UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Instituto de Matemática

CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – DM
Área: Matemática Pura

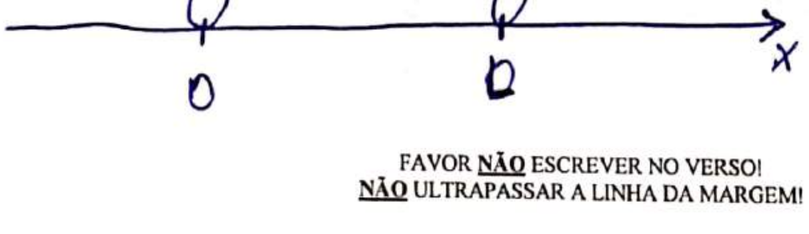
C

Nome do Candidato:
Viviane Mendes Magalhães

Teoria Classica da Equação do Calor

Muitas das equações diferenciais parciais (EDPs) surgiram ligadas a problemas físicos. A importância do problema aguçou o desenvolvimento de uma teoria para buscar a solução da EDP e estudar suas propriedades. Muitas leis da Física geram equações integrais e destas obtemos equações diferenciais.

Vejamos o caso da lei da conservação. Con- ~~siderea~~ sidiere uma barra de comprimento L, posicionada como na figura abaixo.



Seja $u(x,t)$, com $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq L$, a concentração de uma determinada substância no instante t no ponto x. No caso da equação do calor $u(x,t)$ é a temperatura, isto é, a concentração de energia térmica.

A Lei da conservação diz que, se nenhuma substância pode ser gerada no interior da barra então a quantidade da substância que saida barra é a mesma quantidade que entra.

Esando esta propriedade usando integral, temos, considerando o fluxo $\phi(x,t)$ de calor em x no tempo t,

$$\int_a^b u(x,t)\,dx = \phi(b,t) - \phi(a,t).$$

Se supormos que há uma geração de calor no interior da barra, teríamos mais um termo nessa equação.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Matemática e da Natureza
Instituto de Matemática

CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – DM
Área: Matemática Pura

Temos, assim,

$$\int_a^b u(x,t)\, dx = \int_a^b \phi_x(x,t)\, \cancel{dx}\, dt \quad (1)$$

Uma propriedade fízica que muitos materiais possuem é que o fluxo de calor é proporcional a variação da temperatura. Assim, como o fluxo de calor sai da região mais quente ($u(x,t)$ maior) para uma região mais fria ($u(x,t)$ menor), temos

$$\phi(x,t) = -k\, u_x(x,t), \quad t \geq 0, \; 0 \leq x \leq L.$$

Substituindo em (1) obtemos

$$\int_a^b u(x,t)\, dx = \int_a^b -k\, u_{xx}\, dx.$$

Derivando em relação a t, obtemos

$$u_t = -k u_{xx}.$$

Esta é a chamada Equação do Calor.

Considerando que no instante $t=0$, a barra esteja numa temperatura

$u(x,0) = g(x), \quad x \in [0,L]$,

e que nas extremidades a temperatura é zero, isto é,

$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$,

obtemos o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF),

$$(P) \begin{cases} u_t + k u_{xx} = 0, & \text{em } [0,L] \times [0,+\infty), \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,L], \\ u(0,t) = u(0,L) = 0. \end{cases}$$

Vamos agora, procurar uma candidata a

solução do PVIF (P). Para isso, vamos buscar uma solução da forma

$$u(x,t) = F(x)\, G(t) \qquad (2)$$

Depois de encontrada a solução, há ainda o trabalho demostrar que ela de fato é solução. Esse método é chamado método ~~das separações~~ da separação de variáveis ou método de Fourier.

Substituindo (2) em (P), temos

$$F(x)\, G'(t) + K\, F''(x)\, G(t) = 0,$$

o que implica (caso os denominadores não se anule)

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{1}{K} \cdot \frac{G'(t)}{G(t)}.$$

Como o lado esquerdo é constante em relação ~~avt~~ a t e o lado direito é constante em relação a x, concluímos que ambos os lados são constantes em relação as duas variáveis.

Considere λ como sendo essa constante, ou seja,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} \equiv \frac{1}{K}\frac{G'(t)}{G(t)} \equiv \lambda.$$

Assim,

$$\begin{cases} F'' - \lambda F = 0 \\ G' - K\lambda G = 0 \end{cases}$$

Estas equações são lineares, cujas soluções são da forma:

a) Se $\lambda > 0$,
$$F(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda} x} + d_2 e^{\sqrt{\lambda} x}.$$

Mas a condição $u(0,t) = u(L,t) = 0$ implicaria

$$G(t) = C e^{-K\lambda t} \equiv 0$$

e então $G \equiv 0$. Assim, como procuramos outras soluçõees, o caso $\lambda > 0$ não nos interessa, pois nesse caso, ~~Fa~~ $u \equiv 0$.

b) Se $\lambda = 0$ então G é constante e

$F(x) = c_1 + c_2 x$.

Logo, como $u(0,t) = u(L,t) = 0$, temos

$F \equiv 0$ e, portanto, $u \equiv 0$.

c) Se $\lambda < 0$, existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda = -\alpha^2$.

Nesse caso,

$F(x) = c_1 \cos \alpha x + d_2 \operatorname{sen} \alpha x$,

$G(t) = c \exp(-K\lambda x)$.

Usando a condição de fronteira, temos

$0 = u(0,t) = c\,c_1.$

Logo, para que u seja não nula, precisamos ter $c_1 = 0$. Além disso,

$$u(L,t) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \cancel{\alpha}\, \cancel{L} = 0$$
$$\Rightarrow \alpha L = n\pi$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L}.$$

Logo,

$$A = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

~~Port~~ Portanto,

$$F_n(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n^2\pi^2}{L^2} x,$$
$$G_n(x) = c \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2} k\ x\right).$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, temos uma solução

$$u_n(x,t) = F_n(x)\, G_n(x).$$

Note que ~~as~~ a soma de duas soluções da forma acima também é solução do porblema (P). O Princípio da Superposição diz que a função

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),$$

satisfaz

$$\begin{cases} u_t + k u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Usando a condição inicial

$$g(x) = u(x,0), \quad 0 \leq x \leq L,$$

temos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cancel{\cos} \operatorname{sen} \frac{n^2\pi^2}{L^2} x.$$

Assim,

$$\cancel{F_n(x) = C_n}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2} k\, X\right) \operatorname{sen} \frac{n^2\pi^3}{L^2} x,$$

em que c_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ são os coeficientes de Fourier de g.

Obtemos, portanto, uma candidata a solução do ~~PVIaF~~ PVIF designado por (P).

Forma Canônica de Jordan

Para operadores que possuem o polinômio característico decomposto como produto de fatores lineares, podemos escrever o operador numa base mais adequada de modo a facilitar as operações com sua matriz. É o que vamos ver nesse texto.

Seja V um espaço vetorial normado de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$. Seja N um operador linear nilpotente sobre V. Assim, o polinômio característico de N é da forma

$$P_N(x) = x^d,$$

para algum $d \in \mathbb{N}$. E o polinômio minimal de N é da forma

Nome do Candidato:

$$m_N(x) = x^k,$$

para algum $k \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema da Decomposição Primária, existe um vetor $\alpha_i \in V_i$ tal que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$

$$\beta_i = \{\alpha, N\alpha, \ldots, N^{k-1}\alpha\}$$

é uma base para V_i. Nesse caso, a matriz de N nessa base é formada por blocos

$$[N]_{\beta_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Seja $T: V \to V$ um operador linear em V cujo polinômio característico é

$$p_T(x) = (x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_r)^{d_r}, \qquad (1)$$

com $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{K}$ distintos.

O Teorema da Decomposição Primária implica que existem subespaços $W_1, \dots, W_r$ tais que V pode ser escrito como soma direta

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r,$$

e as restrições $(T-c_i)|_{W_i} : W_i \to W_i$ são nilpotentes.

O polinômio minimal de T é da forma

$$m_T(x) = (x-c_1)^{k_1} \cdots (x-c_r)^{k_r},$$

com $0 \leq k_i \leq r_i$, $i = 1, \dots, r$.

Além disso, k_i é o menor número natural tal que $(T-c_iI)^{k_i} = 0$.

Assim, pelas nossas observações anteriores $(T-c_iI)|_{W_i}$ posui uma base β_i formada pela união de conjuntos da forma

$$\{\alpha_i, (T-c_iI)\alpha_i, \dots, (T-c_iI)^{s_i-1}\alpha_i\},$$

com $0 \leq s_i \leq k_i$.

Logo, temos uma base $\beta = \bigcup_{i=1}^{r} \beta_i$ de V. Temos também que a matriz de ~~Tla~~ $(T-c_iI)|_{W_i}$ é formada por blocos da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Portanto, a restrição $T|_{W_i}$ na base β_i é formada por blocos da forma

$$\begin{bmatrix} c_i & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 \quad c_i \end{bmatrix} \qquad (3)$$

dispostos na diagonal.

Logo, usando a soma direta

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

temos a matriz de T na base β composta por blocos na forma (3). Possivelmente, pode haver mais de um bloco da forma (3) para um mesmo autovalor c_i.

A matriz $[T]_\beta$ é chamada <u>Forma Canônica de Jordan</u> do operador T. De modo análogo, temos também a Forma Canônica de Jordan de uma matriz, visto que o espaços das matrizes são isomorfos ao espaço dos operadores lineares sobre espaços de dimensão finita.

Observe que se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou seja, V é um espaço vetorial complexo, então o polinômio característico de todo operador pode ser escrito na forma (1). Nesse caso, todo operador pode ser escrito na na forma canônica de Jordan.

De modo mais geral, todo corpo pode ser complexificado. Considerando, assim, sobre esse novo corpo todo polinômio pode ser escrito na

Forma Canônica de Jordan.

Vejamos um exemplo abaixo.

Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado na base canônica por

$$T = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

ou seja, $Tv = cv$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$. Note que $T - cI = 0$, em particular, $T - cI$ é nilpotente. Logo, existe uma base β tal que

~~$[T]_\beta =$~~

$$[T - cI]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a Forma Canônica de Jordan de T é

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}.$$

~~6~~ 17

O Teorema de Hahn-Banach

Há quatro versões do Teorema de Hahn-Banach. Elas são divididas em versões algébricas e versões geométricas. As ~~primeira~~ versões algébricas nos diz que sob certas hipóteses podemos extender um ~~operador linear~~ funcional linear f que satisfaz uma hipótese da forma

$$f \leq R \text{ em } V, \qquad (1)$$

e a extensão é linear e preserva essa propriedade. A primeira versão algébrica é enunciada para um espaço vetorial real. Já a segunda é enunciada considerando um espaço vetorial complexo, trocando a hipótese ~~ta~~ (1) por

$|f(x)| \leq \rho(x)$, $x \in V$.

Já as versões geométricas do Teorema de Hahn-Banach afirma que, sobcertas hipóteses, podemos separar dois conjuntos A e B, nos seguintes sentidos:

a) 1ª versão geométrica: existe f funcional linear e $a \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) \leq a \leq f(y), \ \forall x \in A, \ \forall y \in B.$$

b) 2ª versão geométrica: os conjuntos A e B podem ser separados estritamente, no seguinte sentido, existem um funcional f e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) \leq a < b \leq f(y), \quad \forall x \in A, \forall y \in B.$$

Para a demonstração da versão algébrica sobre o corpo dos reais usamos o Lema de Zorn. E usamos a versão real sobre o funcional Ref (parte real de f) para provar a versão algébrica do Teorema de Hahn-Banach sobre o corpo dos números complexos.

Vamos ao primeiro enunciado.

Teorema de Hahn-Banach (1ª versão algébrica)
Sejam X um espaço vetorial real, Z um subespaço de X e $p: X \to \mathbb{R}$ uma ~~funcional linear~~ aplicação. Se $f: Z \to \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que

$f(x) \leq \rho(x), \forall x \in Z$

e ρ satisfaz

$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y), \quad x,y \in X,$

$\rho(\alpha x) = \alpha \rho(x), \quad x \in X, \alpha \geq 0,$

então existe $F: X \to \mathbb{R}$ funcional linear tal que

$F(x) \leq \rho(x), \quad \forall x \in X,$

e $F|_Z = f$.

<u>Exemplo</u>

Dado $x \in X$, existe $x \in X^*$ tal que $\|F\| = 1$ e $F(x) = \|x\|$.

De fato, considere Z o subespaço gerado por x.

Defina o funcional $f: Z \to \mathbb{R}$ por

$f(\alpha x) = \alpha \|x\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, podemos extender f e obter um funcional linear F tal que

$F(x) = \|x\|$.

Observe que nesse caso, usamos
$p(v) = \|v\|$, $v \in X$.

Como consequencia desse exemplo, concluímos que se $x, y \in X$ são vetores distintos, existe um funcional linear $F: X \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) \neq F(y)$.