



~~Leve propriedades desta definição~~

$$(a) \text{ Se } A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Prova: Sejam $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \cap A_1^c$, ..., $B_n = A_n \cap A_{n-1}^c$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Note que $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$, e $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

e portanto: $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$.

Segue pela σ -aditividade,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n), \end{aligned}$$

uma vez que, por hipótese, $A_n \subseteq A_{n+1}$, e portanto

$\bigcup_{k=1}^n B_k = A_n$, de onde segue que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n P(B_k) = P(A_n).$$





CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

b) Se $P(A_i \cap A_j) = 0 \quad \forall i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

~~Vamos mostrar por contradição. Para isso,~~

suponha que $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. É vale a diferença, então existe ao menos uma sequência de ~~índices~~ finita de índices, ~~tais~~ que digamos



$$K_1, K_2, \dots, K_m,$$

tal que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_{K_i}\right) \neq \sum_{i=1}^m P(A_{K_i}).$$

Ora, mas se $P(A_i \cap A_j) = 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$, temos no caso de $m=2$ que existe ao menos uma sequência de dois índices tais que

$$P(A_{K_1} \cup A_{K_2}) = P(A_{K_1}) + P(A_{K_2}) - P(A_{K_1} \cap A_{K_2}) \neq P(A_{K_1}) + P(A_{K_2}).$$

O que é um absurdo. ~~Logo, a hipótese é falsa.~~

O caso geral de $m \geq 2$, segue do Teorema de Bonferroni.

Assim, fica provada a implicação.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

2- N pontos são escolhidos, independentemente e ao acaso, de uma bola $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq R\}$ de raio R . $\|x\|$ denota distância Euclidiana.

• calcular a ^{prob. que} distância entre o centro da esfera e o ponto mais próximo no meio que $n > 0$.

Seja X_i uma variável aleatória indicando a distância entre o centro da bola e o ponto i , segue

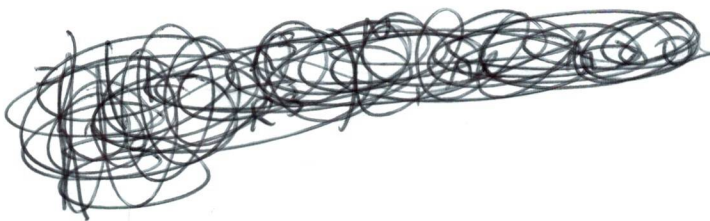
$$P(\min_{1 \leq k \leq N} (X_k) > n) = P(X_1 > n, X_2 > n, \dots, X_N > n), \text{ pois}$$

~~uma vez que $\min_{1 \leq k \leq N} (X_k) > n \Leftrightarrow X_1 > n, X_2 > n, \dots, X_N > n$~~

se $\min_{1 \leq k \leq N} (X_k) > n$, então todos os X_i 's são maiores do que n . Segue, por independência na escolha dos pontos ~~separ~~ e a escolha ao acaso, que

$$P(X_1 > n, X_2 > n, \dots, X_N > n) = \prod_{i=1}^N P(X_i > n) = (1 - P(X_1 \leq n))^N$$

$$= \left(1 - \frac{n^3}{R^3}\right)^N, \text{ para } n > 0.$$





CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

- Para demonstrar o limite de $\left(1 - \frac{n^3}{R^3}\right)^n$ quando $R \rightarrow \infty$ e $\frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3} \pi \lambda$, $\lambda > 0$, vamos mostrar quanto vale o limite da função $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ quando $n \rightarrow \infty$.

Note que $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\{n \log(1 - t/n)\}$ pela continuidade da função ~~exponencial~~ ~~exponencial~~ podemos tratar diretamente

$$n \log(1 - t/n) = \frac{\log(1 - t/n)}{1/n}$$

Como numerador e denominador vão para ^{zero} quando $n \rightarrow \infty$, podemos aplicar L'Hôpital e derivar numerador e denominador com respeito a n . Segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 - t/n) \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-t/n^2)}{\cancel{(1-t/n)}(1/n^2)} = -t$$

portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ $\square$



Com isso, usando este resultado, ~~temos~~ temos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\pi^3}{R^3}\right)^N = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ N/R^3 \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda}} \left(1 - \frac{N}{R^3} \frac{\pi^3}{N}\right)^N \\ = e^{-\frac{4}{3}\pi\lambda\pi^3}, \quad \lambda > 0. \quad \square$$

3- $X_1, \dots, X_n$ amostra aleatória de uma distribuição Poisson(θ). Assume-se uma distribuição a priori para θ dada por

$$h(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{1/2}}, \quad \theta > 0.$$

a) Obter a posteriori de $\psi = 2n\theta$.

Como a distribuição a priori de θ é imprópria, ou seja,

$$\int_0^{\infty} h(\theta) d\theta = +\infty,$$

~~Vamos, portanto, inicialmente,~~

Vamos demonstrar, inicialmente, que a posteriori de θ é própria e, portanto, válida.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Pelo Teorema de Bayes, temos o modelo a posteriori de θ , denotado por $\pi(\theta|\underline{x})$, tal que

$$\begin{aligned}\pi(\theta|\underline{x}) &\propto \prod_{i=1}^n p(x_i|\theta) h(\theta) \propto e^{-n\theta} \theta^{n\bar{x}} \theta^{-1/2}, \theta > 0. \\ &= e^{-n\theta} \theta^{n\bar{x}+1/2-1} I(\theta) \cdot \\ &\quad (0, \infty)\end{aligned}$$

Logo, a posteriori de θ é própria, pois este é o núcleo de uma $\text{Gamma}(n\bar{x}+1/2, n)$. Portanto, temos

$$\theta|\underline{x} \sim \text{Gamma}(n\bar{x}+1/2, n)$$

Para obter a distribuição de $\psi = zn\theta$, vamos ~~usar o método do Jacobiano~~ usar o método do Jacobiano. Nesta forma, seja $g(\psi|\underline{x})$ a distribuição a posteriori de ψ . Assim,

$$g(\psi|\underline{x}) = \pi(h^{-1}(\psi)|\underline{x}) \left| \frac{\partial h^{-1}(\psi)}{\partial \psi} \right|,$$

$$\text{onde } h^{-1}(\psi) = \theta = \frac{\psi}{zn}.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

~~Note que $\psi = 2n\theta$ é uma função~~

Note que $\psi = 2n\theta$ é uma função monotona crescente em θ , e portanto podemos usar o método de Jacobiano diretamente.

Observe ainda que

$$\psi = 0, \text{ se } \theta = 0$$

$$\psi = +\infty, \text{ se } \theta = +\infty.$$

Portanto

$$g(\psi|x) = \frac{n^{n\bar{x}+1/2}}{\Gamma(n\bar{x}+1/2)} \left(\frac{\psi}{2n}\right)^{n\bar{x}+1/2-1} \exp\left\{-\frac{n\psi}{2n}\right\} I(\psi)_{(0,\infty)}$$

$$\propto \psi^{n\bar{x}+1/2} \exp\left\{-\frac{\psi}{2}\right\} I(\psi)_{(0,\infty)},$$

$$\text{logo } \psi|x \sim \text{Gamma}(n\bar{x}+1/2, 1/2).$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

b) como base na posteriori do item anterior, especificar um teste Bayesiano para as hipóteses $\theta \geq \theta_0$ vs $\theta < \theta_0$.

Um teste Bayesiano é aquele que minimiza uma estrutura de perda. Para tal, considere a seguinte função perda.

$L(\theta, a)$		Decisão	
		$a: \theta \geq \theta_0$	$a: \theta < \theta_0$
Verdade	$\theta \geq \theta_0$	0	α
	$\theta < \theta_0$	β	0

a qual sugere que pagamos α se ~~escolhemos~~ decidimos por ' $\theta < \theta_0$ ', mas a verdade é ~~que~~ ' $\theta \geq \theta_0$ '; e pagamos β , se decidimos por ' $\theta \geq \theta_0$ ', mas a verdade é ~~que~~ ' $\theta < \theta_0$ '.



Assuma o teste Bayesiano aquele que minimiza $E[L(\theta, a) | \underline{x}]$. Desta forma

$$E[L(\theta, a) | \underline{x}] = \int_{\theta \in \Theta} L(\theta, a) \pi(\theta | \underline{x}) d\theta$$

$$= \int_{\theta < \theta_0} L(\theta, a) \pi(\theta | \underline{x}) d\theta + \int_{\theta \geq \theta_0} L(\theta, a) \pi(\theta | \underline{x}) d\theta$$

~~$$= \beta P(\theta < \theta_0 | \underline{x}) + \alpha P(\theta \geq \theta_0 | \underline{x})$$~~

$$= \beta \underset{(\theta_0, \infty)}{I(a)} P(\theta < \theta_0 | \underline{x}) + \alpha \underset{(0, \theta_0)}{I(a)} P(\theta \geq \theta_0 | \underline{x})$$

A decisão de Bayes será aquela que levar a um menor valor de $E[L(\theta, a) | \underline{x}]$, logo usamos a seguinte regra:

- Tomar a decisão $a: \theta > \theta_0$, se $\beta P(\theta < \theta_0 | \underline{x}) < \alpha P(\theta \geq \theta_0 | \underline{x})$



Seja $p^* = P(\theta < \theta_0 | \underline{X})$. Temos

$$\beta p^* < \alpha (1 - p^*) \Leftrightarrow \alpha > (\beta + \alpha) p^* \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + \beta} > p^*.$$

~~Logo, tomando a decisão~~

O teste Bayesiano sob a função perda descrita anteriormente, é tal que decide-se por

$$a: \theta > \theta_0, \text{ se } \frac{\alpha}{\alpha + \beta} > P(\theta < \theta_0 | \underline{X}),$$

de modo que $\theta | \underline{X} \sim \text{Gamma}(n\bar{x} + 1/2, n)$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$.

4- $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição uniforme $(0, \theta)$, ou seja,

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considerando ~~o modelo~~ o modelo a priori

$$g(\theta) = \begin{cases} 2/\theta^3, & 1 < \theta < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Devemos que encontrar o estimador de Bayes $\delta(Y_n)$ sob a função perda $|\delta(Y_n) - \theta|$, com $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma estatística suficiente para θ . ~~considere $\theta \in (0, 1)$~~

Primeiramente, vamos obter a distribuição a posteriori de θ . Como ~~a~~ $\int_0^\infty g(\theta) d\theta < +\infty$, não precisamos discutir se o modelo a posteriori existe. Assim, temos via teorema de Bayes,

$$\pi(\theta | \underline{x}) \propto \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} I(x_i) \frac{2}{\theta^3} I(\theta)$$

$$\propto \frac{1}{\theta^{n+3}} I(\theta) I(\theta)$$

$$= \frac{1}{\theta^{n+3}} I(\theta)$$

Note que $\theta > x_i, \forall i$, logo $\prod_{i=1}^n I(x_i)$ é equivalente a

$I(\theta)$, em que $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Agora precisamos encontrar a constante normalizadora que faz de $\pi(\theta|x)$ uma função de densidade.

Assim

$$\int_{\mathbb{R}} \pi(\theta|x) d\theta = 1 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} c \frac{1}{\theta^{n+3}} \mathbb{I}(\theta) d\theta = 1$$

$$\text{Seja } y^* = \max(y_n, 1)$$

$$\Leftrightarrow \int_{y^*}^{\infty} c \frac{1}{\theta^{n+3}} d\theta = 1 \Leftrightarrow c \left[-\frac{\theta^{-(n+2)}}{n+2} \right]_{y^*}^{\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow c < \frac{(y^*)^{-(n+2)}}{n+2} \Rightarrow \Leftrightarrow \boxed{c = (n+2)(y^*)^{n+2}}$$

Portanto

$$\pi(\theta|x) = \frac{(n+2)(y^*)^{n+2}}{\theta^{n+3}} \mathbb{I}(\theta)_{(y^*, \infty)}$$



Para obter o estimador de Bayes para θ sob perda-absoluta, ou seja, $L(\theta, \delta) = |\delta - \theta|$, vamos trabalhar ~~em um caso~~ caso contínuo geral.

Para isso, suponha um modelo a posteriori para um parâmetro θ contínuo em $\mathbb{R}$.

~~O estimador de Bayes é aquele que minimiza o valor esperado da função perda, ou seja, $E[L(\theta, \delta) | \underline{x}]$, para cada um conjunto de dados $\underline{x}$, a descreva. Suponha um conjunto de dados $\underline{x}$.~~

O estimador de Bayes é aquele que minimiza o valor esperado da função perda, ~~ou seja, $E[L(\theta, \delta) | \underline{x}]$~~ no modelo a posteriori. Logo, temos

$$E[L(\theta, \delta) | \underline{x}] = \int_{\mathbb{R}} |\theta - \delta| \pi(\theta | \underline{x}) d\theta,$$

Note que:

$$|\theta - \delta| = \begin{cases} \theta - \delta, & \text{se } \theta \geq \delta \\ \delta - \theta, & \text{se } \theta < \delta \end{cases}$$



Assim, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}} |\theta - \delta| \pi(\theta | \underline{x}) d\theta = \int_{-\infty}^{\delta} |\theta - \delta| \pi(\theta | \underline{x}) d\theta + \int_{\delta}^{\infty} |\theta - \delta| \pi(\theta | \underline{x}) d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\delta} (\delta - \theta) \pi(\theta | \underline{x}) d\theta - \int_{\delta}^{\infty} (\theta - \delta) \pi(\theta | \underline{x}) d\theta + \delta P(\theta > \delta | \underline{x}) - \delta P(\theta \leq \delta | \underline{x}) = (*)$$

Vamos somar e subtrair $\int_{\delta}^{\infty} \theta \pi(\theta | \underline{x}) d\theta$.

$$(*) = \int_{-\infty}^{\delta} \theta \pi(\theta | \underline{x}) d\theta + \int_{\delta}^{\infty} \theta \pi(\theta | \underline{x}) d\theta - \int_{\delta}^{\infty} \theta \pi(\theta | \underline{x}) d\theta - \int_{\delta}^{\infty} \theta \pi(\theta | \underline{x}) d\theta +$$

$$+ \delta (1 - P(\theta \leq \delta | \underline{x}) - P(\theta \leq \delta | \underline{x}))$$

$$= E(\theta | \underline{x}) - 2 \int_{\delta}^{\infty} \theta \pi(\theta | \underline{x}) d\theta + \delta (1 - 2P(\theta \leq \delta | \underline{x})) = (**)$$

~~Para mini~~ Para encontrar a decisão que minimiza $E(L(\theta, \delta) | \underline{x})$, vamos derivar a expressão acima em função de δ e igualar a 0 (zero).



Assim

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left[E(\theta | \underline{x}) - \int_{\delta}^{\infty} 2\theta \pi(\theta | \underline{x}) d\theta + \delta(1 - 2P(\theta \leq \delta | \underline{x})) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow + 2\delta \pi(\delta | \underline{x}) + (1 - 2P(\theta \leq \delta | \underline{x})) + \delta(-2\pi(\delta | \underline{x})) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2P(\theta \leq \delta | \underline{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta = \text{mediana}(\theta | \underline{x}).$$

Ou seja, o estimador de Bayes que minimiza a perda $L(\theta, \delta) = |\theta - \delta|$ é a mediana a posteriori.

Portanto, precisamos agora obter a mediana a posteriori de θ no modelo

$$\pi(\theta | \underline{x}) = \frac{(n+2)(y^*)^{n+2}}{\theta^{n+3}} \mathbb{I}(\theta)_{(y^*, \infty)}$$

Denote $\delta^* = \text{mediana}(\theta | \underline{x})$. Segue, como estamos num modelo contínuo, que



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

$$\int_{\delta^*}^{\infty} \frac{(n+2)(y^*)^{n+2}}{\theta^{n+3}} d\theta = 1/2$$

$$\Leftrightarrow (n+2)(y^*)^{n+2} \left(-\frac{\theta^{-(n+2)}}{n+2} \Big|_{\delta^*}^{\infty} \right) = 1/2$$

$$\Leftrightarrow (\delta^*)^{-(n+2)} = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{(y^*)^{n+2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\delta^*)^{n+2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(y^*)^{n+2}} \Leftrightarrow (\delta^*)^{n+2} = 2(y^*)^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta^* = 2^{1/(n+2)} y^*}$$

Portanto, ~~a distribuição~~ o estimador de Bayes sob perda absoluta para o modelo é dado por

$$\delta^* = 2^{1/(n+2)} y^*, \text{ em que } y^* = \max(1, Y_n),$$

com $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.