UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Matemática e da Natureza
Instituto de Matemática

CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – DM
Área: Matemática Pura

B

Nome do Candidato: Vinicius Bouça Marques da Costa

$E(x,t;r) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n,\ s<t,\ \phi(x-y,t-s) \geq 1/r^n\}$

$\frac{1}{4r^n}\int u(y,s)\,\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,ds\,dy$

A Teoria clássica da Equação do Calor

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Dizemos que $u(x,t)$ satisfaz a equação do calor em U

se $\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) - u_t(x,t) = \Delta u - u_t \equiv 0$ em U

Discutiremos aqui alguns aspectos da teoria envolvendo esta equação

1. A equação do calor em $\mathbb{R}^n$

Vamos começar a nossa discussão atacando o problema geral

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = f(x,t) \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty), & f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)) \\ u(x,0) = g(x), & g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Pela linearidade do problema, podemos separá-lo em dois casos

Caso 1: ~~f(x,t) ≡ 0~~ g e $f(x,t) \equiv 0$

Caso 2: $g(x) \equiv 0$.

Para resolver ambos os casos, começamos procurando uma solução $\phi(x,t)$ definida em $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ sem maiores preocupações. Não é difícil verificar que

$$\phi(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ \dfrac{\exp(-|x|^2/4t)}{(4\pi t)^{n/2}} \end{cases}$$

observe que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x,t)\,dx = \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|y|^2)\,dy = 1$

Satisfaz a equação do calor em $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ e que é C^∞ neste aberto. Observe também que $\phi(x,t)$ é singular em $(0,0)$

Para completar a solução do problema no caso 1, relembramos o conceito de convolução:
se $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções, definimos (quando possível)

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) * g(y)\, dy$$

este produto de convolução satisfaz a seguinte propriedade:

se existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, então $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) * g$

Assim, segue que $\overset{u(x,t)}{"} \phi(x,t) * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t)\, g(y)\, dy$ é C^∞ e resolve a equação do calor em $\mathbb{R}^n$ (como g é limitada, a integral acima está definida). Mas ainda, como g é contínua, u é contínua. A próxima proposição conclui a solução do caso 1

Proposição $\displaystyle\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = g(x_0)$

$\int \phi(x,t) = 1$

dem: $\| u(x,t) - g(x_0)\| = \| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t)\, g(y)\, dy - g(x_0)\| = \| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t)(g(y)-g(x_0))\, dy\|$

$\leq \int_{B(x_0,\delta)} \| \phi(x-y,t)\cdot(g(y)-g(x_0))\|\, dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} \|\phi(x-y,t)[g(y)-g(x_0)]\|\, dy = I_\delta + J_\delta$

agora, $I_\delta \leq \cancel{\int_{B(x_0,\delta)} \|g(y)-g(x_0)\|} \leq \sup_{B(x_0,\delta)} \|g(y)-g(x_0)\| \cdot \int_{B(x_0,\delta)} \phi(x-y,t)$

$\leq \sup \|g(y)-g(x_0)\|$

Logo I_δ é pequeno se δ é suficientemente pequeno.

Por outro lado,

$$J_\delta \leq \frac{2\|g\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy$$

assim, a dependência exponencial da integral mostra que $J_\delta \to 0$ se $t \to 0^+$ ∎

Já a solução do caso 2 decorre do caso 1 pelo princípio de Duhamel: para cada $s > 0$, a função $\phi(x, t-s)$ resolve a equação do calor em $\mathbb{R}^n \times (s, +\infty)$. Assim, pelo caso 1, $\Psi(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y, t-s) * f(x-y, t)\, dt$ é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (s, +\infty) \\ \cancel{u(x) =} \\ u(x,s) = f(x,s) & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{s\}. \end{cases}$$

Assim, pelo princípio de Duhamel, a função

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, t-s) f(y,s)\, dy\, ds$$

resolve o caso (2) em $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Assim, por linearidade, o problema do calor em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ dado em (*) é resolvido por

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t) g(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, t-s) \cdot f(y,s)\, dy\, ds$$

A propriedade da média para a equação do calor.

Muitas propriedades das funções harmônicas têm suas variantes (em geral, mais complicada) para soluções da equação do calor. Uma delas é a fórmula da média.

a primeira diferença é que não utilizamos bolas ordinárias de $\mathbb{R}^n$, e sim a chamada "bola do calor" $E(x,t,r)$:

$$E(x,t;r) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty);\ s \leq t \text{ e } \phi(x-y,t-s) \geq 1/r^n\}$$

observe que $\partial E(x,t;r)$ é uma curva de nível de $\phi(x,t)$ e que (x,t) se situa no "topo" da bola do calor. Nesta situação, é possível mostrar que se $u(x,t)$ é solução da equação do calor em $U \subseteq \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$:

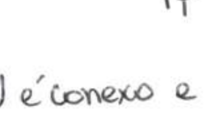
$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{4r^n}\int_{E(x_0,t_0;r)} u(x,t)\,\frac{\|x-x_0\|^2}{(t-t_0)^2}\,dx\,dt$$ para toda bola do calor $E(x_0,t_0;r) \subseteq U$

esta fórmula nos dá ~~a segui~~ o importante princípio do máximo para equação do calor em domínios limitados

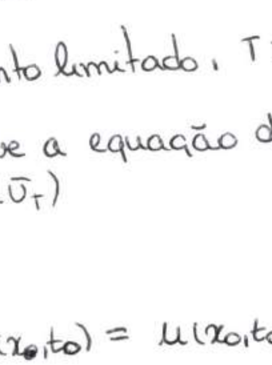
Teorema: Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto limitado, $T>0$ ~~e~~ $U_T = U \times (0,T]$ e $\Gamma_T = \partial U \times [0,T] \cup U \times \{0\}$. Se $u(x,t)$ resolve a equação do calor em U_T, ($u(x,t) \in C(\overline{U}_T)$) então

a) $\max_{\overline{U}_T} u(x,t) = \max_{\Gamma_T} u(x,t)$

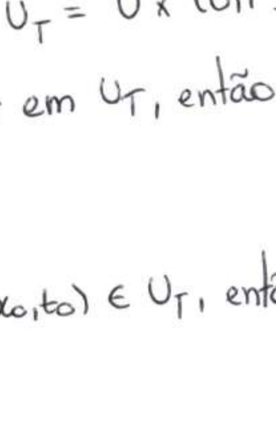
b) Se U é conexo e $\max_{\overline{U}_T} u(x,t) = u(x_0,t_0)$, $(x_0,t_0) \in U_T$, então u é constante em U_{t_0}.



U

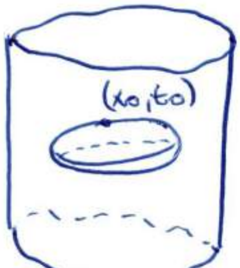


U_T



Γ_T

dem:



Suponha que $\max_{\bar{U}_T} u(x,t) = u(x_0,t_0)$, ~~∈ U~~. $(x_0,t_0) \in U_T$

Então, para toda bola do calor $E(x_0,t_0;r) \subseteq U_T$:

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{4r^n}\int u(y,s)\,\frac{\|y-x_0\|^2}{(s-t)^2}\,ds\,dy$$

e, como $u(x_0,t_0)$ é um máximo, temos igualdade acima se, e só se, $u \equiv u(x_0,t_0)$ em $E(x_0,t_0,r)$. Assim, ~~tendo~~ tomando $E(x_0,t_0,r)$ ~~é tal que~~ $\subseteq \bar{U}_T$ é tal que $E(x_0,t_0;r) \cap \Gamma_T \neq \emptyset$, temos o que procuramos em a).

Para provar b), note que a parte a) diz que se $\max_{\bar{U}_T} u(x,t) = u(x_0,t_0)$ com $(x_0,t_0) \in U_T$, então $F = \{(x,t);\ u(x,t) = u(x_0,t_0)\}$ é aberto em U_{t_0}. Por conexidade, $F = U_{t_0}$.

Observe que nada podemos afirmar sobre tempos $t > t_0$, pois não há pontos deste tipo na bola do calor $E(x_0,t_0;r)$

Como consequência do princípio do módulo máximo, temos o seguinte resultado de unicidade:

Teorema: se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado, $f \in C(U_T)$ e $g \in C(\Gamma_T)$, então existe no máximo uma função $u \in C^2_1(U_T)$ ~~tal q~~ que resolve

$$(*)\ \begin{cases} \Delta u - u_t = f \text{ em } U_T \\ u = g \text{ em } \Gamma_T \end{cases}$$

dem: De fato, se u_1, u_2 são soluções de (*), então $u_1 - u_2$ e $u_2 - u_1$ solucionam

$$\begin{cases} \Delta u - u = 0 & \text{em } U_T \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_T \end{cases}$$

Logo pelo princípio do máximo, $u_1 - u_2 \leq 0$ e portanto $u_1 = u_2$
$u_2 - u_1 \leq 0$

Comentários sobre a equação do calor

1. Como visto anteriormente, a presença de um princípio do módulo máximo nos permite demonstrar a unicidade de soluções. Quando $U = \mathbb{R}^n$, é possível mostrar que:

Teorema do ~~Módulo~~ Máximo em $\mathbb{R}^n$

Se $g \in C(\mathbb{R}^n)$ e $u(x,t)$ resolve o problema

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u(x) = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

e satisfaz $\|u(x,t)\| \leq A e^{-a|x|^2}$ para algum $A, a \geq 1$,

então $$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)$$

Em particular, o problema $$\begin{cases} \Delta u - u_t = f(x,t) & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}, \quad f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,T]$$

possui no máximo uma solução satisfazendo $|u(x,t)| \leq A e^{-a|x|^2}$ para algum $A, a \geq 1$

É interessante observar que, em seu livro, Fritz John constrói uma infinidade de soluções para $\begin{cases} \Delta u - u_t = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0,T] \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$ que não satisfazem a estimativa acima.

2. Regularidade de soluções da equação do calor

Assim como mostramos que ~~para~~ toda solução de $\begin{cases} \Delta u - u_t = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x),\ g \in C(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)) \end{cases}$

é C^∞ em $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$, pode-se mostrar que

Se $u(x,t)$ ~~resolve~~ $\in C^2_1(U_T)$ resolve a equação do calor em U_T então $u \in C^\infty(U_T)$

3. Métodos de Energia e unicidade retroativa.

Os teoremas de unicidade também pode ser provado via integral de energia.

Se u_1, u_2 resolvem a ~~equação~~ problema

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = f & \text{em } U_T \\ u = g & \text{em } \Gamma_T \end{cases},$$

podemos mostrar que a integral de energia $e(t) = \int_{\bar{U}_T} (u_1(x,t) - u_2(x,t))^2 \, du$ é zero.

Esta mesma técnica nos permite provar uma interessante propriedade de unicidade retroativa:

- Se u_1, u_2 satisfazem ~~a equação do calor~~ o problema do calor

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = 0 & \text{em } U_T \\ u = g & \text{em } \partial U \times [0,T] \end{cases}$$

e $u_1(x,T) = u_2(x,T)$, então ~~$u_1(x,t) =$~~ $u_1 = u_2$ em U_T

A Forma Canônica de Jordan

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \to V$. Ao fixarmos ~~base~~ base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, temos associado a T uma única matriz M_T^B tal que

$$(Tv)_B = M_T^B \cdot (v)_B \quad , \quad M_T^B = [a_{ij}] \quad , \quad Tv_j = \sum a_{ij} v_i$$

e, se $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ é outra base de V, existe uma matriz inversível P tal que

$$M_T^{B'} = P M_T^B P^{-1}$$

Duas matrizes (ou operadores) satisfazendo a relação acima são ditas similares.

Uma pergunta natural então aparece:

Pergunta: Existe uma base de V tal que M_T^B seja a mais simples representação de T?

Talvez a situação mais simples seja a existência de uma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ com $Tv_i = \lambda_i v_i$. Neste caso, temos

$$M_T^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Este não é sempre o caso: o operador $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não possui uma base como acima.

Ainda assim, vamos mostrar que é possível chegar bem próximo de uma representação diagonal.

Teorema (A Forma Canônica de Jordan (FCJ))

Existe uma base B de V tal que o operador $T: V \to V$ tem representação matricial

$$M_T^B = \begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_n}(\lambda_n) \end{bmatrix} \quad , \quad J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

~~Mais aind~~ chamada de forma canônica de Jordan de T. Mais ainda, dois operadores são similares se, e somente se, possuem a mesma FCJ a menos de ordenação dos blocos $J_r(\lambda)$.

Observação: No que segue, vamos supor o corpo de base K algebricamente fechado. Portanto, a FCJ pode existir apenas após realizarmos uma extensão algébrica de K. Como a similaridade independe do corpo de definição, o teorema de unicidade continua valendo.

A decomposição em matriz de blocos

Observe que a FCJ é uma representação matricial de T em matriz de blocos. Assim, devemos buscar uma decomposição

$$(*)\ V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n \quad , \ T(V_i) \subseteq V_i \ \text{(ie, } V_i \text{ é T-invariante)}$$

Tais decomposições estão em profunda conexão com a estrutura de $K[x]$-módulo induzida em V por T, dada por

$$x \cdot v = Tv$$

Como $\dim \mathrm{Hom}_K(V,V) = n^2$, $Id, T, \dots, T^{2n}$ são LD. Portanto o ideal

$$\mathrm{ann}\,T = \{ f(x) \in K[x] ;\ f(T) \equiv 0 \}$$

é não-nulo e possui um único gerador mônico $m_T(x)$, chamado de polinômio mínimo de T. A decomposição (*) está intimamente ligada à fatoração de $m_T(x)$ em $K[x]$:

Teorema 1: Se $m_T(x) = p(x)q(x)$ com $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$, então

a) $V = \ker p(T) \oplus \ker q(T)$ com $\ker p(T)$, $\ker q(T)$ T-invariantes

b) $m_{T|_{\ker p(T)}} = p(x)$

dem: Como $K[x]$ é principal, existem ~~p(x)~~ $r(x), s(x) \in K[x]$ tais que $r(x)p(x) + s(x)q(x) = 1$. Logo, se $v \in V$:

$$v = Iv = r(T)p(T)v + s(T)q(T)v.$$

Como $p(T)v \in \ker q(T)$ e $q(T)v \in \ker p(T)$, a equação acima nos dá $\ker p(T) \cap \ker q(T) = \{0\}$ e $V = \ker q(T) \oplus \ker p(T)$. Mais ainda, se $v \in \ker p(T)$

$$p(T)Tv = Tp(T)v = 0,$$

finalizando a prova de a).

Para a prova de b, observe que $p(T)|_{\ker p(T)} \equiv 0$, donde $m_{T|_{\ker p(T)}} \mid p(T)$. Por outro lado, $m_{T|_{\ker p(T)}}(T)\, q(T)v = m_{T|_{\ker p(T)}} \cdot s(T)\, q^2(T)v = 0$. Logo $m_{T|_{\ker p(T)}} \mid p(T)$ e concluímos a prova do teorema.

Retornemos ao nosso operador T: como K é algebricamente fechado, temos que

$$m_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_n)^{r_n}$$

e sucessivas aplicações do Teorema 1 nos fornecem a decomposição

$$V = \ker(x-\lambda_1)^{r_1} \oplus \cdots \oplus \ker(x-\lambda_n)^{r_n}$$

$$m_{T|_{\ker(x-\lambda_i)^{r_i}}} = (x-\lambda_i)^{r_i} \qquad (**$$

$$\ker(x-\lambda_i)^{r_i} \text{ é } T\text{-invariante}$$

Os subespaços $(x-\lambda_i)^{r_i}$ são chamados de autoespaços generalizados de T associados a λ_i

Obs: ~~Tal decomposição só~~ Se K não é algebricamente fechado, tal decomposição só seria possível se $m_T(x)$ se fatorasse linearmente em K. Caso isto não aconteça, a FCJ existe apenas se estendermos o corpo K pelas raízes de $m_T(x)$.

Operadores Nilpotentes e Cadeias de Jordan

a decomposição (**) nos permite supor que T é tal que $m_T(x) = (x-\lambda)^r$. Como a matriz de λI é igual em qualquer base, podemos então buscar representações do operador nilpotente $N = (x-\lambda)^r$

Definição: seja N um operador nilpotente em V. Uma cadeia de Jordan associada ao operador N é um conjunto da forma $L = \{N^{m-1}v, \ldots, Nv, v\}$ com $N^{m-1}v \neq 0$ e $N^m v = 0$

Cadeias de Jordan são L.I: se $m = 1$, esta afirmação é trivial. Se $m > 1$, aplicando N^{m-1} a

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_i N^i v = 0$$

obtemos $a_0 N^{m-1} v = 0$, donde $a_0 = 0$, e a afirmação segue por indução. É claro que o subespaço $\langle L \rangle$ é N-invariante e, na base L

$$T|_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

assim, temos a seguinte relação:

$\{N^{m-1}v, \ldots, Nv, v\}$ cadeia de Jordan maximal de $(T-\lambda_i I)^r$ $\longleftrightarrow$ Bloco de Jordan $J_m(\lambda)$ na representação de T

assim, a existência da FCJ segue do nosso próximo teorema.

Teorema 2: se N é um operador nilpotente em V então V admite uma base formada por cadeias de Jordan de N

dem: Como N é nilpotente, segue que $\dim \operatorname{im} N^{i+1} < \dim \operatorname{im} N^i$ para todo i. Assim, se $\dim V = 1$, $N=0$ e todo vetor $v \in V \setminus \{0\}$ forma uma cadeia de Jordan. Se $\dim V = n > 1$, podemos supor por indução que $\operatorname{im} N$ possui uma base formada por cadeias de Jordan

$$B_i = \{N^{m_i-1}w_i, \ldots, Nw_i, w_i;\ 1 \le i \le n\}$$

Afirmação: ~~O conjunto~~ se $w_i = Nv_i$, o conjunto $\{N^{m_i}v_i, \ldots, Nv_i, v_i;\ 1 \le i \le n\}$ é linearmente independente.

dem: Aplicando N a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i} a_{ij} N^j v_i = 0$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} N^j w_i = 0 \overset{B_i \text{ é LI}}{\Rightarrow} a_{ij} = 0 \text{ para } 1 \le i \le n,\ 0 \le j \le m_i - 1$$

daí, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{im_i} N^{m_i} v_i = \sum_{i=1}^{n} a_{im_i} N^{m_i-1} w_i = 0 \Rightarrow a_{im_i} = 0,\ 1 \le i \le n$

assim, completando B a uma base de V por vetores em $\ker N \setminus \operatorname{im} N$ completamos a prova.

Unicidade da FCJ

A própria demonstração da existência da FCJ denuncia que não há unicidade da mesma num sentido estrito, pois não existe nenhuma escolha canônica para ordenarmos os blocos de Jordan.

Se procuramos unicidade a menos de permutação, podemos seguir trabalhando bloco a bloco, ou seja, que $m_T(x) = (x-\lambda)^{r_n}$. Como

$$T_1 \text{ similar a } T_2 \iff T_1 - \lambda I \text{ é similar a } T_2 - \lambda I,$$

podemos supor T nilpotente. Uma verificação mais cuidadosa da prova do Teorema 2 nos dá:

Teorema 3: Dois operadores nilpotentes N_1, N_2 são similares se, e só se, $\dim \operatorname{im} N_1^i = \dim \operatorname{im} N_2^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sejam então $\beta = \dim \ker N$ e $\beta(i)$ o número de blocos de Jordan de tamanho i.

Pode-se verificar que

$$\dim \ker N^2 = \dim \ker N + \beta - \beta(1)$$
$$\dim \ker N^3 = \dim \ker N^2 + \beta - \beta(1) - \beta(2)$$
$$\vdots$$
$$\dim \ker N^{r+1} = \dim \ker N^r + \beta - \beta(1) - \dots - \beta(r)$$

Assim, as sequências $\{\dim \operatorname{im} N^i\} = \{\dim V - \dim \ker N^i\}$ e $\{\beta(i)\}$ se auto-determinam

Propriedades da FCJ

1) Se $m_T(x) = (x-\lambda)^r$, então existe $v \in \ker(x-\lambda)^r$ com $(x-\lambda)^{r-1}v \neq 0$. assim, a FCJ de T possui, obrigatoriamente, um bloco de ~~comprimento~~ Jordan de tamanho r.

Assim:

Teorema: Se $m_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_n)^{r_n}$, então o maior bloco de Jordan associado a λ_i na FCJ de T tem tamanho r_i. Em particular, T é diagonalizável se, e só se, $r_i = 1$

2) ~~O polinômio~~ Não é imediato calcular $m_T(x)$ à partir de T. Existe um polinômio mais fácil de ser calculado: $p_T(x)$, o polinômio característico de T, que é

$$p_T(x) = \det(\cancel{\ldots}\, M - Ix)$$

onde M é qualquer representação matricial de T. ~~Observe~~ É ~~claro~~ imediato verificar que

$$p_{J_r(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^r.$$

Assim, temos

Teorema: ~~a) Os polinômios mT(x) e pT(x)~~ Se $p_T(x) = (x_1-\lambda_1)^{\Delta_1} \cdots (x_n-\lambda_n)^{\Delta_n}$:

a) A soma das ordens dos blocos de Jordan de $p_T(x)$ associados a λ_i é Δ_i

b) [Cayley-Hamilton] Os polinômios $m_T(x)$ e $p_T(x)$ possuem as mesmas raízes e $m_T(x) \mid p_T(x)$. Em particular, $p_T(T) = 0$.

3) O polinômio característico nos dá uma maneira de, em teoria, calcular a FCJ de um operador T:

~~2~~ 14

Passo 1: Calculamos os autovalores de T pela equação $P_T(x)=0$

Passo 2: Calculamos bases $\{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$ para cada autoespaço $\ker(T-\lambda I)$

Passo 3: Tentamos, para cada v_{ij}, resolver recursivamente a equação

$$w_{ijk} = \lambda w_{ijk} + w_{i,j,k-1},$$

onde $w_{i,j,0} = v_{i,j}$

Aplicação:

A utilização da FCJ nos permite simplificar o estudo qualitativo de órbitas de sistemas autônomos ~~próximos~~ nas proximidades de suas singularidades. Se $x'=F(x)$ é um sistema autônomo de EDOs sobre um aberto U e p é uma singularidade hiperbólica de X (ie, $F(p)=0$ e os autovalores de $DF(p)$ ~~possuem~~ possuem parte real não-nula), o teorema de Hartman-Grobman diz que X é, em uma vizinhança de p, topologicamente conjugado a $x' = DF(p)x$ em uma vizinhança de 0.

Agora, se duas matrizes A, B são conjugadas, os fluxos lineares $\varphi_A(x,t) = e^{At}x$ e $\varphi_B(x,t) = e^{tB}x$ são conjugados também. Assim, ~~podemos~~ ~~por~~ $x' = DF(p)\cdot x$ é linearmente conjugado a $x' = Ax$, onde A é sua forma de Jordan. Assim, podemos trabalhar em cada autoespaço generalizado. Da teoria geral de sistemas lineares:

- $x' = J_r(\lambda)x$ é conjugado a:

i) $x' = -x$ se, e somente se $Re(\lambda) < 0$

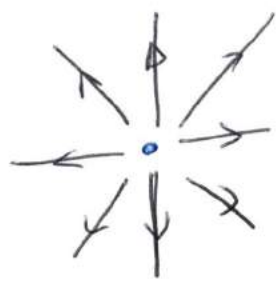
ii) $x' = x$ se, e somente se, $Re(\lambda) > 0$

segue, portanto, que se $x' = F(x)$ é bidimensional e $p \in U$ é singularidade hiperbólica, o fluxo $\varphi_F(x,t)$ é, em uma vizinhança de p, conjugado a

a) ~~uma~~ um atrator

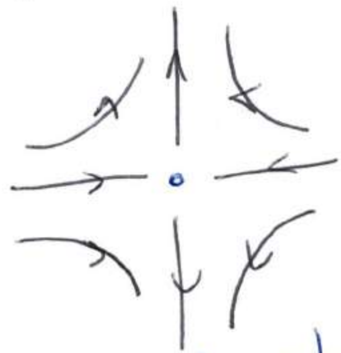
$\cancel{x' = -x}$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



b) uma fonte

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$



c) Um ponto de sela

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

O Teorema de ~~Han~~ Hanh-Banach

Sejam $Y \subseteq X$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $f: Y \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Para estender f a X, basta que realizemos o seguinte procedimento: completamos por $\{x_\alpha\}$ uma base de Hamel de Y a uma base de Hamel de X e definimos $F(x_\alpha)$ arbitrariamente.

Agora, suponhamos que $Y \subseteq X$ sejam espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{R}$.

1) Se f é contínuo (ie, $\sup_{\|y\|=1} |f(y)| < +\infty$), é possível tomar F contínuo?

2) Mais ainda, é possível tomar F com $\|f\| = \|F\|$?

Essas, e outras perguntas sobre funcionais limitados serão respondidas com o:

Teorema de Hanh-Banach Real

Sejam $Y \subseteq X$ espaços vetoriais reais, $f: Y \to \mathbb{R}$ um funcional linear e $p: X \to \mathbb{R}$ tais que:

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall\, x, y \in X$

b) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\forall\, \alpha > 0$ e $x \in X$

c) $f(y) \leq p(y)$ $\quad \forall\, y \in Y$

Então existe $F: X \to \mathbb{R}$ funcional linear com $F|_Y = f$ e $F(x) \leq p(x)$

A prova do teorema de Hanh-Banach decorre em duas etapas

a) Prova para quando $X = Y \oplus \langle z \rangle$ (e, por indução, quando $\dim X/Y < \infty$)

b) Extensão para o caso geral via indução transfinita (via Lema de Zorn)

Vamos começar por a): ~~vem~~ a extensão $F: Y \oplus \langle z \rangle \to \mathbb{R}$ de f fica completamente determinada por $\alpha = F(z)$. Vamos mostrar que é possível escolher tal α. Seja $x = y + az$, $y \in Y$ e $a \in \mathbb{R}$

- $a > 0$

$$F(y+az) \leq p(y+az) \Leftrightarrow f(y) + a\alpha \leq p(y+az) \overset{\text{dividindo por } a}{\Leftrightarrow} \alpha \leq -f(y/a) + p(y/a + z)$$

Logo, devemos ter $\alpha \leq \inf_{y \in Y} \{ p(y+z) - f(y) \}$

- $a \leq 0$

$$F(y+az) \leq p(y+az) \Leftrightarrow -a\alpha \geq f(y) - p(y+az) \Leftrightarrow \alpha \geq f(-y/a) - p(-y/a - z)$$

e portanto

$$\alpha \geq \sup_{y \in Y} \{ f(y) - p(y-z) \}$$

Agora, para $x, y \in Y$:

$$f(x) + f(y) = f(x - z + z + y) \leq p(x-z) + p(y+z) \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) - p(x-z) \leq \\ -f(y) + p(x+y) \end{array}$$

Assim, α pode ser escolhido e o teorema está provado.

~~Antes de responder as perguntas 1 e 2, vamos demonstrar uma versão de Hahn-Banach para espaços vetoriais complexos.~~

~~Teorema de Hahn-Banach Complexo~~

~~Sejam $Y \subseteq X$ espaços vetoriais complexos, $f: Y \to \mathbb{C}$ funcional linear e $p: X \to [0, +\infty)$ tais que~~

~~a) $f(x+y) \leq p(x)+p(y)$ para todo $x,y \in X$~~

~~b) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todo $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$~~

~~c) $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$.~~

~~Então~~

Para completar a prova no caso geral, tome $\Gamma = \left\{ (Z, f_Z) \,;\, \begin{array}{l} Y \subsetneq Z \subseteq X \\ f_Z|_Y = f \\ f_Z \leq p \end{array} \right\}$.

Este conjunto é ~~[illegible]~~ parcialmente ordenado com a ordem

$$(Z, f_Z) \leq (Z', f_{Z'}) \iff Z \subseteq Z' \text{ e } f_{Z'}|_Z = f_Z$$

Com esta ordem, Γ satisfaz as condições do lema de Zorn e portanto possui elemento maximal (Z, f). Se $Z \neq X$ e $x \in X \setminus Z$, o procedimento anterior permite estender f mais uma vez. Daí, segue que $Z = X$.

Antes de respondermos as perguntas 1 e 2, provamos uma versão complexa de H.B.

Teorema (Hanh- Banach Complexo)

Sejam $Y \subseteq X$ espaços vetoriais complexos, $f: Y \to \mathbb{C}$ funcional linear e $p: X \to [0, +\infty)$ tais que:

a) ~~$|f(x+y)| \leq p(x) + p(y)$~~ $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall\, x, y \in X$

b) ~~$p(x)$~~ $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ para todos $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x \in X$

c) $|f(x)| \leq p(x)$ para $x \in Y$.

Então existem $F: X \to \mathbb{C}$ funcional linear com $F|_Y = f$ e $\|F(x)\| \leq p(x)$

dem: Considere $g(x) = \mathrm{Re}\, f(x)$. Então $g(x)$ é $\mathbb{R}$-linear e

$$f(x) = g(x) - i g(ix)$$

Como $g(x) \leq |g(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ em Y, o teorema de H.B. real se aplica a g. Assim, existe $G: X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear estendendo g com $|G| \leq p$. Defina

$$F(x) = G(x) - i G(ix)$$

Segue daí que F é $\mathbb{C}$-linear e, se $F(x) = e^{i\theta} \cdot p$, $F(e^{-i\theta}x) = G(e^{-i\theta}x)$

$|F(x)| = |F(e^{-i\theta}x)| = |G(e^{-i\theta}x)| \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$.

~~Outrossim~~ Podemos agora responder as perguntas 1) e 2) para espaços vetoriais normados $Y \subseteq X$ sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: tomando $p(x) = \|f\| \|x\|$, podemos aplicar HB e obter $F: X \to \mathbb{F}$ funcional com $|F(x)| \leq \|f\| \|x\|$. Como F estende f, segue que $\|F\| = \|f\|$. Este resultado também é conhecido como Teorema de Hanh-Banach e F é chamada de extensão de Hanh-Banach de f.

Nas aplicações adiante, suporemos que ~~X e Y são normados espaços~~ todos os espaços vetoriais são normados sobre $\mathbb{F}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Denotaremos por

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{ f: X \to Y \text{ linear} ;\ \|f\| = \sup_{\|y\|=1} \|f(y)\| < +\infty \}$$

$$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{F}) \text{, o dual topológico de } X$$

Se $\dim X = +\infty$, temos que X^* não é igual ao dual algébrico $X^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, \mathbb{F})$ e, portanto, não é automático que X^* separe pontos em X. Com H.B, este problema é contornado: se $x \in X \setminus \{0\}$, defina

$$f : \langle x \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \|x\|.$$

Como $\dim \langle x \rangle = 1$, f é limitado. Assim, por Hanh-Banach, existe $F \in X^*$ com $F(x) = f(x) = \|x\| \neq 0$. Aplicando isto a ~~x-y, prova~~ $x - y \neq 0$, provamos

- $x = 0$ se, e só se, $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$
- se $x \neq y$, existe $f \in X^*$ com $f(x) \neq f(y)$

observação: A mesma ideia pode ser utilizada para mostrar que se $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq X$ é LI, então existe $F \in X^*$ com $F(x_i) = \alpha_i$, onde $\alpha_i \in \mathbb{F}$ é arbitrário.

Ainda no círculo de ideias de separação, o teorema de HB pode ser utilizado para separar pontos de subespaços fechados de X. De fato, sejam $Y \subseteq X$ fechado e $x \notin Y$.

Defina
$$f : Y \oplus \langle x \rangle \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$y + \alpha x \longrightarrow \alpha \delta$$

onde $\delta = d(x, Y) > 0$. Como

$$\|f(y + \alpha x)\| = \alpha \delta \leq \alpha \| y/\alpha + x \| = \|y + \alpha x\|$$

f é limitado e, por HB, existe $F \in X^*$ com $F|_Y = 0$ e $F(x) \neq 0$.

Obtemos assim uma caracterização dos subespaços densos de X:

$$Y \text{ é denso em } X \iff f|_{\bar{Y}} \equiv 0 \Rightarrow f = 0 \quad \text{para todo } f \in X^*.$$

Como aplicação desta discussão, temos

Teorema: Se X^* é separável, então X é separável.

dem: Sejam $\{f_n\} \subseteq X^*$ enumerável denso e $x_n \in X$ tais que $\|f(x_n)\| \geq \|f\|/2$.

Afirmamos que $Y = \langle x_n ; n \in \mathbb{N} \rangle$ é denso em X. De fato, se $f|_Y \equiv 0$, ~~temos~~ tomando $\{f_{n_k}\}$ com $f_{n_k} \to f$:

$$\|f\| \leq \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k}\| \leq \|f - f_{n_k}\| + 2\|f(x_{n_k})\| \leq \|f - f_{n_k}\| + 2\|f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k})\| \leq 3\|f - f_{n_k}\|$$

Donde $\|f\| = 0$

Encerramos nosso texto com mais duas aplicações do teorema de H.B, uma para espaços de Banach e outra para espaços reflexivos

Teorema: Se $X \neq \{0\}$ e $B(X,Y)$ é Banach, então Y é Banach

dem Sejam $\{y_n\}$ sequência de Cauchy e $x_0 \in X \setminus \{0\}$ e $T \in X^*$ com $T(x_0) \neq 0$. Então $T_n(x) = T(x) y_n \in B(X,Y)$ e

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T\| \|y_n - y_m\|.$$

Logo $\{T_n\}$ é Cauchy. Assim, se $T = \lim T_n$, ~~temos~~ e $y = T(x_0)$:

$$\|y - T_m(x_0)\| = \|T(x_0) - T_m(x_0)\| \leq \|x_0\| \|T - T_m\| \quad e \; y = \lim T_m(x_0)$$

Teorema: Se $Y \subseteq X$ é um subespaço fechado e X^* é reflexivo, então Y é reflexivo.

dem: Seja $u \in Y^{**}$. Para provarmos que Y é reflexivo, devemos provar que existe $y \in Y$ tal que $u(f) = f(y)$. Defina então $U \in X^{**}$ por

$$U(F) = u(F|_Y)$$

Como X é reflexivo, existe $x \in X$ com $U(F) = F(x)$. Afirmamos que $x \in Y$. De fato, se $x \notin Y$, podemos encontrar $G \in X^*$ com $G|_Y \equiv 0$ e $G(x) \neq 0$. Assim

$$0 \neq G(x) = U(G) = u(G|_Y) = u(0) = 0.$$

Logo $x \in Y$ e a prova está completa.