição,

$$|x + y|_p \leq \frac{1}{p^m} = |x|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Segue de (iii) e do Princípio de Indução Finita que, para todo inteiro $n \geq 2$ e para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$,

$$|x_1 + \cdots + x_n|_p \leq \max\{|x_1|_p, \ldots, |x_n|_p\}.$$

Exemplo 4.1. Como $100 = 2^2\,5^2$, $|100|_2 = \dfrac{1}{2^2}\,$, $|100|_5 = \dfrac{1}{5^2}$ e $|100|_p = 1$ para todo primo p diferente de 2 e de 5.

Observação 4.2. Pelo Teorema 1.1,

$$\begin{aligned}
x &= a^6 + a^5b + 4a^4b^2 - 2a^3b^3 + 7a^2b^4 + ab^5, \\
y &= a^5b - 5a^4b^2 - 2a^3b^3 + 4a^2b^4 + ab^5 + b^6, \\
u &= a^6 + a^5b + 4a^4b^2 - 2a^3b^3 - 5a^2b^4 + ab^5, \\
v &= a^5b + 7a^4b^2 - 2a^3b^3 + 4a^2b^4 + ab^5 + b^6
\end{aligned}$$

é solução inteira da equação $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$ sempre que $a, b \in \mathbb{Z}^*$ e $a \neq b$. Logo, neste caso, tem-se $|x|_p \leq 1$, $|y|_p \leq 1$, $|u|_p \leq 1$ e $|v|_p \leq 1$ para todo primo $p = 2, 3, 5, \ldots,$ o que não ocorre se considerarmos o valor absoluto usual em $\mathbb{Z}$ (lembrar a Observação 1.4).

Agora, fixemos um primo p arbitrário e façamos $a = p^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ e $b = 1$. Então

$$\begin{aligned}
|x|_p &= |p^{6m} + p^{5m} + 4p^{4m} - 2p^{3m} + 7p^{2m} + p^m|_p \\
&= |p^m|_p \, |p^{5m} + p^{4m} + 4p^{3m} - 2p^{2m} + 7p^m + 1|_p \\
&\leq |p^m|_p = \frac{1}{p^m} \cdot
\end{aligned}$$

Analogamente, $|u|_p \leq \dfrac{1}{p^m} \cdot$ Por consequência, podemos tomar $|x|_p$ e $|u|_p$ tão próximos de 0 quanto queiramos, desde que consideremos m suficientemente grande. Por outro lado, façamos $a = 1$ e $b = p^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$. Então

$$|y|_p \leq \frac{1}{p^m} \quad \text{e} \quad |v|_p \leq \frac{1}{p^m}\,,$$

e podemos tomar $|y|_p$ e $|v|_p$ tão próximos de 0 quanto queiramos, desde que consideremos m suficientemente grande. Vimos, na Observação 1.4, que o mesmo fenômeno ocorre se considerarmos o valor absoluto usual em $\mathbb{Z}$.

Observação 4.3. Segue do Teorema 1.5 que

$$
\begin{aligned}
x =& - a\, g^6 + 3\, a\, e^2\, g^4 - 6\, b^2\, e^2\, g^3 - 6\, a^2\, e^2\, g^3 - 3\, a\, e^4\, g^2 + 6\, b^2\, e^3\, g^2 + 6\, a^2\, e^3\, g^2 \\
& + a\, e^6 - a\, b^6 - 6\, a^2\, b^5 + 9\, a^3\, b^4 - 6\, a^4\, b^3 + 3\, a^5\, b^2 + a^7, \\
y =& - b\, g^6 + 3\, b\, e^2\, g^4 - 6\, b^2\, e^2\, g^3 + 6\, a^2\, e^2\, g^3 - 3\, b\, e^4\, g^2 + 6\, b^2\, e^3\, g^2 - 6\, a^2\, e^3\, g^2 \\
& + b\, e^6 - b^7 - 3\, a^2\, b^5 + 6\, a^3\, b^4 + 3\, a^4\, b^3 - 6\, a^5\, b^2 + a^6\, b, \\
z =& - e\, g^6 - 6\, e^2\, g^5 + 9\, e^3\, g^4 - 6\, e^4\, g^3 + 3\, e^5\, g^2 - 6\, a^2\, b^3\, g^2 + 6\, a^3\, b^2\, g^2 + e^7 - 6\, a^2\, b^3\, e^2 \\
& + 6\, a^3\, b^2\, e^2 - b^6\, e + 3\, a^2\, b^4\, e - 3\, a^4\, b^2\, e + a^6\, e, \\
r =& - g^7 - 3\, e^2\, g^5 + 6\, e^3\, g^4 + 3\, e^4\, g^3 - 6\, e^5\, g^2 - 6\, a^2\, b^3\, g^2 + 6\, a^3\, b^2\, g^2 + e^6\, g - b^6\, g \\
& + 3\, a^2\, b^4\, g - 3\, a^4\, b^2\, g + a^6\, g + 6\, a^2\, b^3\, e^2 - 6\, a^3\, b^2\, e^2, \\
u =& - a\, g^6 + 3\, a\, e^2\, g^4 + 6\, b^2\, e^2\, g^3 - 6\, a^2\, e^2\, g^3 - 3\, a\, e^4\, g^2 - 6\, b^2\, e^3\, g^2 + 6\, a^2\, e^3\, g^2 + a\, e^6 \\
& - a\, b^6 + 6\, a^2\, b^5 - 3\, a^3\, b^4 - 6\, a^4\, b^3 + 3\, a^5\, b^2 + a^7, \\
v =& - b\, g^6 + 3\, b\, e^2\, g^4 - 6\, b^2\, e^2\, g^3 - 6\, a^2\, e^2\, g^3 - 3\, b\, e^4\, g^2 + 6\, b^2\, e^3\, g^2 + 6\, a^2\, e^3\, g^2 + b\, e^6 \\
& - b^7 - 3\, a^2\, b^5 + 6\, a^3\, b^4 - 9\, a^4\, b^3 + 6\, a^5\, b^2 + a^6\, b, \\
t =& - e\, g^6 + 6\, e^2\, g^5 - 3\, e^3\, g^4 - 6\, e^4\, g^3 + 3\, e^5\, g^2 + 6\, a^2\, b^3\, g^2 - 6\, a^3\, b^2\, g^2 + e^7 - 6\, a^2\, b^3\, e^2 \\
& + 6\, a^3\, b^2\, e^2 - b^6\, e + 3\, a^2\, b^4\, e - 3\, a^4\, b^2\, e + a^6\, e, \\
s =& - g^7 - 3\, e^2\, g^5 + 6\, e^3\, g^4 - 9\, e^4\, g^3 + 6\, e^5\, g^2 - 6\, a^2\, b^3\, g^2 + 6\, a^3\, b^2\, g^2 + e^6\, g - b^6\, g \\
& + 3\, a^2\, b^4\, g - 3\, a^4\, b^2\, g + a^6\, g - 6\, a^2\, b^3\, e^2 + 6\, a^3\, b^2\, e^2
\end{aligned}
$$

é solução inteira da equação $x^3 + y^3 + z^3 + r^3 = u^3 + v^3 + t^3 + s^3$ sempre que $a, b, e, g \in \mathbb{Z}^*$, $a > b$ e $e > g$.

Fixemos um primo p arbitrário. Logo, no caso em questão, tem-se $|x|_p \leq 1$, $|y|_p \leq 1$, $|z|_p \leq 1$, $|r|_p \leq 1$, $|u|_p \leq 1$, $|v|_p \leq 1$, $|t|_p \leq 1$ e $|s|_p \leq 1$, em contraste com o que ocorre se considerarmos o valor absoluto usual em $\mathbb{Z}$ (lembrar a Observação 1.8).

Façamos, agora, $a = e = p^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ e $b = g = 1$. Então

$$
\begin{aligned}
|x|_p =& |-p^m + 3p^{3m} - 6p^{2m} - 6p^{4m} - 3p^{5m} + 6p^{3m} + 6p^{5m} + p^{7m} - p^m - 6p^{2m} + 9p^{3m} \\
& - 6p^{4m} + 3p^{5m} + p^{7m}|_p = |2p^{7m} + 6p^{5m} - 12p^{4m} + 18p^{3m} - 12p^{2m} - 2p^m|_p \\
& = |p^m(2p^{6m} + 6p^{4m} - 12p^{3m} + 18p^{2m} - 12p^m - 2)|_p \\
& = |p^m|_p |2p^{6m} + 6p^{4m} - 12p^{3m} + 18p^{2m} - 12p^m - 2|_p \leq \frac{1}{p^m} \cdot
\end{aligned}
$$

Consequentemente, podemos tomar $|x|_p$ tão próximo de 0 quanto queiramos, desde que tomemos m suficientemente grande. E, escolhendo a, b, e, g de modo conveniente, também é possível constatar que podemos tomar $|y|_p$, $|z|_p$, $|r|_p$, $|u|_p$, $|v|_p$, $|t|_p$ e $|s|_p$ tão próximos de 0 quanto desejarmos. Vimos, na Observação 1.9, que o mesmo fenômeno ocorre se considerarmos o valor absoluto usual em $\mathbb{Z}$.

Observação 4.4. Segue do Teorema 1.10 que

$$\begin{aligned}
x =& -2\,a\,e\,g^9 + 6\,a\,e^3\,g^7 - 6\,b^3\,e^3\,g^5 - 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,a\,e^7\,g^3 + 6\,b^3\,e^5\,g^3 + 6\,a^3\,e^5\,g^3 \\
&+ 2\,a\,e^9\,g - 2\,a^2\,b^9 - 6\,a^3\,b^8 + 6\,a^4\,b^7 + 6\,a^5\,b^6 - 6\,a^6\,b^5 + 2\,a^{10}\,b, \\
y =& -2\,b\,e\,g^9 + 6\,b\,e^3\,g^7 - 6\,b^3\,e^3\,g^5 + 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,b\,e^7\,g^3 + 6\,b^3\,e^5\,g^3 - 6\,a^3\,e^5\,g^3 \\
&+ 2\,b\,e^9\,g - 2\,a\,b^{10} + 6\,a^5\,b^6 + 6\,a^6\,b^5 - 6\,a^7\,b^4 - 6\,a^8\,b^3 + 2\,a^9\,b^2, \\
z =& -2\,e^2\,g^9 - 6\,e^3\,g^8 + 6\,e^4\,g^7 + 6\,e^5\,g^6 - 6\,e^6\,g^5 - 6\,a^3\,b^5\,g^3 + 6\,a^5\,b^3\,g^3 + 2\,e^{10}\,g \\
&- 6\,a^3\,b^5\,e^3 + 6\,a^5\,b^3\,e^3 - 2\,a\,b^9\,e + 6\,a^3\,b^7\,e - 6\,a^7\,b^3\,e + 2\,a^9\,b\,e, \\
r =& -2\,e\,g^{10} + 6\,e^5\,g^6 + 6\,e^6\,g^5 - 6\,e^7\,g^4 - 6\,e^8\,g^3 - 6\,a^3\,b^5\,g^3 + 6\,a^5\,b^3\,g^3 + 2\,e^9\,g^2 \\
&- 2\,a\,b^9\,g + 6\,a^3\,b^7\,g - 6\,a^7\,b^3\,g + 2\,a^9\,b\,g + 6\,a^3\,b^5\,e^3 - 6\,a^5\,b^3\,e^3, \\
u =& -2\,a\,e\,g^9 + 6\,a\,e^3\,g^7 + 6\,b^3\,e^3\,g^5 - 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,a\,e^7\,g^3 - 6\,b^3\,e^5\,g^3 + 6\,a^3\,e^5\,g^3 \\
&+ 2\,a\,e^9\,g - 2\,a^2\,b^9 + 6\,a^3\,b^8 + 6\,a^4\,b^7 - 6\,a^5\,b^6 - 6\,a^6\,b^5 + 2\,a^{10}\,b, \\
v =& -2\,b\,e\,g^9 + 6\,b\,e^3\,g^7 - 6\,b^3\,e^3\,g^5 - 6\,a^3\,e^3\,g^5 - 6\,b\,e^7\,g^3 + 6\,b^3\,e^5\,g^3 + 6\,a^3\,e^5\,g^3 \\
&+ 2\,b\,e^9\,g - 2\,a\,b^{10} + 6\,a^5\,b^6 - 6\,a^6\,b^5 - 6\,a^7\,b^4 + 6\,a^8\,b^3 + 2\,a^9\,b^2, \\
t =& -2\,e^2\,g^9 + 6\,e^3\,g^8 + 6\,e^4\,g^7 - 6\,e^5\,g^6 - 6\,e^6\,g^5 + 6\,a^3\,b^5\,g^3 - 6\,a^5\,b^3\,g^3 + 2\,e^{10}\,g \\
&- 6\,a^3\,b^5\,e^3 + 6\,a^5\,b^3\,e^3 - 2\,a\,b^9\,e + 6\,a^3\,b^7\,e - 6\,a^7\,b^3\,e + 2\,a^9\,b\,e, \\
s =& -2\,e\,g^{10} + 6\,e^5\,g^6 - 6\,e^6\,g^5 - 6\,e^7\,g^4 + 6\,e^8\,g^3 - 6\,a^3\,b^5\,g^3 + 6\,a^5\,b^3\,g^3 + 2\,e^9\,g^2 \\
&- 2\,a\,b^9\,g + 6\,a^3\,b^7\,g - 6\,a^7\,b^3\,g + 2\,a^9\,b\,g - 6\,a^3\,b^5\,e^3 + 6\,a^5\,b^3\,e^3
\end{aligned}$$

é solução inteira da equação $x^4 + y^4 + z^4 + r^4 = u^4 + v^4 + t^4 + s^4$ sempre que $a, b, e, g \in \mathbb{Z}$, com $a > b > 0$ e $e > g > 0$. Logo, no caso em questão, tem-se $|x|_p \leq 1$, $|y|_p \leq 1$, $|z|_p \leq 1$, $|r|_p \leq 1$ $|u|_p \leq 1$, $|v|_p \leq 1$, $|t|_p \leq 1$ e $|s|_p \leq 1$ para todo primo p, em contraste com o que ocorre se considerarmos o valor absoluto usual em $\mathbb{Z}$ (lembrar a Observação 1.12).

Fixemos um primo p arbitrário e façamos $a = e = p^m \ (m \in \mathbb{N}^*)$ e $b = g = 1$. Então

$$\begin{aligned}
|t|_p &= |-2p^{2m} + 6p^{3m} + 6p^{4m} - 6p^{5m} - 6p^{6m} + 6p^{3m} - 6p^{5m} + 2p^{10m} - 6p^{6m} + 6p^{8m} \\
&\qquad - 2p^{2m} + 6p^{4m} - 6p^{8m} + 2p^{10m}|_p \\
&= |4p^{10m} - 12p^{6m} - 12p^{5m} + 12p^{4m} + 12p^{3m} - 4p^{2m}|_p \\
&= |p^{2m}(4p^{8m} - 12p^{4m} - 12p^{3m} + 12p^{2m} + 12p^m - 4)|_p \\
&= |p^{2m}|_p \, |4p^{8m} - 12p^{4m} - 12p^{3m} + 12p^{2m} + 12p^m - 4|_p \le |p^{2m}|_p = \frac{1}{p^{2m}} \cdot
\end{aligned}$$

Por consequência, podemos tomar $|t|_p$ tão próximo de 0 quanto desejarmos. Raciocinando de maneira análoga justifica-se que o mesmo ocorre para x, y, z, r, u, v, s. Vimos, na Observação 1.13, que a mesma observação é válida se considerarmos o valor absoluto usual em $\mathbb{Z}$.

Observação 4.5. Fixemos $n \in \mathbb{N}^*$. Vimos, na Proposição 3.4, que

$$\begin{aligned}
x &= 4 \text{ a } b, \\
y &= 2^{n-1}(a^n - b^n), \\
z &= 2^{n-1}(a^n + b^n)
\end{aligned}$$

é solução inteira da equação

$$x^n + y^2 = z^2$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$. Notemos que, neste caso,

$$|x|_2 = |2^2|_2 \, |a|_2 \, |b|_2 \le \frac{1}{4}, \quad |y|_2 = |2^{n-1}|_2 \, |a^n - b^n|_2 \le \frac{1}{2^{n-1}} \text{ e } |z|_2 \le \frac{1}{2^{n-1}} \cdot$$

Por outro lado, para todo primo $p > 2$, tem-se $|x|_p \le 1$, $\ |y|_p \le 1$ e $|z|_p \le 1$. E, se fizermos $a = 1$ e $b = 0$, ter-se-á $|x|_p = 0$ e $|y|_p = |z|_p = 1$.

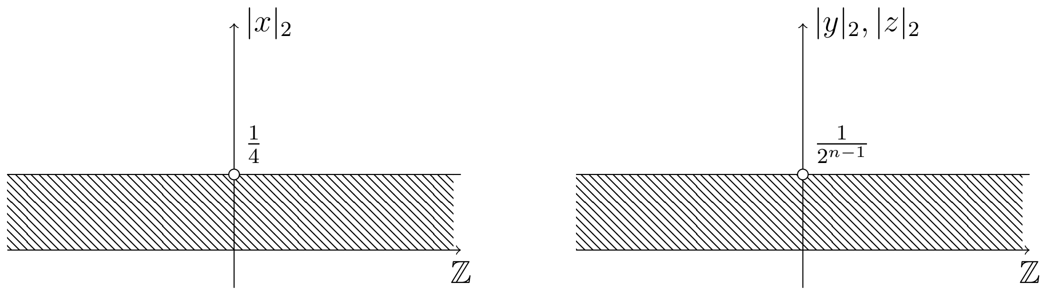
E, se fizermos $a = 2^m \ (m \in \mathbb{N}^*)$ e $b = 1$, ter-se-á

$$|x|_2 = |2^2 \, 2^m|_2 = |2^{m+2}|_2 = \frac{1}{2^{m+2}} \le \frac{1}{2^m} \cdot$$

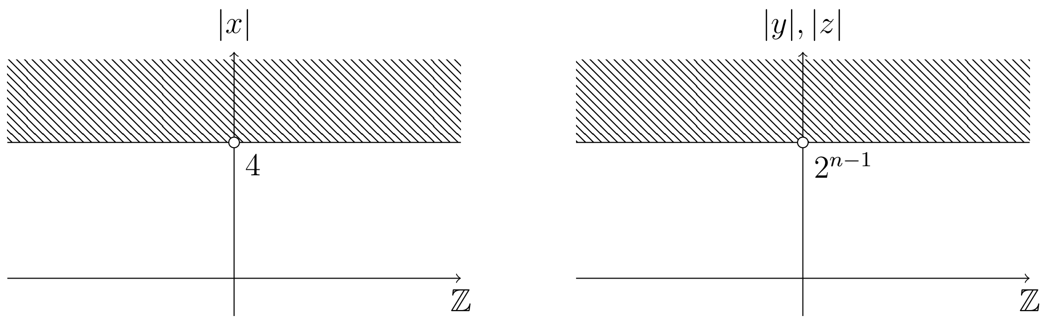
Por consequência, podemos tomar $|x|_2$ tão próximo de 0 quanto desejarmos. Por outro lado, se considerarmos $a = 2^m \ (m \in \mathbb{N}^*)$ e $b = 0$, teremos

$$|y|_2 = |z|_2 = |2^{n-1+mn}|_2 = \frac{1}{2^{n-1+mn}} \le \frac{1}{2^m},$$

e podemos tomar $|y|_2$ e $|z|_2$ tão próximos de 0 quanto desejarmos.



Notemos que, se considerássemos o valor absoluto usual $|\cdot|$ em $\mathbb{Z}$, teríamos: $|x| = 0$ ou $|x| \geq 4$, $|y| = 0$ ou $|y| \geq 2^{n-1}$, $|z| = 0$ ou $|z| \geq 2^{n-1}$.



Observação 4.6. Fixemos $k \in \mathbb{N}^*$. Vimos, na Proposição 3.13, que

$$\begin{aligned} x &= 2ab, \\ y &= 2^{k-1}\big(2a^{2k+1} - b^{2k+1}\big), \\ z &= 2^{k-1}\big(2a^{2k+1} + b^{2k+1}\big) \end{aligned}$$

é solução inteira da equação

$$x^{2k+1} + y^2 = z^2$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$. Notemos que, neste caso, $|x|_2 \leq \frac{1}{2}$, $|y|_2 \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ e $|z|_2 \leq \frac{1}{2^{k-1}}\cdot$ Por outro lado, para todo primo $p > 2$, tem-se $|x|_p \leq 1$, $|y|_p \leq 1$ e $|z|_p \leq 1$. E, se fizermos $a = 1$ e $b = 0$, ter-se-á $|x|_p = 0$, $|y|_p = |z|_p = 1$.

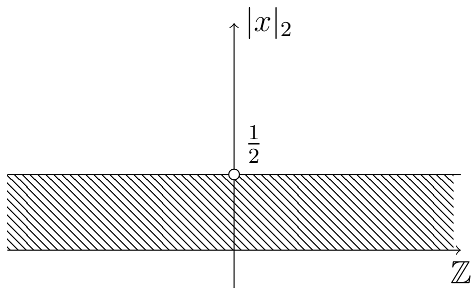
E, se fizermos $a = 2^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ e $b = 1$, ter-se-á

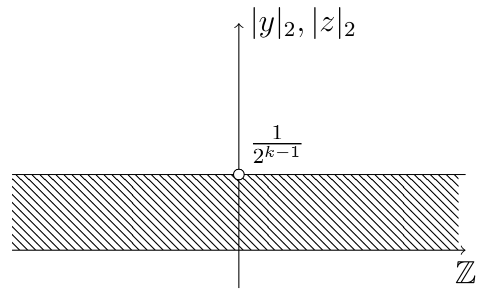
$$|x|_2 = |2\,2^m|_2 = |2^{m+1}|_2 = \frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{1}{2^m}\cdot$$

Por consequência, podemos tomar $|x|_2$ tão próximo de 0 quanto queiramos. Por outro lado, se considerarmos $a = 2^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ e $b = 0$, teremos

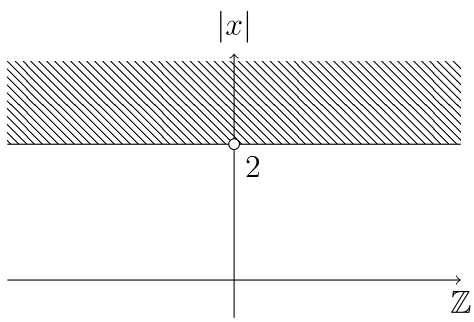
$$|y|_2 = |z|_2 = |2^{k-1}2(2^m)^{2k+1}|_2 = |2^{2km+m+k}|_2 = \frac{1}{2^{2km+m+k}} \leq \frac{1}{2^m}\,.$$

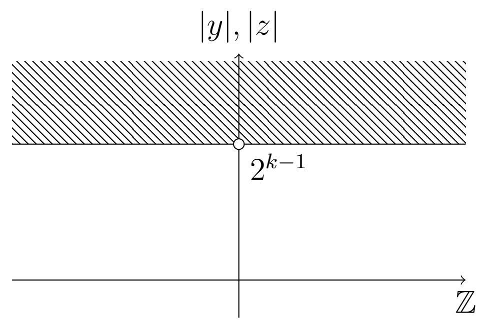
Por consequência, podemos tomar $|y|_2$ e $|z|_2$ tão próximos de 0 quanto desejarmos.





Notemos que, se considerássemos o valor absoluto usual em $\mathbb{Z}$, teríamos: $|x| = 0$ ou $|x| \geq 2$, $|y| = 0$ ou $|y| \geq 2^{k-1}$, $|z| = 0$ ou $|z| \geq 2^{k-1}$.





Finalmente, em vista da Proposição 3.8, ter-se-ia uma observação análoga à Observação 4.6 para a equação $x^{2k} + y^2 = z^2$.

Observação 4.7. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$ ponhamos $\varphi_k(t) = 2^{k-1}\,t^k$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ e, para $a, b \in \mathbb{Z}$, ponhamos $x'_{k,a,b} = 4\,\varphi_k(a)\varphi_k(b)$ (lembrar a Proposição 3.9). Então, pelo que vimos na Observação 3.11,

$$\inf_{a,b\in\mathbb{Z}^*} |x'_{k,a,b}| \geq 2^{2k}.$$

Consequentemente, podemos tomar $\inf_{a,b\in\mathbb{Z}^*} |x'_{k,a,b}|$ tão grande quanto queiramos, bastando para isso tomar k suficientemente grande.

Por outro lado, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$|x'_{k,a,b}|_2 = |2^{k-1}|_2 \, |t^k|_2 \leq |2^{k-1}|_2 = \frac{1}{2^{k-1}} \, .$$

Portanto,

$$\sup_{a,b \in \mathbb{Z}} |x'_{k,a,b}|_2 \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

e podemos tomar $\sup_{a,b\in\mathbb{Z}} |x'_{k,a,b}|_2$ tão próximo de 0 quanto desejarmos, bastando tomar k suficientemente grande.

Além disso, para todo primo p diferente de 2, temos

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^*, a,b\in\mathbb{Z}} |x'_{k,a,b}|_p \leq 1.$$

Referências

[1] L.E. Dickson, History of the theory of numbers, Carnegie Institution; volume i, 1919; volume ii, 1920; volume iii, 1923.

[2] C.F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Fleischer, Leipzig, 1801.

[3] G.H. Hardy, P.V. Seshu Aigar and B.M. Wilson, Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge University Press, 1927.

[4] G.H. Hardy and E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth edition, Oxford University Press, 1971.

[5] K. Hensel, Zahlentheorie, Göschen, Berlin und Leipzig, 1913.

[6] P. Samuel, Théorie algébrique des nombres, Hermann, 1967.

[7] P. Swinnerton-Dyer, A solution of $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$, Journal of the London Mathematical Society 18 (1943), 2-4.

[8] R. Taylor and A. Wiles, Ring theoretic properties of certain Hecke algebras, Annals of Mathematics 141 (1995), 553-572.

[9] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, Annals of Mathematics 141 (1995), 443-551.