



### Q1. Função Inversa

Considere  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função. Será possível definir sua inversa?  $f^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ ?

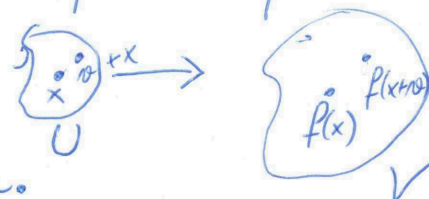
Claramente, se  $m < n$ , a resposta é não. Se  $m > n$ , pense como a função de Peano  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua sobre curvas desconforto.

O teorema da função inversa foca no caso  $f$  contínua diferenciável (pode - ser enrijecida), onde  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

~~Atenção:~~

Teorema 1: Considere  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; com  $f$  contínua e diferenciável; seja  $x \in U$  e considere  $Df(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz  $n \times n$  dos derivados de  $f$ . Se  $\det(Df(x)) \neq 0$ , então  $\exists V \subset \mathbb{R}^n$  um abertinho, onde  $f(x) \in V$ ; de forma que

$\exists f^{-1}: V \rightarrow U$  contínua em  $f(x)$ .



Prova: <sup>Idéia</sup> Fixe  $Df(x)$  uma matriz numérica.

a) Use Taylor  $f(x + \vec{v}) = f(x) + Df(x) \cdot \vec{v} + r(\vec{v})$ ; onde  $\frac{r(\vec{v})}{\|\vec{v}\|}$  é pequeno.



3) Caso 1; se  $\pi(v) = 0$  em um aberto  $V \Rightarrow f$  é linear ~~em~~

4) Caso 2;  $\pi(v) \neq 0$  em um aberto  $V$  ao  
redor de  $f(x)$ .

$$f(x) = Ax + b$$

$$\text{onde } A = Df.$$

$$\text{e } \det A \neq 0$$

$$\Rightarrow f \text{ invertível.}$$

Basta mostrar que,  $\exists V$  aberto em  $x$  onde

$f$  é injetiva. Para isso Taylor,  $\vec{v}, \vec{w}$  unitários

(aqui  $\pi$   
 $f$  não é bom)

$$f(x + \pi \vec{v}) - f(x + \pi \vec{w}) = Df(x) \cdot (\pi(\vec{v} - \vec{w})) + \underbrace{\pi(\pi \vec{v}) - \pi(\pi \vec{w})}_{\uparrow \text{ resto}}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x + \pi \vec{v}) - f(x + \pi \vec{w})}{\pi} = Df(x) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) + \underbrace{\pi(\pi \vec{v}) - \pi(\pi \vec{w})}_{\pi \|\vec{v}\|}$$

"1" =  $\|\vec{w}\|$

$\Rightarrow$  Como  $Df$  é fixo!;  $\det Df \neq 0$

$$+ \frac{\pi(\pi \vec{v}) - \pi(\pi \vec{w})}{\pi} \rightarrow 0 \text{ quando } \pi \rightarrow 0.$$

é possível de encontrar o aberto  $V$  onde começa a ser  
injetiva  $\Rightarrow f^{-1}$  existe.   
e é contínua em  $f(x)$ .



Bom... falta algumas coisas, não só  $f^{-1}$  existe  
como:

Cordário; Nas mesmas condições do Teo 1.  $Df^{-1}(x)$  existe  
e:  $D(f^{-1})(x) = [Df(x)]^{-1}$

Prova: Usando Taylor:

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x + Df \cdot v) + r(v)}{|v|} = \frac{\cancel{Df \cdot v} + r(v)}{|v|}$$

$$\Rightarrow D(f^{-1})(x) \text{ existe e } \forall v: D(f^{-1})(x) = (Df)^{-1} \cdot v \blacksquare$$

Obs.: Enfraquecer  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  é ok, mas o "truque"  
a mágica é Taylor local, ou: "lá pertinho  $f$  é um  
planinho da derivada".

### Função Implícita

O que dá para falar sobre  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   
contínua, ou até diferenciável? Será que existe  $f^{-1}$ ?  
Como é essa função?





troquei a dimensão

(A questão agora não é  $f^{-1}$ ; mas sim se localmente consegue-se)

Se  $m < n$ ; muita coisa pode acontecer; mas se  $m \geq n$ ; como:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ou similares  
 $(x, y) \mapsto (x, F(x, y))$

temos essa imagem do espaço se "dobrando" em  $\mathbb{R}^3$ ,  
gerando curvas de nível; e é sobre isso o teorema  
da função implícita.

Teo.: Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , diferenciável.  
e contínua em  $x$ . onde  $Df(x)$  é uma matriz  
 $m \times m+n$ . Construída em blocos

$\Rightarrow x = (x_1, \dots, x_m)$   $\begin{matrix} m \\ \text{[A | B]} \\ m+n \end{matrix}$   
Se  $f(x) = a$ ,  $\text{Det } B \neq 0$ ;  $\exists g$  contínua tal que  
 $g: V \subset \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f(x_1, \dots, x_m, g(y_1, \dots, y_{m-1})) = a$   
 $\forall (y_1, \dots, y_{m-1}) \in V$ .



Prova: não lembro, vou provar  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e depois  
ponto  $m$  e  $m$ . E, bom, a matriz  $Df$  tem que ser  
desposta onde  $Df \cdot v$  faça sentido para  $v \in \mathbb{R}^2$ .

1º tome Taylor em  $x$ : temos

$$f(x + \vec{v}) = f(x) + Df \cdot \vec{v} + r(\vec{v}).$$

2º Como  $r(\vec{v}) = 0$ ,  $f$  linear de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
então  $f(U)$  é um subespaço. Como  $\det B \neq 0$ , o  
subespaço é não degenerado. Isso é:  $(Df \neq 0)$ , o  
 $\mathbb{R}^3$  a primeira coordenada, temos um planinho nos  
outros.

A primeira coordenada é um sistema linear,

Teo:  $f: U \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  dif. em  $x$ .

$$Df(x) = \left[ A \mid B \right] \quad ; \quad B \text{ uma matriz } n \times m$$

$m+m \times m$

Se  $\det B \neq 0$





$$\exists g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tal que } f(x) = f(x_1, \dots, x_m, g(x_1, \dots, x_m))$$
$$(\forall y \in V) \quad \forall (x_1, \dots, x_m) \in V.$$

Ideia da prova: Bom suponha Taylor e  $r(r) = 0$   
 $\Rightarrow$  linear.

$$f(x+r) = f(x) + Df \cdot r \quad ; \text{ onde } Df = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}_m^m$$

$$\text{e } r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} \begin{matrix} s_m \\ s_m \end{matrix}$$

$$Df \cdot r = A \cdot r_x + B r_y$$

$$\Rightarrow \text{tomando } r_y = -B^{-1} A r_x$$

~~(Existe uma g:  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ )~~ segue que

$$f(x + [r_x, -B^{-1} A r_x]) = f(x) \quad ; \quad \forall r_x \in \mathbb{R}^m$$

com isso temos  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  onde

$$f(x_1, \dots, x_m, g(x_1, \dots, x_m)) = f(x). \blacksquare$$

Emblei o enunciado; confundi as coisas. Cada  $r(r) \neq 0$  é  
FAVOR **NÃO** ESCREVER NO VERSO!  
**NÃO** ULTRAPASSAR A LINHA DA MARGEM! aplicar limites.



## Q.2. Teorema da Média e Princípio do Máximo.

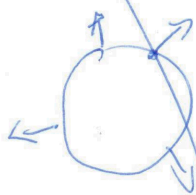
$$f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x) + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} f(x)$$

Def  $f$  é harmônica se  $\Delta f(x) = 0$ .

||  
Bom observe usando divergente (que é con. por)

$$0 = \int_{\partial B(x,r)} \Delta f(z) dz = \frac{\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial f(x+r\theta)}{\partial r} dp d\theta}{\text{Vol } B(x,r)}$$



$$= \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dS^{m-1}$$

Se  $Df(x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0$  em um aberto  $\Rightarrow \int_A \Delta f dz \neq 0$   
 $\hookrightarrow$  contínua

$\Rightarrow$  Derivando em  $r$ ; o tamanho da bola:



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM  
EDITAL 377/2022

Sei que  $\int \Delta f \, dv = 0$ ; uma vez que  $\Delta f = 0$ .

$$\frac{2}{\partial \pi} \left[ \int_{B(0,n)} \Delta f \, dv \right] = 0.$$

$$\Rightarrow \left( \int_{B(0,n)} \Delta \left[ \frac{f(x + \frac{x}{n}) - f(x)}{\epsilon} \right] \right) = \int_{B(0,n)} \Delta f \, dv - \int_{B(0,h+n)} \Delta f \, dv$$

$h$

Teorema: \*  $f$  harmônica  $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\text{Vol}(\partial B(x,n)) \partial B(x,n)} \int f(z) \, dz$

é a media dos valores da fronteira.

$$\left( \int_{\partial B(x,n)} f(z) \, dz = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(\partial B(x,n))} \int_{\partial B(x,n)} f(z) \, dz \right)$$

a prova é aplicar um teorema de gauss para relacionar a função na fronteira com  $\int \Delta f$  no





Teo (Máximo).  $f$  harmonica  $\Rightarrow \left( \max_{x \in \overline{D(a,r)}} f(x) \right) = \max_{x \in D} f(x)$  ||  
 $\max_{x \in \partial D} f(x)$ .

o máximo tá na fronteira.

Aplicação. Seja um caminho aleatório em  $S(\mathbb{Z}^2)$ .

temos que  $u_t(x) = P(\xi_t = x \mid \xi_0 = 0)$

temos que  $u_t(x) = \sum_{y \sim x} \frac{1}{4} \cdot u_{t-1}(y)$

Q3. Galois

Ex: Considere  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ , que é o <sup>menor</sup> corpo que contém  $\mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$ .

A teoria de galois relaciona os subgrupos de  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$  com subgrupos de automorfismos.

Em particular  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$  é o corpo gerado pelos  
raízes de  $(x^2-3)(x^2-2)$  que é um poli. irredutível sobre  
 $\mathbb{Q}$ , e tem todas suas raízes em  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ .



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM  
EDITAL 377/2022

O grupo de automorfismo das raízes das polinômicas tem 4 elementos

$$\sigma_1(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$$\sigma_2(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$$\sigma_3(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}) \rightarrow \text{identidade}$$

$$\sigma_4(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

O grupo de Galois então tem 4 elementos. um corresponde para cada  $\sigma_i$ .

Dessa forma, Galois constrói uma relação entre os automorfismo das (poli)raízes das polinômicas para os corpos:

