



C

~~1) Seja $\mathcal{R}$ um con~~

~~Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. $\mathcal{F}$ é dita σ -álgebra~~

~~se~~ (i) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

1) Seja $\mathcal{R}$ um conjunto.

Uma família de conjuntos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{R})$ (conjunto das partes de $\mathcal{R}$) é uma σ -álgebra se

(i) $\mathcal{R} \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ é uma sequência enumerável de conjuntos em $\mathcal{F}$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Um espaço de probabilidade é uma tripla $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, P)$ onde $\mathcal{R}$ é um conjunto, $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra contida em $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ e P é uma função tal que

~~P~~ $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ satisfaz:

(i) $P(\mathcal{R}) = 1$

(ii) Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ é uma sequência enumerável de conjuntos disjuntos em $\mathcal{F}$ então $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

$\mathcal{R}$ é chamado espaço amostral.



Seja $(\Omega, \mathcal{F}, IP)$ espaço de probabilidade e $A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1$.

a) Suponha que $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \geq 1$. Defina $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1}) \cup A_1$
 $= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pois $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \geq 1$. Além disso, $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Logo, $IP\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = IP\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} IP(B_n) =$
 $= \sum_{n=2}^{\infty} IP(A_n \setminus A_{n-1}) + IP(A_1)$, usando a definição de probabilidade.

Note que, se $n \geq 2$, então $A_n = (A_n \setminus A_{n-1}) \cup A_{n-1}$ é uma união disjunta. Logo, $IP(A_n) = IP(A_n \setminus A_{n-1}) + IP(A_{n-1})$, ou seja, $IP(A_n \setminus A_{n-1}) = IP(A_n) - IP(A_{n-1})$. Temos

$$IP\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = IP(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} IP(A_n \setminus A_{n-1}) = IP(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^k IP(A_n \setminus A_{n-1})$$
$$= IP(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^k IP(A_n) - IP(A_{n-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} IP(A_k), \text{ conforme}$$

~~queríamos~~ queríamos provar.

b) Algumas propriedades que usaremos:

Ⓘ Se $A, B \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$ então $IP(A) \leq IP(B)$.

Ⓙ Se $A, B \in \mathcal{F}$ e $A \cap B = \emptyset$ então $IP(A \cup B) = IP(A) + IP(B)$.
Prova: Basta escrever $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$, que é uma união disjunta. Logo, $IP(B) = IP(B \setminus A) + IP(B \cap A) \geq IP(B \cap A)$. $\square$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

(II) Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ então $IP(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n IP(A_i)$.

Prova: Para $n=2$, temos $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$, que é união disjunta. Logo, $IP(A_1 \cup A_2) = IP(A_1) + IP(A_2 \setminus A_1) \leq IP(A_1) + IP(A_2)$ pela propriedade (I), pois $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{F}$. A prova segue por indução em n . $\square$

Suponha agora que $A_n \in \mathcal{F} \forall n \geq 1$ e $IP(A_i \cap A_j) = 0 \forall i \neq j$. Defina ~~(como antes)~~
 $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$ para $n \geq 2$.
Temos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Logo, $IP(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = IP(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} IP(B_n)$. (*)

Agora, note que $A_n = \left[A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right) \right] \cup \left[A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)^c \right]$ e
($n \geq 2$)

essa união é disjunta. Logo,

$$IP(A_n) = IP\left(A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)\right) + IP\left(A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)^c\right)$$

$$= IP\left(A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)\right) + IP(B_n). \quad (**)$$

$$\text{Então, } IP\left(A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)\right) = IP\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (A_n \cap A_k)\right) \stackrel{(II)}{\leq} \sum_{k=1}^{n-1} IP(A_n \cap A_k) = 0$$

pois $IP(A_n \cap A_k) = 0 \forall k \neq n$ por hipótese. Segue de (**) que $IP(A_n) = IP(B_n)$ e, substituindo em (*), concluímos que $IP(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} IP(A_n)$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

② A distância entre o centro da esfera e o ponto mais próximo é maior que $r > 0$ se e somente se todos os pontos não pertencem à bola $B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq r\}$ escolhidos.

Sejam $X_1, \dots, X_N$ os N pontos escolhidos.

Como o volume de B_r é $\frac{4}{3}\pi r^3$ e o volume de B é $\frac{4}{3}\pi R^3$ e os pontos foram escolhidos uniformemente

temos $IP(X_i \in B(0, r)) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3}$ e portanto

$IP(X_i \notin B(0, r)) = 1 - \frac{r^3}{R^3}$. Como $X_1, \dots, X_N$ são independentes, temos $IP(X_i \notin B_r \forall i=1, \dots, N) = \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)^N$, ou seja,

a probabilidade da distância entre o centro da esfera e o ponto mais próximo ser maior que r é $\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)^N$.

$$\textcircled{b} \text{ Temos } \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)^N = \left(1 - \frac{1}{(R^3/r^3)}\right)^{N \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{r^3}{R^3}} =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{(R^3/r^3)}\right)^{R^3/r^3}\right]^{\frac{Nr^3}{R^3}} = (X). \text{ Como } R \rightarrow \infty, \text{ temos}$$

$$\frac{R^3}{r^3} \rightarrow \infty \text{ e assim } \left(1 - \frac{1}{(R^3/r^3)}\right)^{R^3/r^3} \rightarrow e^{-1}.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Como $\frac{Nr^3}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3} \pi \lambda r^3$, segue de (*) que

$$\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)^N \rightarrow \exp\left(-\frac{4}{3} \pi r^3 \lambda\right) = \exp(-\text{Vol}(Br) \cdot \lambda)$$

onde $\text{Vol}(Br)$ representa o volume da bola Br .
Note que essa expressão é igual a 1 se $\lambda = 0$.

(4) Note que a função de densidade da amostra é dada por $f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \begin{cases} 1/\theta^n & \text{se } 0 < x_i < \theta \text{ p/ todos } 1 \leq i \leq n \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$

Definindo a estatística $Y_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$, temos

$$f(X_1, \dots, X_n | \theta) = \begin{cases} 1/\theta^n & \text{se } Y_n < \theta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos descobrir então a posteriori de θ dado Y_n :

$$g(\theta | Y_n = y) = \frac{f(y | \theta) \cdot g(\theta)}{\left(\int_1^\infty f(y | \theta) \cdot g(\theta) d\theta\right)}$$

$$\text{Temos } \int_1^\infty f(y | \theta) \cdot g(\theta) d\theta = \int_1^\infty \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{2}{\theta^3} 1_{\{y < \theta\}} d\theta =$$

$$= \int_{y+1}^\infty \frac{2}{\theta^{n+3}} d\theta = \frac{-2}{(n+2) \theta^{n+2}} \Big|_{\theta=y+1}^\infty = \begin{cases} \frac{2}{n+2} & \text{se } y < 1 \\ \frac{2}{y^{n+2} \cdot (n+2)} & \text{se } y \geq 1. \end{cases}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

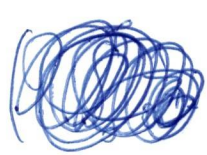
Logo, a posteriori é

$$g(\theta | Y_n = y) = \frac{\frac{2}{\theta^{n+3}} \cdot \mathbb{1}_{\{y < \theta\}}}{\int_{y+1}^{\infty} \frac{2}{\theta^{n+2}} d\theta} = \begin{cases} \frac{n+2}{\theta^{n+3}} & \text{se } y < 1 \\ \frac{(n+2)y^{n+2}}{\theta^{n+3}} \mathbb{1}_{\{y < \theta\}} & \text{se } y \geq 1. \end{cases}$$

Para encontrar o estimador de Bayes $\delta(Y_n)$ é suficiente minimizar a função de perda "atualizada" pela distribuição posterior de θ , isto é, minimizar

$$\int_1^{\infty} |\delta(y) - \theta| \cdot g(\theta | y) d\theta.$$

Um palpite seria tomar $\delta(y) = y$, ou seja, o estimador $\delta(Y_n) = Y_n$.

③ Me parece estranho que $h(\theta) \propto \frac{1}{\theta^{1/2}}$ pois não é uma densidade em $(0, \infty)$. 

Assumindo que esteja correto, queremos encontrar a posterior de $\psi = 2n\theta$, ou seja $h(\psi | x_1, \dots, x_n)$.

$$\text{Temos } h(\psi | x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n | \psi) \cdot h(\psi)}{\int_0^{\infty} f(x_1, \dots, x_n | \psi) \cdot h(\psi) d\psi}.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Como $X_1, \dots, X_n$ é i.i.d. com $X_i \sim \text{Poi}(\psi/2n)$, temos

$$f(x_1, \dots, x_n | \psi) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\psi/2n} \cdot \psi^{x_i}}{x_i! \cdot (2n)^{x_i}} \quad \text{e então}$$

$$f(x_1, \dots, x_n | \psi) \cdot h(\psi) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\psi/2n} \cdot (\psi/2n)^{x_i}}{x_i! \cdot (\psi/2n)^{1/2}} = \frac{e^{-\psi/2} \cdot (\psi/2n)^{(\sum x_i) - 1/2}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$\int_0^{\infty} f(x_1, \dots, x_n | \psi) \cdot h(\psi) d\psi = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \int_0^{\infty} e^{-\psi/2} \cdot \left(\frac{\psi}{2n}\right)^{(\sum x_i) - 1/2} d\psi$$

Assim, a posterior de $\psi = 2n\theta$ é dada por

$$h(\psi | x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{-\psi/2} \cdot (\psi/2n)^{(\sum x_i) - 1/2}}{\int_0^{\infty} e^{-\psi/2} \cdot \left(\frac{\psi}{2n}\right)^{(\sum x_i) - 1/2} d\psi} =$$

$$\frac{e^{-\psi/2} \cdot \psi^{(\sum x_i) - 1/2}}{\int_0^{\infty} e^{-\psi/2} \cdot \psi^{(\sum x_i) - 1/2} d\psi}$$

⑥ Considere um teste bayesiano com $H_0: \theta \geq \theta_0$
e $H_1: \theta < \theta_0$, ou seja, $H_0: \psi \geq 2n\theta_0$ e $H_1: \psi < 2n\theta_0$.

Rejeitamos a hipótese nula se

$IP(\psi < 2n\theta_0 | x_1, \dots, x_n) > IP(\psi \geq 2n\theta_0 | x_1, \dots, x_n)$, ou

seja, se $IP(\psi < 2n\theta_0 | x_1, \dots, x_n) > 1/2$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Assim, a região de rejeição é

$$RC = \{ (x_1, \dots, x_n) : \int_0^{2n\theta_0} \frac{e^{-\psi/2} \cdot \psi^{(2n-1)/2}}{\left(\int_0^\infty e^{-\psi/2} \cdot \psi^{(2n-1)/2} d\psi \right)} d\psi > \frac{1}{2} \}$$

$$RC = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \int_0^{2n\theta_0} \frac{e^{-\psi/2} \cdot \psi^{(2n-1)/2}}{\left(\int_0^\infty e^{-\psi/2} \cdot \psi^{(2n-1)/2} d\psi \right)} d\psi > \frac{1}{2} \right\}$$