



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Teorema da Função Implícita e Inversa

Até aqui assumimos que já foi dada a forma do Teorema para uma função $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável

No caso do teorema da função implícita e inversa, são ambas casos particulares do teorema da regra da cadeia a seguir.

Teorema: Seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ duas funções definidas em abertos U e V respectivamente, tal que $f(U) \subset V$ e f diferenciável num ponto $a \in U$ e g diferenciável em $f(a)$, temos que $g \circ f$ é diferenciável em a e

$$D(g \circ f)_a = Dg_{f(a)} Df_a.$$

dem Para provar isto basta ver que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - Dg_{f(a)} Df_a h|}{|h|} \rightarrow 0$$

Logo se $k = f(a+h) - f(a)$, vale que $k \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$

$$g(f(a+h) - f(a) + f(a)) - g(f(a)) - Dg_{f(a)} Df_a h$$

$$\Rightarrow \frac{g(k + f(a)) - g(f(a)) - Dg_{f(a)} k + Dg_{f(a)} k - Dg_{f(a)} Df_a h}{k h}$$

O primeiro termo converge para zero quando $k \rightarrow 0$
Por g é diferenciável em $f(a)$



$$\frac{\text{logo } -Dg_{f(a)} \frac{Df_a h + Dg_{f(a)} (f(a+h) - f(a))}{h}}{h} \cdot k$$

converge para zero pois $Dg_{f(a)}$ é um op linear limitado em uma bola e

$$Dg_{f(a)} \left(\frac{-Df_a h + f(a+h) - f(a)}{h} \right) \rightarrow 0.$$

Claramente o teorema da regra da cadeia se dá numa boa ideia de que se existir a inversa de uma função f , denominamos f^{-1} , e for diferenciável, então o seu diferencial está dado por

$$Df_{f(a)}^{-1} Df_a = D_{f \circ f^{-1}} = D\hat{I} = I.$$

$$Df_{f(a)}^{-1} = (Df_a)^{-1}.$$

logo

• Mas o teorema da função inversa diz ainda mais, diz que se o diferencial for não nulo num ponto, a função vai se comportar parecido a ele e por isso vai ser invertível num entorno suf pequeno.

sob sua
imagem.



Lema: Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dif num ponto a com df_a ~~invertível~~ invertível, então existe um entorno de a tal que

Para uma $c > 0$ $|f(x) - f(y)| > C|x - y|$ $\forall x, y \in U_a$.

den claramente isto é satisfeito se temos
= que $E = df_a$ logo $|df_a x - df_a y| > \min |e_i| |x - y|$

logo vemos ver que é satisfeito por um $M = F - E$
numa bola pequena ao redor de x .

Como $DH_a = 0$, temos que, pelo teorema do valor
médio, ~~para~~ x, y estão em uma bola ao
redor de a tal que para todo c na bola

$$|DH_c| < \frac{\min |e_i|}{2} \quad \text{e} \quad |x - y|$$

temos que

~~$$|f(x) - f(y)| + |E(x) - E(y)|$$~~

$$|x - y| \frac{\min |e_i|}{2} > |E(x) - E(y)| - |f(x) - f(y)|$$

$$|f(x) - f(y)| > ~~|E(x) - E(y)|~~ |x - y|$$

C





Teorema da função inversa:

Seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua e diferenciável num ponto $a \in U$ tal que Df_a é invertível logo existe f^{-1} em $f(U) = V$ e a diferencial em $f(a)$ está dada por

$$Df_{f(a)}^{-1} = (Df_a)^{-1}.$$

deveremos ver que $f(U)$ é aberto. seja $b \in f(U)$
 $\rightarrow \exists c: f(c) = b$, consideramos Q um retângulo fechado ao redor de c tal que c não pertence à fronteira de Q , consideramos δ suf. pequeno tal que $B_\delta(b) \cap \partial f(Q) = \emptyset$.

Queremos ver que $B_\delta(b) \subset V$, seja $y \in B_\delta(b)$

definimos $g(x) = \sum_{i=1}^m (f_i(x) - y_i)^2$ é contínua e tem um mínimo dentro de Q pois $g(b) < \delta$ e $g(x) > \delta$ se $x \in \partial Q$ e Q é compacto, logo $\exists x_0$:

$$g'(x_0) = 2 \sum_{i=1}^m (f_i(x_0) - y_i) f'_i(x_0) = 0.$$

mas $f(x_0) \neq y$, logo $f(x_0) = y$ e $f(U)$ é aberto.

Logo pelo lema anterior temos que f é injetora, e $f^{-1}: f(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua e a prova de que $Df_{f(a)}^{-1} = (Df_a)^{-1}$ segue da regra da cadeia.



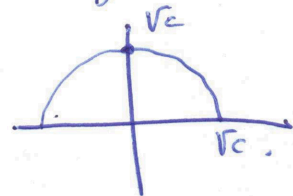
CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Novamente para medir o terreno da função implícita usaremos o Rgra da cadeia, a pergunta agora é quando uma função do tipo

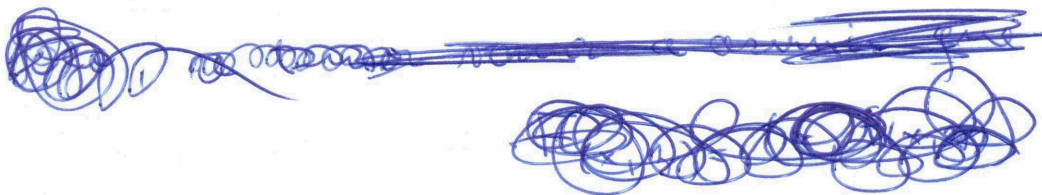
$$F(x, y) = x^2 + y^2 - c$$

pode ser descrita do jeito tal que y seja uma função de x . Neste caso do círculo, se $y \neq 0$ temos que

$$y = \pm \sqrt{c - x^2}$$



vale observar que quando $y \neq 0$ o gráfico da f não descreve uma função pois em $y=0$ temos o ponto $(\sqrt{c}, 0)$.



Teremos da função implícita.

Seja $f: U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em (x_0, y_0) tal que $F(x_0, y_0) = 0$ com $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ logo existe um entorno U_{x_0} tal que $y: U_{x_0} \rightarrow V$ e

$$f(x, y) = f(x, g(x))$$



dem Para esta prova vamos definir uma
função $F(x, y) = (x, f(x, y))$

tem diferencial em (x_0, y_0)

$$DF_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \end{pmatrix}$$

é invertível em (x_0, y_0) pois $\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$ logo existe
 G tal que

$$G \circ F(x, y) = (x, y)$$

$$G(x, f(x, y)) = (x, y)$$

logo a primeira coordenada de G é fixa e existe uma
função g tal que

$$G(x, z) = (x, g(x, z))$$

$$\text{em particular } G(x, 0) = (x, g(x, 0))$$

$$\text{logo } f(x_0, g(x_0, 0)) = 0$$

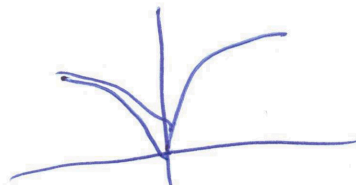
$$F(x_0, g(x_0, 0)) = (x_0, f(x_0, g(x_0, 0)))$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Vale destacar que os regradados podem ser vistos
como uma função de x mas não necessariamente
é diferenciável.

Ex: $f(x, y) = x^2 - y^2$



↙
é a curva de nível para
 $f(x, y) = 0$.



Função harmônica.

Dizemos que uma função $u: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica ^{em U} se satisfaz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad \text{em } U \subset \mathbb{R}^2.$$

Em particular esta definição pode ser estendida para $\mathbb{R}^n$ mediante a notação do Laplaciano.

$$\Delta u = 0$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Em particular é mais interessante ao plano complexo o teorema que $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser descrito como a soma de duas funções $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que simbolizem a parte real e imaginária de f .

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y).$$

Este é um caso particular de função harmônica ou para o caso quando f é analítica em um domínio U . Para se lembrarmos das condições de Cauchy Riemann.



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$



Temoz que de fato .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

def dizemos que ~~u~~ v e a ~~conjugada~~ função conjugada
a u se $f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$ é analítica,

A pergunta seria quando uma função u tem
uma função conjugada v ?
Temoz que o fato de ser harmônica é suficiente.

Proposição: Seja $u: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica então
tem uma função conjugada.

dem basta ver que

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \int_0^x u_y(t,y) dt + \varphi(y).$$

$$\text{logo } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \int_0^x u_{yy}(t,y) dt +$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \int_0^x u_{yx}(t,y) dt \quad \text{logo}$$

$u_{yx} = u_{xy}$



Dizemos que u satisfaz a propriedade do valor principal se existe um a tal que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{it}) dt.$$

~~É~~ É fácil ver que de fato uma função harmônica satisfaz a propriedade do valor principal.

Para isto vale a pena lembrar o Teorema da integral de Cauchy.

(Cauchy) Teorema: Seja $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ def num ~~conjunto~~ ^{simplemente conexo e fechado G} de $\mathbb{C}$ analítica logo se γ é um círculo ao redor de a .

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz. \quad \forall a \in U.$$

em particular esta fórmula permite expressar f como uma função infinitamente diferenciável.

~~A~~ A prova do teorema de Cauchy não é a base desta aula, basta ver aulas anteriores, Mas vá ver ~~a~~ importante para o seguinte resultado.

Teorema da Média: Se $u: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica, então satisfaz a propriedade



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

dem Para a prova basta ter que existe
uma função analítica $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal
que $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$, mas como
 u é dita harmônica isto é satisfeito, logo
se aplica o Teorema da integral de Cauchy
à f e daí basta considerar a parte
Real ~~no~~ no lado esquerdo da igualdade

O fato curioso que este resultado nos oferece
é que as funções harmônicas mostram certa
uniformidade num entorno do valor principal, e
de fato o que o seguinte resultado diz é que
se ela atingir um ponto crítico, então este
deve se encontrar na fronteira do conjunto.

G simplesmente conexo e fechado

Teorema: Seja $u: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica, e existe
 $a \in G$ tal que $u(x) \leq u(a)$ para todo $x \in G$, logo
a pertence à fronteira de G .

dem vamos ~~mostrar~~ pegar o conjunto

$$A = \{z \in G: u(z) = u(a)\}$$

e vamos supor que existe $z_0 \in A$ tal que
se encontra no interior de G .



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

mas como é um ponto crítico.

$$u(z) \leq u(z_0) \quad \forall z \in G$$

logo podemos considerar $b \in G$ tal que

$$u(b) < u(z_0).$$

e em particular existe uma bola tal que

$$u(z) < u(z_0) \quad \forall z \in B(b, \delta).$$

Se considerarmos $\rho = |z_0 - b|$

temos que para um intervalo de t o elemento

$$z = z_0 + \rho e^{it} \in B(b, \delta).$$

logo
$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it}) dt < u(a)$$

pois $u(z_0 + \rho e^{it}) < u(a)$.

logo é um absurdo e $a \in \partial G$

~~Em~~ Em particular este tipo de resultado tem muita utilidade em equações diferenciais, ajudam a determinar a unicidade das soluções no bordo já se anulam -



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Exemplo: temos a equação de Laplace com bordo

$$(1) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } G. \\ u|_{\partial G} = f \end{cases} \quad \text{tem solução única.}$$

Sup que existem u_1 e u_2 tal que satisfazem (1), logo.

$u_1 - u_2$ resolve a equação

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial G} = 0 \end{cases}$$

Pelo como o valor na fronteira é máxima temos que necessariamente $u_1 = u_2$ e a solução é única.

Finalmente //



Teoria de Galois.

Nesta aula intentaremos ~~relacionar~~ relacionar os elementos do grupo de automorfismos que deixam fixo um subcorpo com os possíveis subcorpos.

Def definir o grupo de Galois para um corpo K e um subcorpo $E \subset K$ como sendo

$$\text{Gal}(K|E) = \{ \varphi \in \text{Aut}(K) : \varphi(a) = a \ \forall a \in E \}$$

em particular se considerarmos K como sendo uma extensão normal de um corpo E teremos o seguinte resultado.

Teorema : Seja E um corpo de característica zero e K uma extensão normal simples então existe uma correspondência entre

$$E \longmapsto \text{Gal}(K|E)$$

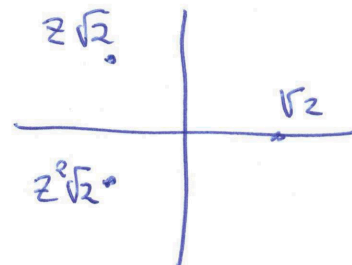
que é invertível.

$$\begin{array}{c} H \\ \uparrow \\ \text{sg de automorfismos} \end{array} \longrightarrow \{ x \in K : \varphi x = x \ \varphi \in H \}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 377/2022

Ex: Vamos considerar o Polinômio $f(x) = x^3 - 2$
tem como raízes $\sqrt[3]{2}$, $\omega\sqrt[3]{2}$, $\omega^2\sqrt[3]{2}$
onde ω é unitário e vamos
ter que as primeiras
extensões de $\mathbb{Q}$ não dados
por



$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$$\mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2}) = \{a + b\omega\sqrt[3]{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$\vdots$

etc, onde a extensão normal é gerada por

$\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{2})$, tem todas as raízes do polinômio

e por outro lado temos o subgrupo de automor-
fismos que fixam algum destes extensões, mas
isto vai depender se fixam as raízes do polinômio

Podemos encontrar uma φ_i tal que

- $\varphi_i(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$ e $\varphi_i(\omega) = \omega^2$
- $\varphi = \text{id}$
- $\varphi(\omega^2\sqrt[3]{2}) = \omega^2\sqrt[3]{2}$ e $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$
- $\varphi(\omega) = \omega^2$ e $\varphi(\omega^2) = \omega$
- $\varphi(\omega\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$ e $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \omega^2\sqrt[3]{2}$
- $\varphi(\omega^2\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$

são S_3
o grupo de
Permutações
de dois
elementos.