



1 Séries de Fourier: Seja $x \in H$, ~~onde~~ $\{u_\alpha, \alpha \in A\}$ base ortogonal, logo, pode ser associado uma função complexa $\hat{x}$ definido como:
onde $(x, u_\alpha) = \sum x \bar{u}_\alpha$.

$\hat{x}(n) = (x, u_n)$,
o qual é chamado de coeficientes de Fourier.

Seja ~~Definimos~~ $T \subseteq \mathbb{C}^3$ o círculo complexo. Definimos uma aplicação F em T e f uma função f em $\mathbb{R}^1$ tal que:
 $f(t) = F(e^{it})$.

Note que f definida dessa forma é periódica de período 2π .
De fato, ~~para~~ $f(t+2\pi) = F(e^{i(t+2\pi)}) = F(e^{it} \cdot e^{i2\pi}) = F(e^{it} \cdot 1) = F(e^{it}) = f(t)$.

Observe que $e^{it} = \cos t + i \sin t$, assim $e^{i2\pi} = 1$.

Além disso, pode se provar de forma simples que existe um isomorfismo entre f e F . Logo, f pode ser identificado como F .
 $f \equiv F$.

Definimos $L^p(T)$ o espaço de todas as classes de funções Lebesgue mensuráveis (de período 2π).
tal que a norma $\| \cdot \|_2$ é limitado, i.e.
 $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty$, para $1 < p < \infty$.

O fator $1/2\pi$ é só para ajudar com o fato de $\|f\|_p = 1$ para $f=1$.
pois se $f=1$ $\Rightarrow \|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} (2\pi) \right)^{1/p} = 1$.

Lembrando: Se μ é uma medida positiva e contável em A , $L^p(\mu)$ pode ser identificado como $L^p(A)$. Além disso se A é enumerável: L^p pode ser ~~identificado~~ identificado com ℓ^p . ~~Assim~~ Se $x \in \ell^p$ tal que $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$ temos que $\|x\|_p = \sum |\xi_i|^p < \infty$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Definimos o polinômio trigonométrico como: ~~polinômio~~

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{n=1}^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Defina $\{u_n = e^{int}\}$ uma base ortonormal de T .

$$\begin{aligned} \text{Pois. } (u_m, u_n) &= (e^{imt}, e^{int}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} \cdot \overline{e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo $\{u_n\}$ é ortonormal em T .

Seja $f \in L^2(T)$, definimos o coeficiente de Fourier ~~em~~ de f em $\mathbb{Z}$ como:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

e as somas parciais como: $S_N = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$.

lembrando a desigualdade de Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\hat{f}(n)} \hat{f}(m) dx = (f, g).$$

~~é~~ sabe-se que o lado ~~lado~~ esquerdo da desigualdade é absolutamente convergente.

Logo, pelo teorema de convergência dominada:

$$\lim \|S_N - f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |S_N - f|^2 \rightarrow 0.$$

[Handwritten mark]



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Assim, $S_N \rightarrow f$ em L^2 -norma,
Será que $S_N \rightarrow f$ para funções ~~contínuas~~ no espaço das funções contínuas?

Seja $C(T) = \{f : f \text{ contínua}\}$ e $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\}$.

Então, ~~para~~ Definimos: a soma parcial da série de Fourier:

como: $S_N(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(n) D_n(x-t) dt$.

onde $\hat{f}(n)$ são os coeficientes de Fourier de f e $D_n(x-t)$ é definido

como: $D_n(x-t) = \sum \frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin t/2}$

Para $x=0$: $S_N(f, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(n) D_n(-t) dt$.

Define $\Lambda_n \in C(T)$ tal que:

$\Lambda_n(f) = S_N(f, 0)$

com ~~$\|\Lambda_n\| = \sup_{|f| \leq 1} \|\Lambda_n f\|$~~ $\|\Lambda_n\| = \sup_{|f| \leq 1} \|\Lambda_n f\|$ para $|f| \leq 1$.

Assim,

$\|\Lambda_n\| \geq \|\Lambda_n f\| = |S_N(f, 0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(n) D_n(-t) dt \right|$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|D_n(-t)\|_1 dt$

afirmação: $\|D_n(-t)\|_1 \rightarrow \infty$:

De fato,

$\|D_n(-t)\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t}{\sin t/2} \right| dt$.

Desde que $|\sin x| \leq |x|$, temos $\frac{1}{x} < \frac{1}{|\sin x|}$. Logo,

$\|D_n(-t)\|_1 > \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})\pi t|}{|t|} dt =$

[Handwritten signature]



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

$$= \frac{4}{n} \sum \frac{1}{n} \rightarrow \infty. \quad (\text{série armônica}).$$

$$\text{Logo, } \|D_n(t)\|_1 \rightarrow \infty$$

$$\text{Define } g(x) = \begin{cases} 1, & D_n(t) \geq 0 \\ -1, & D_n(t) < 0. \end{cases}, \quad \exists f_i \cdot t_j \quad f_i \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g(x)$$

Logo,

$$\| \wedge f - f \|$$

Agora, vamos analisar a convergência de s_n no espaço $L^1(p)$.
Lembrando: $L^2(p) \subset L^1(p)$.

b) o espaço $C(T)$ é denso em $L^1(p)$.

c) Polinômios são densos em $C(T)$.

temos que para $f \in L^1(T)$, $\exists \varepsilon > 0$ t_j .

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon \quad \text{para } g \in C(T).$$

$$\|p - g\|_\infty < \varepsilon, \quad \text{para } p \text{ polinômios.}$$



Assim,

$$\|f - p\|_1 = \|f - g + g - p\|_1 < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

também,

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - p) e^{-int} dt \right| \leq \|f - p\|_1 \leq 2\varepsilon.$$

Portanto, pode-se concluir que se $f \in L^1(\mathbb{T})$.

temos que $\hat{f}(n) \rightarrow 0$ ou, os coeficientes de Fourier de f são 0.

[2] TEOREMA DE PERRON - FROBENIUS:

O teorema de PERRON - FROBENIUS é um teorema que garante a existência de raízes e autovetores especiais para matrizes não negativas.

Perron estudou para matrizes positivas em 1907 e Frobenius estendeu o estudo para matrizes não negativas em 1912.

Vamos começar analisando as propriedades do autovetor especial para matrizes positivas:

Para começar, diz-se que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é positiva se $a_{ij} > 0 \quad \forall i, j$. Notação: $A > 0$.

Sem perda de generalidade pode-se trabalhar para matrizes positivas normalizadas, i.e.

$$A > 0 \Leftrightarrow \rho(A) > 0$$

(Raio espectral de $A := \{\max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ é autovetor de } A\}\}$).

$$\bullet \text{ Se } \rho(A) = r \Rightarrow \rho(A/r) = 1$$

Chama-se (λ, v) autopar de A se $Av = \lambda v$.

Teorema 1: [Autopar positivo] Para $A: n \times n > 0$.

Então:

i) $\rho(A) \in \sigma(A)$, onde $\sigma(A) :=$ conjunto dos autovalores de A

ii) $|A|x| = \rho(A)|x|$ para $|x| > 0$.

Prova: (i) imediato.

(ii) Sem perda de generalidade vamos assumir que $|x| = 1$ com λ como autovalor de A .

Logo, $|x| = 1 \cdot |x| = |\lambda x| = |\lambda| |x| = |\lambda| = |A|x| \leq A|x|$

$$2 \geq |x| \leq A|x|.$$

Definimos $z := A|x|$. Denote $y = z - |x|$.

Suposição: $y \neq 0$.

Note que $z = A|x| > 0$ pois $A > 0$ e $|x| > 0$.

Além disso,

$Az > 0$ pois $A > 0$ e $z > 0$. Logo,

$$Az = A(y + |x|) = Ay + A|x| = Ay + z.$$

Teorema 2: ~~Para~~ Para $A: n \times n > 0$, tem-se que o raio espectral $\rho(A)$ é único. no círculo espectral, i.e. $\sigma(A)$ é simples

Prova: Consideremos: $|x| = 1$:

$|x| = 1 \cdot |x| = |\lambda x| = |\lambda| |x| = |\lambda| = |A|x| \leq A|x|$ (por teorema 1.)

$\Rightarrow \lambda = 1$ é autovalor de A .

Suponha que $\exists |\lambda| \neq 1$ $\neq 1$.



Ex 3: Para $A: n \times n > 0$, tem-se que $\sigma(A)$ é semi-simples
ie, multiplicidade algébrica de λ é igual a multiplicidade
geométrica desse λ autovalor de A .

Prova:

Pelo teorema anterior multiplicidade algébrica de $\lambda \in \mathbb{C}$.
Suponha que multiplicidade geométrica (o qual define a dimensão
do espaço $N(A - \lambda I)$) é derivado por $m-g(\lambda)$. $\rightarrow \sigma(A)$.
ie, ~~m-g(\lambda)~~ $m-g(\sigma(A)) = m > 1$

Logo, $\exists$ m vetores linearmente independentes. Sejam x, y vetores
da base de $N(A - \sigma(A)I)$, associados a $\sigma(A)$. Considere $N(A) = 1$:

logo, $|x| = A|x| \Rightarrow (|x|)_k = (A|x|)_k$ (a k -ésima componente)

ie, $(|x|)_k = \sum_j a_{kj} x_j$

Além disso, x é autovetor de A , ie, $x \sigma(A) = \sigma(A)x$.
 $\Rightarrow |x \sigma(A)| = |x| = |Ax|$. Assim, analisando a k -ésima

componente:

$$(|x|)_k = |Ax|_k = \left| \sum_j a_{kj} x_j \right|$$

Logo, $\left| \sum_j a_{kj} x_j \right| = \sum_j |a_{kj} x_j| = \sum_j |a_{kj}| |x_j|$ pois $a_{kj} > 0$ $\forall k, j$. (2)

Lembrando da desigualdade Triangular que a igualdade
Satisfeita se os vetores são linearmente dependentes.
ie, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ se $x = \alpha y$ para $\alpha \in \mathbb{R}$

Logo, De (1) pode se dizer: $a_{kj} x_j = \alpha_j x_1 \Rightarrow x_j = \frac{\alpha_j}{a_{kj}} x_1$

~~Assim~~ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(x_1, \alpha \left(1, \frac{\alpha_2}{a_{21}}, \frac{\alpha_3}{a_{31}}, \dots, \frac{\alpha_n}{a_{n1}} \right) \right)$

~~Logo, x é autovetor de A .~~



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

Denotando $p = (1, \frac{d_1}{a_{n1}}, \frac{d_2}{a_{n2}}, \dots, \frac{d_n}{a_{nn}})$, temos $x = x_1 p$.

Desde que x é auto vetor de A , tem-se que p também é autovetor de A , i.e.,

$$A p = A p \Rightarrow p = A p, \text{ o qual é chamado de autovetor da raiz } \lambda \text{ de } A \text{ para } r=1.$$

$$\|p\|_\infty = \max \{|p_i|\} \geq |p_i|. \text{ i.e., } \exists \text{ índice tal que } |p_i| = \|p\|_\infty. \quad (2)$$

Além disso, $\exists$ blocos de Jordan $J_{r,k}$ tal que $J = \begin{pmatrix} J_{r,1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r,k} \end{pmatrix}$

$$\text{tal que } J = P^{-1} A P.$$

$$\text{Logo } J^k = P^{-1} A^k P. \text{ Assim } \|J^k\|_\infty = \|P^{-1} A^k P\|_\infty \leq \|P^{-1}\|_\infty \|A^k\|_\infty \|P\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|A^k\|_\infty \geq \frac{\|J^k\|_\infty}{\|P^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty} \quad (3)$$

Como $\|J^k\|_\infty \rightarrow \infty$, temos que (3):
 $\|A^k\|_\infty \rightarrow \infty$

$$\text{Além disso, } \|p\|_\infty = \|A p\|_\infty = \left| \sum_j a_{r,j} p_j \right| \geq \left| \sum_j a_{r,j} (m_j p_j) \right| =$$



Seja (r, p) é autopor especial de A , r chamado a raiz de Perron
~~temos que~~ Sabe-se que $\sigma(A) = \sigma(A^T)$. (raiz espectral de
 A e A^T , respectivamente). Desde que $r = \sigma(A)$, ~~podem~~ $\exists y^T$ autovetor de
 A^T tq ~~podem~~ $y^T A = r y^T$

ie, (r, y) é autopor de A^T .

~~Sol~~

* Como calcular os autovalores especiais de A .?
temos o seguinte resultado: Seja (r, p) autopor de $A: n \times n > 0$
 $r = f(p)$ onde $f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x \in N}} \left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i} \right\}$ e $N = \{x \mid x \neq 0\}$.

Prova: Seja $\varepsilon = f(x)$. Logo $\varepsilon x \leq Ax$, $x \in N$

Assim; $\varepsilon y^T x \leq y^T A x = (y^T A) x = (r y^T) x = r (y^T x)$ com (r, y) autopor
do A^T .

Então, $(\varepsilon - r) y^T x \leq 0$. Logo, como y é autovetor de A , $y^T > 0$
e $x \geq 0$ temos que $y^T x > 0$. Então, $\varepsilon - r \leq 0$; ie, $\varepsilon \leq r$.

~~Por outro lado~~ para todo $x \in N$. Por outro lado, note que
para $x = p$. temos que ~~podem~~ $\frac{(Ap)_i}{p_i} \leq f(p) \Rightarrow \frac{(rp)_i}{p_i} \leq f(p)$
(vetor de A) $\Rightarrow r \leq f(p)$.

FAVOR NÃO ESCREVER NO VERSO!
NÃO ULTRAPASSAR A LINHA DA MARGEM!

Desde que $\varepsilon \leq r$ para todo $x \in N$, $\varepsilon = f(x)$ e $r \leq f(p)$, $\max_x \varepsilon = f(p)$
temos que $r = f(p)$: $f(p) \leq \varepsilon \leq r \leq f(p)$.



3) teorema Stokes: O teorema de ~~Stokes~~ relaciona o estudo da integral de superfície de um ~~campo~~ ^{campo vetorial} e a integral de linha desse campo vetorial sobre uma curva fechada, sobre certas condições.

Vamos começar ~~com~~ falando do teorema de Gauss (o qual é uma extensão do teorema Fundamental do Cálculo), ou chamado teorema da divergência:

$$\iint_R \operatorname{div} A = \int_0 A \cdot \vec{n} \, ds. \quad \text{onde } A \cdot \vec{n} \text{ é a componente normal do campo vetorial } A.$$

Se considerarmos $A = (a(x,y), b(x,y)) \in \mathbb{R}^2$.

temos: $\iint_R \frac{\partial}{\partial y}(a(x,y)) - \frac{\partial}{\partial x}(b(x,y)) \, dx \, dy = \int a(x,y) \hat{x} + b(x,y) \hat{y} \, ds$... (2)

onde $\vec{\eta} = (-\hat{y}, \hat{x})$ é o vetor normal ~~à~~.

Logo, para qual quer campo vetorial dado por $B = (a(x,y), b(x,y))$, sabe-se que o rotacional desse campo.

$$\operatorname{rot} B = \nabla \times B = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \right).$$

Note que $\frac{\partial}{\partial y} a(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} b(x,y)$ de (2) corresponde à terceira componente de $\operatorname{rot} B$, ie, $(\operatorname{rot} B)_z$.

Assim, relação (2) pode se reescrever como:

$$\iint_R (\operatorname{rot} B)_z \, dx \, dy = \int_C B \cdot d\vec{s}.$$

O qual é o teorema de Stokes, que será apresentado a continução, restrito ao plano xy .

Teorema: Seja S uma superfície orientada com fronteira ∂S . Considere uma curva fechada C de ∂S , com orienta



[assinatura]



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO - IM
EDITAL 377/2022

São positiva. Então.

$$\iint_S \text{rot}(F) \, dS = \oint_{\partial S} F \, dr.$$

Parametrizando ∂ em $r(t)$. temos que ~~$\oint_{\partial S}$~~ $\oint_{\partial S} F(r(t)) r'(t) \, dt$.

Assim, a integral de uma superfície orientável, pode ser vista como a integral ~~de ∂S~~ sobre uma curva fechada. É importante mencionar que, ~~segundo o teorema~~ Segundo o teorema, que qualquer duas superfícies que compartilhem a mesma curva fronteira, $\partial = \partial S_1 = \partial S_2 \Rightarrow$

$$\iint_{S_1} \text{rot}(F) \, dS = \iint_{S_2} \text{rot}(F) \, dS.$$

Seja uma forma diferencial de primeira ordem:

$$L = f_x dx + f_y dy + f_z dz.$$

Logo, derivando. temos:

$$dL =$$