UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Matemática e da Natureza
Instituto de Matemática

CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – DM
Área: Matemática Pura

D

Nome do Candidato: HUGO FONSECA ARAUJO

1º TEMA: Forma Canônica de Jordan.

Quando estudamos operadores em espaços lineares é importante buscar sub-espaços invariantes e bases nas quais o operador seja representado por matrizes relativamente simples. Por exemplo, quando o operador $T: E \to E$ (E espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é auto-adjunto, o Teorema Espectral nos permite encontrar base β de E tal que $[T]_\beta^\beta$, a matriz que o ~~Bepo~~ representa na base β, seja diagonal. A forma canônica de Jordan é uma maneira como essa de representar um operador $T: E \to E$ com uma grande vantagem e uma pequena desvantagem: a vantagem é que a forma é possível para todo operador T; a desvantagem, pequena, é que é um pouco mais complicada que a forma diagonal. No que segue, suporemos que E é espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, e depois discutiremos o caso de espaços vetoriais reais.

Uma matriz $B_k(\lambda)$ quadrada em $M_k(\mathbb{C})$ é chamada de bloco de Jordan quando existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$B_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & & 0 \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & 1 & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$ ou seja,

se $B_n(\lambda) = b_{ij}$; $1 \leq i,j \leq n$ então ~~$b_{ii} = \lambda$, $b_{i+1\,i} = 1$~~ $b_{ii} = \lambda$, $\forall i = 1, \dots, n$, $b_{i+1\,i} = 1$ $\forall i = 1, \dots, n-1$, $b_{i,j} = 0$ caso contrário. Note que $B_1(\lambda) = (\lambda)$. A matriz $J \in M_n(\mathbb{C})$ está na forma de Jordan se, e somente se, Ela é composta por blocos de Jordan como os acima e por 0's fora destes blocos. Pode também exigir-se certa ordenação nos blocos, por tamanho por exemplo. O principal teorema que veremos é:

Teorema 1: Seja E espaço vetorial complexo de dimensão finita. Se $T: E \to E$ é um operador linear qualquer, então existe base β de E tal que $[T]_\beta^\beta = J$ na forma de Jordan acima.

Demonstração: Como $n = \dim E$ é finita, o espaço dos operadores de E tem dimensão n^2 e portanto existe polinômio p em $\mathbb{C}[x]$ tal que $p(T) = 0$. Suponha que $p = q \cdot r$ com q e r em $\mathbb{C}[x]$ e primos entre si.

Segue do Teorema de Bézout que existem $a, b \in \mathbb{C}[x]$ polinômios tais que

$$x = a(x) \cdot q(x) + b(x) \cdot r(x) \ \forall x \in \mathbb{C}.$$

ou seja $\quad Id = a(T) \cdot q(T) + b(T) \cdot r(T). \quad (*)$

Segue daí que $E = \operatorname{Ker} q(T) \oplus \operatorname{Ker} r(T)$.

De fato, se $v \in \operatorname{Ker} q(T) \cap \operatorname{Ker} r(T)$ segue de $(*)$ que $v = [a(T) \cdot q(T) + b(T) \cdot r(T)] \cdot v = 0$.

Além disso $b(T) \cdot r(T) \cdot v \in \operatorname{Ker} q(T) \ \forall v \in E$.

De fato, $q(T) \cdot b(T) \cdot r(T) = b(T) \cdot q(T) \cdot r(T) = b(T) \cdot p(T) = 0$.

e analogamente $a(T) \cdot q(T) V \subset \operatorname{Ker} r(T)$, donde segue que $E = \operatorname{Ker} q(T) \oplus \operatorname{Ker} r(T)$. Além disso, esses espaços são claramente invariantes por T. ~~Estamos~~ Estamos frequentemente usando que polinômios em T comutam. Agora, pelo Teorema Fundamental da Álgebra $p \in \mathbb{C}[x]$ é escrito como $p(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i}$ para alguns naturais m_i ~~distintos~~ e $\lambda_i = \lambda_j \Leftrightarrow i = j$.

O discutido acima permite, fazendo $p_i(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ escrever $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} p_i(T)$. O resto da demonstração passa pela análise de T sobre os núcleos acima. ~~~~

Um operador $T: V \to V$ é dito nilpotente quando existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m = 0$. Note que $T|_{\operatorname{Ker} p_i(T)} + \lambda \cdot Id$ é nilpotente.

indução em k!

Acontece que não é difícil encontrar bases nos quais um operador nilpotente se escreve na forma de Jordan, com cada um dos blocos ~~(...)~~ H sendo do tipo $B_k(\lambda)$ com $\lambda = 0 \in \mathbb{C}$. Isto pode ser feito pelo seguinte Teorema 2:

Se $T: E \to E$ é nilpotente então existem subespaços invariantes $F_1, \ldots, F_\ell$ tais que $E = \bigoplus_{i=1}^{\ell} F_i$ e, se $T_i = T|_{F_i}$, cada F_i tem base do tipo $\{v_i, T_i v_i, \ldots, T^{k_i - 1} v_i\}$ com $\sum_{i=1}^{\ell} k_i = \dim E$ e $T^{k_i} v_i = 0$ $\forall i = 1, \ldots, \ell$.

Basta demonstrar este resultado para concluir a prova do Teorema 1.

Dem.: (Solução) A demonstração se apoia no lema:

L: ~~(...)~~ Seja $T: E \to E$ um operador. Se $Tu_1, \ldots Tu_p$ é base de $Im(T)$ e $v_1, \ldots, v_q$ é base de $Ker(T)$ então $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ é base de E.

Prova: $p+q = \dim E$ por Teorema do Núcleo-imagem, logo basta provar que é um conjunto l.i. Podemos fazer isto tomando $\sum_i \alpha_i u_i + \sum_j \beta_j v_j = 0 \Rightarrow \alpha_i \sum T(u_i) = 0$, pois $v_j \in Ker T$. Logo, como $T(u_i)$ é base de $Im(T)$, $\alpha_i = 0$ $\forall i$, donde segue que $\sum_j \beta_j v_j = 0$, mas v_j base de $Ker T \Rightarrow \beta_j = 0$ $\forall j$.

O Teorema 2 pode ser então demonstrado por indução em K, onde K denota o maior inteiro tal que $\operatorname{Ker} T^{(K-1)} \neq E$. Chamamos K de índice de T.

Base: $k=1 \Rightarrow \operatorname{Ker} T^k = E \Rightarrow \operatorname{Ker} T = E \Rightarrow T = 0$, logo cada F_i é subespaço de dimensão 1. e $T(F_i)=0$

Passo indutivo: Se k é o índice de T, então $T|_{\operatorname{Im}(T)}$ tem índice $k-1$ e portanto, por hipótese, há a decomposição $T(E) = \bigoplus_{i=1} \tilde{F}_i$, cada $\tilde{F}_i$ com base $\{\tilde{v}_i, T\tilde{v}_i, T^{\tilde{k}_i-1}\tilde{v}_i\}$ e $T^{\tilde{k}_i}(\tilde{v}_i)=0$. Tomando v_i tal que $Tv_i = \tilde{v}_i$ e completando-se o conjunto l.i. $T^{k_i-1}\tilde{v}_i = T^{k_i}v_i$ para formar uma base de $\operatorname{Ker} T$, ~~utilizando~~ por exemplo, $\{v_1, \dots, v_q\}$, utilizamos o lema anterior para construir a base de E: $\bigcup_i \{v_i, Tv_i, \dots, T^{k_i}v_i\} \cup \{v_1, \dots, v_q\}$, e a partir dela construímos a decomposição $E = \bigoplus F_i$.

OBS: Uma análise mais atenta do argumento mostra que os k_i's são, a menos de permutação, unicamente determinados. Isto implica que a representação de $T: E \to E$ na forma de Jordan é única, a menos de permutação dos blocos.

Uma aplicação antes de comentar o caso real.

~~Afirmação: Toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ de determinante não-nulo admite raiz quadrada.~~

~~Pr.: Podemos ~~considerar~~ considerar A na forma de Jordan pois se há $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $B^2 = J = P^{-1}AP$, então~~

Antes de mais nada, se $A \in M_n(\mathbb{C})$, considerando o operador definido por ela em $\mathbb{C}^n$, concluímos que existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $P^{-1}AP = J$ na forma de Jordan.

Afirmação: Se A tem determinante não-nulo tem raiz quadrada

Pr.: Basta mostrar que toda matriz de Jordan $J \in M_n(\mathbb{C})$ admite raiz, pois se $B^2 = J = P^{-1}AP$, então $A = (PBP^{-1})^2$.
Podemos então restringir nossa análise à blocos de Jordan $B_k(\lambda)$. Mas cada um destes pode ser escrito como $(Id_k + N) \cdot \lambda$, onde N é nilpotente. Considerando a série de taylor de $\sqrt{1+x}$, temos que $\sqrt{Id_n + N}$ está bem definida, pois seria uma série de potências em N, e a partir de certo ponto, zero. tome então $\sqrt{B_k(\lambda)} = \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{Id + N}$

No caso de $T: E \to E$, onde E é espaço real, os blocos $B_k(\lambda)$ com λ complexo não fazem sentido. Considere $[T]_\beta^\beta = A$ uma expressão de T numa base. Podemos tratar A como matriz real ou complexa. No segundo caso, existe base ~~tal~~ α tal que, se $P = [Id]_\beta^\alpha$ então $PAP^{-1} = J$ na forma de Jordan complexa acima. Em J, cada bloco $B_k(\lambda)$, se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, é acompanhado de um bloco $B_k(\bar{\lambda})$. Isto acontece pois $\bar{A} = A$, já que tem entradas reais. Se $v_1, \dots, v_k$ e $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ ~~as bases que depois utilizamos para tais que~~, todos em $\mathbb{C}^{\dim E}$, são as bases tais que A ~~dela~~ no espaço por elas gerado tem a forma dos blocos acima, tomando $V_i = \mathrm{Re}(v_i)$ e $W_i = \text{Imaginária}(v_i)$, todos em $\mathbb{R}^n$, encontramos uma base na qual A tem a forma de um bloco $B_{2k}(a,b)$ do tipo abaixo:

$$\begin{pmatrix} B(a,b) & & & 0 \\ Id_2 & B(a,b) & & \\ & Id_2 & \ddots & \\ 0 & & Id_2 & B(a,b) \end{pmatrix}$$

onde $B(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; $\lambda = a+bi$, $b \neq 0$.

A matriz na forma de Jordan real tem blocos do tipo $B_k(\lambda)$ quando $\lambda \in \mathbb{R}$ e do tipo $B_{2k}(a,b)$ quando $\lambda \notin \mathbb{R}$. Eu deveria ter mencionado antes, mas os λ's são claramente os autovalores de T!

O tamanho e a quantidade de blocos $B_k(\lambda)$ podem ser determinados analisando melhor nossa prova. Se $t_i = \dim \operatorname{Ker}(T-\lambda)^i$, para algum autovalor λ, então o número de blocos de tamanho k é $2t_k - t_{k+1} - t_{k-1}$. ~~Isto segue do fato que $t_{k+1} - t_k$ conta os blocos de~~ Isto pode ser provado por indução. ~~Por fim, observamos o que~~

Por fim, algumas aplicações importantes. Assim como matrizes diagonais, matrizes na forma de Jordan tem potências ~~de calcular~~ fáceis de calcular.

Por exemplo: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ k(k-1)\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}$

Este tipo de Fato pode ser muito útil no estudo de funções analíticas de matrizes. De fato, pode se estudar $f(B_k(\lambda))$ apenas pela derivada de f em λ, o que é importante em análise.

Sabendo também que $x' = A.x$, uma EDO em $\mathbb{R}^n$, com $A \in M_n(\mathbb{R})$, tem solução $e^{At}.v_0$, a forma canônica de Jordan ajuda também a entender e^{At} e portanto o comportamento das soluções. A classificação topológica destes sistemas pode ser feita por esta análise, mas talvez seja mais prático usar uma forma adaptada de Jordan. Reescalando as bases de cada bloco $B_k(\lambda)$ ou $B_{2k}(a,b)$ podemos considerar que os 1's são ε para $\varepsilon > 0$ pequeno, o que melhora ainda mais os cálculos de $f(A)$ com f analítica.

2º TEMA: Equação do Calor.

Durante o século XIX ou (XVIII (?)) grande matematização da Física aconteceu. Um dos ~~primeiros~~ problemas mais difíceis na época era entender como a difusão de Calor acontecia, um fenômeno que aparentava ser bem distinto da Mecânica Newtoniana. Fourier foi o responsável por mostrar que o fluxo de Calor era proporcional ao ~~gradiente~~ seu próprio gradiente. Com um pouco de matemática, derivada do Teorema de Stokes, podemos argumentar da seguinte maneira.

Se S delimita um volume P, $\frac{\partial}{\partial t}\int_P u \, dV$ denota a variação do calor total em P.*

~~Da lei de Fourier Fourier segue que a integral acima é igual a $\int_S \mathrm{div} F \cdot dA$, onde F denota o fluxo de calor. Mas por Stokes $\int_S F \cdot dA = \int \mathrm{div} F$~~

Sendo F o fluxo de calor, temos então

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_P u \, dV = \int_S F \cdot dA$$

* u calor em x no tempo t $(u(x,t))$

Segue do Teorema de Stokes que

$\int_S F \cdot dA = \int_P \operatorname{div} F \, dV$, mas da lei de Fourier

~~$F = \nabla u$, ou proporcionalmente~~ $F = K \cdot \nabla u$, onde K é constante. Segue que $\operatorname{div} F = \Delta u \cdot K$ e fazendo o volume P tender a zero encontramos

$$\partial_t u = \cancel{K \cdot \partial_{xx}} \; K \cdot \Delta u$$

Quando $K = 1$ temos a equação clássica do calor

$$\boxed{\partial_t u = \Delta u. \qquad (1)}$$

Observo aqui que estamos considerando $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função $u(t,x)$. No caso, o Laplaciano Δu envolve apenas as coordenadas de x.

Muito interesse surgiu então em matemática de encontrar soluções para a equação (1) acima. Inclusive muitas aplicações um pouco inesperadas, como análise do movimento Browniano, passeio aleatório, e fluxos de Ricci, estes últimos sendo apenas inspirados pela equação (1) acima e sendo parte fundamental da solução da Conjectura de Poincaré por Perelman.

CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – DM
Área: Matemática Pura

Nome do Candidato:

A seguir apresentaremos o panorama do tópico e algumas aplicações. Fixemos algum contexto e notações um pouco diferentes do anterior.

Seja U um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $g: U \to \mathbb{R}$ contínua.

Uma função $u: U \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$ com $u \in C(U \times [0,+\infty))$ e $u \in C^2_1(U \times (0,+\infty))$ é dita solução da equação do calor com condição inicial g quando as equações:

a) $u_t = u_{xx}$ (Laplaciano de u sobre $\mathbb{R}^n$)

b) ~~$u(0,x) = g(x)$~~ $u(x,0) = g(x)$

são verificadas

a) em $U \times (0,+\infty)$

b) para todo $x \in U$.

Se ignorarmos a condição inicial $g(x)$, analisando apenas a equação a), pode-se verificar que

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-|x|^2/4t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

é solução da equação do Calor. Tal solução pode ser encontrada trabalhando-se com a equação $U_t = U_{xx}$ e supondo simetrias adicionais a U.

Acontece porém que, considerando $\Phi_t : U \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \Phi(x,t)$,

temos uma sequência de funções que convergem, no sentido de distribuições, à δ_0, a delta de Dirac centrada na origem. De fato, ~~ess~~ é fácil de verificar que a definição original de $\Phi(x,t)$ tem descontinuidade na origem. Pode-se então demonstrar, utilizando as ferramentas de Análise que

$$U(x,t) = \Phi * g(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t) \cdot g(y)\, dy$$

é solução da equação do Calor com condição inicial g. Atenção! Na fórmula acima, considere $\Phi(\bullet, 0) = \delta_0$!

Consideremos agora o caso não-homogêneo da equação do Calor. Suponmos agora que a) passou a ser $U_t - U_{xx} = f(x,t)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Matemática e da Natureza
Instituto de Matemática

CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – DM
Área: Matemática Pura

onde $f: U\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ (não está definida no $t=0$).

e na equação b) temos agora $g(x)=0$.

Podemos utilizar o princípio de Duhamel e escrever as soluções de nossa nova equação do Calor ~~como~~ seguindo o seguinte raciocínio. Fixado $s>0$:

$$\cancel{u(x,t)=\frac{1}{[4\pi(t-s)]^{n/2}}}$$

$$\cancel{U(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\cdot f}$$

$$U(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\cdot f(y,s)\,dy$$ é solução da equação do Calor anterior com condição inicial

$g(x)=f(x,s)$. Podemos então ~~dizer que~~ provar, através de vários argumentos de análise que

$$U(x,t)=\int_0^t \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{n/2}}\iint^{*}_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\cdot f(y,s)\,dy\,ds$$

é solução da equação do Calor modificada.

Podemos então considerar nossa equação do calor com condições iniciais e não homogênea.

* só uma integral.

Nesse caso tomamos

a) $u_t - u_{xx} = f(x,t)$

b) $u(x,0) = g(x)$.

Combinando o que já foi discutido, a solução fica:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \cdot g(y)\, dy + \int_0^t \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \cdot f(y,s)\, dy\, ds.$$

Decorrem das propriedades de $\Phi(x,t)$ alguns fatos interessantes sobre a equação do calor. O primeiro deles é que trata-se de uma equação não física, pois há velocidade infinita de propagação. De fato, se $U = \mathbb{R}^n$ e g, a condição inicial, tem suporte compacto, como supp $\Phi(\cdot,t) = \mathbb{R}^n$ $\forall$ $t>0$, a solução acima será diferente de 0 instantaneamente após o instante $t=0$ em qualquer ponto do espaço, inclusive muito longe de supp g.

Pode-se mostrar também que as soluções são C^∞ em $U \times (0,t)$, o que indica que $\Phi(\cdot,t)$ é uma família de aproximações C^∞ da condição inicial. Em geral, as soluções da equação do Calor tendem a se homogeneizar e ficar constantes, principalmente se fixamos o comportamento em $\partial U \times [0,t]$.

Alguns outros fatos importantes, são que, assim como a equação harmônica $\Delta U = 0$, pode-se encontrar princípios do máximo e da média para soluções da equação do Calor U. No caso, sendo

$$E(x,t,r) = \left\{ (y,s), \, \| \Phi(x-y,t-s) \| \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

o que chamamos de bola de Calor, vale que

$$U(x,t) = \oint_{E(x,t,r)} U(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \, dy \, ds.$$

Deste princípio podemos deduzir outros, como o do máximo. Se U é solução da equação do Calor em $U \times [0,T]$ e consideramos sua extensão ao fecho, então $\max\limits_{U \times [0,T]} U = \max\limits_{\bar{U} \times [0,T]} U$ implica que U é constante, se U é conexo.

Pode-se deduzir unicidade de de soluções em certos casos a partir desse princípio.

Encerramos esta discussão com alguns comentários de aplicações. A propriedade de Homogeneização de Soluções encontra aplicações em geometria e já mencionamos fluxos de Ricci. Uma versão mais simples é o fluxo encolhedor de perímetro. Dado $x: S^1 \to R^2$ um loop simples, sendo K a curvatura em cada ponto, podemos considerar o fluxo $\frac{\partial x}{\partial t} = K \cdot \nu$, onde ν é a normal a $X(S^1)$. Parametrizando por comprimento de arco a equação fica $\frac{\partial x}{\partial t} = K \cdot \partial x_{ss}$, nossa equação do Calor. Pode-se mostrar que o perímetro $L(t)$ e a área $A(t)$ determinadas pela curva acima são tais que $L(t)^2 - 4\pi A(t) = g(t)$ satisfaz

$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$ e $g'(t) \leq 0$, donde segue que $L(t)^2 \geq 4\pi A(t)$ e a desigualdade isoperimétrica.

Uma outra aplicação seria na análise do Passeio aleatório.

Considerando o passeio aleatório, regido por

$$p(x,t+\Delta t) = \frac{p(x+\Delta x,t) + p(x-\Delta t,t)}{2}$$

com Δx e Δt pequenos em relação à t e x pode-se mostrar, aproximando-se $p(x,t)$ por uma densidade contínua que $p(x,t)$ resolve a equação do calor e estimar ~~$P(a \leq$ posição em (x,t)~~ (talvez tenha que escalar os coisas)
sendo $f(x,t)$ a posição de uma realização do passeio, após começar no ponto x, no tempo t

$$P(a \leq f(x,t) \leq b) = \int_a^b \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt$$

Tópico 3: Hahn-Banach

O estudo de soluções de EDP motivou o estudo de espaços de funções. Estes espaços podem ser vistos como espaços vetoriais de dimensão infinita. Muito se entende das propriedades de espaços vetoriais de dimensão finita, mas ~~muita coisa~~, muitas propriedades de espaços de dimensão finita não são verdadeiras para os espaços de dimensão infinita, como existência de produto interno. Uma boa maneira de estudá-los é através de seus funcionais lineares contínuos. Dizemos que $f: E \to \mathbb{R}$, onde E é espaço vetorial, é um funcional linear quando é função linear. ~~Dizemos que é contínuo se existe $M > 0$ tal que~~ Diremos que é contínuo se o for em relação a alguma topologia em E e a usual em $\mathbb{R}$. Se E for um espaço vetorial normado, tal condição garante a existência de $M > 0$ tal que $\|f(x)\|_{\mathbb{R}} \leq M \cdot \|x\|_E$.
Mas para entender os funcionais lineares contínuos de um espaço normado precisamos saber se eles existem, por exemplo.

O teorema de Hahn-Banach é ~~portanto~~ um resultado fundamental nessa direção, e uma das suas ~~consequências~~ consiquências é que o espaço de funcionais lineares contínuos de E é interessante o bastante para ser estudado. No que segue, iremos considerar E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$, apesar da discussão ser possível sobre $\mathbb{C}$.

Teorema (Hahn-Banach). Seja E um EV. normado e $p: E \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear, ou seja:

$$p(ax) = a p(x) \quad \forall a > 0 \text{ e } \forall x \in E$$
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Seja $G \subset E$ um subespaço vetorial e $g: G \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Então existe um funcional linear $f: E \to \mathbb{R}$ que estende g, i.e.

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in G.$$

Comentários: O teorema vale se E for espaço vetorial complexo mas no caso precisamos de outra condição, como $|g(x)| \leq p(x)$

Note que, de fato, não há módulo em nosso enunciado! A extensão não costuma ser única.

A demonstração usa o Lema de Zorn, e portanto depende do Axioma da Escolha. É sabido que nosso teorema não é equivalente ao A.C., mas também tem consequências similares, como o paradoxo de Banach-Tarski e a existência de conjunto não mensurável à Lebesgue. Antes de demonstrar, lembremos o lema de Zorn:

~~Lema~~ Um conjunto P com uma relação de ordem, ~~par~~ talvez parcial, é dito ordenado. Se todos elementos de um subconjunto $Q \subset P$ podem ser comparados então Q é dito totalmente ordenado. Se, dado $Q \subset P$, existe $c \in P$, tal que $a \leq c$ $\forall a \in P$, então c é cota superior de Q. Se existe $m \in P$ tal que $x \geq m$ só tem solução quando $x = m$ dizemos que m é maximal. Se todo subconjunto totalmente ordenado ~~de tal que~~ admite cota superior, então P é dito indutivo.

Lema de Zorn: Se P é indutivo, tem elemento maximal.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Matemática e da Natureza
Instituto de Matemática

CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – DM
Área: Matemática Pura

Demonstração do Teorema de Hahn-Banach.

Iremos considerar

$$P = \left\{ h : D(h) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} D(h) \text{ subespaço de } E \text{ que contém } G; \\ h \text{ é linear e estende } g. \\ h(x) \leq p(x) \ \forall x \in D(h). \end{array} \right\}$$

~~Se~~ Note que $P \neq \emptyset$ pois $g \in P$.

Provemos que P é indutivo. Se $Q \subset P$ é totalmente ordenado escrevemos $Q = \bigcup_{\lambda \in \Delta} h_\lambda$ Δ uma indexação dos elementos. Considere $D(h) = \bigcup_{\lambda \in \Delta} D(h_\lambda)$. É um subespaço linear.

pois se v e $u \in D(h)$ existe λ_1, $v \in D(h_{\lambda_1})$ e $v \in D(h_{\lambda_2})$, mas como a ordem é total em Q $v \in D(h_{\lambda_2})$ ou $v \in D(h_{\lambda_1})$. É claro que $D(h)$ ~~cont~~ contém G.

e ~~segue~~ estende g. A prova que é linear passa pelo mesmo Argumento acima e a última condição é trivial.

Logo P é indutivo e existe $f \in P$ maximal.

Afirmamos que $D(f) = E$.

Suponha que não seja o caso, e que exista $x_0 \in E \setminus \cancel{D(f)}\, D(f)$

Considere o funcional linear definido em $D(f) + x_0 \cdot \mathbb{R}$ por $\tilde{f}(x + t x_0) = f(x) + \alpha t$, para algum valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.
Mostraremos que exite α tal que $\tilde{f} \in P$, o que contradiz a maximalidade de f.
Note que $\tilde{f}$ satisfaz boa parte da definição dos elementos de P, basta verificar que $\tilde{f}(x + t x_0) \leq p(x + t x_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ e $x \in E$. Utilizando a propriedade que $p(ax) = a p(x)$ para $a > 0$, segue que, basta mostrar que

$$\begin{cases} \tilde{f}(x + x_0) \leq p(x + x_0) \\ \tilde{f}(x - x_0) \leq p(x - x_0) \end{cases} \quad \forall x \in E,$$

Isto equivale a

$$\alpha \leq p(x + x_0) - f(x)$$
e
$$f(x) - p(x - x_0) \leq \alpha .$$

Mostremos que $\sup_{x \in E} f(x) - p(x - x_0) \leq \inf p(x + x_0) - f(x)$.

4
23

De fato, basta mostrar que

$$f(x) - p(x - x_0) \leq p(y + x_0) - f(y) \quad \forall x, y \in E,$$

mas isto equivale a

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0)$$

o que é verdade pois p é sublinear

A consequência mais direta deste resultado é que, sendo $E^* = \{f : E \to \mathbb{R}, \text{ linear e contínua}\}$ onde E é EV normado, E^* é não vazio e na verdade, até grande, com vários elementos. Isto decorre do

Corolário: Seja $G \subset E$ um subespaço e $g : G \to \mathbb{R}$ linear e contínua. Existe $f : E \to \mathbb{R}$ em E^* tal que

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in G.$$

Dem.: Basta tomar no Teorema anterior $p(x) = \|g\| \cdot \|x\|_E$ onde $\|g\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |g(x)|$. Em geral, escrevemos ~~a norma~~ esta norma como $\|g\|_{G^*}$

Segue do corolário que E^* contém ~~cópias~~ cópias de qualquer $\mathbb{R}^n$. Observo porém que não era necessário usar Hahn Banach se o objetivo fosse apenas encontrar um funcional linear: poderíamos usar o Lema de Zorn e encontrar uma base em G estender para uma base em E e definir $f(v_i) = 0$ $\forall$ v_i na base de E que não está na base de G. O problema é que esta funcional provavelmente não seria contínua. De fato, pode se mostrar que $\langle P[0,1] \rangle$ ~~[illegible]~~ $= E$ é tal que seu dual E^* é vazio, donde segue que E não é ~~[illegible]~~ normado.

O teorema de Hahn-Banach também tem uma versão geométrica. ~~[illegible]~~ Enunciamo-la:

Teo Hahn-Banach (geométrica):

Se $A \subset E$ é convexo e aberto e $B \subset E$ é convexo, então existe funcional f em E^* que separa A e B. Isto é, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ $\forall a \in A$ e $b \in B$.

$\frac{6}{25}$

Solução da prova:

Seja C um aberto ~~convexo~~ convexo, que contém $0 \in E$. A idéia é mostrar que $p: E \to \mathbb{R}$, $p(x) = \inf(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha^{-1} x \in C)$ é um funcional sublinear com $0 \le p(x) \le M_0 |x|$ e $C = \{p(x) < 1\}$.

Esta última propriedade é ~~[illegible]~~ óbvia, já a anterior, de continuidade vem do fato que existe $B(0,r)$ contida em C. A propriedade $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ pode ser demonstrada ~~[illegible]~~ considerando que, se $\beta_x \ge p(x)$ e $\beta_y \ge p(y)$, então $\beta_x^{-1} x$ e $\beta_y^{-1} y \in C$. Da convexidade vem que $\frac{\beta_x^{-1}\beta_y^{-1}}{\beta_x^{-1}+\beta_y^{-1}}(x+y) \in C$,

mas isto é $(\beta_x+\beta_y)^{-1}$, logo $p(x+y) \le p(x) + p(y)$.

~~A demonstração segue do fato que $A - B = \{a-b, a\in A \text{ e } b \in B\}$ é aberto (união de $a - B$, $a \in A\}$ e convexo~~

Se $x_0 \notin C$, tome $g: \mathbb{R}\cdot x_0 \to \mathbb{R}$ como $g(t\cdot x_0) = t$.

Pode-se verificar que $g(x) \leq p(x)$ e daí segue que existe $f: E \to \mathbb{R}$ que a estende. Note que $f(x_0) = 1$ e $f(x) < 1 \; \forall x \in C$ por definição. ~~Para concluir o teorema basta observar que $A-B$ é aberto convexo e não contém a origem. Daí, deslocando por um vetor~~

A menos de uma translação, segue que dado um C convexo aberto e x_0 fora dele, existe funcional linear contínuo tal que $f(x_0) > f(c) \; \forall c \in C$. Para concluir, basta verificar que $A-B$ é aberto convexo e não contém 0, logo existe f linear contínuo tal que $f(a-b) \leq 0$ $\forall a \in A$ e $b \in B \Rightarrow f(a) \leq f(b) \; \forall a \in A$ e $b \in B$.

Este teorema permite separar conjuntos convexos em vários contextos. Como consequência, pode-se mostrar que ~~(E^*, σ)~~ ~~E^* com σ~~ E com a topologia fraca, aquela menos fina que faz com que todo $f \in E^*$ seja contínuo é Hausdorff. Uma versão melhorada é a quando A é compacto e B é fechado, de onde segue que existe $f \in E^*$ tal que $f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(b) \; \forall$ ~~a~~ $a \in A$ e $b \in B$.

Uma consequência importante deste teo é que

8
27