



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – IM
EDITAL 377/2022

1. Um espaço de probabilidade contém uma trinca com
- Ω : espaço amostral com todos possíveis resultados do experimento;
- $\mathcal{F}$: uma σ -álgebra, classe de subconjuntos de Ω com as seguintes propriedades:

- i. $\Omega \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$.
- ii. $\Omega \in \mathcal{F}$.
- iii. Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

P é uma medida, tal que:

i. $0 \leq P(A) \leq 1$

ii. $P(\Omega) = 1$.

iii. Se $A_1, A_2, \dots$ são disjuntos, ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$,
então $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – IM
EDITAL 377/2022

1. parte 2

Defina os eventos:

$$A_1^* = A_1$$

$$A_2^* = A_2 - A_1 \rightarrow A_2 \cap A_1^c$$

$$A_3^* = A_3 - A_2$$

$\vdots$

$$A_n^* = A_n - A_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{assim, } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^*\right) = P(A_1^*) + P(A_2^*) + \dots + P(A_n^*) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + \dots + P(A_n) - P(A_{n-1}) \\ &= P(A_n) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^*\right).$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$3. \quad f(x|\theta) = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$\log f(x|\theta) = -n\theta + \sum \log \theta - \log(\prod x_i!) = \sum x_i \cdot \frac{1}{\theta} = \sum x_i$$

$$\frac{\partial \log f(x|\theta)}{\partial \theta} = -1 + \frac{\sum x_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2}$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \theta^2} \right] = \frac{n}{\theta}$$

$h(\theta) \propto \theta^{-1/2}$ é a distribuição

não informativa de Jeffreys, que é
invariante sob transformações 1.1.

$$\pi(\theta|x) = \theta^{\sum x_i - 1/2} e^{-n\theta}$$

$\sim \text{Gamma}(\sum x_i + 1/2, n)$

$$\pi(\theta|x) = \frac{1}{\Gamma(\sum x_i + 1/2)} \theta^{\sum x_i + 1/2 - 1} e^{-n\theta}$$

$$P(2n\theta \leq \psi) = P(\theta \leq \psi/2n)$$

$$f_\psi(\psi) = f_\theta(\psi/2n) \cdot \frac{1}{2n}$$

$$f_\psi(\psi) = \frac{1}{\Gamma(\sum x_i + 1/2)} \left(\frac{\psi}{2n} \right)^{\sum x_i + 1/2 - 1} e^{-\psi/2n}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – IM
EDITAL 377/2022

$$f_{\psi}(\psi) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\sum x_i + 1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2\sum x_i + 1}{2}} \psi^{\left(\frac{2\sum x_i + 1}{2} - 1\right)} \frac{1}{2} \sum x_i e^{-\psi/2}$$

~~Logo~~ $\psi \sim \chi^2_{(2\sum x_i + 1)}$

b. Um teste bayesiano para $H_0: \theta \geq \theta_0$, valor conhecido $\bar{x}$:

$$P(\psi \geq \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\sum x_i + 1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2\sum x_i + 1}{2}} \psi^{\left(\frac{2\sum x_i + 1}{2} - 1\right)} e^{-\psi/2} d\psi$$

se $P(\psi \geq \theta_0) > 0.5$, não rejeita-se a hipótese nula.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$4. \quad f(x|\theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}(\theta)_{[X_{(n)}, \infty)} \quad X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$g(\theta) = \frac{2}{\theta^3} \quad 1 < \theta < \infty$$

$$\text{então, se } X_{(n)} < 1 \rightarrow \pi(\theta|X) = 0.$$

$$f(\tilde{X}) = 2 \int_{X_{(n)}}^{\infty} \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{1}{\theta^3} d\theta$$

$$= 2 \frac{1}{\theta^{n+3}} \cdot \frac{1}{-(n+3)} \Big|_{X_{(n)}}^{\infty} = 0 + \frac{2}{(n+3)X_{(n)}^{n+3}}$$

$$\pi(\theta|X) = \frac{2 (n+3) X_{(n)}^{n+3}}{\theta^{n+3} 2} = \frac{(n+3) X_{(n)}^{n+3}}{\theta^{n+3}} \mathbb{I}(\theta)_{[X_{(n)}, \infty)}$$

O estimador de Bayes (δ^*) para a função perda absoluta $|\delta - \theta|$ é a mediana da distribuição, essa distribuição é absolutamente contínua, então; satypz:

$$0.5 = \int_{X_{(n)}}^{\delta^*} \frac{(n+3) X_{(n)}^{n+3}}{\theta^{n+3}} d\theta.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – IM
EDITAL 377/2022

$$\frac{(n+3) X_{(n)}^{n+2}}{\delta^{n+2}(n+3)} \Big|_{x_n}^{\delta^*} = 0.5$$

$$\frac{X_{(n)}^{n+2}}{\delta^{*n+2}} = 1 = 0.5$$

$$\delta^{*(n+2)} = \frac{X_{(n)}^{n+2}}{1.5}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

2.

$$P(\|X\| > r) = 1 - P(\|X\| \leq r)$$

$$P(\|X\| \leq r) = \frac{1 - \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi R^3}}{1} = 1 - \frac{r^3}{R^3}$$

define $\|X_{(1)}\|$ como o ponto mais próximo em relação ao centro da esfera.

Então, se:

$$\begin{aligned} \|X_{(1)}\| > r &\rightarrow \|X_1\| > r \\ &\vdots \\ \|X_N\| &> r \end{aligned}$$

os pontos são independentes e identicamente distribuídos:

$$\begin{aligned} P(\|X_{(1)}\| > r) &= \prod_{i=1}^N P(\|X_i\| > r) = P(\|X_i\| > r)^N \\ &= \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)^N \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\|X_{(1)}\| > r) = \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)^N = 1.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO – IM
EDITAL 377/2022

$$\frac{N}{R^3} \longrightarrow \frac{4\pi\lambda}{3}$$

$$R^3 \longrightarrow \frac{N3}{4\pi\lambda}$$

$$\lim_{R^3 \rightarrow \frac{N}{4\pi\lambda}} P(\|X_{(j)}\| > r) = \left(1 - \frac{r^3 4\pi\lambda}{N3}\right)^N$$

$$= \left(1 - \frac{\frac{4\pi\lambda}{3} r^3}{N}\right)^N \longrightarrow e^{\left(-\frac{4\pi}{3}\lambda r^3\right)}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$A_j \cup A_j^c = \Omega$$

Questão (1) b.

$$P(\Omega) = 1 \rightarrow P(\emptyset) = 0$$

$$A_i = (A_i \cap A_j) \cup (A_i \cap A_j^c) \Rightarrow P(A_i) = P(A_i \cap A_j) + P(A_i \cap A_j^c)$$

mas, $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

$$A_i = (A_i \cap A_j^c) \Rightarrow P(A_i) = P(A_i \cap A_j^c)$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \Omega\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A_j\right) + P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A_j^c\right) \Rightarrow \forall n \neq j$$

$$P(A_n \cap A_n) = P(A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_j) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_j^c)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_j^c) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$