



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

SEJA A UMA MATRIZ $n \times n$. VAMOS DENOTAR POR $A \geq 0$ QUANDO TODAS AS SUAS ENTRADAS SÃO NÃO-NEGATIVAS. NESSE CASO, DIZEMOS QUE A É NÃO-NEGATIVA E DENOTAMOS $A \geq 0$. DEFINIÇÃO ANALÓGICA PARA DIZER QUE A É POSITIVA, COM NOTAÇÃO $A > 0$.

NA ALGUMAS PROPRIEDADES DA FÁCIL CONSTATAÇÃO, COMO POR EXEMPLO, SE $A = A_{n \times n} \geq 0$ E $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$, ENTÃO $Ax \geq 0$. SE $A \geq 0$ COM $A \neq 0$ E $x \geq 0$ COM $x \neq 0$ ENTÃO $Ax > 0$.

SE A, B SÃO MATRIZES $n \times n$, POR $A > B$ QUEREMOS ~~DEMONSTRAR~~ DIZER QUE $A - B > 0$. NESSE CENÁRIO TEMOS O CLÁSSICO TEOREMA DE PERRON:

TEOREMA DE PERRON: SEJA $A \geq 0$. DENOTAMOS $r = \rho(A)$ = RAIO ESPECTRAL DE A . ENTÃO:
① $r > 0$, $r \in \sigma(A)$ = ESPECTRO DE A , TAMBÉM, r TEM MULT. ALGÉBRICA IGUAL A 1.
② EXISTE $x > 0$ TAL QUE $Ax = rx$. DAQUI, PODEMOS DEFINIR ÚNICO VETOR $p > 0$ TAL QUE $Ap = rp$ E $\|p\|_1 = 1$. NÃO EXISTEM OU-



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

TROS AUTOVETORES DE A QUE SEJAM
NÃO-NEGATIVOS QUE NÃO SÓ MÚLTIPLOS
POSITIVOS DE p .

(3) VALE QUE $r = \max_{x \in N} f(x)$, ONDE
 $f(x) = \min_{\substack{1 \leq j \leq m \\ x_j \neq 0}} \frac{[Ax]_j}{[x]_j}$ E $N = \{x \geq 0, x \neq 0\}$.

(4) r É O ÚNICO AUTOVALAR DO CÍRCULO ESPECTRAL.

ACIMA, r É CONHECIDO COMO A
RAIZ DE PERRON E p O VETOR DE PERRON.
A DEMONSTRAÇÃO DESSE TEOREMA ENVOLVE
APENAS TÉCNICAS BÁSICAS DE ÁLGEBRA
LINEAR. O TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS
É A EXTENSÃO DESSE RESULTADO PARA
MATRIZES $A \geq 0$.

VEREMOS PRINCIPALMENTE O QUE
É POSSÍVEL ESTABELECE COM OS RESULTADOS
DE CONVERGÊNCIA CLÁSSICOS DE $\mathbb{R}^m$.

SEJA $A \geq 0$ E TOMAMOS $E > 0$
UMA MATRIZ QUALQUER, FIXA. DEFINIMOS

$$A_k = A + \frac{1}{k} E > 0.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

É RESULTEADO QUE $0 \leq A < B \Rightarrow 0 \leq p(A) < p(B)$. Assim, como tem-se

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_k > \dots > A$$

SEGUER QUE

$$p(A_1) > p(A_2) > \dots > p(A_k) > \dots > p(A)$$

OU SEJA, A SEQUENCIA $\pi_i = p(A_i)$ É MONÓTONA E LTDA, PORTANTO $\pi_i \rightarrow \pi^*$.

NOTAMOS QUE $\pi_i \geq \pi$, $\forall i \geq 1 \Rightarrow \pi^* \geq \pi$.

TAMBÉM, PARA CADA π_i PODEMOS ASSO-

CIAO SEU VECOR DE PERRON $p_i : A_i p_i = \pi_i p_i$

ONDE $\|p_i\|_1 = 1$. Assim, POR COMPACIDADE,

EXISTE SUBSEQUENCIA TAL QUE $p_k \rightarrow z$,

ONDE $z \geq 0$ POIS $p_k \geq 0$. AINDA, $z \neq 0$,

POIS $\|p_k\|_1 = 1 \Rightarrow \|z\|_1 = 1$, POR CONTINUI-

DADE DA NORMA ℓ^1 . Assim,

$$Az = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k p_k$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi_k p_k = \pi z$$

OU SEJA, $\pi^* \in \sigma(A) \Rightarrow \pi^* \leq \pi \Rightarrow \pi^* = \pi$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Por fim, note que para η_k o vetor de Perron de $A_{\eta_k}^T$ tem-se para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$\eta_k^T x f(x) \leq A \eta_k \leq A_{\eta_k} \eta_k$$

$$\Rightarrow \underbrace{\eta_k^T x f(x)}_{\neq 0 \text{ PROP. DA } \eta_k \text{ INTROD.}} \leq \eta_k^T A \eta_k \leq \eta_k^T A \eta_k = (A^T \eta_k)^T \eta_k = \underbrace{\eta_k^T \eta_k}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \leq \eta$$

Também, $f(z) = \eta$ por cálculos diretos, logo:

Teorema: Se $A \geq 0$. Então

① $\eta \in \sigma(A)$ porém $\eta = 0$ é possível.

② Existe $\eta > 0$ tal que $A \eta = \eta \eta$, $\eta \neq 0$.

③ Vale o item ③ do Teorema de Perron.

Essa é a maior extensão que podemos fazer para matrizes ≥ 0 sem adição de novas hipóteses, pois considerando por exemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$





CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

TEM-SE TODAS $\neq 0$ PORÉM ALGUMAS PROPRIEDADES DO TEOREMA DE PERRON SÃO VÁLIDAS, OUTRAS NÃO. EM PARTICULAR, AS DUAS ÚLTIMAS SUGEREM UMA SURPRESA: UMA DELAS ADMITE VÁRIAS DAS PROP. DO TEOREMA DE PERRON, EXCETO (4), A SABER, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, E $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ NÃO. ISSO DIZ QUE NÃO SÓ OS ELEMENTOS NULOS CAUSAM PROBLEMAS COMO CAMPAÑAS SUAS POSIÇÕES.

DIZEMOS QUE UMA MATRIZ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ É REDUTÍVEL QUANDO EXISTE PERMUTAÇÃO DE LINHAS P TAL QUE $PA P^T$ É DA FORMA $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, ONDE X E Z SÃO QUADRADAS. A OPERAÇÃO $PA P^T$ TROCA DA MESMA FORMA LINHAS E COLUMNS DE A .

ESSA DEFINIÇÃO COMEÇA A FAZER MAIOR SENTIDO (~~QUANDO ESTUDAMOS~~) PARA O CASO QUANDO ESTUDAMOS ALGUMAS DE SUAS EQUI-VALENCIAS. SE $A \neq 0$ NÃO É REDUTÍVEL DIZEMOS QUE A É IRREDUTÍVEL. ⁶



ASSOCIADO A UMA MATRIZ $A \geq 0$
 $n \times n$
TEM-SE SEU GRAFO $g(A)$ FORMADO
DOS n NÓS ONDE HÁ UMA ARESTA DI-
RECIONADA DE m_i PARA m_j SE E SÓ
SE $a_{ij} \neq 0$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$. VERIFICA-SE QUE
 $A \geq 0$ É IRREDUTÍVEL SE, E SOMEN-
TE SE, $g(A)$ É FORTEMENTE CONEXO,
QUE QUER DIZER QUE EXISTE CAMINHO
DE $K \rightarrow M$ POR ARESTAS DIREC.
CONECTANDO QUAL-
QUER DOS NÓS. ESSA INFORMAÇÃO CRU-
CIAL É QUE ESSE CAMINHO DEVE TER ENTRE
 1 E $n-1$ NÓS.

O PRÓXIMO TEOREMA NOS DÁ UMA
~~REPRESENTAÇÃO~~ FORMA EFICAZ
DE CONSTRUIR UMA MATRIZ POSITIVA.

TEOREMA: SEJA $A \geq 0$ IRREDUTÍVEL. ENTÃO
 $B = (A + I)^{n-1} > 0$.

DEM: SEJA $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$,

$$A^k = [a_{ij}] \cdot \underbrace{\dots}_{k \text{ VEZES}} [a_{ij}] = [a_{ij}^{(k)}],$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

ONDE

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^k \binom{k}{\lambda} a_{i h_1} a_{h_1 h_2} a_{h_2 h_3} \dots a_{h_{k-1} j}$$

Assim,

$$[(A+I)^{n-1}]_{ij} = \left[\sum_{\lambda=1}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} A^{\lambda} \right]_{ij}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} a_{ij}^{(\lambda)} > 0$$

POIS A INTERPRETAÇÃO DESSA SOMA É QUE ESTAMOS PERCORRENDO POR TODOS OS CAMINHOS CONECTANDO m_i A m_j E UM DELES É FORMADO POR ~~DEZES~~ FATORES POSITIVOS.

Por fim, enunciaremos o teorema:

TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS: SEJA A O IRREDUTÍVEL. ENTÃO

① $\rho(A) > 0$, $\rho(A) \in \sigma(A)$ E TEM MULT. ALGÉBRICA 1.

② Existe $p > 0$ tal que $A p = \rho(A) p$ E $\|p\|_1 = 1$.
A NÃO ADMITE OUTROS AUTOVECTORES NÃO 8

FAVOR NÃO ESCREVER NO VERSO!
NÃO ULTRAPASSAR A LINHA DA MARGEM!

A



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

NEGATIVOS QUE SÃO OS MÚLTIPLOS POSI-
TIVOS DE P , INTERPRETANDO O SIGNI-
FICADO

③ VALE O ITEM ③ DO TEOREMA DE PERRON.

DEM: BASTA PROVAR QUE EXISTE $\alpha > 0$
TAL QUE $A\alpha = \alpha A$ E QUE MULTIPLI-
CADA ALGÉBRICA DE α É 1. PROVARE-
MOS ISSO VIA RELAÇÃO 1:1 ENTRE AUTOVALORES
E AUTOVECTORES DE A E $(A+I)^{n-1} > 0$. SE
 λ É AUTOVALOR DE A ASSOCIADO AO AUTOVECTOR α
ENTÃO PARA f REGULAR, $f(\lambda)$ É AUTOVALOR AS-
SOCIADO TAMBÉM AO AUTOVECTOR α PARA $f(A)$, ONDE
CONSIDERANDO A DECOMPOSIÇÃO DE JORDAN
 $A = PJP^{-1}$,

$$f(A) = P f(J) P^{-1}$$

com

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Assim, se $P_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n_0} (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$ É O POLINÔMIO
CARACTERÍSTICO DE A ENTÃO $\prod_{j=1}^{n_0} (\lambda - f(\lambda_j))^{k_j}$ É
O POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DE $f(A)$, DAQUI

✍



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

SEQUEM RELAÇÃO PARA AUTOVALORES E
MULTIPLICIDADE ALGÉBRICA. TOMEMOS $f(s) = (s+1)^{n-1}$
E SEJA $\mu = \rho((A+I)^{n-1}) > 0$. TEMOS

$$\begin{aligned}\mu &= \max_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)| \\ &= \left[\max_{\lambda \in \sigma(A)} |1 + \lambda| \right]^{n-1} \\ &= |1 + \lambda|^{n-1}\end{aligned}$$

LOGO, λ TEM MULTIPLICIDADE ALGÉBRICA
1, POIS ISSO OCORRE COM μ PELO
TEOREMA DE PERRON. TAMBÉM, TEM-SE
 $(A+I)^{n-1}x = \mu x \rightarrow x > 0$ PELO TEORE-
MA DE PERRON.

POR FIM, ~~A~~ $\lambda > 0$ POIS $\lambda = 0$ IMPLI-
CA $Ax = 0$ E COMO $A \geq 0$ (E $A \neq 0$
POIS É REDUTÍVEL) E $x > 0 \Rightarrow Ax > 0$.

ESSE É O TEOREMA DE PERRON-
FROBENIUS, QUE TEM APLICAÇÕES IM-



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

POSSANÇAS NA TEORIA ELEMENTAR, POR
EXEMPLO, EM SISTEMAS DINÂMICOS.
TAMBÉM É FÁCIL ENCONTRAR NA
LITERATURA APLICAÇÕES EM ECONOMIA,
ECOLOGIA, ETC.



SÉRIES DE FOURIER

ESTAMOS INTERESSADOS EM REPRESENTAR
UMA FUNÇÃO $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ^{periódica} DE PERÍODO $T=1$ COMO
A SOMA DE FUNÇÕES SIMPLES, DIGAMOS

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x).$$

SEJA $f \in L^1([0,1]/\mathbb{Z}) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ PERIÓDICA DE PERÍODO
 $T=1$ E EM $L^1([0,1])$. DEFINIMOS SUA TRANSFORMADA
DE FOURIER POR

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

TEOROS O SEGUINTE LEMA:

LEMA DE RIEMANN-LIEBESGUE: COMO ACIMA,
TEM-SE $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$.

DEM: CONSIDEREMOS PARA UMA FUNÇÃO
CARACTERÍSTICA, PRIMEIRAMENTE:

$$f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]} = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{f}(k) &= \int_a^b e^{-2\pi i k x} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi i k} \Big|_a^b = o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \begin{matrix} |k| \rightarrow +\infty \\ \rightarrow 0 \end{matrix}\end{aligned}$$

Como funções indicadoras são densas em $L^1([0,1])$, existe sequência f_n de funções simples tais que $\|f - f_n\|_1 \rightarrow 0$, tem-se

$$\begin{aligned}|\hat{f}(k)| &= \left| \widehat{f - f_n}(k) + \hat{f}_n(k) \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 (f - f_n) e^{-2\pi i k x} dx \right| + |\hat{f}_n(k)| \\ &\leq \int_0^1 |f - f_n| dx + |\hat{f}_n(k)|. \quad \square \\ &\quad \rightarrow 0 \qquad \qquad \qquad \rightarrow 0\end{aligned}$$

Em $L^2([0,1])$ consideramos o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g$$

$$\text{Notemos que } \langle e^{-2\pi i k x}, e^{-2\pi i l x} \rangle = \delta_{kl}.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

A fim de representar f como

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)$$

usamos

$$\cos(2n\pi x) = \frac{e^{2in\pi x} + e^{-2in\pi x}}{2}$$

$$\sin(2n\pi x) = \frac{e^{2in\pi x} - e^{-2in\pi x}}{2i}$$

donde

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m e^{2in\pi x}$$

com as relações

$$c_m = \frac{a_m}{2} + \frac{b_m}{2i}, \quad m \geq 1$$

$$c_{-m} = \frac{a_m}{2} - \frac{b_m}{2i}, \quad m \geq 1.$$

Assim, para $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m e^{2in\pi x}$, formalmente



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$\begin{aligned} c_m &= \sum_{-\infty}^{\infty} \langle c_k e^{2\pi i k x}, e^{2\pi i m x} \rangle \\ &= \langle f, e^{2\pi i m x} \rangle \\ &= \hat{f}(m), \end{aligned}$$

OU SEJA, OS COEFICIENTES INTERESSANTES
SÃO $c_m = \hat{f}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$. DEFINIMOS

$$S_m f(x) = \sum_{-m}^m \hat{f}(k) e^{-2\pi i k x}.$$

PERCA SABER SE HAVERÁ CONVERGÊNCIA,
E SIM, QUAL CONVERGÊNCIA, OU SE
SIMPLEMENTE O LIMITE REPRESENTARÁ f
EM ALGUM SENTIDO.

CONSIDEREMOS $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ E UMA PARTIÇÃO
 $P = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ DE $[0,1]$ E DEFINIMOS

$$V_P f[0,1] = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

QUANDO O SUPREMO SOBRE AS PARTIÇÕES DE
 $[0,1]$ DE $V_P f[0,1]$ É FINITO DIZEMOS QUE
 f É UMA FUNÇÃO LIMITADA. A INTERPRETA-



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

É BASICAMENTE QUE O COMPRIMENTO DO
SEU GRÁFICO É FINITO. FUNÇÕES LIPSCHITZ
SÃO EXEMPLOS CLÁSSICOS DE FUNÇÃO DE
VARIACÃO LIDA. EM PARTICULAR, DERIVADA LIMITA-
DA. UMA FUNÇÃO $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ DE VARIA-
ÇÃO LIDA TEM A REPRESENTAÇÃO

$$f = g - h$$

ONDE g E h SÃO MONÓTONAS NÃO-
DECRESCENTE, TOMANDO

$$g(x) = \frac{\text{VAR } f[0,x] + f(x)}{2},$$
$$h(x) = \frac{-\text{VAR } f[0,x] - f(x)}{2}$$

EXTENSÃO NATURAL PARA $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$.

TEOREMA: SEJA $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DE VARIACÃO LIMITA-
DA E PERIÓDICA DE PERÍODO $T=1$. ENTÃO

$$S_n f(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

ONDE $f(x^+)$ E $f(x^-)$ DENOTAM OS LIMITES
LATERAIS.



DEMONSTRAÇÃO: temos

$$\begin{aligned} S_m f(x) &= \sum_{-m}^m \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{-m}^m \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i k y} dy e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{-m}^m \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i k (y-x)} dy \\ &= f * D_m(x) \end{aligned}$$

ONDE

$$\begin{aligned} D_m(x) &= \sum_{-m}^m e^{2\pi i k x} \\ &= e^{-2\pi i m x} + \dots + 1 + \dots + e^{2\pi i m x} \\ &= e^{-2\pi i m x} [1 + \dots + e^{4\pi i m x}] \\ &= e^{-2\pi i m x} \sum_{j=0}^{2m} (e^{2\pi i x})^j \end{aligned}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$= e^{\frac{-2\pi i m x}{2n+1}} \frac{e^{2\pi i n x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1}, \quad n = e^{2\pi i x}$$

$$= e^{-2\pi i m x} \frac{e^{(2n+1) \cdot 2\pi i x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \cdot \frac{e^{-\pi i x}}{e^{-\pi i x}}$$

$$= \frac{e^{(2m+1)\pi i x} - e^{-(2m+1)\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2i}$$

$$= \frac{\sin((2m+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

NOTE, EM PARTICULAR, QUE D_m É PAR.

AINDA,

$$\begin{aligned} \int_0^1 D_m(x) dx &= \int_0^1 \sum_{-m}^m e^{2\pi i m x} dx \\ &= 1 + \int_0^1 \sum_{\substack{-m \\ n \neq 0}}^m e^{2\pi i m x} dx \end{aligned}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$= 1 + \sum_{\substack{-m \\ m \neq 0}}^m \int_0^1 \cos(2\pi m x) + i \sin(2\pi m x) dx$$

$$= 1 + \sum_{\substack{-m \\ m \neq 0}}^m \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi m x) + i \sin(2\pi m x) dx$$

$$= 1,$$

POIS A SOMA DE DUPLA PARA $\int_{-1/2}^{1/2} \sin(2\pi m x) dx$ POR
Cosseno SER PAR, A OUTRA PARCELA É CÁLCULO
DIRETO.

• AFIRMAMOS DEPOIS QUE EXISTE $C > 0$
TAL QUE $\int_a^b D_N(x) dx \leq C$, QUALQUER QUE
SEJA $N \in [a, b] \subseteq [0, 1]$. OUA,

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

$$= \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\pi x}$$

$$+ \sin((2n+1)\pi x) \cdot \left[\frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} \right]$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

TEM-SE QUE

$$\frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} = \frac{O(x^3)}{O(x^2)} \rightarrow 0$$

PRÓXIMO A ZERO. E, O DISTÂNCIA DE ZERO OS
DEMÁS TERMOS SÃO UNIFORMEMENTE LI-
MITADOS, DONDE SEGE O RESULTADO.

COMPUTAMOS ENTÃO

$$S_N f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

ANTES, PODAMOS FAZER SIMPLIFICAÇÕES,
COMO POR EXEMPLO, TOMAR $x=0$, POIS
O CASO GERAL É UMA TRANSLAÇÃO. TAMBÉM,
VIA A DECOMPOSIÇÃO $f = g - h$ COM
 g E h MONÓTONAS NÃO DECRESCENTES,
PODEMOS SIMPLEMENTE ASSUMIR f MO-
NÓTONA NÃO - DECRESCENTE. ASSIM,

$$S_N f(0) = \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2}$$
$$=$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$= \sum_{-n}^n \hat{f}(k) - \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \int_{-1/2}^{1/2} D_n(x) dx$$

$\uparrow$
 D_n é PAR.

$$= \sum_{-n}^n \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i k x} dx - \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \int_{-1/2}^{1/2} D_n$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} f(x) D_n(x) dx - \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \int_{-1/2}^{1/2} D_n(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^0 (f(x) - f(0^-)) D_n(x) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{1/2} (f(x) - f(0^+)) D_n(x) dx$$

Pois

$$\int_{-1/2}^{1/2} D_n = 2 \int_0^{1/2} D_n = 2 \int_{-1/2}^0 D_n$$



PROVAREMOS ENTÃO QUE AMBAS AS PARCER-
LAS VÃO PARA ZERO COM $n \rightarrow +\infty$. AS COMPU-
TAÇÕES SÃO SEMELHANTES. CONSIDEREMOS A PRI-
MEIRA. DADO $\varepsilon > 0$ EXISTE $\delta > 0$ TAL
QUE $f(x) - f(\omega^+) < \varepsilon / C$ PARA TODO $0 < x < \delta$
ONDE C É DA DEFINIÇÃO $\int_a^b D_n < C$. ASSIM,

$$\int_0^{1/2} (f(x) - f(\omega^+)) D_n(x) dx$$

$$= \int_0^\delta (f(x) - f(\omega^+)) D_n dx + \int_\delta^{1/2} (f(x) - f(\omega^+)) D_n(x) dx$$

~~ALTERNATIVAMENTE~~

SUPONHAMOS POR UM MOMENTO A EXISTÊNCIA
DE UM $\eta > 0$, $0 < \eta < \delta$ TAL QUE

$$\int_0^\delta (f(x) - f(\omega^+)) D_n(x) dx = (f(\delta) - f(\omega^+)) \int_{-1/2}^{1/2} D_n$$

AI,

$$\int_0^\delta (f(x) - f(\omega^+)) D_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Para a outra parte, segue que

$$\int_{\delta}^{1/2} (f(x) - f(0^+)) D_n(x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathbb{1}_{[\delta, 1]} (f(x) - f(0^+)) \cdot \sin((2m+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} dx$$
$$:= g \in L^1([0, 1])$$

$$= \int_0^1 g(x) \frac{e^{(2m+1)\pi i x} - e^{-(2m+1)\pi i x}}{2i} dx$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^1 g(x) e^{(2m+1)\pi i x} dx - \frac{1}{2i} \int_0^1 g(x) e^{-(2m+1)\pi i x} dx$$

$$= \frac{1}{2i} \hat{g}(2m+1) - \frac{1}{2i} \hat{g}(-2m-1)$$

$$\rightarrow 0$$

pela Lema de Riemann-Lebesgue.



FALTA PROVAR A EXISTÊNCIA DO
TAL η , QUE É UMA VARIAÇÃO DO TE-
OREMA ~~DE~~ FUNDAMENTAL DO CÁLCULO. VAMOS
PROVAR QUE PARA ϕ CONTÍNUA E ψ
DERIVÁVEL, COM $\phi(a) = 0$ TEMOS

$$\int_a^b \phi(x) \psi(x) dx = \phi(b) \int_a^b \psi(x) dx,$$

PARA ALGUM $\eta > 0$. TOMEMOS

$$G(x) = \int_x^b \psi(t) dt$$

$$\Rightarrow G'(x) = -\psi(x)$$

AÍ,

$$\int_a^b \phi \psi dx = \int_a^b \phi G' dx$$

$$= \underbrace{\phi G \Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b G(x) d\phi = \int_a^b G(x) d\phi$$

COMO G É CONTÍNUA, TEM-SE QUE EXISTAM

m, M TAIS QUE $m \leq G(x) \leq M$, AÍ

$$m \phi(b) \leq \int_a^b G = M \phi(b)$$

$= K \phi(b)$



Logo, ~~o~~ existe $\eta \in (a, b)$ tal que $G(\eta) = k$,
ou ~~o~~ seja,

$$\begin{aligned}\int_a^b G(x) dx &= \int_a^b \phi \psi dx = G(\eta) \cdot \phi(b) \\ &= \phi(b) \int_a^b \psi(x) dx.\end{aligned}$$

Logo conclui a demonstração. 

Observemos que nos pontos de
continuidade de f tem-se que
haverá a convergência pontual da
série de Fourier.

Para a convergência uniforme
precisaremos de mais hipóteses. Vamos
supor f periódica, contínua e C^1
por partes. Assim, podemos computar

$$\hat{f}'(k) = \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i k x} dx$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$= \underbrace{\sum f(x) e^{-2\pi i k x} \Big|_{a_i}^{b_i}}_{= 0, \text{ INTERV. DE } f \text{ e' POR PARTES}} - \int_0^1 (2\pi i k) f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

$$= (2\pi i k) \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

$$= (2\pi i k) \hat{f}(k)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{\hat{f}'(k)}{2\pi i k} = o(1/k)$$

$k \neq 0$, pois $\hat{f}'(k)$ É LTBDA PELO LEMA DE RIEMANN - LEBESGUE.

Notemos que

$$\begin{aligned} |S_N f(x)| &\leq \sum_{-N}^N |\hat{f}(k) e^{2\pi i k x}| \\ &= \sum_{-N}^N |\hat{f}(k)| \end{aligned}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$= |\hat{f}(0)| + \sum_{\substack{-m \\ k \neq 0}}^m |\hat{f}(k)|$$

$$= |\hat{f}(0)| + \sum_{-m}^m \left| \frac{\hat{f}(k)}{2\pi i k} \right|$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \underbrace{\left(\sum_{-m}^m |\hat{f}(k)|^2 \right)^{1/2}}_{< \infty} \underbrace{\left(\sum_{-m}^m \frac{1}{|2\pi i k|^2} \right)^{1/2}}_{< \infty}$$

Logo, haverá a convergência uniforme pelo teste M- de Weierstrass.

Há uma série de representações considerando regularidade, onde pode-se integrar / derivar termo a termo. Também, pode-se generalizar trivialmente para período $T > 0$ qualquer.

Há aplicações em vários ambientes, sendo o mais comum, nas clássicas EDP's.



TEOREMA DE SEOKES

Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva de classe C^1 e $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial. Se $\gamma(t) \in \Omega, \forall t \in [a, b]$, define-se a integral de linha de F ao longo de γ por

$$\int_{\gamma} F \, d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt.$$

A construção da definição se dá no intuito de entender qual o trabalho que uma partícula faz ao percorrer de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ sobre γ na influência do campo F .

Estende-se naturalmente essa definição para caminhos γ que são C^1 por partes.

Começamos o estudo pelo Teorema de Green num caso simples:



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

TEOREMA: SEJA $F = (P, Q)$ um campo
de classe C^1 num aberto que con-
tém o retângulo $K = [a, b] \times [c, d]$. Se
 γ uma curva cuja imagem é a fronteira
de K , ~~orientada~~ orientada no sentido anti-horário.
Então

$$\int_{\gamma} (P, Q) d\gamma = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Com: vamos provar que

$$\int_{\gamma} P \vec{j} dx = - \iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Seja,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P \vec{j} dx &= \int_a^b (P(t, c), 0) (1, 0) dt \\ &\quad - \int_a^b (P(t+b-a, 0) (1, 0) dt \\ &= \int_a^b P(t, c) - P(t+b-a, 0) dt \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b P(x, d) - P(x, c) dx = - \int_{\gamma} P \vec{j} dx.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

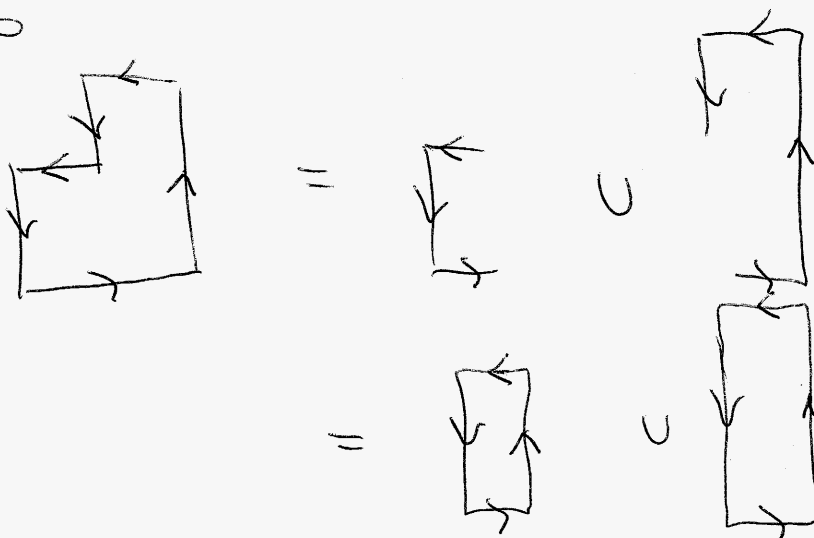
DA MESMA FORMA,

$$\int_{\gamma} Q \vec{j} \, dx = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} \, dA,$$

Q.E.D.

CONCLUINDO.

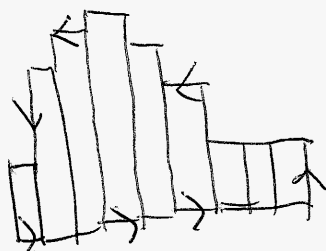
OBSERVAMOS QUE O TEOREMA VALE PARA RETÂNGULO, MAS CONSEGUIMOS ESTENDÊ-LO DE MANEIRA TRIVIAL PARA REGIÕES COMO



POIS OS SEGMENTOS ~~DE~~ INCLUIDOS SE CANCELAM. ESSA IDEIA SE ESTENDE, EM GERAL, PARA SOMAS DE RIEMANN,



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022



ONDE FAZ SENTIDO A ORIENTAÇÃO DO CON-
TORNHO ESCALAR SEMPRE NO SENTIDO ANTI-
HORÁRIO. O "LIMITE" DESSE RACIOCÍNIO É UM
TEOREMA MUITO CENTRAL DA ANÁLISE.

TEOREMA DE GREEN: SEJA K COMPACTO
DE $\mathbb{R}^2$ COM FRONTEIRA DE CONTEÚDO NÃO
E INTERIOR NÃO-VAZIO. SEJA $F = (P, Q)$
UM CAMPO DE CLASSE C^1 NUM ABERTO
CONTENDO K , ENTÃO, SE γ É A
CURVA FRONTEIRA DE K ORIENTADA
NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO, ENTÃO

$$\int_{\gamma} F \, dx = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

POR UMA SUPERFÍCIE PARAMETRIZADA
SEJA γ ENTÃO CONSIDEREMOS O MAPA
 $\gamma: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, COM K SENDO UM COM-

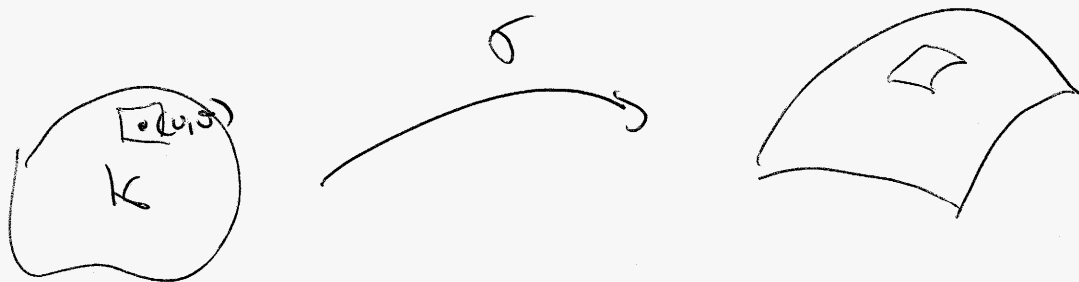


CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

PARO DE INTERIOR NÃO - VAZIO E
FRONTEIRA DE CONTÍNUO NÃO, TAMBÉM

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

É REGULAR DE CLASSE C^1 .



Assim, DADO UM RETÂNGULO $[u, u+du] \times [v, v+dv]$
 $\subseteq K$, TEMOS QUE UMA BOA APROXIMAÇÃO PARA
A ÁREA DE $\sigma([u, u+du] \times [v, v+dv])$ É DADA POR

$$|ds| = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) du \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) dv \right\|$$

$$= \left\| \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right)(u, v) \right\| \cdot du dv.$$

DEFINIMOS A ÁREA DESTA SUPERFÍCIE
POR

$$A = \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dA.$$



Se $f: Im(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função

escalar, definimos

$$\iint_{\sigma} f \, dS = \iint_K f(\sigma(u,v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du \, dv.$$

Um caso particular é quando consideramos um campo F definido num aberto contendo $Im(\sigma)$ produto com uma normal a ser definida:

Se σ é regular, podemos definir dois campos normais unitários

$$n_1 = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\|}$$

e

$$n_2 = -n_1.$$

Adescolhendo σ invertida, obtemos



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

GUIMOS APEREÇER QUE OS CAMPOS ESTÃO
BEM DEFINIDOS SOBRE σ , EM RISCO DE
CONFUSÃO.

FIXAMOS n EM UM DESSES CAMPOS E
TOMAMOS A FUNÇÃO ESCALAR

$$f = F \cdot n.$$

DEFINIMOS O FLUXO QUE F FAZ
SOBRE σ NA DIREÇÃO n POR

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S F \cdot n \, dS.$$

→ CURVA COMO NO
TEO. DE GREEN.

CONSIDERAMOS AQUI A CURVA DE FRON-
TEIRA DE K SENDO A IMAGEM DE γ
PARAMETRIZADA NO SENTIDO ANTI-HORÁ-
RIO E $n = n_1$. A CURVA $\Gamma = \sigma_0 \times$ É O
BORDE DA SUPERFÍCIE σ , ASSIM SENDO,
DEVE ORIENTADA POSITIVAMENTE.



Se $F = (P, Q, R)$ é um campo de classe C^1 num aberto contendo a $\text{Im}(\sigma)$ então:

TEOREMA DE STOKES: VALE QUE

$$\int_{\Gamma} F dx = \iint_S \text{ROT } \vec{F} \cdot \vec{dS},$$

com Γ de classe C^2 .

DEM: Denotamos $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, então

$$\gamma(t) = \sigma(\gamma(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))). \text{ Por}$$

um lado

$$\iint_S \text{ROT } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_K (R_x \cdot Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \cdot \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dA$$

$$= \iint_K \left[P_z \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} - P_y \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dA$$

+ DUAS PARCELAS PARA
 Q E R 'SEMELHANTES'



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

VAMOS PROVAR QUE

$$\int_{\gamma} P \vec{i} \, dx = \iint_K \left[P_z \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} - P_y \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,u)} \right] dA$$

TEMOS QUE

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P \vec{i} \, dx &= \int_a^b P(x(u,t), y(u,t), z(u,t), \theta(t)) \cdot \frac{1}{dt} \cdot \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{x(u(t), \theta(t))} dt \\ &= \int_a^b P(\dots) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(P(\dots) \frac{\partial x}{\partial u}, P(\dots) \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{du}{dt}, \frac{d\theta}{dt} \right) dt \\ &= \int_{\gamma} \left(P \frac{dx}{\partial u}, P \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) dx \\ &\stackrel{\text{GREEN}}{=} \iint_K \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(P \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dA \end{aligned}$$



Aqui, abrimos em todas as parcelas, observando que $P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Por $\gamma = (x, y, z)$ ser de classe C^2 , pode-se aplicar o teorema de SCHWARZ e concluir que

$$\int_{\Gamma} P \, d\gamma = \iint_K \left(P_z \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} - P_y \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du \, dv.$$

Realizando análogo para as demais parcelas.

Uma aplicação clássica do problema de Stokes é na interpretação do operador rotacional. Seja $F \in C^1$, então dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $|x - p| < \delta \Rightarrow |\text{ROT}(F)(x) - \text{ROT}(F)(p)| < \varepsilon$. Tomemos na bola $B(p, \delta)$ um pedaço S de plano com a normal $\vec{n}$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Aí, tem-se

$$\left\| \iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS - \text{ÁREA DE } S \cdot \text{rot } F(p) \cdot n \right\|$$

$$= \left\| \iint_S (\text{rot } F(x) - \text{rot } F(p)) \cdot n \, dS \right\|$$

$$\leq \varepsilon \cdot \text{ÁREA DE } S$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS}{\text{ÁREA DE } S} - \text{rot } F(p) \cdot n \right\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{\int_P F}{\text{ÁREA DE } S} \xrightarrow{|S| \rightarrow 0} \text{rot } F(p) \cdot n$$

ou seja, o rotacional de F em P pode ser interpretado como circulações por unidades de área.



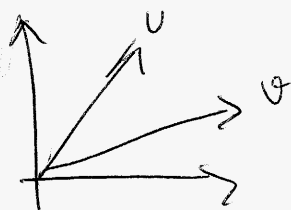
1) TEOREMA DE STOKES TEM UMA
FORMULAÇÃO BEM GERAL QUE ESCREVE AS
LEIS DA MESMA ABOZDADADAS. POR UMA
1-FORMA ENTENDEMO S UMA APLICAÇÃO
 $\omega \in (T_p \mathbb{R}^n)^*$, OU SEJA,

$$\omega(dx_1, \dots, dx_n) = a dx_1 + \dots + b dx_n.$$

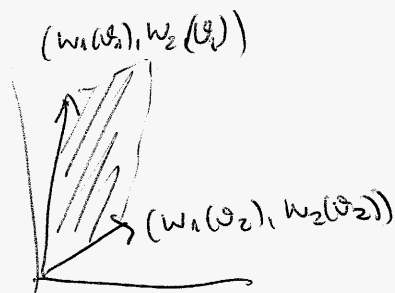
POR EXEMPLO, EM $n=2$, CONSIDEREMOS
DUAS 1-FORMA ω_1 E ω_2 . ASSOCIAMOS
 $\omega_1 \wedge \omega_2$ DA SEGUINTE MANEIRA

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \left(\underset{\substack{\vee \\ \in \mathbb{R}^2}}{v_1, v_2} \right) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_2(v_1) \\ \omega_1(v_2) & \omega_2(v_2) \end{pmatrix}$$

QUE TEM A INTERPRETAÇÃO DE SER UMA
ÁREA COM SINAL:



$\omega_1 \wedge \omega_2$
 $\rightarrow$





CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

No caso geral,

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_m = \det \begin{pmatrix} w_i(v_j) \\ (v_1, \dots, v_m) \end{pmatrix}.$$

A forma multilinear introduzida acima é
o que chamamos de uma m -forma. Essas

Nos permitem generalizar o conceito de
integrals como os que apresentamos an-
teriormente:

• Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ imagem de uma
aplicação diferenciável $\phi: D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,
 $m \leq n$. Definimos

$$\int_S w = \iint_D \dots \int w(\phi(w_1, \dots, w_m)) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial v_m} \right) dv$$

Definimos o espaço das m -formas
por $\wedge^m$.
~~Definimos o espaço das m -formas por $\wedge^m$.~~



INTRODUZIMOS AGORA A DERIVADA
EXTERIOR:

$$d: \Lambda^m \longrightarrow \Lambda^{m+1}$$
$$w \longmapsto dw = \sum_I \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$
$$= \sum_I a_i dx_I$$

ONDE A Soma É FEITA SOBRE TUPLAS $(i_1, \dots, i_m)$
COM $i_k \in \{1, \dots, m\}$. ALGUMAS PROPRIEDADES
ELEMENTARES:

$$(1) d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2$$

ONDE k É A ORDEM DE w_1 .

$$(2) d(dw) = d^2 w = 0.$$

Uma m -célula é a imagem de um
mapa diferenciável $\phi: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Uma
 m -célula é a combinação linear de m -
células, ONDE COLOCAREMOS UMA ORIENTAÇÃO
ESPECÍFICA.



O BORDO DE UMA m -CADERA É DE-
FINIDO POR

$$\sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \left[\phi(x_1, \dots, 1, \dots, x_m) - \phi(x_1, \dots, 0, \dots, x_m) \right]$$

ONDE DICHA SEQUE O SINAL DE ORIENTAÇÃO

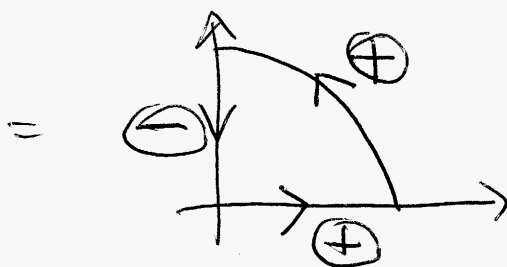
VAMOS ISSO COM UM EXEMPLO

Tomemos

$$\begin{aligned} \phi: [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto \left(r \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right), r \sin\left(\frac{\theta\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

O BORDO DE ϕD É

$$\begin{aligned} \partial D &= \phi(1, \theta) - \underbrace{\phi(0, \theta)}_{=0} + \phi(r, 0) - \phi(0, r) \\ &= \phi(1, \theta) - \phi(0, r) + \phi(r, 0) \end{aligned}$$





O BORDO DE UMA m -CÉLULA É A UNIÃO
DOS BORDOS DAS m -CÉLULAS DA COMBINAÇÃO
LINEAR.

NESSE SENTIDO, PROVA-SE O TEO-
REMA DE STOKES GERAL

$$\int_{\partial \sigma} w = \int_{\sigma} dw.$$

→ NA LITERATURA VÊ-SE RESULTADOS
ONDE ESSE TEOREMA FUNCIONA
PARA REGULARIDADES BAIXÍSSIMAS, COMO
APENAS HIPÓTESES SOBRE O PERÍMETRO.

• ALGUNS CASOS PARTICULARES:

(1) EM DIMENSÃO $n=1$ TEMOS O
TEOREMA FUNDAMENTAL DO
CÁLCULO.

(2) APLICADO A FORMA $a dx_2 \wedge dx_3 +$
 $b dx_1 \wedge dx_3 + c dx_2 \wedge dx_1$ OBTÊMOS



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

① IMPORTANTE TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS.

③ PARA $Pdx + Qdy$ OBTENEMOS O TEOREMA DE GREEN.

④ PARA $Pdx + Qdy + R dz$ OBTENEMOS O APRESENTADO TEOREMA DE STOKES

TODOS ESSES, DEVIDAMENTE CONTEXTUALIZADOS

→ TODOS ESSES TÊM APLICAÇÕES IMPORTANTES, EM PARTICULAR, O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA, FUNCIONANDO EM DIMENSÕES GERAIS, QUE NOS DÃO AS IDENTIDADES DE GREEN,



ÚTEIS PARA FORMULAÇÕES FRACAS DE PROBLEMAS EM EDP.