



D

Questão 1:

• Espaço de probabilidade:

É uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ onde:

- (i) Ω é um conjunto não vazio
- (ii) $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω
- (iii) P é uma medida de probabilidade

definição: Álgebra de subconjuntos de Ω (notação: $\tilde{\mathcal{F}}$)

$\tilde{\mathcal{F}}$ é uma álgebra de subconjuntos de Ω se satisfaz os três requisitos abaixo:

(I) $\emptyset \in \tilde{\mathcal{F}}, \Omega \in \tilde{\mathcal{F}}$

(II) Se $A \in \tilde{\mathcal{F}}$, então $A^c \in \tilde{\mathcal{F}}$

(III) Se $A_1 \in \tilde{\mathcal{F}}, A_2 \in \tilde{\mathcal{F}}$, então $A_1 \cup A_2 \in \tilde{\mathcal{F}}$

A partir dessa definição, podemos definir uma σ -álgebra simplesmente estendendo o requisito (III) para contemplar uniões numeráveis. Ou seja:

definição: σ -Álgebra de subconjuntos de Ω (notação: $\mathcal{F}$)

$\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω se satisfaz os três requisitos abaixo:

(I) $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$

(II) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$

(III) Se $A_1, A_2, \dots$ pertencem a $\mathcal{F}$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Agora vamos passar para a definição de medida de probabilidade

Seja Ω um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω .

$\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ é uma medida se, $\forall A \in \mathcal{F}$:



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

$$(I) \mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0$$

(II) Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ (ou seja, são disjuntos), então $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Nesse caso, dizemos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de medida.

Se $\mu(\Omega) = 1$, dizemos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de probabilidade (e nesse caso costumamos denotar $P = \mu$).

Obs: Também é possível explicar a probabilidade sem usar conceitos de medida (menos formal). Nesse caso dizemos que $P(\cdot)$ é uma probabilidade quando satisfaz os três axiomas abaixo:

$$(I) P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$(II) P(\Omega) = 1$$

(III) Se $A_1, A_2, \dots$ pertencem a $\mathcal{F}$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Essa definição é conhecida como definição axiomática da probabilidade, feita por Kolmogorov.

• Parte 2 da questão 1:

$$(a) \text{ Af: Se } A_m \subseteq A_{m+1} \quad \forall m \geq 1 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m) = P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)$$

Denotando por $B_m = \bigcup_{k=1}^m A_k$, note que $\bigcup_{k=1}^m B_m = A_m$, já que A_m é uma sequência crescente de eventos. Logo $P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right)$.

Para provar que $P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m)$, vou usar o seguinte resultado, que decorre do axioma 3 de probabilidade. (depois provei o resultado)



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

~~Prova de resultado~~ ~~Sejam A~~

Resultado: Sejam $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ eventos em $\mathcal{F}$ com $A_n \downarrow \emptyset$. Então
o axioma III da definição de probabilidade implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$

Nota que, $\forall m \in \mathbb{N}$, podemos escrever $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left[\bigcup_{n=1}^m B_n \right] \cup \left[\bigcup_{n=m+1}^{\infty} B_n \right]$

Assim, temos que $C_m = \bigcup_{n=m+1}^{\infty} B_n$ é uma sequência decrescente de eventos
($C_m \supset C_{m+1} \supset \dots$) e que $C_m \downarrow \emptyset$ quando $m \rightarrow \infty$. Logo:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=1}^m B_n\right)$$

Porém, como $\bigcup_{n=1}^m B_n = A_m$ e $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, segue que

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \text{ como queríamos provar.}$$

↓
Agora vamos mostrar o resultado:

Sejam $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ eventos em $\mathcal{F}$ com $A_n \downarrow \emptyset$. Vamos definir

$B_m = A_{m-1} - A_m$, ou seja, $B_m = [A_{m-1}] \cap [A_m^c]$, para $m = 2, 3, \dots$

Como os A_n 's são sequência decrescente de eventos, a sequência B_n
é composta de eventos disjuntos e pelo axioma 3:



$$P\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=2}^{\infty} [P(A_{n-1}) - P(A_n)]$$

Porém, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e conseqüentemente:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} [P(A_{n-1}) - P(A_n)] = P(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Como as A_n 's são seq. decrescente, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1$ e portanto:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A_1) = P(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0 \quad 17$$

(b) Af: $P(A_i \cap A_j) = 0 \quad \forall i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Podemos escrever $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left[\bigcup_{n=1}^m A_n \right] \cup \left[\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n \right], \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Como os dois uniões nos colchetes são disjuntos, uma de cada (pois as A_n 's não são disjuntas), temos

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) + P\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\right)$$

como $P(A_i \cap A_j) = 0$

~~Defina $B_n \in \mathcal{A}$ - B_n~~ . Como $P(A_i \cap A_j) = 0 \quad \forall i \neq j$, temos que $A_i \cap A_j = B_{ij}$ onde $P(B_{ij}) = 0$ (as A_j 's talvez sejam disjuntas, mas não podemos afirmar isso). Além disso interseções das A_j 's com 3 ou mais termos também terão probabilidade zero, pois estarão contidas em $A_i \cap A_j$ para algum par $i \neq j$. Daí:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i) - \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i} P(A_i \cap A_j) + R, \quad \text{onde } R \text{ é um termo residual contendo apenas interseções com 3 ou mais termos}$$

Princípio da inclusão-exclusão

$$= \sum_{i=1}^m P(A_i) \quad \text{Fazendo } m \rightarrow \infty, \text{ temos que } \bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n \downarrow \emptyset,$$

daí como $\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n \supset \bigcup_{n=m+2}^{\infty} A_n$, segue do resultado provado no item (a) que $\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\right) = 0$ 6



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

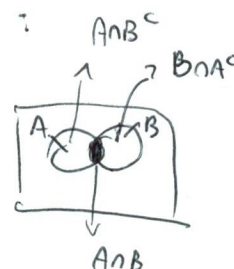
$$\text{Logo, } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Q

* Prova do princípio da inclusão-exclusão (com apenas 2 eventos):

$$Af: P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{união disjunta!}$$

$$\text{Podemos escrever } A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$$



$$\text{Como } P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \text{ e } P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \text{ segue que:}$$

axioma 3

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Obs (referente a definição formal do item inicial):

Defini o espaço de probabilidade considerando que a $\mathcal{P}$ satisfaz a propriedade que: $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ com $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ implica em $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Porém, alguns lugares definem de modo mais restrito primeiro, considerando essa propriedade apenas com quantia finita de eventos. Nesse caso temos uma probabilidade dita finitamente aditiva. A partir disso, inclui-se um quarto axioma dizendo que: Para $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \in \mathcal{F}$ com $A_n \downarrow \emptyset$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

Essa definição é equivalente a que eu coloquei pois, definindo:

$$(III') \text{ Sejam } A_1, A_2 \in \mathcal{F} \text{ com } A_1 \cap A_2 = \emptyset, \text{ então } P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$(III) \text{ Sejam } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ com } A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, \text{ então } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$(IV) \text{ Sejam } A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \in \mathcal{F} \text{ com } A_n \downarrow \emptyset, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

Pode-se mostrar que $(III') + (IV) \Leftrightarrow (III)$, então eu optei por definir considerando (III) em vez de $(III') + (IV)$. De todo modo, ao longo do item (a) eu provei que $(III) \Rightarrow (IV)$.

7



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

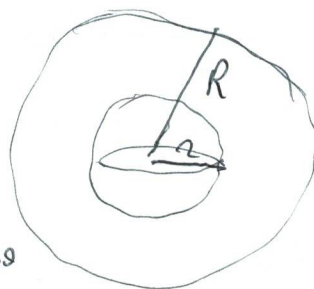
Questão 2:

N pontos escolhidos independentemente na bola B

- Calcular a $P(A)$ onde $A = \{ \text{ponto mais próximo do centro tem raio superior a } r > 0 \}$.

Note que podemos pensar nesse problema do seguinte modo:

Temos duas esferas, uma maior de raio R e outra menor de raio r . Para o evento A ocorrer, é preciso que todos os pontos caiam fora da esfera de raio r (ou seja, todos os pontos caem na "esfera oca" obtida retirando a esfera de raio r de dentro da outra. Vamos chamar de E essa região)



Assim, $P(A) = P(D)$ onde $D = \{ \text{todos os } N \text{ pontos caem na região } E \}$

Como os pontos são escolhidos independentemente, $P(D) = [P(C)]^N$ onde

$C = \{ \text{Primeiro ponto é escolhido na região } E \}$. Como todos os pontos são escolhidos da mesma forma (uniformemente), foi possível apenas colocar

$P(D) = [P(C)]^N$ já que a probabilidade de cada ponto cair em E é a mesma. Agora vamos calcular $P(C)$. Como a escolha é feita

uniformemente, a probabilidade de um ponto específico cair numa sub-região $\tilde{B}$ contida em B é dada por $\frac{\text{Volume}(\tilde{B})}{\text{Volume}(B)}$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

e conseqüentemente
$$P(C) = \frac{\text{Volume}(E)}{\text{Volume}(B)}$$

Como o volume de uma esfera de raio R é dado por $\frac{4}{3}\pi R^3$, segue que:
$$\text{Volume}(B) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Como o volume de E pode ser obtido subtraindo o volume da esfera de raio menor da esfera de raio maior, temos que:

$$\text{Volume}(E) = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

Portanto:

$$P(C) = \frac{\frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{(R^3 - r^3)}{R^3} \Rightarrow P(A) = \left[\frac{(R^3 - r^3)}{R^3} \right]^N$$

• Limite para $P(A)$ quando $R \rightarrow \infty$ e $\frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda$ com $\lambda > 0$.

Desenvolvendo primeiro o limite de dentro:

$$\lim_{\frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda} \left[\frac{(R^3 - r^3)}{R^3} \right]^N = \lim_{N \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda R^3} \left[\frac{(R^3 - r^3)}{R^3} \right]^N = \left[\frac{(R^3 - r^3)}{R^3} \right]^{\frac{4}{3}\pi\lambda R^3}$$

Multiplicando e dividindo dentro do colchete por $\frac{4}{3}\pi\lambda$, temos:

$$\lim_{\frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda} \left[\frac{(R^3 - r^3)}{R^3} \right]^N = \left[\frac{\frac{4}{3}\pi\lambda (R^3 - r^3)}{\frac{4}{3}\pi\lambda R^3} \right]^{\frac{4}{3}\pi\lambda R^3}$$

Agora vamos aplicar o outro limite:

$$\lim_{R^3 \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{4}{3}\pi\lambda (R^3 - r^3)}{\frac{4}{3}\pi\lambda R^3} \right]^{\frac{4}{3}\pi\lambda R^3} = \lim_{R^3 \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\frac{4}{3}\pi\lambda r^3}{\frac{4}{3}\pi\lambda R^3} \right]^{\frac{4}{3}\pi\lambda R^3}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Denotando $\tilde{R} = \frac{4}{3} \pi \lambda R^3$, temos que $R^3 \rightarrow \infty$ implica que $\tilde{R} \rightarrow \infty$

Já que λ é constante. Logo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\frac{4}{3} \pi \lambda r^3}{\frac{4}{3} \pi \lambda R^3} \right]^{\frac{4}{3} \pi \lambda R^3} = \lim_{\tilde{R} \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\frac{4}{3} \pi \lambda r^3}{\tilde{R}} \right]^{\tilde{R}}$$

Usando um resultado de cálculo que afirma que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{c}{n} \right]^n = e^c$ para c constante segue que:

$$\lim_{\tilde{R} \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\frac{4}{3} \pi \lambda r^3}{\tilde{R}} \right]^{\tilde{R}} = e^{-\frac{4}{3} \pi \lambda r^3} = e^{-\lambda V}$$

onde V é o volume da esfera de raio r .

Questão 3:

$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Pois}(\theta)$ com priori $h(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{1/2}}$

a) Posteriori de $\psi = 2m\theta$:

Inicialmente vamos obter a posteriori para θ :

Pelo Teorema de Bayes temos que:

$$P(\theta | \underline{x}) \propto P(\underline{x} | \theta) \cdot h(\theta) = \left[\prod_{i=1}^n P(x_i | \theta) \right] \cdot h(\theta) \propto$$

$$\propto \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^{x_i}}{x_i!} \cdot \frac{1}{\theta^{1/2}} \propto \frac{e^{-m\theta} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i! \cdot \theta^{1/2}} \propto e^{-m\theta} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^n x_i - 1/2}$$

← $\prod_{i=1}^n x_i! \cdot \theta^{1/2}$ constante com respeito a θ

para $\theta > 0$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Agora vamos obter a posteriori para $\Psi = 2m\theta$ ($\Psi > 0$)

Temos que $\Psi = 2m\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\Psi}{2m}$, onde $h(\theta) = \frac{c}{\theta^{1/2}}$ com c constante para integrais 1

Escrevendo a função de probabilidade da Poisson parametrizada por Ψ temos que:

$$P(x_i|\Psi) = \frac{\left(\frac{\Psi}{2m}\right)^{x_i} e^{-\frac{\Psi}{2m}}}{x_i!}, \quad x_i > 0$$

Já a priori de Ψ , vamos obter via método jacobiano:

$$h_{\theta}(\theta) = \frac{c}{\theta^{1/2}} \quad \text{e} \quad h_{\Psi}(\Psi) = h_{\theta}(\Psi) \cdot |J|$$

onde

$$h_{\theta}(\Psi) = \frac{c}{\left(\frac{\Psi}{2m}\right)^{1/2}} \quad \text{e} \quad |J| = \left| \frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \right| = \left| \frac{1}{2m} \right| = \frac{1}{2m}$$

Logo:

$$h_{\Psi}(\Psi) = \frac{c}{\left(\frac{\Psi}{2m}\right)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2m} \propto \frac{(2m)^{1/2}}{\Psi^{1/2}} \propto \frac{1}{\Psi^{1/2}}$$

Agora vamos para posteriori:

$$P(\Psi|x) \propto \underbrace{P(x|\Psi)}_{\text{verossimilhança}} \cdot \underbrace{P(\Psi)}_{\text{Priori}}, \quad \text{onde:}$$

$$P(\Psi) \propto \frac{1}{\Psi^{1/2}}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

$$\begin{aligned} P(\underline{x}|\psi) &= \prod_{i=1}^n P(x_i|\psi) = \prod_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\psi}{2m}\right)^{x_i} e^{-\left(\frac{\psi}{2m}\right)}}{x_i!} = \\ &= \frac{\left(\frac{\psi}{2m}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot e^{-n\left(\frac{\psi}{2m}\right)}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \propto \left(\frac{\psi}{2m}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot e^{-\psi/2} \end{aligned}$$

Logo:

$$P(\psi|\underline{x}) \propto \left(\frac{\psi}{2m}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot e^{-\psi/2} \cdot \frac{1}{\psi^{1/2}} \propto \psi^{\sum_{i=1}^n x_i - 1/2} \cdot e^{-\psi/2}$$

que é o núcleo de uma distribuição gamma $\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1/2, 1/2\right)$ para $\psi > 0$
Logo, $\psi \sim \text{gamma}\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1/2, 1/2\right)$

b) Teste de hipóteses Bayesiano:

Sob o paradigma Bayesiano, o parâmetro desconhecido θ (ou ψ) é visto como uma quantidade sobre a qual podemos atribuir probabilidades. Então, ~~a priori~~ inicialmente o comportamento probabilístico de θ (ou ψ) é descrito através de uma distribuição denominada distribuição a priori, elicitada por um especialista antes mesmo de observar os dados. Depois, observando os dados, essa distribuição é atualizada a luz desses dados e passa a ser chamada de distribuição a posteriori. Essa atualização é feita através do Teorema de Bayes, conforme foi feito no item (a).



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Então, se podemos atribuir probabilidades para os parâmetros, também poderemos atribuir probabilidades para hipóteses (H_0 e H_1), tanto antes de observar os dados quanto atualizar essas probabilidades após observar os dados, no paradigma bayesiano.

~~Neste contexto, podemos atribuir probabilidades a priori para as hipóteses H_0 e H_1 e atualizá-las após observar os dados.~~

Logo, a partir da posteriori, podemos efetuar um teste de hipóteses nesse caso (pois ambas as hipóteses não compostas) calculando qual a probabilidade dos parâmetros estar nas regiões de H_0 e H_1 através da posteriori.

Note que testar $H_0: \theta \geq \theta_0$ contra $H_1: \theta < \theta_0$ equivale a testar $H_0: \frac{\theta}{2n} \geq \frac{\theta_0}{2n}$ contra $H_1: \frac{\theta}{2n} < \frac{\theta_0}{2n}$. Denotando $\psi_0 = \frac{\theta_0}{2n}$,

desejamos testar $H_0: \psi \geq \psi_0$ contra $H_1: \psi < \psi_0$.

Para isso, podemos calcular $P(H_0|x)$ e $P(H_1|x)$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} P(H_0|x) &= \int_{\{\psi \geq \psi_0\}} P(\psi|x) d\psi = \int_{\psi_0}^{\infty} \frac{(1/2)^{\sum_{i=1}^n x_i - 1/2}}{P(\sum_{i=1}^n x_i + 1/2)} \cdot \psi^{\sum_{i=1}^n x_i - 1/2} \cdot e^{-\psi/2} \\ &= P\left(\text{gamma}\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1, 1/2\right) \geq \psi_0\right) \end{aligned}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

$$P(H_1 | x) = \int_{\psi < \psi_0} P(\psi | x) d\psi = P\left(\text{gama}\left(\sum_{i=1}^n x_i + 1, 1/2\right) < \psi_0\right)$$

Por fim, basta comparar esses dois resultados. Supondo que o erro de rejeitar H_0 indevidamente seja igualmente grave ao de rejeitar H_1 indevidamente, podemos avaliar $\frac{P(H_0 | x)}{P(H_1 | x)}$ e rejeitar H_0 caso esse valor seja menor que 1. ~~Se o valor for maior que 1, rejeitamos H_0 e aceitamos H_1 .~~ ~~Se o valor for menor que 1, rejeitamos H_1 e aceitamos H_0 .~~

Obs: Caso ~~não~~ não tivéssemos a posteriori, poderíamos fazer

$$\frac{P(H_0 | x)}{P(H_1 | x)} \propto \frac{P(x | H_0)}{P(x | H_1)} \cdot \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad \text{onde } P(H_0) \text{ e } P(H_1) \text{ seriam as}$$

probabilidades a priori das hipóteses H_0 e H_1 , nesse caso obtidos integrando na priori.

e $\frac{P(x | H_0)}{P(x | H_1)}$ é denominada fator de Bayes. Se essa razão for maior que 1, significa que os dados se adequam mais a hipótese H_0 do que H_1 .



Questão 4:

$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Unif}(\theta, \theta)$ e priori $g(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^3}, & \text{se } 1 < \theta < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Queremos o estimador de Bayes supondo função perda $|\delta(X_n) - \theta|$, onde $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

Primeiro vamos obter a distribuição posterior de θ , que será necessária. Pelo Teorema de Bayes:

$$P(\theta|x) \propto P(x|\theta) \cdot g(\theta) \quad \text{onde:}$$

$$g(\theta) = \frac{2}{\theta^3} I_{(1, \infty)}(\theta)$$

$$\begin{aligned} P(x|\theta) &= \prod_{i=1}^n P(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot I_{(\theta, \theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} I_{(0, \theta)}^{(\max_{1 \leq i \leq n} x_i)} = \\ &= \frac{1}{\theta^n} I_{(x_{(n)}, \infty)}(\theta), \quad \text{onde } x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i) = Y_n \end{aligned}$$

Logo:

$$P(\theta|x) \propto \frac{1}{\theta^n} I_{(x_{(n)}, \infty)}(\theta) \cdot \frac{2}{\theta^3} I_{(1, \infty)}(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{n+3}} I_{(M, \infty)}(\theta)$$

$$\text{onde } M = \max(x_{(n)}, 1).$$

O estimador de Bayes é aquele que minimiza a função perda esperada a posteriori, ou seja, minimiza $E_{\theta|x}[L(\theta, \delta)]$ 5



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

onde $L(\theta, \delta)$ é a função perda. Nesse caso $L(\theta, \delta) = |\delta(y_n) - \theta|$
É sabido que o estimador de Bayes no caso de perda absoluta
(esse caso) é dado pela mediana da posteriori. Vamos provar isso
abaixo:

Af: mediana da posteriori é o estimador de Bayes no caso de perda
absoluta.

Prova: Queremos minimizar $E_{\theta|x} [L(\theta, \delta)] = E_{\theta|x} [|\theta - \delta|] =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\theta - \delta| \cdot P(\theta|x) d\theta = \int_{-\infty}^{\delta} -(\theta - \delta) d\theta + \int_{\delta}^{\infty} (\theta - \delta) d\theta$$

com respeito a δ ,

derivando e igualando a zero, utilizando a regra de Leibniz, já
que δ aparece no limite de integração, temos que:

$$\frac{\partial E_{\theta|x} [|\theta - \delta|]}{\partial \delta} = \int_{-\infty}^{\delta} P(\theta|x) d\theta - \int_{\delta}^{\infty} P(\theta|x) d\theta$$

essa derivada vale zero quando ambos os termos forem iguais ($\frac{1}{2}$) e
isso ocorre quando $\delta = \text{mediana}$ ~~da posteriori~~ da posteriori.

Fazendo teste da segunda derivada podemos verificar que esse ponto crítico
de fato é ponto de mínimo, já que $\frac{\partial^2 E_{\theta|x} [|\theta - \delta|]}{\partial \delta^2} = 2P(\delta|x) > 0$
em $\delta = \text{mediana}$. A

Então, esse resultado nos indicaria a tomar como estimador de



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Bayes a mediana da posteriori, ~~ou seja~~, mas ainda precisamos obter a posteriori completa; ou seja, encontrar a constante que integra 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} C \cdot \frac{1}{\theta^{n+3}} I_{(M, \infty)}(\theta) d\theta = 1 \Rightarrow \int_M^{\infty} \frac{C}{\theta^{n+3}} = 1$$

$$\left[\frac{-\theta^{-(n+2)}}{n+2} \right]_M^{\infty} = \frac{1}{C} \Rightarrow \left(0 + \frac{M^{-(n+2)}}{n+2} \right) = \frac{1}{C}$$

$$\Rightarrow C = \frac{n+2}{M^{-(n+2)}} = (n+2) M^{n+2}$$

$$\text{Logo: } P(\theta|x) = \frac{(n+2) M^{n+2}}{\theta^{n+3}} I_{(M, \infty)}(\theta)$$

que da para identificar como ~~uma~~ distribuição pareto $(n+2, M)$.

Agora vamos obter a mediana dessa posteriori: (denotando por m)

$$\int_M^m \frac{(n+2) M^{n+2}}{\theta^{n+3}} = \int_m^{\infty} \frac{(n+2) M^{n+2}}{\theta^{n+3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{-\theta^{-(n+2)}}{n+2} \right]_m^{\infty} \cdot M(n+2) = \frac{1}{2}$$

apresentando constantes anteriores

$$\Rightarrow \left[0 + \frac{m^{-(n+2)}}{n+2} \right] = \frac{1}{2M(n+2)} \Rightarrow m^{-(n+2)} = \frac{1}{2M} \Rightarrow m = (2M)^{\frac{n+2}{2}}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Para concluir, note que como a posteriori de θ só depende dos dados através da estatística suficiente $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$, segue que o estimador de Bayes obtido também só depende dos dados através de Y_n e portanto:

$$\delta(Y_n) = (2M)^{n+2} \quad \text{onde } M = \max(Y_n, 1)$$

$\downarrow$
mediana da posteriori